Forwards & Futures

1 Introduccion

Un *forward* o *contrato a término* es un contrato que consiste en una arreglo para vender o comprar un activo en un futuro estipulado y a un precio fijado al tiempo de la firma de dicho contrato. Las partes tienen la *obligación* de comprar o vender el activo (a diferencia de los contratos de opciones). El activo puede ser una commodity, un Stock de renta fija o Stock de riesgo. La característica fundamental de este contrato es que al momento de la firma del mismo, no hay erogacion monetaria; el pago pactado se efectúa sólo en el momento de la cancelación del mismo.

Un *future* o *contrato a futuro* es un contrato similar, pero con la salvedad de que dichos intrumentos son comerciados a través de un exchange house que fija ciertas condiciones sobre el contrato. La mayor diferencia con respecto a los forwards es que para los futuros las ganancia o pérdidas se realizan día a día como diferencia de cotización entre el precio pactado y el presente. Por lo tanto dicho importe es pagado cada día por una parte hacia la otra donde las pérdidas o ganancias se pueden ir acumulando en el tiempo.

Estos contratos existen por dos razones fundamentales: especulación y Hedging. Los contratos forwards especulativos son generalmente riesgosos y se realizan en posiciones no cubiertas (por ejemplo, compro dolares a futuro pensando que van a devaluar). La segunda razón tiene un objetivo opuesto, uno entra en estos contratos para eliminar la incertidumbre asociada a las fluctuaciones de los precios (por ejemplo, una empresa sabe que recibirá un pago en dólares en 3 meses, y no quiere asumir el riesgo por las fluctuaciones de la moneda, por lo que vende forwards o un futuro de dólares a 3 meses).

Estos contratos tienen 2 partes: una de las partes toma un posicion *long* y se compromete a comprar el underlying, mientras que la otra parte toma una posicion *short* y se compromete a vender el underlying. Ambas partes acuerdan en la fecha futura que se comercia el activo y en el precio del mismo (el **delivery price o precio de entrega).**

Definamos a S_t como el precio spot a tiempo t del activo subyacente al contrato que estamos considereando, y ${}_tF_T$ como el precio de entrega, que pactado a tiempo t nos obliga a comprar el activo en el momento T. En tiempo T el pago del forward es $S_T - {}_tF_T$.Si el precio del activo es mayor al precio de entrega, el pago será positivo por lo que el individuo que compra el forward realiza una ganancia; si el precio del activo es menor al precio de entrega, el individuo que compra el forward realiza una pérdida (si se vende el forward el razonamiento es análogo).

En la siguiente sección presentaremos las principales diferencias entre ambos tipos de contratos para luego pasar a analizar aspectos más concretos cómo, por ejemplo, qué precio debería tener cada tipo de contrato.

2 Diferencias entre forwards y futures

El siguiente cuadro resume las principales características de ambos tipos de contratos haciendo énfasis en sus diferencias:

Forwards	Futures
Negociados en *mercados extrabursátiles*	Negociados en *mercados bursátiles* (surgen de negociaciones totalmente públicas y transparentes en donde cualquier participante conoce los precios y las cantidades transadas)
Son contratos hechos *a medida* o *tailored maid* pues es el producto de la negociación bilateral entre dos partes.	Son contratos *estandarizados* en el sentido de que existen sólo determinadas fechas, lugares de entrega, bienes subyacentes y valores nominales sobre los que se puede comprar o vender un futuro. Uno no puede, como podría ser en el caso del forward, conseguir un futuro del bien que se le antoje, en la fecha que se le antoje, etc. salvo que dicho deseo coincida con los contratos que ya existen y se están comercializando en los mercados.
No existe *liquidación periódica de posiciones*	*Liquidación periódica de posiciones* o *marking to market*

Como comentario adicional a la tabla vale la pena señalar que cuando uno entra en un contrato a futuro o a término logra quitarse de encima el riesgo precio pero al costo de enfrentrar un riesgo de crédito. Por ejemplo, en el caso de tomar una posición compradora, uno enfrenta el riesgo de que en caso de suceder un gran aumento de precio del subyacente en cuestión, la contraparte se vea imposibilitada de proveer el bien en la fecha pactada (y viceversa para la posicíon vendedora). Es por esto que en el caso de los futuros que se comercializan en mercados bursátiles existe la liquidación periódica de posiciones. Cuando uno entra en un contrato a futuro, la sociedad de valores en general exige que se deposite lo que se conoce como *initial marging,* que no es más que un depósito de garantía que en general rondan, según la bolsa, entre un 5, 10 o 20% del precio pactado en el contrato. A medida que van pasando los días, la bolsa va acreditando o debitando según corresponda en las cuentas de ambas partes las ganancias o pérdidas obtenidas en función de si el precio del su contrato a aumentado o disminuido.

