Opciones

1 Introducción

En la corriente sección vamos a analizar intrumentos financieros que comunmente se denominan como derivados. Estos instrumentos consisten por lo general en contratos cuyo precio depende de las caracterizticas salientes de uno o mas activos. Una vez definido el tipo de contrato, la tarea mayor es encontrar el precio justo de dicho contrato. Las estrategias para encontrar dicho precio por lo general se basan en que las propiedades estocasticas del precio del contrato se derivan de las del activo principal.

Existen varios tipos de opciones, las más simples le dan el **derecho** al portador de comerciar en el futuro, a un precio previamente pactado entre las partes, pero sin tener **obligación** de comerciar llegado el momento en el que dicha transaccion puede tomar lugar (el vencimiento). A continuación se presentará los dos tipos de opciones más simples. Primero la opción que da el derecho a comprar y luego la que da el derecho de vender:

Definition 1 *Una opción **Call** es el derecho a comprar un activo particular, a un precio previamente determinado, en un momento futuro especificado.*

El mecanismo que sigue el call es el siguiente: el poseedor de un call tiene el derecho a comprar un activo a tiempo $T > t$ donde el precio al cual se va a comprar ese activo se fija en el día de la compra del call.

Definition 2

1. *El precio predeterminado que se pacta pagar por el activo se conoce como **Strike Price**.*
2. *El dia en el cual se puede ejecutar la opción se llama **Expiration Date**.*
3. *Finalmente el activo sobre el cual se escribe la opción se conoce como el **Underlying Asset.***

Ahora bien, a tiempo T (momento del expiration date) si: (i) el underlying asset vale más que el strike price se ejecutará la opción, pues de esta manera, se puede comprar el activo a un precio menor que el de mercado (y hacer una posible ganancia vendiendolo mas caro); (ii) en caso de que el underlying asset valga menos que el strike price, la opción no se va a ejecutar, porque es mas barato comprar el activo en el mercado que ejecutar el contrato call. Denotando a S_t como el precio del stock (el precio del underlying asset) y a X como el strike price, entonces en *el expiration date* el valor del *call* es igual a

$$\max(S_T - X, 0). \tag{1}$$

lo que se conoce como función de **pay-off** de la opción**.** El operador "Max" se usa pues el individuo no tiene la obligación de comprar el activo cuando $S_T - X < 0$, por lo que en dicho caso la opción no tiene valor y por lo tanto no sera ejecutada. Implicitamente el operador *Max* representa la posibilidad de elegir si ejecutar o no el call. El poseedor de un call va a estar interesado en que S_t suba, pues de esa manera subira el valor de su opción.

Se dice que un Call está:

- *In the money* cuando $S > K$
- *At the money* cuando $S = K$
- *Out of the money* cuando $S < K$

Definition 3 *Una opción* ***Put*** *es el derecho a vender un activo, a un precio determinado previamente, en un momento futuro especificado.*

El poseedor de un Put esta interesado en que el precio del underlying asset baje, así puede venderlo (a tiempo T) a un precio mayor que su valor de mercado. La función de pay-off del *Put* a tiempo T es la siguiente

$$\max(X - S_T, 0).$$

Se dice que un Put está:

- *In the money* cuando $S < K$
- *At the money* cuando $S = K$
- *Out of the money* cuando $S > K$

Calls y Puts son las dos formas más simples de opciónes y son conocidas como *vainillas*. Hay muchos otros tipos de opciones, algunas de ellas seran presentadas mas adelante.

Notar que, a tiempo t, el precio del Stock en el momento que expira la opción, S_T, no es conocido. Como a tiempo t se detemina el strike price X, el precio de la opción (a tiempo t) dependera de la posible evolución del proceso estocastico S_t. Por lo tanto los Calls o Puts son contratos que se planean bajo incertidumbre.

Para dar una mejor idea del comportatmiento de estas opciónes se presentará en la figura 1 un diagrama del pay-off neto de los costos de la opción (por el momento asumidos como exogenos) a tiempo T. Miremos el caso donde el inversor está long en el Call. Si $S_T - X > 0$, la opción se ejecuta: estoy en la parte del máximo en la que vale $S_T - X$, que es una funcion lineal con pendiente 1 en S_T. En ese caso el Call tiene un comportamiento similar al del underlying asset (se gana si el precio sube). Por otro lado, si $S_T - X < 0$, la opción no se ejecuta y el pay-off del Call vale cero. Sin embargo, al comprar la opción, el inversor incurrió en un costo: pagó el precio de la opción en ese momento (lo que está graficado como *Call cost* en el gráfico). Por lo tanto, termina incurriendo en una pérdida equivalente al valor acutualizado (con la tasa de interés) del precio pagado para comprar la opción.

