FINANZAS PÚBLICAS
Trabajo Práctico Domiciliario N°1

Juan Guillermo Muñoz Delgado

Exercise 1

(a) El individuo A resuelve el siguiente problema:

$$\max_{x_{2A},x_{3A}} \quad x_{2A}x_{3A} \qquad \text{s.a.} \quad p_2x_{2A} + p_3x_{3A} = w$$

Cuyas condiciones de primer orden se reducen a:

$$\begin{aligned} &(x_{2A}) \quad x_{3A} = \lambda P_2 \\ &(x_{3A}) \quad x_{2A} = \lambda P_3 \\ &(\lambda) \quad p_2x_{2A} + p_3x_{3A} = w \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones encontramos las demandas marshalianas por los distintos bienes y su respectiva función de utilidad indirecta:

$$x_{2A} = \frac{w_A}{2p_2} \qquad x_{3A} = \frac{w_A}{2p_3} \qquad V_A(p,w) = \frac{w_A^2}{4p_2p_3}$$

Si bien los bienes que le generan utilidad al individuo B son distintos, el problema algebraico es el mismo, por lo que se puede asegurar que:

$$x_{1B} = \frac{w_B}{2p_1} \qquad x_{3B} = \frac{w_B}{2p_3} \qquad V_B(p,w) = \frac{w_B^2}{4p_1p_3}$$

(b) El planificador maximiza su utilidad de bienestar social sujeta a una restricción de factibilidad donde la suma de las dotaciones w no puede ser mayor a lo que efectivamente tiene para repartir. De esta manera podemos representar el problema algebraicamente como:

$$\max_{w_A,w_B} \quad \frac{w_B^2}{4p_1p_3} + \frac{w_A^2}{4p_2p_3} \qquad \text{s.a.} \quad w_B + w_A = w$$

Planteando el lagrangiano se obtienen las siguiente condiciones de primer orden:

$$(w_A) \quad \frac{2W_A}{4P_2P_3} = \lambda$$

$$(w_B) \quad \frac{2W_B}{4P_1P_3} = \lambda$$

$$(\lambda) \quad w_B + w_A = w$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones encontramos la distribución óptima (en términos del planificador) de las dotaciones:

$$w_A = \frac{wp_2}{p_1 + p_2} \qquad w_B = \frac{wp_1}{p_1 + p_2}$$

(c) En este caso la función objetivo depende de cual de los individuos tiene una menor o mayor utilidad dadas las dotaciones iniciales. Como las funciones de utilidad indirecta solo dependen del ingreso propio y los precios de la economía, la solución óptima para el planificador va a ser la siguiente:

$$w_A = \begin{cases} w & \text{si} \quad V_A \leqslant V_B \\ 0 & \text{si} \quad V_A > V_B \end{cases} \qquad w_B = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad V_A \leqslant V_B \\ w & \text{si} \quad V_A > V_B \end{cases}$$

(d) Siguiendo el procedimiento del inciso b se encuentra que la distribución del ingreso no depende los precios de la economía y siempre es constante e igual entre los dos agentes, es decir:

$$w_A = \frac{w}{2} \qquad w_b = \frac{w}{2}$$

(e)

Exercise 2

(a) Dado que se está en presencia de costos medios decrecientes

$$c(q) = c\sqrt{q} \implies CME(q) = \frac{c}{\sqrt{q}}$$

$$\frac{\partial CME(q)}{\partial q} = -\frac{c}{2}\frac{1}{q^{\frac{3}{2}}} \leq 0$$

Los rendimientos del mercado serán crecientes a escala, desembocando un monopolio natural.