Por ejemplo, supongamos que tomamos una posición compradora hoy en un subayecente a un precio de \$100 para el 1ro de julio del próximo año y que mañana el precio del mismo contrato (i.e., para el 1ro de julio del año próximo) aumenta a 105, entonces la bolsa acreditará en nuestra cuenta (en la que habíamos depositado el *initial marging)* $5 y debitará la misma suma de la cuenta de la posición vendedora. Lógicamente, podría suceder que con el transcurso de los días alguna de las dos cuenta se quedase sin dinero (por ejemplo, si en nuestro caso el precio del contrato subiese mucho, la posición compradora se quedaría sin fondos para cumplir con la liquidación periódica) en cuyo caso la sociedad de bolsa exigirá volver a integrar la cuenta con mayores fondos. Dos comentarios valen la pena hacer. El primero es que la liquidación periódica de posiciones no se realiza por la diferencia entre el precio del contrato y el precio spot del subyacente como ya hemos mencionado. Esto se debe a que en caso de retener el contrato en cartera hasta la fecha de vencimiento del contrato, como en la misma el precio spot es igual al precio del contrato, en dicho caso no habría diferencia. El motivo por el que se lo hace así es que, por ejemplo en nuestro caso recién mencionado, la medida de la pérdida para la posición vendedora por el aumento de precio no es la diferencia entre el precio spot y el precio del contrato puesto que para salirse del contrato la contraparte debería tomar una posición compradora, también para el 1ro de julio, cristalizando la pérdida de $5 realizada al día siguiente de haber tomado la posición vendedora y esa es su verdadera pérdida.

Como se ve claramente con este ejemplo, los depósitos de garatías y la liquidación periódica de posiciones ayudan a controlar por el riesgo de crédito ya que cada parte está obligada, ante cada cambio en el precio del contrato, a demostrar que tiene capacidad para afrontar las pérdidas que se pudieran realizar. Con lo cual, si bien al entrar en este tipo de contratos mencionamos el hecho de que uno se quita el riesgo precio pero incorpora el riesgo de crédito, medidas como estas ayudan a controlar también a éste último.

Por último, también es interesante señalar que el segundo item de la tabla, el hecho de que los mercados bursátiles estén estandarizados se debe a que de esta forma, al haber una menor cantidad de contratos posibles, la gente se ve obligada a acercarse al contrato que más le convenga proveyendo así al mercado de una mayor liquidez. Piensen por ejemplo en el caso de dos personas que quieren contratos para días distintos de las primer semana de julio, martes y miércoles, del año próximo, e imagínense que el mercado ofrece un contrato muy similar pero para el lunes de esa semana; es muy probable que ambos terminen negociando ese contrato ya que está muy cercano a lo que idealmente harían. De esta forma, este tipo de contrato se negocia una mayor cantidad de veces. Es por este motivo que se dice que la estandarización le provee una mayor *liquidez* al mercado.

3 Precio de un Forward

Para ponerle precio a los contratos forwards, asumiremos que los siguientes postulados son verdaderos para al menos algunos participantes del mercado:

1. No existen costos de transacción.

2. Los agentes están sujetos a la miasma tasa impositiva para todas las ganancias que generen.

3. La tasa de interés activa (a la que se pide prestado) es igual a la tasa pasiva (a la que se presta).

4. Se aprovechan las oportunidades de arbitraje.

No requerimos que estos supuestos sean verdad para todos los participantes del mercado. Todo lo que se necesita es que sea verdad para unos pocos participantes en el mercado, como los grandes bancos de inversión.

Definamos algunas variables:

T : Tiempo hasta la fecha de entrega en un contrato forward o futuro (en años).

S_t : Precio del activo subyacente hoy.

${}_tF_T$: Precio del forward o futuro hoy.

r : Tasa de interés libre de riesgo anual, expresada en capitalización continua, para una inversión de madurez T.

La tasa de interés libre de riesgo, r, es en teoría la tasa a la que se presta o pide prestado cuando no hay riesgo crediticio, es decir, el préstamo se repaga con certeza. En general se considera la tasa de los bonos del tesoro de los Estados Unidos, esto es, la tasa a la que el gobierno de Estados Unidos pide prestado en su propia moneda. En la práctica, muchas insituciones financieras eligen r igual a la tasa LIBOR (London Interbank Offer Rate) en lugar de la tasa de los bonos del tesoro.