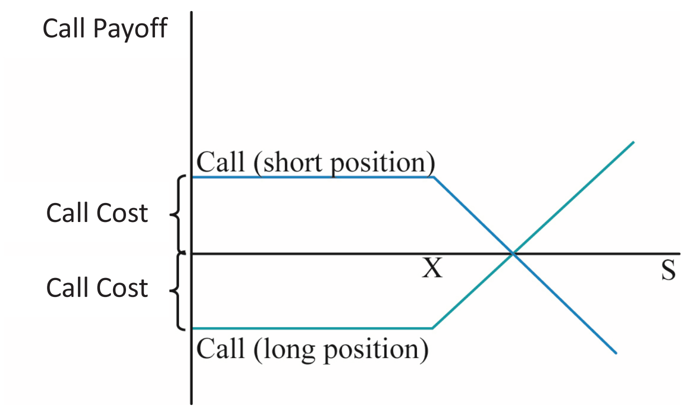


Figure 1: Pay-off de un Call a tiempo $t = T$

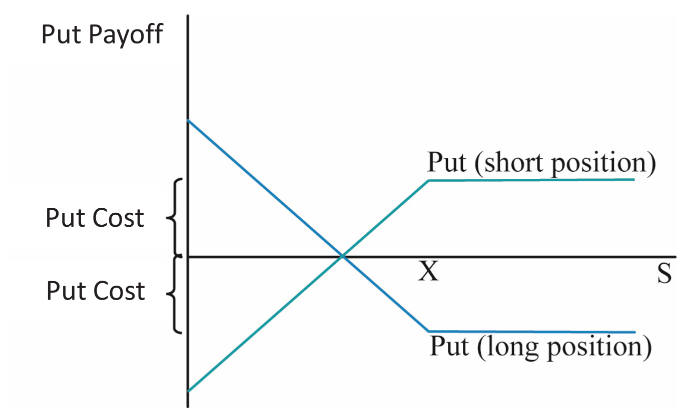


Figure 2: Pay-off de un Put a tiempo $t = T$

1.1 Short en la opción.

La contraparte del comprador de la opción, es la persona que la ofrece; si un individuo compra un call (el derecho para en un futuro adquirir un stock) debe existir una persona que le venda (hoy) la opción y que por lo tanto se compromenta a vender dicho stock en el futuro. Esta persona se conoce como el que *escribe* la opción. El individuo que escribe la opción se compromete a vender el activo (en caso de que sea un Call) o a comprar el stock (en caso de que sea un Put). El que escribe la opcion por lo tanto recibe un **premium** (el costo de la opción). La simetría entre el comprador y vendedor de la opción es clara; el comprador entrega un premium a cambio de unos derechos y de un outcome incierto, el que escribe la opción recibe hoy el premium de la opción pero entra en una obligación bajo incertidumbre.

1.2 El Precio Justo

La pregunta más importante a responder es: *¿Cual es el precio justo al que se debe de transar el contrato a tiempo t*? Para determinar dicho precio notamos que la opción, por ejemplo un Call, depende de:

1. El valor del stock a tiempo t, S_t, y *de la posible evolución del mismo* desde el tiempo t (en que observo el valor S_t) hasta el expiration date, T (ya que el valor S_T, no es conocido a tiempo t).
2. Cuánto falta para el expiration date, $T - t$.
3. El strike price.
4. La volatilidad del stock price
5. La tasa libre de riesgo
6. Los dividendos esperados que pagara el stock durante la vida de la opción.

Por lo tanto si se denota $C(.)$ al precio del Call, este depende de los siguientes argumentos: $C(S_t, X, T-t, \sigma_S, r)$, donde S_t es el precio del activo, X es el strike price y $T - t$ es el intervalo de tiempo hasta el expiration date. Dado que S_t se mueve de forma estocástica, es lógico pensar que el precio del Call también dependa del riesgo del precio del Stock y de su tendencia; es por esto que el precio del Call tambien es una función de: σ_S y r.

Note que: (i) en lugar de aparecer la tendencia del activo aparece la tasa libre de riesgo (el por qué se discutira mas adelante); (ii) como el Call esta acotado por debajo uno esperaria que cuando sube la volatilidad del underlying (sube σ_S), suba el precio del Call (*i.e.*, $\frac{\partial C}{\partial \sigma} > 0$). ya que las ganancias no estan acotadas pero la perdidas si. (iii) a tiempo $t = T$ el precio del Call debe de ser igual al pay-off del Call pues de otra manera habría oportunidades de arbitraje.

Veremos a continuación que la determinación de $C(S_t, X, T-t, \sigma_S, r)$ es el desafio mayor al que nos enfrentamos cuando estudiamos opciones. Cuando no hacemos supuestos distributivos sobre las propiedades estocasticas de S_t , solo podemos encontrar cotas superiores e inferiores de los valores del Call y del Put. Por otro lado, bajo ciertos supuestos sobre la evolución de S_t, podemos encontrar formas reducidas exactas para el precio de las opciones.

Los ejemplos de opciones hasta aquí mencionados son lo que se denomina **Opciones Europeas** que tienen la caracteristica de que sólo se pueden ejercitar en el expiration date. Las **Opciones Americanas** son aquellas que pueden ser ejecutadas en cualquier momento del tiempo antes del expiration date**.** Una característica de estas últimas opciones es que le otorgan más libertad al comprador de ejecutar sus derechos, por ende las opciones americanas son siempre al menos tan caras como las opciones europeas.[1]

2 Cotas superiores e inferiores

Aun cuando no hagamos supuestos distributivos sobre las propiedades estocasticas de S podemos derivar cotas superiores e inferiores para los precios de las opciones.

2.1 Cotas superiores

El precio de un Call (tanto europeo como norteamericano que no paga dividendos) es tal que, siempre el precio del call es menor que el precio del stock, ie: $c(\cdot) \leq S$, $C(\cdot) \leq S$. *(donde denotamos con letras minuscula el call europeo y con mayusculas el call americano).* Recordemos que $c(\cdot) = \max(S_T - X, 0)$ a tiempo T. Por lo que si no se cumpliera que $c(\cdot) \leq S$, para todo t, se podria arbitrar (y hacer una ganancia) comprando el Stock y vendiendo el Call. En otras palabras, asumir que $c(\cdot) > S$ es absurdo, ya que en ese momento todos los individuos de la economia venderian el Call y comprarian el Stock (pues saben que a tiempo T el call es menos valioso que el stock) y al hacerlo el precio del call bajaria.

