Riesgo, Incertidumbre y Finanzas

Trabajo Práctico 3: Solución

21 de agosto de 2020

1. *a*) **Medias:**

$$E(A) = \tfrac{1}{5} * [3 + 4 + 5 + 6 + 7] = \tfrac{25}{5} = 5$$
$$E(B) = \tfrac{1}{5} * [3 + 5 + 7 + 9 + 11] = \tfrac{35}{5} = 7$$

Varianzas:

$$Var(A) = E(A^2) - [E(A)]^2 = \frac{1}{5} * \left[3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2\right] - [5]^2 = 2$$
$$Var(B) = E(B^2) - [E(B)]^2 = \frac{1}{5} * \left[3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2\right] = 8$$

b) Como las medias son distintas, no habrá dominancia de segundo orden (común). La dominancia de primer orden la verificamos según la función de distribución acumulada de los retornos de cada activo. Mirando los retornos, vemos que la distribución B parece tener retornos mas altos. Chequeamos entonces dominancia estocástica de primer orden de B sobre A. **Recordamos: si vale dominancia estocástica de primer orden, entonces cualquier agente con funcion de utilidad creciente prefiere al activo que domina por sobre el otro. Por lo tanto, la condicion es que la funcion de**

utilidad sea creciente. Sabemos de la teórica que

$$B \underset{FSD}{\geq} A \iff \Pr(A \leq z) \geq \Pr(B \leq z) \forall z$$

Como $\Pr(A \leq z) = F_A(z)$ y lo mismo para B, calculamos las funciónes de distribución acumulada de los retornos. Obtenemos:

$$F_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 3 \\ \frac{1}{5} & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ \frac{2}{5} & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ \frac{3}{5} & \text{si } 5 \leq x < 6 \\ \frac{4}{5} & \text{si } 6 \leq x < 7 \\ 1 & \text{si } 7 \leq x \end{cases}$$

Para el activo A, y

$$F_B(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 3 \\ \frac{1}{5} & \text{si } 3 \leq x < 5 \\ \frac{2}{5} & \text{si } 5 \leq x < 7 \\ \frac{3}{5} & \text{si } 7 \leq x < 9 \\ \frac{4}{5} & \text{si } 9 \leq x < 11 \\ 1 & \text{si } 11 \leq x \end{cases}$$

Para el activo B

Es fácil comprobar que $F_B(x) \leq F_A(x)$ para todo x. Por lo tanto, cualquier individuo con función de utilidad creciente elegirá el activo B sobre el A.

Otra forma de verlo. Para esto, vamos a usar el siguente resultado que está en las notas de clase:

$$B \underset{FSD}{\geq} A \iff r_B = r_A + \vartheta \quad \vartheta \geq 0$$

Es decir, B domina estocásticamente de primer orden a A si y solo si, en distribución, el retorno de B es igual al de A mas una variable aleatoria positiva, ϑ. La intuición es clara: si eso pasa, entonces r_B me da por un lado lo mismo que r_A (el primer término de la suma), pero a eso se le agrega un 'plus' ϑ, que es siempre positivo o cero. Por lo tanto, es logico que si prefiero mas dinero a menos, siempre prefiera B sobre A.

Con ese resultado notamos que si podemos hallar ϑ que cumpla esas características, probamos la dominancia estocástica de primer orden. Mirando la tabla, vemos lo que pasa: ambas tienen 5 resultados posibles, pero los pay-off del activo B se van incrementando de 2 en 2, mientras que los del activo A lo hacen de 1 en 1. Por lo tanto, intutivamente, ϑ tendría que ser una variable aleatoria que tenga en cuenta esa diferencia. En efecto, si definimos a ϑ como:

$$\vartheta(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = 3 \\ 1 & \text{si } A = 4 \\ 2 & \text{si } A = 5 \\ 3 & \text{si } A = 6 \\ 4 & \text{si } A = 7 \\ 0 & \text{caso contario} \end{cases}$$