3.1 Precio de un Forward sobre un investment asset sin flujo de ingresos

La valuación de forwards más sencilla es aquellos cuyo activo subyacente no le da al propietario del activo ningún flujo de ingresos. Ejemplos de este tipo de activos son acciones que no pagan dividendos o bonos cero cupón.

Supongamos que tomamos una posición larga en un forward para comprar una acción que no paga dividendos en T años. El precio de la acción hoy es S_t y la tasa de interés libre de riesgo a tres meses es de r por año. Consideremos 2 casos extremos que resultarían en posibilidades de arbitraje.

Supongamos primero que el precio del forward es ${}_tF_T > S_t e^{r(T-t)}$. Un inversor podría pedir prestado S_t a la tasa libre de riesgo, comprar una acción e ir corto en un contrato forward para vender una acción en T años. Al final de los tres meses, el el inversor entrega la acción y recibe F_t. La suma del dinero requerido para repagar el préstamo es de

$$S_t e^{r(T-t)}$$

Siguiendo esta estrategia, el inversor hizo una ganancia segura de ${}_tF_T - S_t e^{r(T-t)}$ al final del período de T años por cada contrato firmado.

Supongamos ahora que el precio del forward es ${}_tF_T < S_te^{r(T-t)}$. Un inversor podría ir corto en la acción, invertir el dinero obtenido por la venta a r por año durante T años, y tomar una posición larga en un contrato forward a T años. El dinero invertido a r anual se convierten en

$$S_te^{r(T-t)}$$

Al final de los T años, el inversor paga ${}_tF_T$, recibe la acción, y la usa para cerrar su posición corta. La ganancia obtenida con certeza es de

$$S_te^{r(T-t)} -_t F_T > 0$$

en T años.

Habiendo visto las distintas oportunidades de arbitraje, bajo los supuestos considerados deberá ser cierto que el precio de forward es exactamente igual a $S_te^{r(T-t)}$, es decir:

$$ {}_tF_T = S_te^{r(T-t)} \tag{1}$$

Si no fuera posible adquirir una posición corta, el resultado no cambiaría. Lo que necesitamos para derivar el precio de un forward sobre un investment asset es que exista un número significativo de individuos que tienen el activo para inversión puramente (y, por definición, esto es verdad para un investement asset). Si el precio del forward es demasiado bajo, siempre habrá alguien que encuentre atractivo vender el activo y tomar una posición larga en el forward.

3.1.1 Propiedades estocasticas de un Forward sobre un investment asset

Encontramos que el precio de un forward sobre un investment asset que no tiene un flujo de ingresos es

$$ {}_tF_T = S_te^{r(T-t)}$$

Esta expresión es equivalente a

$$ {}_tF_T = E_t\left(S_T\right)$$

bajo la **medida neutral al riesgo**.

Por otro lado si evaluaramos el contrato a tiempo $t+1$ tendriamos que ${}_{t+1}F_T = E_{t+1}\left(S_T\right)$, donde es facil ver que por la Ley de expectativas Iteradas, tenemos que

$$ {}_tF_T = E_t\left(S_T\right) = E_t(E_{t+1}\left(S_T\right)) = E_t({}_{t+1}F_T).$$

Entonces, como por definición una innovación es $\eta_{t+1} = F_t - E_t(F_{t+1})$, podemos expresar el precio del forward como un random walk

$$ {}_{t+1}F_T =_t F_T + \eta_{t+1} \tag{2}$$

El cambio del precio de entrega de un período a otro se debe estrictamente a un cambio no esperado, puramente aleatorio. Note que esta demostración es válida independientemente del proceso que se asume que sigue S.

3.2 Forward sintético

Vamos a ver que nosotros podemos reproducir las caracteristicas de un contrato forward utilizando opciones. En particular tenemos que ver que el portafolio que replica al forward: (1) no tenga inversión inicial (un portafolio de arbitraje) a tiempo t; (2) este portafolio debe tener el mismo payoff a tiempo T.