En el caso del Put se cumple que a tiempo T: $p(\cdot, T) \leq X$, $P(\cdot, T) \leq X$ (ya que el valor del put a tiempo T es $Max(X - S, 0)$). Por lo tanto se va acumplir para todo t que: $P(\cdot) \leq Xe^{-r(T-t)}$. Si esto no se cumpliera todos los individuos podrian hacer una ganancia sin riesgo simplemente escibiendo una opción e invirtiendo dicho importe en la tasa libre de riesgo. (si todos escriben la opción el precio baja). En otras palabras, si a tiempo t, $P(\cdot) > Xe^{-r(T-t)}$, entonces todos los individuos van a querer vender el put (o escribir una opcion) y poner el importe en un deposito a una tasa libre de riesgo que a tiempo T va a valer mas que X.

[1] Recuerde que se dice que un Call está:

In the money cuando	$S > X$
At the money cuando	$S = X$
Out of the money cuando	$S < X$

Se dice que un Put está:

In the money cuando	$S < X$
At the money cuando	$S = X$
Out of the money cuando	$S > X$

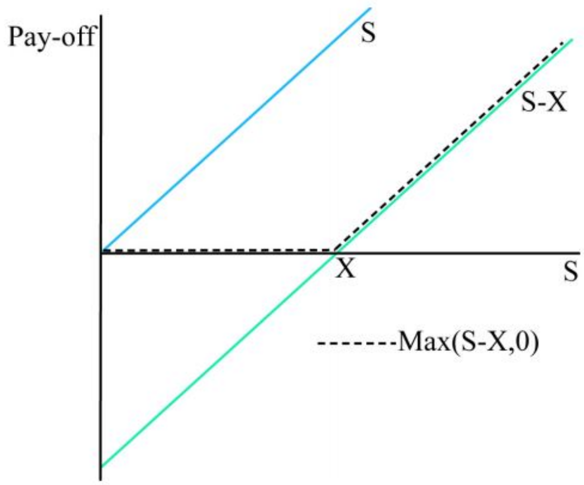


Figure 3: El pay-off del underlying es siempre mayor al pay-off del Call

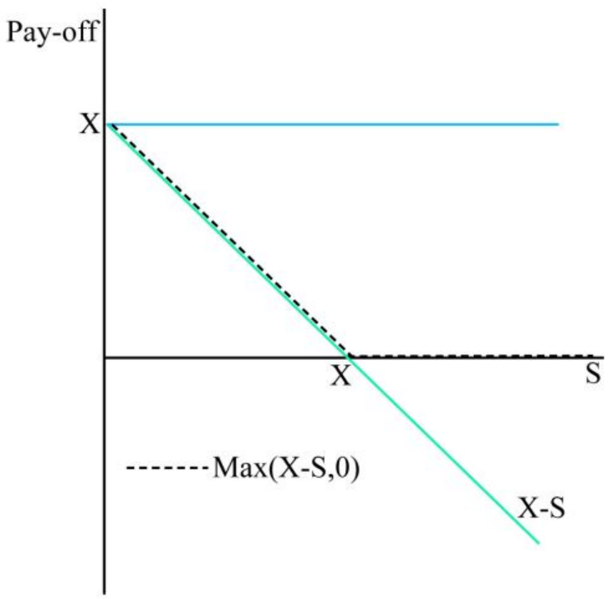


Figure 4: El payoff X es siempre mayor al payoff del Put.

2.2 Cotas inferiores de stocks que no pagan dividendos

Proposition 4 *Todo Call europeo cumple que* $c(\cdot) \geq S - Xe^{-r(T-t)}$.

Demostración. Dados dos portafolios, P_1, P_2,

$$\begin{aligned} P_1 &= c + Xe^{-r(T-t)}, \\ P_2 &= S. \end{aligned}$$

En $t = T$ el valor del *portafolio 1*, es igual a

$$\begin{aligned} P_1 &= (S_T - X) + X = S_T; \qquad si \qquad S_T > X, \\ P_1 &= 0 + X = X; \qquad si \qquad S_T < X. \end{aligned}$$

Mientras que el valor del *portafolio 2* es

$$P_2 = S_T.$$

Entonces, a tiempo T, el valor de $P_1(.,T)$ es $P_1(.,T) = Max(S_T, X)$, mientras que el valor del portafolio 2 es $P_2(.,T) = S_T$. Consecuentemente en T se cumple que $P_1 \geq P_2$. Entonces, si no hay oportunidades de arbitraje se debe de cumplir para *todo t.que* $Xe^{-r(T-t)} \geq S - c$. Esto es cierto ya que si $S - c$ fuera mayor que $Xe^{-r(T-t)}$, todos venderian $S - c$ y harian mas dinero seguro poniendolo a la tasa de interes libre de riesgo, hasta tiermpo T, que quedandose con $S - c$, por lo que todos lo harían y bajaría el precio de $S - c$.