Notamos entonces que la distribución de $A+\vartheta(A)$ es la misma que la de B. Por ejemplo, la probilidad de que $A+\vartheta$ sea igual a 7, es igual a la probabilidad de que A sea igual a 5 (ya que, cuando $A = 5$, entonces sabemos que $\vartheta = 2$, por lo que la suma da 7). Y ese evento tiene probabilidad $\frac{1}{5}$, igual que bajo la distribución de B. Como $\vartheta \geq 0$, entonces probamos la domiancia estocástica de primer orden.

c) Si hay dominancia estocástica de primer orden, sabemos que el retorno del activo que domina (en este caso, r_b) se puede escribir como $r_b = r_a + \nu$, siendo ν una variable aleatoria que solo toma valores no negativos. Tomando esperanza, vemos que $E(r_b) = E(r_a) + E(\nu) \Rightarrow E(r_b) \geq E(r_a)$. Es importante notar que NO VALE LA VUELTA: $E(r_b) \geq E(r_a)$ NO implica FSD.

Por otro lado, si hubiera dominancia estocástica de segundo orden (en este ejemplo no la hay), entonces la distribución del retorno del activo dominado es un *mean preserving spread* del otro. Es decir, si $C \underset{SSD}{\geq} D \iff r_D = r_C + \varepsilon$, donde ε es una distribución con $E(\varepsilon|r_C) = 0$. Si bien parece similar a lo que usamos antes, es muy disinto: acá, la variable aleatoria que estamos sumando, ε, es algo que en promedio no te hace ganar mas (tiene esperanza condicional cero). Sin embargo, como es aleatorio, lo que hace es agregar incertidumbre. Por lo tanto, el retorno del activo dominado tiene la misma media, pero mayor varianza. Por lo tanto, $C \underset{SSD}{\geq} D \Rightarrow Var(C) \leq Var(D)$ y $E(C) = E(D)$. Pero no necesariamente vale la vuelta, tener menor varianza y misma media no garantiza la existencia de la variable aleatoria ε (para ciertas distribuciones especiales, sin embargo, esto si pasa. Pero no es un resultado general).

Para dominancia de segundo orden monotonica, ver las notas de clase.

2. EN LA COMPUTADORA

3. Repasamos brevemente el problema que se encuentra resuelto en las notas del curso.

   a) El problema implica resolver el siguiente lagrangeano:

$$\min_{\{\alpha,\lambda,\gamma\}} \mathcal{L} = \frac{1}{2}\alpha' V\alpha + \lambda(E(r_p) - \alpha' e) + \gamma(1 - \alpha' I).$$

   Las condiciones de primer orden (CPO) son

$$L_\alpha = V\alpha - \lambda e - \gamma I = 0, \tag{1}$$

$$L_\lambda = E(r_p) - \alpha' e = 0,$$

$$L_\gamma = 1 - \alpha' I = 0.$$

Despejando α_p de (1), obtenemos

$$\alpha = \lambda V^{-1} e + \gamma V^{-1} I. \tag{2}$$

Pre-multiplicando en ambos lados de (2) por e' se obtiene

$$E(r_p) = \lambda(e' V^{-1} e) + \gamma(e' V^{-1} I),$$

(ya que $E(r_p) = \alpha' e$), y pre-multiplicando a ambos lados (2) por I', se obtiene

$$1 = \lambda(I' V^{-1} e) + \gamma(I' V^{-1} I),$$

(ya que $1 = \alpha' I$) por lo que definiendo

$$A = I' V^{-1} e, \quad B = e' V^{-1} e, \quad C = I' V^{-1} I, \quad D = BC - A^2,$$

se obtiene (notar que $A = A'$ y que $D > 0$[1])

$$E(r_p) = \lambda B + \gamma A,$$

y

$$1 = \lambda A + \gamma C.$$

Finalmente, resolviendo este sistema se obtiene

$$\lambda = \frac{CE(r_p) - A}{D} \qquad \& \qquad \gamma = \frac{B - AE(r_p)}{D},$$