1. Considere la siguiente relación de paridad entre un put y un call

   $$c_t(T) - p_t(T) = P(t, T_1) - Xe^{-r(T-t)}, T_1 > T$$

   y **elejimos el strike price** de manera que

   $$X = {}_tF_T.$$

   Pero por definición

   $${}_tF_T = e^{r(T-t)}P(t, T_1),$$

   de donde se infiere que **el portafolio que consiste en comprar un call y escribir un put sobre un activo de renta fija con strike price igual al forward no tiene inversión inicial.**

2. Ahora, a tiempo T, si $P(T, T_1) < X = {}_tF_T$, el individuo que mantiene el portafolio pierde el valor del put en el que fue corto (i.e., ${}_tF_T - P(T, T_1)$). En cambio si $P(T, T_1) > X =_t F_T$, el individuo que mantiene portafolio gana el valor del call en el que fue long (i.e., $P(T, T_1) - {}_tF_T$).

   Este **es el mismo payoff que obtendria simplemente comprando un forward** sobre $P(T, T_1)$.

3.3 Flujo de pagos conocido

En esta sección consderaremos un forward en un investment asset que paga un ingreso perfectamente predecible. Ejemplos de estos activos son acciones que pagan dividendos conocidos y bonos con cupón.

Consideremos un forward sobre un bono que paga cupón y cuyo precio hoy es de S_t. Supongamos que el forward tiene madurez de T_1 años y el bono vence en T_2 años, con $T_1 < T_2$, por lo que el forward es un contrato de compra de un bono de $T_2 - T_1$ años de madurez, dentro de T_1 años. Supongamos además que los cupones que paga el bono durante la vida del forward tienen un valor presente de I. Por último, asumiremos que las tasa de interés libre de riesgo es de r por año.

Supongamos primero que el precio del forward es ${}_tF_T > (S_t - I)\, e^{r(T_1-t)}$. Ahora analicemos la siguiente estrategia: un inversor pide prestado S_t para comprar el bono, y firma corto el forward.A tiempo T_1, el agente debe $S_te^{r(T_1-t)}$, pero recibió un pago en concepto de cupones de $Ie^{r(T_1-t)}$ en pesos del momento T_1. Por lo tanto, su ganancia segura es de

$${}_tF_T - \left(S_te^{r(T_1-t)} - Ie^{r(T_1-t)}\right) =_t F_T - (S_t - I)\, e^{r(T_{1-t})} > 0$$

Supongamos ahora que el precio del forward es de ${}_tF_T < (S_t - I)\, e^{r(T_1 -)}$. Un inversor que tiene el bono puede venderlo y entrar largo en el forward. Pone los S_t que recibe de la venta del bono en el banco a una tasa de r anual. Teniendo en cuenta que al vender el bono, se perdió de ganar $Ie^{r(T_1-t)}$ en pesos del momento T_1, el inversor gana

$$S_t e^{r(T_1-t)} - Ie^{r(T_1-t)} -_t F_T = (S_t - I)\, e^{r(T_1-t)} -_t F_T > 0$$

en forma segura y sin inversión inicial.

Por lo tanto, si no hay oportunidades de arbitrage, el precio del contrato debe ser exactamente igual a

$${}_tF_T = (S_t - I)\, e^{r(T_1-t)}$$

3.4 Yield conocida

Concideremos ahora la situación en la que el activo subyacente provee una yield conocida en lugar de un ingreso. Esto significa que el ingreso también es conocido, expresado como porcentaje del valor del activo en el momento en el que se paga ese monto. Sea q el promedio de la yield por año (medido como continuamente compuesto) durante la vida del forward. Se puede mostrar que

$${}_tF_T = S_t e^{(r-q)(T-t)}$$

3.5 Forwards y Futures de monedas

La moneda extranjera tiene la propiedad de que el inversor en monedas puede ganar una tasa de interés libre de riesgo vigente en el país extranjero durante el tiempo de poseción. Por ejemplo, el agente puede invertir la moneda en un bono denominado en esa moneda. Sea r_f el valor de la tasa libre de riesgo extranjera cuando el dinero es inveritido por un período T. Como antes, sea r la tasa doméstica (libre de riesgo). Llamaremos S_t al precio de una unidad de moneda extranjera en términos de moneda doméstica y a ${}_tF_T$ al futuro de dicho precio. La relación entre ${}_tF_T$ y S_t es

$${}_tF_T = S_t e^{(r-r_f)(T-t)}$$

o

$$(T-t)\,(r-r_f) = \ln\left(\frac{{}_tF_T}{S_t}\right) \cong \frac{{}_tF_T - S_t}{{}_tF_T}$$