Entonces, para todo t,

$$\begin{aligned} P_1 &\geq P_2, \\ c + Xe^{-r(T-t)} &\geq S, \\ c &\geq S - Xe^{-r(T-t)}. \end{aligned}$$

■

Proposition 5 *Todo Put europeo cumple que* $p(\cdot) \geq Xe^{-r(T-t)} - S$

Demostración. Dados dos portafolios P_1, P_2:

$$\begin{aligned} P_1 &= p + S, \\ P_2 &= Xe^{-r(T-t)} \end{aligned}$$

En $t = T$ el valor del *portafolio 1*, es igual a

$$\begin{aligned} P_1 &= p + S_T = (X - S_T) + S_T = X \qquad si \qquad S_T < X, \\ P_1 &= S_T \qquad si \qquad S_T > X. \end{aligned}$$

Mientras que el valor del *portafolio 2* es

$$P_2 = Xe^{-r(T-T)} = X$$

Entonces el valor del *portafolio 1* a tiempo T es : $P_1(.,T) = Max(X, S_T)$, mientras que el del *portafolio 2 es*: $P_2(.,T) = X$. Consecuentemente a tiempo T se cumple que $P_1 \geq P_2$. Por otra parte esta desigualdad tambien se cumple

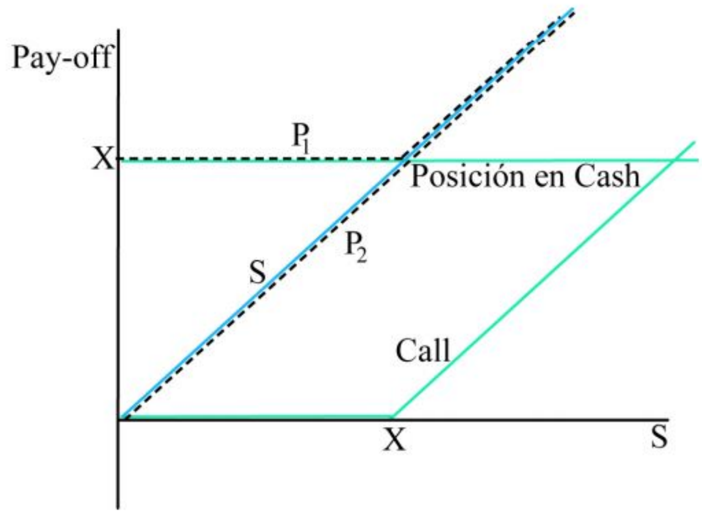


Figure 5: El pay-off de $c + Xe^{-r(T-t)}$ es siempre mayor al del stock

para todo t, ya que en caso contrario (si $p + S \leq Xe^{-r(T-t)}$) se podria hacer arbitraje comprando un put y el stock y esperar hasta madurez lo que me va a dar mas dinero que ponerlo a la tasa libre de riesgo, pero si esto fuera posible, todos lo harian y subiría el precio de p y de S.

Entonces, en t

$$\begin{aligned} P_1 &\geq P_2, \\ p + S &\geq Xe^{-r(T-t)}, \\ p &\geq Xe^{-r(T-t)} - S \end{aligned}$$

■

3 Opciones Americanas

3.1 Un Call Americano.

Proposition 6 *Nunca se ejecuta un call que no paga dividendos antes del tiempo en que la opción expira.*

Demostracion. Considere los siguientes portafolios

$$\begin{aligned} P_1 &: C + Xe^{-r(T-t)} \\ P_2 &: S \end{aligned}$$

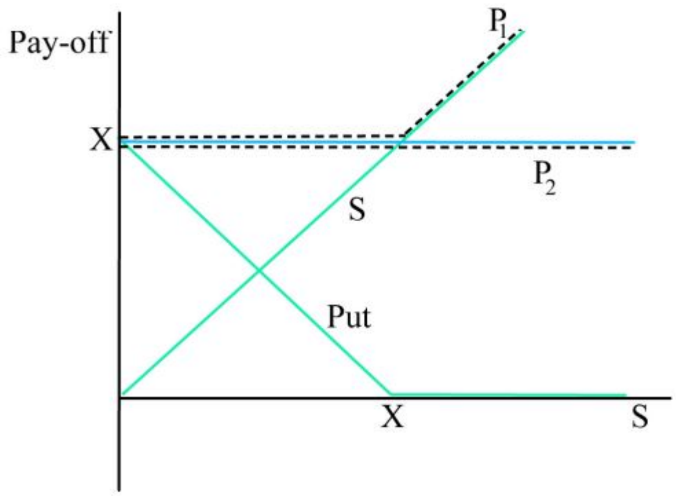


Figure 6: El pay-off de $p + S$ (un portafolio con un Put y un Stock) es siempre mayor al de $Xe^{-r(T-t)}$

Si la opción se ejercita a tiempo $\tau < T$ entonces los payoff de los portafolios son:

$$Payoffs \text{ a tiempo } \tau \qquad \begin{array}{lcl} P_1 & : & S - X + Xe^{-r(T-\tau)} \\ P_2 & : & S, \end{array}$$

por lo que si se ejecuta el call antes del vencimiento $P_2 > P_1$.