[1]Note que

$$\begin{aligned}
(Ae - BI)' V^{-1} (Ae - BI) &= (Ae' V^{-1} - BI' V^{-1})(Ae - BI) \\
&= Ae' V^{-1} Ae - BI' V^{-1} Ae - Ae' V^{-1} BI + BI' V^{-1} BI \\
&= B(BC - A^2) \\
&= BD
\end{aligned}$$

y dado que V es definida positiva B y D son ambas positivas.

donde luego, reemplazando a λ y a γ en la ecuación (2), se obtiene

$$\alpha_p = \frac{CE(r_p) - A}{D} V^{-1} e + \frac{B - AE(r_p)}{D} V^{-1} I, \tag{3}$$

y reagrupando obtenemos

$$\alpha_p = \overbrace{\frac{1}{D}(B(V^{-1}I) - A(V^{-1}e))}^{=g} + \overbrace{\frac{1}{D}(C(V^{-1}e) - A(V^{-1}I))}^{=h} E(r_p).$$

Por último se encuentra que el único set de pesos para formar el portafolio frontera, dada una esperanza $E(r_p)$ es

$$\alpha_p = g + hE(r_p). \tag{4}$$

b) Ahora queremos ver que si los retornos son *iid* es optimo asignarle el mismo peso a cada activo en el portafolio. Antes que nada, marcamos que no se cumple que los retornos de los activos sean difierentes, por lo que no podremos obtener cualquier $E(r_p)$ como en el caso anterior. Lo que haremos sera pensar solo el caso donde la esperanza del portafolio a formar sea igual a la esperanza de los retornos.

Notarmos que bajo esta estructura de los retornos vale que la matriz de varianzas y covarianzas es:

$$V = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma^2 \end{bmatrix},$$

luego

$$\begin{aligned} V\alpha &= \begin{bmatrix} \alpha_1 \sigma^2 \\ \alpha_2 \sigma^2 \\ \vdots \\ \alpha_k \sigma^2 \end{bmatrix} \\ &= \alpha \sigma^2. \end{aligned}$$

Denominemos $E(r)$ al retornos esperado de cualquier activo, que como estan identicamente distribuidos es el mimso para todos. Luego:

$$e = E(r)I.$$

Finalmente, usando estas ultimas dos expresiones, podemos reescribir la CPO en (1) como (recordar que λ y γ son escalares):

$$\alpha\sigma^2 - (\lambda E(r) + \gamma)\, I = 0,$$

despejando para α

$$\alpha = \frac{\lambda E(r) + \gamma}{\sigma^2} I. \tag{5}$$

Notar que (5) son k ecuaciones todas identicas, por lo que debe valer que:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = \alpha^*.$$

Luego, utilizando que las sumas de los pesos debe ser 1:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha^* = 1,$$

entonces

$$\alpha^* = \frac{1}{k}.$$

La intuición del resultado es la siguiente: el problema del agente es minimizar la varianza dada una media. Dado que todos los activos tienen la misma media, esa es la unica media que podrían obtener del portafolio. Ahora bien, notemos lo siguiente. Supongamos que solo hay dos activos. Si invertimos todo en uno de ellos, la varianza del retorno es σ^2. Ahora, si dividimos la inversión mitad y mitad, la varianza es:

$$Var(\frac{1}{2}r_1 + \frac{1}{2}r_2) = (\frac{1}{2})^2\sigma_1^2 + (\frac{1}{2})^2\sigma_1^2\sigma_2^2 + 2\frac{1}{2}\frac{1}{2}cov(r_1, r_2)$$