En finanzas internacionales, esta relación se conoce como Covered Interest rate Parity, y es una condición de no arbitraje que se tiene que cumplir entre las tasas de interés de dos países. Para ver en forma clara por qué debe valer, supongamos que una persona posee hoy 1000 unidades de moneda extranjera y que quiere venderla para tener a tiempo T esas unidades convertidas a moneda doméstica. Entonces una forma de hacerlo es vender las unidades de moneda extranjera al precio de hoy y obtener $1000S_t$, y esta cantidad de moneda doméstica la colocamos a la tasa r para obtener a tiempo T $1000S_te^{r(T-t)}$. Otra posibilidad es mantener la moneda extranjera y venderla a tiempo T por medio del contrato a futuro, entonces tomaríamos una posición vendedora (de moneda extranjera) en un contrato a futuro para T a un precio de ${}_tF_T$. Hasta T pondríamos el dinero a la tasa r_f y llegaríamos a T con $1000e^{r_f(T-t)}$ cantidad que venderíamos por un total de $1000e_t^{r_f(T-t)}F_T$. Como de ambas formas terminamos en T con la moneda doméstica, ambas deben ser equivalentes:

$$\begin{aligned}1000S_te^{r(T-t)} &= 1000e_t^{r_f(T-t)}F_T \\ {}_tF_T &= S_te^{(r-r_f)(T-t)}\end{aligned}$$

Cuando la tasa de interés extranjera es mayor que la doméstica ($r_f > r$), esta ecuación muestra que ${}_tF_T$ es siempre menor que S_t y que ${}_tF_T$ decrece con el tiempo de maduración del contrato, T. Similarmente, cuando la tasa de interés doméstica es mayor que la extranjera ($r > r_f$), la ecuación dice que ${}_tF_T$ es siempre mayor que S_t y que ${}_tF_T$ crece con T.

3.6 Futuros en commodities

Primero consideremos el impacto de los costos de almacenamiento en el precio del future en investment assets, como el oro o la plata. Suponemos que estos activos no generan ningún flujo de ingresos.

En ausencia de costos de almacenamiento, vimos que el precio de un forward sobre un investment asset es

$${}_tF_T = S_te^{r(T-t)}$$

Los costos de almacenamiento pueden ser pensados como un ingreso negativo. Si U representa el valor presente de todos los costos de almacenamiento que deberán ser pagados durante la vida del futuro, entonces

$${}_tF_T = (S_t + U)\, e^{r(T-t)}$$

Si el costo de almacenamiento, en cambio, es proporcional al precio del commodity en cada momento del tiempo, puede ser pensado como una yield negativa. En este caso,

$${}_tF_T = S_te^{(r+u)(T-t)}$$

donde u son los costos de almacenamiento pot año como proporción del precio spot.

Para commodities que son consumption assets más que investment assets, el argumento de arbitraje para determinar el precio de un futuro debe ser revisado. Supongamos que en lugar de la ecuación anterior, tenemos

$${}_tF_T > (S_t + U)\, e^{r(T-t)}$$

Para aprovecharse de esta oportunidad, un inversor puede seguir la siguiente estrategia:

1. Pedir prestada una cantidad $S_t + U$ a la tasa libre de riesgo y usarla para comprar una unidad del commodity y pagar los costos de almacenamiento.

2. Ir short en un future en una unidad del commodity.

Esta estrategia lleva a una ganancia de ${}_tF_T - (S_t + U)\, e^{r(T-t)}$ a tiempo T, que es mayor que cero. Pero por no arbitraje esto no es posible.

Supongamos ahora que

$$ {}_tF_T < (S_t + U)\, e^{r(T-t)} $$

En el caso de un investment asset, como el oro o la plata, podríamos argumentar que muchos inversores tienen el commodity sólo por inversión. Cuando ven que el mercado tiene ${}_tF_T < (S_t + U)\, e^{r(T-t)}$, podrían hacer lo siguiente:

1. Vender el commodity, ahorrar los costos de almacenamiento e invertir lo obtenido a la tasa libre de riesgo.

2. Ir short en un forward en una unidad del commodity.

El resultado es una ganacia segura en T de $(S_t + U)\, e^{r(T-t)} -_t F_T$ relativo al resultado que hubieran obtenido de haberse quedado con el commodity desde el principio. Pero esto no puede pasar en equilibrio, por lo que ${}_tF_T = (S_t + U)\, e^{r(T-t)}$.