Si la opción se ejercita a tiempo T

$$Payoffs \text{ a tiempo } T \qquad \begin{array}{lcl} P_1 & : & \max\{S_T, X\} \\ P_2 & : & S_T, \end{array}$$

por lo que, si se ejecuta en vencimiento, $P_1 > P_2$, entonces siempre es conveniente mantener un call que no paga dividendos hasta el momento en que expira la opción. En otras palabras,

$$C = c.$$

■

3.2 Un Put Americano

Proposition 7 *Puede ser optimo ejercitar un put antes del tiempo en que la opción expira.*

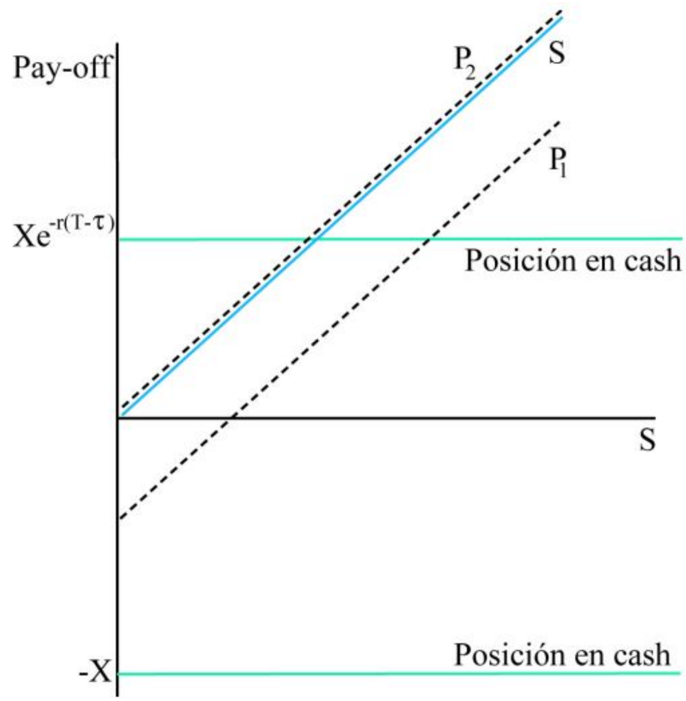


Figure 7: Payoffs de $P_1 = C + Xe^{-r(T-t)}$ y $P_2 = S$ si se ejercita en τ

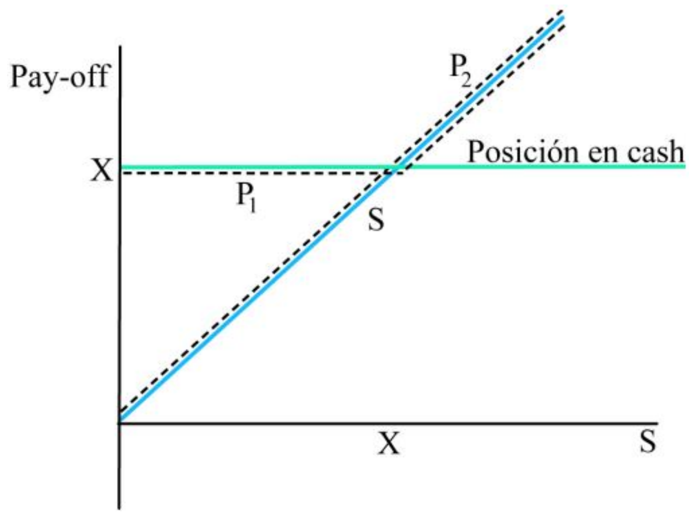


Figure 8: Payoffs de $P_1 = C + Xe^{-r(T-t)}$ y $P_2 = S$ si se ejercita en T

Demostracion. Considere los siguientes portafoilios:

$$P_1 \quad : \quad P + S$$
$$P_2 \quad : \quad Xe^{-r(T-t)}$$

Si la opción se ejercita a tiempo $\tau < T$ entonces los payoffs de los portafolios son:

$$Payoffs \text{ a tiempo } \tau \qquad \begin{array}{lcl} P_1 & : & X - S + S = X \\ P_2 & : & Xe^{-r(T-\tau)}, \end{array}$$

por lo que si se ejecuta el put antes del vencimiento, $P_1 > P_2$.

Si la opción se ejercita a tiempo T

$$Payoffs \text{ a tiempo } T \qquad \begin{array}{lcl} P_1 & : & \max\{S_T, X\} \\ P_2 & : & X, \end{array}$$

por lo que, si se ejecuta en vencimiento, $P_1 > P_2$, y por lo tanto no podemos excluir la posibilidad de ejecutarlo con anterioridad al vencimiento. Esto se debe a que si a tiempo T, $X > S$ obtiene la cantidad X por lo que podria ser conveniente obtener ese dinero con anterioridad y colocarlo a la tasa libre de riesgo. En otras palabras,