Ahora bien, como los retornos son iid, la covarianza es cero y las varianzas son iguales. Notar que siempre que la covarianza sea cero, la varianza de la suma es la suma de las varianzas. Entonces nos queda:

$$Var(\frac{1}{2}r_1 + \frac{1}{2}r_2) = \frac{1}{4}\sigma^2 + \frac{1}{4}\sigma^2 = \frac{1}{2}\sigma^2$$

Es decir, **la varianza se dividio por dos**. Esto ocurre por las propiedades de la varianza: el numero que multiplica a los r sale elevado al cuadrado. Si en vez de tener 2 tuviesemos N activos iid, obtenemos:

$$\begin{aligned} Var(\frac{1}{N}r_1 + \cdots + \frac{1}{N}r_N) &= \underbrace{(\frac{1}{N})^2\sigma^2 + \cdots + (\frac{1}{N})^2\sigma^2}_{\text{N veces}} \\ &= N(\frac{1}{N})^2\sigma^2 = \frac{1}{N}\sigma^2 \end{aligned}$$

Al repartir la riqueza en N activos iid, la varianza se divide por N, esto nuevamente es una consecuencia de las propiedades de la varianza: cuando reparto la riqueza en N activos, ahora voy a tener que sumar N terminos. Pero cada uno esta multiplicado por $\frac{1}{N^2}$, por lo que al final del día la varianza termina siendo menor [2]. **Esto se conoce como diversifiación "naive"**: pongo partes iguales en cada activo. Vemos que es óptimo si y solo si los retornos son iid.

4. Si los retornos NO son iid, en particular, si las covarianzas no son cero, entonces no es óptimo poner lo mismo en cada activo. Para ver por que, volvamos al caso de dos activos. Pensemos que tienen la misma varianza pero ahora que la covarianza es positiva. Entonces, si ponemos la mitad en cada uno:

$$Var(\frac{1}{2}r_1 + \frac{1}{2}r_2) = (\frac{1}{2})^2\sigma_1^2 + (\frac{1}{2})^2\sigma_1^2\sigma_2^2 + 2\frac{1}{2}\frac{1}{2}cov(r_1, r_2) \quad \frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{1}{2}cov(r_1, r_2) > \frac{1}{2}\sigma^2$$

Por lo tanto, si dos activos tienen covarianza positiva, la varianza de tenerlos a ambos es mayor que si la covarianza fuera cero. La

[2]EXTRA para el que le interese: así es como se prueba la Ley de los grandes Numeros para variables aleatorias iid. Si tomamos $N \to \infty$ la varianza tiende a cero, la media es siempre la misma, entonces ese "promedio" de retornos converge al promedio verdadero ya que la varianza se va a cero

intuición de esto es simple: si tienen covarianza positiva, en promedio a los dos les va de la misma forma: si al 1 le va bien, al 2 tambien, y lo mismo si les va mal. Por lo tanto, hay mayor varianza que si las covarianzas fueran nulas, ya que en promedio gano con ambos o pierdo con ambos. Notar, sin embargo, que como $cov(r_1, r_2) \leq \sigma^2$, la varianza de estar diversificado es menor a la de poner todo en un mismo activo. Pero la ganancia en terminos de menor riesgo es menos que antes.

Por otro lado, si la covarianza fuera negativa, tendriamos que

$$Var(\frac{1}{2}r_1 + \frac{1}{2}r_2) = \frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{1}{2}cov(r_1, r_2) < \frac{1}{2}\sigma^2$$

En este caso, **la varianza se achica**. La intuicion es la siguiente: en promedio, a los dos activos les va distinto: cuando uno sube el otro baja. Esto en cierta forma me esta dando un seguro: si a uno de los activos le va mal, entonces en promedio al otro le va bien. Por lo tanto, mi perdida total va a ser menor. Esto es conceptualmente muy importante: para tener cobertura de posibles perdidas, una cartera de inversión puede tener activos con covarianzas negativas (o, si las covarianzas son positivas, ir long en uno y short en el otro) de forma de reducir la varianza.