Para commodities que no se tienen como inversión, este argumento no puede ser usado. Los individuos y las firmas que tienen este commodity en inventario lo hacen porque tiene un valor de consumo, no por inversión. No quieren vender el commodity para comprar forwards porque los forwards no se pueden consumir. Por lo tanto, no hay nada que impida que ${}_tF_T < (S_t + U)\, e^{r(T-t)}$. Por lo tanto, en este caso,

$$ {}_tF_T \leq (S_t + U)\, e^{r(T-t)} $$

y si los costos de almacenamiento están como proporción del precio spot,

$$ {}_tF_T \leq S_t e^{(r+u)(T-t)} $$

3.7 Convenience Yield

Los beneficios de manetener un activo físico se conocen como la *convenience yield* que prevee el commodity. Si el costo de almacenamiento es conocido y tiene un valor presente de U, la convinience yield, y, se define como

$$ {}_tF_T e^{y(T-t)} = (S_t + U)\, e^{r(T-t)} $$

Si los costos de almacenamiento por unidad es una proporción constante u del precio spot, y se define como

$$ {}_tF_T e^{y(T-t)} = S_t e^{(r+u)(T-t)} $$

o

$$ {}_tF_T = S_t e^{(r+u-y)(T-t)} $$

La convinience yield simplemente mide cuánto más chico es el valor del forward respecto de lo que sería su precio si estuviesemos considerando un investment asset (para el cual la convinience yield debe ser cero para que no haya oportunidades de arbitraje). Refleja las expectativas del mercado respecto a la disponibilidad futura del commodity. Cuanto mayor es la probabilidad de desabastecimiento, mayor es la convinience yield. Es decir, grandes inventarios generan un valor bajo de y, mientras que inventarios pequeños generan un alto nivel de y.

3.8 Valuación de forwards

El valor de un forward al momento en el que se firma por primera vez es igual a cero. Más adelante en el tiempo, puede tener un precio positivo o negativo., Usando la notación introducida anteriormente, supongamos que ${}_tF_T$ es el precio del forward hoy de un contrato que se firmo algún tiempo atrás, la fecha de entrega es en T años, y r es la tasa de interés libre de riesgo de T años. Además definimos:

K : Precio de entrega del contrato

f_t : Valor de un contrato forward largo hoy

Un resultado general, aplicable a todos los contratos forwards (tanto en investment como consumption assets) es

$$ f_t = ({}_tF_T - K)\, e^{-r(T-t)} $$

Cuando el contrato es negociado por primera vez, $K =_t F_T$, y $f_t = 0$. Con el paso del tiempo, tanto el precio del forward, ${}_tF_T$, como el valor del forward, f_t, cambian.

Para ver por qué el valor del forward tiene esa forma, comparemosun contrato forward largo con precio de entrega ${}_tF_T$ con otro idéntico que tiene precio de entrega K. La diferencia entre ambos contratos es solamente la cantidad que será pagada por el activo subyacente al momento T. Bajo el primer contrato, esta cantidad es ${}_tF_T$; bajo el segundo, K. La diferencia de pagos al momento T es ${}_tF_T - K$, que se traduce en $({}_tF_T - K)\, e^{-r(T-t)}$ hoy. El contrato con precio de entrega ${}_tF_T$ es menos valioso que el que tiene precio de entrega K por $({}_tF_T - K)\, e^{-r(T-t)}$. El valor del contarto con precio de entrega igual a ${}_tF_T$ es, por definición, cero. Entonces, el valor de un contrato con precio de entrega igual a K es $({}_tF_T - K)\, e^{-r(T-t)}$.

La ecuación anterior muestra que podemos valuar un forward en un activo haciendo el supuesto de que el precio del activo en el momento de la madurez del forward es igual precio del forward ${}_tF_T$. Para ver esto, notemos que cuando se hace el supuesto, el forward provee un pago de ${}_tF_T - K$ a tiempo T (si se fue largo en el contrato). Esto tiene un valor presente de $({}_tF_T - K)\, e^{-r(T-t)}$, que es el valor de f_t en la ecuación anterior.

Usando la ecuación de f_t en conjunto con ${}_tF_T = S_t e^{r(T-t)}$ da la siguiente expresión para el valor de un forward sobre un investment asset que no da ingreso:

$$f_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

Similarmente, si la ecuación de f_t la combinamos con ${}_tF_T = (S_t - I)\, e^{r(T-t)}$ obtenemos la siguiente expresión para el valor de un forward en un investment asset que da un ingreso conocido con valor presente igual a I:

$$f_t = S_t - I - Ke^{-r(T-t)}$$

3.9 ¿Son los precios de un forward y de un future iguales?

Cuando la tasa libre de riesgo es constante e igual para para todas las madureces, el precio de un forward con determinada fecha de entrega y el de un future con misma fecha de entrega, son iguales. Cuando las tasas de interés varían impredeciblemente (como lo hacen en la realidad), los precios de los forwards y de los futures ya no son necesariamente iguales.