$$P \geq p.$$

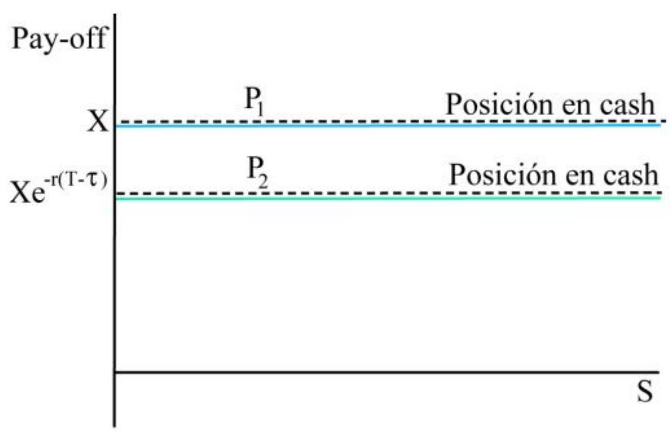


Figure 9: Payoffs de $P_1 = P + S$ y $P_2 = Xe^{-r(T-t)}$ si se ejercita en τ

■

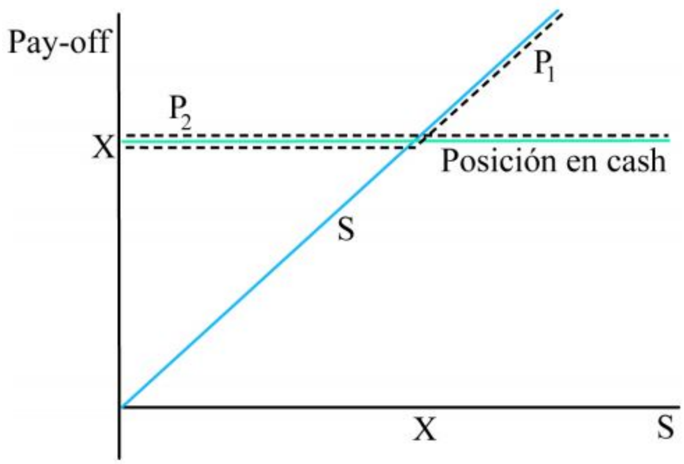


Figure 10: Payoffs de $P_1 = P + S$ y $P_2 = Xe^{-r(T-t)}$ si se ejercita en T

4 Paridad Call-Put (Europeos)

Considere los siguientes portafolios P_1 y P_2,

$$\begin{aligned} P_1 &= c + Xe^{-r(T-t)}, \\ P_2 &= p + S. \end{aligned}$$

Donde P_1 esta formado por un Call y por una posición long en Cash igual a X en $t = T$. Mientras que P_2 esta compuesto por un Put y por el underlying S. (el Call europeo y el Put europeo tienen ambos igual expiration date, T)

Al llegar el expiration date T, el pay-off de los portafolios es,

$$\begin{aligned} P_1 &= \max(S_T, X) \\ P_2 &= \max(S_T, X). \end{aligned}$$

Por lo tanto a tiempo T

$$c + X = p + S.$$

Dado que **no existen** oportunidades de arbitraje, la igualdad se cumple para cualquier momento del tiempo antes del expiration date

$$c + Xe^{-r(T-t)} = p + S,$$

esta ecuación es conocida como la **Paridad Call-Put Europeos.**

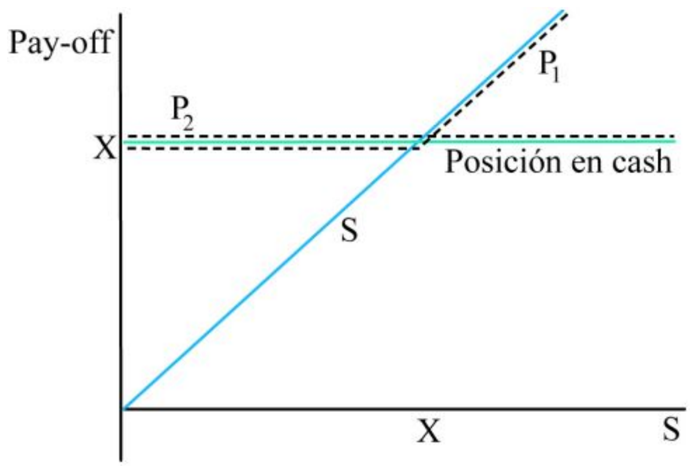


Figure 11: Portfolio 1

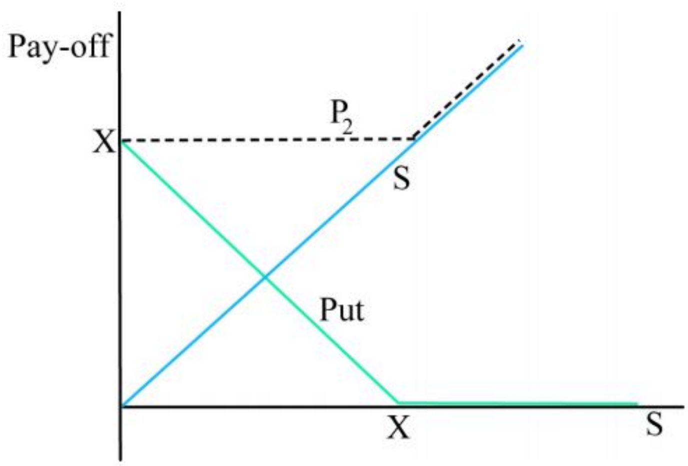


Figure 12: Portfolio 2

4.0.1 Relación entre un Call y un Put Americanos.

Como demostramos que $P > p$, entonces

$$P > c + Xe^{-r(T-t)} - S \overbrace{=}^{Dado\ que\ \text{C=c}} C + Xe^{-r(T-t)} - S,$$

por lo tanto,

$$P > C + Xe^{-r(T-t)} - S.$$

4.1 Opciones europeas que pagan dividendos.

Si las opciones europeas pagan dividendos D (iguales al valor presente de ellos durante la vida de la opción) las cotas son ligeramente distintas a las del caso recién estudiado. Siguiendo el razonamiento anterior derivamos las siguientes conclusiones.