(b) El problema del monopolista se puede plantear como sigue

$$\max_q \quad \left(\frac{A}{q}\right)^{1/\varepsilon} q - cq^{1/2}$$

Tomando la condición de primer orden y despejando la cantidad elegida por el monopolista se encuentra el valor de equilibrio de q

$$A^{\frac{1}{\varepsilon}}\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\right)q^{-\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{c}{2}q^{-\frac{1}{2}}$$

$A^{\frac{1}{\varepsilon}}\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\right)\frac{2}{C} = q^{\frac{2-\epsilon}{2\epsilon}}$

$\left[A^{\frac{1}{\epsilon}}\left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon}\right)\frac{2}{c}\right]^{\frac{2\epsilon}{2-\epsilon}} = q$

De donde podemos concluir que ε debe ser mayor que uno para que las cantidades sean positivas. No obstante, también necesita ser estrictamente menor que 2 para que los beneficios sean positivos y el monopolista tenga incentivos a operar el mercado

$$A^{\frac{1}{\varepsilon}} q^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \geqslant c q^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{A^{\frac{1}{\epsilon}}}{c} \geqslant \left[\left(A^{\frac{1}{\epsilon}}\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\right)\frac{2}{c}\right)^{\frac{2\varepsilon}{2-\varepsilon}}\right]^{\frac{2-\varepsilon}{2\varepsilon}}$$

$$\frac{1}{2} \geqslant \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}$$

$$2 \geqslant \epsilon$$

(c)

- Si se fuerza al monopolista a vender cantidades para que el precio sea igual al costo marginal se obtiene el siguiente resultado:

  $$\left(\frac{A}{q}\right)^{\frac{1}{\epsilon}} = \frac{c}{2} q^{-\frac{1}{2}}$$

  $$\left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{2} q^{-\frac{1}{2}}$$

  $$q = 1$$

- Si es obligado a operar a beneficios nulos elige un $q = 1/2^6$

  $$\frac{1}{q^{\frac{2}{3}}} q = 2q^{\frac{1}{2}}$$

  $$\frac{1}{2} = q^{\frac{1}{6}}$$

  $$\frac{1}{2^6} = q$$

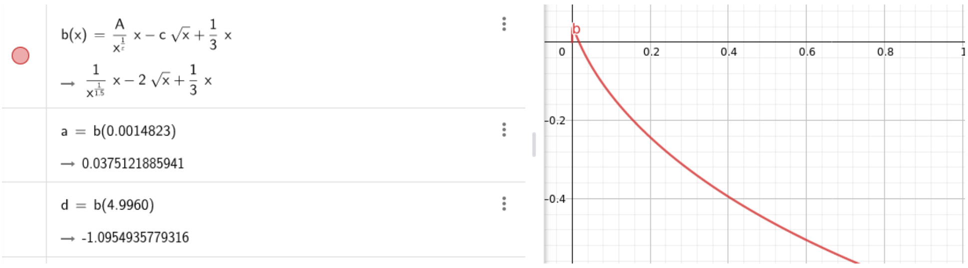
- En el caso en el que se le otorga un subsidio por provisión se tiene que resolver el problema de maximización teniendo en cuenta el mismo. De esta forma, la función objetivo será:

  $$\pi^M = \frac{A}{q^{\frac{1}{\varepsilon}}} q - c q^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} q$$

  La condición de primer orden para el problema planteado es:

  $$\frac{1}{3} q^{-\frac{2}{3}} - q^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} = 0$$

  De donde se obtienen dos valores posibles para la cantidad: $q = 0.0014823$ y $q = 4.9960$. Dada la forma de la función de beneficios, el monopolista elige la primera opción, ya que la segunda le otorga rendimientos negativos.



(d) Lo eficiente socialmente para el mercado bajo costos medios decrecientes es elegir el precio igual al costo marginal como lo hicimos en el primter item del inciso anterior. Es lo que Tresch denomina condición First Best. No obstante, en este modelo el gobierno debería hacerse cargo del monopolio a perdida asumiendo que ningún privado trabaja por rendimientos negativos. Otra posibilidad sería elegir el subsidio de manera estratégica para conseguir que el monopolista privado produzca la cantidad eficiente $q = 1$, sin embargo, esto tiene el problema de que el gobierno estaría enfrentando un déficit que en el modelo no está contemplado como se financia.

Exercise 3

(a) Cada unidad volcada al mercado produce costos mayores para todos los productores. Por esto podemos afirmar que la externalidad propuesta por el ejercicio es negativa. Cada productor al resolver su problema de maximización afecta los beneficios de los demás participantes del mercado.