Las diferencias teóricas entre los precios de ambos contratos para contratos de sólo meses de duración son, en la mayoría de los casos, suficientemente chicas como para ser ignoradas. En la práctica, hay una serie de factores no reflejadas en modelos teóricos que pueden causar que los precios de forwards y futures sean diferentes. Esto incluye impuestos y costos de transacción.El riesgo de que alguna de las partes no cumpla con el contrato es generalmente más chica en el caso de los futures por el role que tienen las insituciones financieras. Además, en algunos casos, los contratos futuros son más líquidos y más fáciles de intercambiar que los forwards. A pesar de esto, para nuestros propósitos es razonable asumir que el precio de los forwards y futures son iguales.

3.10 Normal Backwardation

En algunos casos, se encuentra que los precios del futuro son menores que el valor esperado (usando la medida neutral al riesgo) del spot a tiempo T en los días previos a la expiración del contrato

$${}_tF_T < E_t(S_T).$$

La racionalidad de este escenario es que el mundo está **mayoritariamente poblado por productores** que normalmente desean hedge el riesgo vendiendo el comodity a futuro.

Para atraer especuladores en el mercado, ellos deben vender los contratos con algún descuento sobre el valor esperado del spot futuro. Consecuentemente, los contratos futuros tendrán un tasa de retorno mas alta que la tasa libre de riesgo. Los precios futuros deberian subir a traves del tiempo hasta que en el monento del delivery igualen al precio spot.

Bajo este escenario la curva de futuros esta invertida.

3.11 Contango

En otros casos, se encuentra que los precios del futuro son mayores que el valor esperado del spot a tiempo T en los dias previos a la expiración del contrato

$$ {}_tF_T > E_t(S_T). $$

Si existen muchos **hedgers que necesitan ir long**, vale decir comprar trigo a futuro, deberán pagar un sobre precio para atraer a la otra parte del mercado.

El resultante de la evolución del precio forward va a ser una función de la interacción de este tipo de agentes.

Bajo este escenario la curva de futuros es normal.

4 El Riesgo base y el Hedge Ratio

4.1 Riesgo Base

Existen dos formas de hacer hedging de Futures. Una es conocida como *short* hedging y otra como *long* hedging; cual de los dos usar depende si uno vende o compra el underlying. Supongamos que una empresa sabe que va a vender un activo en el futuro, entonces pueden hacer el hedging tomando una posición short en el future correspondiente. Si sabe que va a comprar un activo en el futuro, puede hacer el hedge tomando una posicion long en el future. Es importante reconocer que realizando hedging en futuros **no necesariamente mejora el resultado final.** De hecho uno deberia esperar que el hedge en futuros nos va a dar un resultado peor (a no hacer hedge) el 50% de las veces. Lo que el hedge en futuros hace es **reducir el riesgo ya que hace el resultado cierto.** Para ver esto definamos

$$ S_t -_t F_T = \xi_t $$

La innovacion (o la suma de los shocks desde tiempo t hasta T) ξ_t es conocida como **Basis Risk** (Riesgo base). Claramente a tiempo $t = T$ el Basis Risk es nulo.

Denotemos a ${}_{t_1}F_T$ y a ${}_{t_2}F_T$ como el precio del Futuro a tiempo t_1 y t_2, respectivamente. Asimismo denotamos como S_{t_1} y a S_{t_2} como los precios spot a tiempo t_1 y t_2, respectivamente. Asumimos que el hedge comienza en t_1 y finaliza en t_2 (a tiempo t_2 cierro la posicion).

Analizemos la situación de un productor que tiene el activo S y sabe que lo va a vender a t_2. Para una **short hedge** (vendo el future -el activo en el futuro al precio estipulado- y vendo el stock a tiempo t_2) tenemos el precio realizado del underlying, S_{t_2} y la ganancia (pérdida) obtenida por una posición long en el Futuro: ${}_{t_1}F_T -_{t_2} F_T$. Matemáticamente

$$S_{t_2} +_{t_1} F_T -_{t_2} F_T =_{t_1} F_T + \xi_{t_2}$$

A modo de simplificar la interpretación suponemos que ${}_{t_1}F_T -_{t_2} F_T > 0$ de modo que en un short hedge el individuo gana de su posición short. Cuando sabemos que la empresa va a comprar el activo a t_2 Tomando un **long hedge** (compro el stock a futuro a activo a futuro a t_1 y cierro la posición (a vendo el future) y compro el stock a tiempo t_2) obtenemos como resultado de dicha estrategia la misma formula salvo que S_{t_2} representa el valor pagado a tiempo t_2 por el stock y ${}_{t_1}F_T -_{t_2} F_T$ se percibe como una perdida debido al cambio del valor (dado nuestra normalizacion) del future sobre el que teniamos una posición short.
Estas 2 estrategias dan exactamente el mismo resultado **esperado** dada la información que uno posee en tiempo t_1.