4.1.1 Un call europeo que paga dividendos: $C \geq S - D - Xe^{-r(T-t)}$.

Considere los siguientes portafolios

$$\begin{aligned} P_1 &: C + D + Xe^{-r(T-t)} \\ P_2 &: S \end{aligned}$$

(note que aqui a P_1 se le agrega una cantidad de dinero D que es igual a los dividendos que van a ser pagados por el stock, y que el portafolio P_2 paga dividendos entre t *y* T y debemos agregarlos a tiempo T).
Demostracion. En $t = T$ el valor del *portafolio 1*, es igual a

$$\begin{aligned} P_1 &= (S_T - X) + D + X; \qquad si \qquad S_T > X, \\ P_1 &= D + X; \qquad si \qquad S_T < X, \end{aligned}$$

donde el valor del portafolio 2 es

$$P_2 = S_T + D.$$

Entonces, el valor del portafolio 1 es: $P_1(.,T) = \max(S_T, X) + D$, y el del portafolio 2 es: $P_2(.,T) = S_T + D$. Consecuentemente en T se cumple que $P_1 \geq P_2$. Y por no arbitraje

$$C \geq S - D - Xe^{-r(T-t)}.$$

■

4.1.2

4.1.3 Un Put europeo que paga dividendos: $P \geq Xe^{-r(T-t)} + D - S$.

Para encontra las cotas de un Put Europeo hacemos un argumento análogo. Considere los siguientes portafolios

$$\begin{aligned} P_1 &: P + S \\ P_2 &: D + Xe^{-r(T-t)} \end{aligned}$$

Demostración. En $t = T$ el valor del *portafolio 1*, es igual a

$$\begin{aligned} P_1 &= S_T + D; \qquad si \qquad S_T > X, \\ P_1 &= D + X; \qquad si \qquad S_T < X, \end{aligned}$$

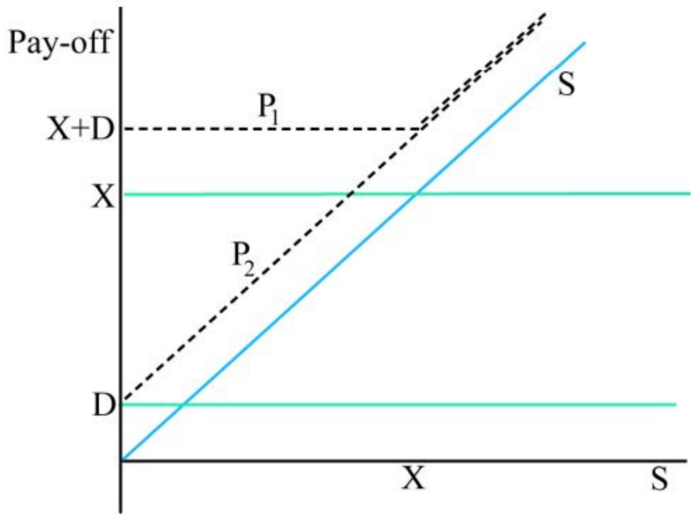


Figure 13: Cota de un Call europeo que paga dividendos

donde que el valor del portafolio 2 es

$$P_2 = D + X.$$

Entonces: $P_1(.,T) = \max(S_T, X) + D$, y el portafolio 2: $P_2(.,T) = X + D$. Consecuentemente en T se cumple que $P_1 \geq P_2$. Y por no arbitraje

$$P \geq Xe^{-r(T-t)} + D - S.$$

∎

5 Derivación del precio de una opción

A continuación se presentará la derivación del precio de una opción bajo el supuesto que los stocks tienen una distribución binomial.

El Precio del stock S puede:

i) *Subir* a un nivel u S en el buen estado con probabilidad q,

ii) *Bajar* a un nivel dS en el mal estado con probabilidad $1 - q$,

donde aumimos que $d < r < u$, r es igual a 1 mas la tasa de interes y donde u y d son factores proporcionales de crecimiento (de esta manera ni el riesgoso ni el libre de riesgo domina estocasticamente de primer orden al otro).

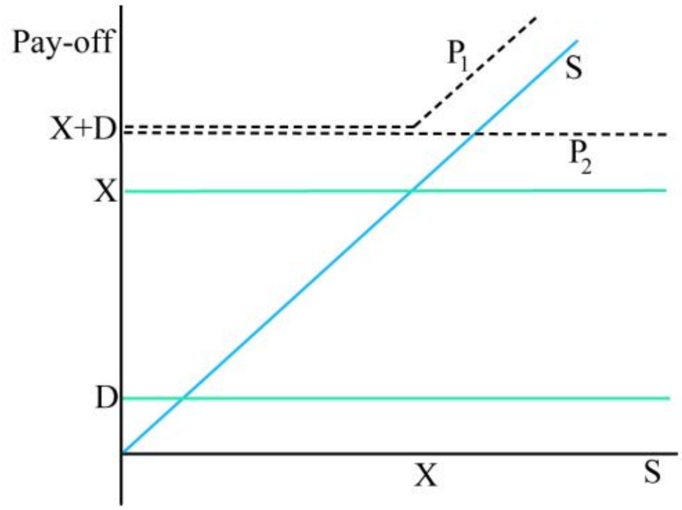


Figure 14: Cota de un Put europeo que paga dividendos

En el periodo siguiente al periodo en el que vamos a encontrar el precio de la opcion, su valor va a ser

$$c_u = \max(u\,\mathrm{S} - X; 0)$$
$$c_d = \max(d\,\mathrm{S} - X; 0)\,.$$

Encontar el precio replicando el Pay Off de la opción. Ahora nos formulamos la siguiente pregunta: ¿Puede el individuo replicar el Pay Off de la opción en todos los estados de la naturaleza transando apropiadamente en el activo riesgoso y en el libre de riesgo? Si la respuesta es afirmativa tendremos una forma de calcular el precio de la opción.