(b) Cada firma j resuelve el problema:

$$\max_{q_j} \quad pq_j - \left(q_j + \sum_{i\neq j} q_i\right)^{\alpha} q_j^{\beta}$$

Con condición de primer orden:

$$P = \alpha\left(q_j + \sum_{i\neq j} q_i\right)^{\alpha-1} q_j^{\beta} + \left(q_j + \sum_{i\neq j} q_i\right)^{\alpha} \beta q_j^{\beta-1}$$

Luego, imponiendo simetría: $q_j = q_i = q \quad \forall j \neq i$ Se calcula el q óptimo para cada firma:

$$p = \alpha(Jq)^{\alpha-1}q^{\beta} + (Jq)^{\alpha}\beta q^{\beta-1}$$

$$P = \alpha J^{\alpha-1} \cdot q^{\alpha+\beta-1} + J^{\alpha} q^{\alpha+\beta-1}\beta$$

$$p = q^{\alpha+\beta-1}\left(\alpha J^{\alpha-1} + J^{\alpha}\beta\right)$$

$$\left(\frac{p}{\alpha J^{\alpha-1} + J^{\alpha}\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}} = q$$

(c)
- Con las firmas fusionadas, la función de costos total se reduce a:

$$C(Q) = Q^{\alpha}\left(\frac{Q}{J}\right)^{\beta}$$

- La firma tomadora de precios resuelve su problema igualando el precio a su costo marginal:

$$p = (\alpha + \beta)Q^{\alpha+\beta-1}J^{-\beta} \implies \left(\frac{pJ^{\beta}}{\alpha + \beta}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}} = Q$$

- Manteniendo los supuesto sobre los parámetros y la simetría del problema la solución es única. La empresa recibe información del mercado vía precios y siempre y dados sus parámetros tecnológicos puede computar una cantidad agregada única.

- La oferta del bien en el mercado centralizado es siempre mayor a la oferta bajo firmas atomizadas:

$$J\left(\frac{p}{J^{\alpha}(\alpha J^{-1} + \beta)}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \leqslant \left(\frac{p}{\alpha + \beta}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}} J^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}}$$

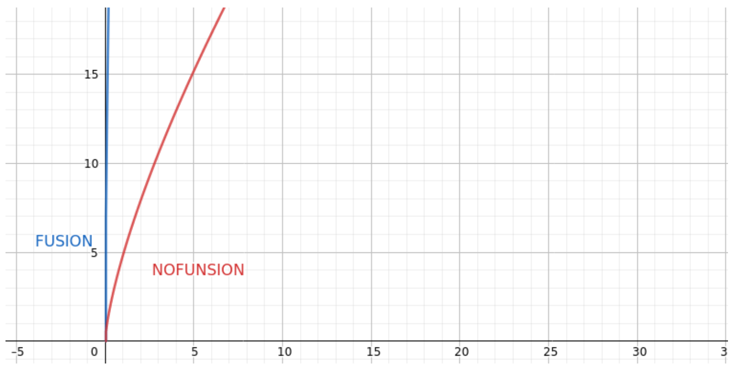
$$\frac{J^{\frac{\beta-1}{\alpha+\beta-1}}}{J^{\frac{\beta}{\beta+\alpha-1}}}\left(\frac{p}{\alpha J^{-1} + \beta}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \leqslant \left(\frac{p}{\alpha + \beta}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}$$

$$\frac{p}{\alpha + JB} \leqslant \frac{p}{\alpha + \beta}$$

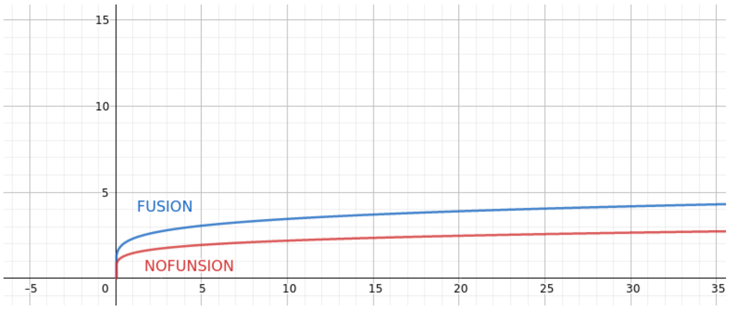
$$\alpha + \beta \leqslant \alpha + J\beta$$

$$1 \leqslant J$$

- Los productores internalizan todas las implicaciones de la función de costos al momento de fusionarse. Es por esto que para valores bajos de α (como por ejemplo $\alpha = 0.7$), que indican que la externalidad no tiene demasiado peso sobre la función de costos, la firma fusionada produce mucho más que el total de las firmas si estuvieran en competencia como en el siguiente gráfico con las cantidades en función de los precios:



Para valores altos de α (como por ejemplo $\alpha = 5$), que indican que los costos de producción se ven altamente afectados por la producción agregada, el producto en función de los precios toma la siguiente forma:



Exercise 4

(a) Dada la densidad del ingreso podemos computar su media:

$\mu(\alpha) = \int_0^{\frac{1}{2}} y(2\alpha)dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 2(1-\alpha)ydy \implies \mu(\alpha) = \frac{(2-\alpha)}{4}$

Con esto en mente sabemos que el bien público es provisto bajo la regla:

$G(\alpha) = (\sum_i y_i \tau)\frac{1}{1} \implies G(\alpha) = \tau \frac{(2-\alpha)}{4}$

(b) Al incorporar la regla de decisión del gobernador los agentes resuelven el siguiente problema:

$$\max_{x_i} \quad x_i + \log G \qquad \text{s.a.} \quad x_i = y_i(1-\tau)) = y_i\left(1 - \frac{G4}{2-\alpha}\right)$$

Con condición de primer orden:

$\dfrac{-4y_i}{2-\alpha} + \frac{1}{G} = 0 \implies G = \dfrac{2-\alpha}{4y_i}$

Como sucede normalmente, el nivel de bien público preferido por el agente disminuye en cuanto crece su ingreso. Dado que el individuo posee un ingreso mayor, puede destinarlo a comprar el bien privado y dejar a un lado sus preferencias por el bien público.

(c)
- Con esta función de densidad la media coincide con la mediana y, dado que se satisfacen todos los supuesto necesarios, podemos afirmar que la votación por mayoría desembocará en la regla del votante mediano, siendo este el individuo con ingresos iguales a un medio

  $\implies G = \dfrac{2-\alpha}{2}$

- El votante mediano tomará su decisión (y por tanto la de la sociedad) teniendo en cuenta su ingreso. α es una medida de cual desigual es esta economía. Valores muy extremos, cercanos al cero y al uno, producen mucha diferencia entre los ingresos, es por esto que el gráfico de la provisión del bien público en función de α tiene la siguiente forma:

Una extrema desigualdad a su favor lo inclina a pedir cero del bien público, mientras que si le juega en contra, requerirá mucho del mismo.

(d) La cantidad socialmente óptima para la provisión del bien viene dada por la regla de Samuelson: igualando la suma de las utilidades marginales por el bien público con la tasa marginal de sustitución entre el bien público y el privado (que en este caso es uno) por lo que:

$\sum_i \frac{1}{G} = 1 \implies G = 1$

Muy cercano a lo que elegiría el votante mediano si sus ingresos fueran mucho menores que los de sus pares. Lo socialemente óptimo es elegir este valor, sin embargo, los individuos al resolver sus propio problemas no tienen en cuenta que sus elecciones pueden ayudar al bienestar social.

Exercise 5

(a) El equilibrio de Nash inmediato es que cada uno de los agentes de la economía reporte su valoración real por el bien.

(b) El equilibrio encontrado en el item anterior es eficiente por que la suma de las valoraciones será igual al bien efectivamente provisto, como lo dicta la regla de Samuelson.

(c)

(d)

(e) La cuestión fundamental en la que este mecanismos flaquea es en pedir honestidad como condición necesaria para que el equilibrio sea eficiente sabiendo que existen incentivos a mentir. Clarke-Groves, por ejemplo, mueven el cobro de impuestos con el objetivo de que mentir siempre sea una estrategia débilmente dominada, sin embargo, tiene el problema de exigir cuasilinealidad en las preferencias (en realidad pedir que sus características para con el efecto renta/sustitución).