4.2 El Hedge ratio

Dado que ξ_2 es aleatorio, tambien lo es el resultado de los diferentes hedges por lo tanto para mejorar el outcome lo único que puedo hacer es reducir la incertidumbre del mismo (minimizar varianza) eligiendo las proporciones optimas a mantener en el portafoilo. Para ello utilizamos lo que se llama el **Hedge ratio,** h, que esta definido como el ratio entre la cantidad de posición tomado en los Futuros y la cantidad de underlying. Hasta ahora tomamos el hedge ratio como igual a 1, pero nadie nos asegure que sea optimo. Definimos a ΔS como el cambio en el precio spot (durante el periodo de hedge) y a ΔF como el cambio en el precio de entrega, durante el mismo periodo. Asi obtenemos

$$\Delta S - h\Delta F,$$

en caso de un short hedge; y $(-[\Delta S - h\Delta F])$ en caso de que se realize un long hedge. Aca vemos que el hedge ratio pondera a la posicion de los Futuros relativa a la cantidad del cambio del precio spot.

Si suponemos que

$$\begin{bmatrix} \Delta S \\ \Delta F \end{bmatrix} \tilde{} N(0, \sum)$$

donde

$$\sum = \begin{bmatrix} \sigma_S^2 & \rho\sigma_S\sigma_F \\ \rho\sigma_S\sigma_F & \sigma_F^2 \end{bmatrix},$$

entonces para las dos estrategias antes mencionadas la varianza del portafolio es

$$v = \sigma_S^2 + h^2\sigma_F^2 - 2h\rho\sigma_S\sigma_F.$$

De aqui se infiere que cuanto mas alto sea el coeficiente de correlacion (ρ) entre entre el precio del underlying y el del futuro mas exitoso voy a ser reduciendo la incertidumbre del portafoilio.

Para minimizar la varianza del portafoilo elijo h optimamente, o sea

$$h = \rho \frac{\sigma_S}{\sigma_F}.$$

El hedge ratio óptimo es igual a la correlación entre el cambio de ambos precios ponderado por el ratio de las volatilidades.

5 Hedging con bonos que pagan cupones

Habiamos argumentado anteriormente que el concepto de Duracion toma un rol importante a la hora de realizar un hedging sobre futuros que tienen como underlying bonos que pagan cupones. La intuicion es facil, el concepto de Duración le da nueva "medida" al tiempo ya que lo pondera por el peso de los cupones. Por lo tanto al hacer el hedging sobre un bono que paga cupones debemos 'corregir' la medida del tiempo.

Consideremos un individuo que tiene una posición long en un portafolio de bonos y que realiza un short hedge utilizando un bono que tiene el mismo underlying (o que tiene la misma tasa interna de retorno). La cantidad optima es elegida de modo tal que minimiza la variabilidad del (hedge) portafolio ante cambios en la tasa interes Por lo tanto tenemos que el cambio en el valor del portafolio es

$$\Delta S - h\Delta F,$$

donde S es el valor del portafolio y F es el precio del contrato del futuro (sobre el cualquier bono que tenga como underlying la tasa y). Vimos anteriormente que el cambio en el valor del bono es igual a $-SD\Delta y$.para cualquier madurez (lo que es lo mismo que decir que los cambios en y son paralelos) Por lo tanto obtenemos que

$$-SD_S\Delta y + hFD_F\Delta y.$$

Donde D_S es la duracion promedio del portafolio (definida como la duracion de cada bono multiplicada por el peso de cada bono en el portafolio) y D_F es lo mismo pero correspondiente al futuro. Ergo el numero de futuros requeridos para eliminar la incertidumbre proveniente del combio en el yield: Δy, es

$$h = \frac{D_F}{D_S}\frac{F}{S}.$$

Aqui vemos porque el concepto de Duración es importante para realizar el Hedging.cuando, utilizamos para ello portafolios o bonos que pagan cupones Cuando tengo bonos con cupones el hegging optimo (para cubrime de un cambio en la tasa de interes) es una funcion del cociente de las duraciones, o en otras palabras de por cuanto 'tiempo' me va a afectar dicho cambio.