Suponga que se forma un portafolio que contenga una cantidad delta, Δ, del Stock y una cantidad X puesta a la tasa libre de riesgo. Entonces debemos encontrar las cantidades de Δ y X tal que podamos reproduir el payoff del call en todos los estados de la naturaleza

$$\Delta S + X = c.$$

Si esto es posible (se tiene que elegir para ello los valores de Δ y X), este portafolio va a reproducir el payoff de una opción en el periodo siguiente (para los 2 estados de la naturaleza),

$$\Delta u\,\mathrm{S} + rX = c_u.$$

$$\Delta d\,\mathrm{S} + rX = c_d.$$

La solución a este sistema da las siguientes cantidades que reproducen el payoff del call

$$\left[\begin{array}{c} \Delta \\ X \end{array}\right] = \frac{1}{(u-d)rS} \left[\begin{array}{cc} r & -r \\ -dS & u\,\mathrm{S} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} c_u \\ c_d \end{array}\right].$$

Sustituyendo en el portafolio obtenemos

$$c = \frac{1}{r}(\frac{r-d}{u-d}c_u + \frac{u-r}{u-d}c_d).$$

Valuación bajo Neutralidad al Riesgo Vamos a realizar la evaluación del precio de la opcion bajo el supuesto de que los agentes son neutrales al riesgo. Vamos a encontrar que bajo dicha medida de probabilidad (cuando los agentes son neutrales al riesgo), el precio que obtenemos es el mismo que aquel que obtuvimos cuando valuamos la opcion reproduciendo todos los estados de la naturaleza. De lo anterior se desprende que si nosotros podemos obtener, de alguna forma, probabilidades de los estados de la naturaleza cuando (**como si) los agentes son (fueran) neutrales al riesgo** (aunque no lo sean), siempre vamos a poder utilizar este metodo de valuacion independientemente de la adversion al riesgo de los mismos.

Suponga ahora que los agentes son neutrales al riesgo. Sabemos que bajo dicho escenario, que todos los activos deben crecer a la misma tasa promedio, e igual a la tasa libre de riesgo.

$$rS = pu\,\mathrm{S} + (1-p)dS$$

donde p es la probabilidad *bajo el supuesto de que los agentes son neutrales al riesgo* (risk neutral probability) que en general es distinta de q (que es la probabilidad de que el stock suba o baje).

Entonces podemos encontrar el valor de p que satisface que los agentes son neutrales al riesgo (o que todos los activos crecen a la misma tasa),

$$p = \frac{r-d}{u-d} \quad y \quad (1-p) = \frac{u-r}{u-d}.$$

Ahora si (y solo si) los agentes son neutrales al riesgo, puedo calcular el valor de la opción a tiempo t como el valor descontado (esperado) del payoff, es decir

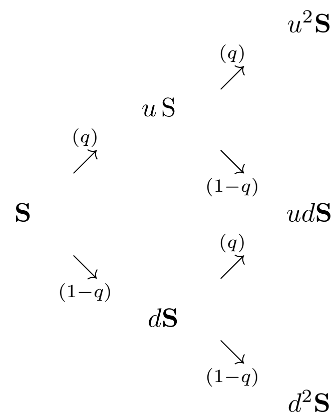
$$c = \frac{1}{r}[pc_u + (1-p)c_d] = \frac{1}{r}[\frac{r-d}{u-d}c_u + \frac{u-r}{u-d}c_d].$$

La conclusión mas importante que podemos obtener a esta altura es que el precio que obtenemos es exactamente el mismo que obtenemos utilizando argumentos de arbitraje (o de reproducir el payoff del call). Note que el argumento de hedging es valido *independientemente* de las preferencias hacia el riesgo de los individuos. Por lo tanto yo siempre puedo encontrar el precio de un derivado como si los individuos fueran neutrales al riesgo (independientemente de que lo sean o no). *Para ello siempre es necesario encontrar las probabilidades bajo neutralidad al riesgo.*

5.1 Modelo Binomial de varios periodos

La forma de encontrar el precio de una opcion cuando consideramos mas de un periodo es analoga. Uno puede hacer nuevamente el "replicating portfolio" (o de arbitrage) o puede descontarlo "como si los agentes fueran neutrales al riesgo" y ambos resultados seran iguales.

Considere el siguiente arbol para la evolución de S



El precio del stock en el nodo 2 es uS y los posibles payoffs en el segundo periodo son

$$\begin{aligned} c_{uu} &= \max\{u(u\,\mathrm{S}) - X, 0\}, \\ c_{ud} &= \max\{d(u\,\mathrm{S}) - X, 0\}. \end{aligned}$$

Por otro lado si me paro en el nodo 3 el precio del stock es dS y los posibles payoffs en el segundo periodo son

$$\begin{aligned} c_{du} &= \max\{u(d\,\mathrm{S}) - X, 0\}, \\ c_{dd} &= \max\{d(d\,\mathrm{S}) - X, 0\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto usando los argumentos comunes para replicar un portafolio (o el de descuento usando la probabilidad neutral al riego) obtenemos

$$\begin{aligned} c_u &= \frac{1}{r}[pc_{\mathrm{uu}} + (1-p)c_{ud}], \\ c_d &= \frac{1}{r}[pc_{\mathrm{ud}} + (1-p)c_{dd}]. \end{aligned}$$

Ahora repitiendo el argumento de arbitraje (o descontando otra vez con las probabilidades neutrales al riesgo) obtenemos el precio en *tiempo* 0 (o en el nodo 1).

$$c = \frac{1}{r^2}[p^2 c_{uu} + 2p(1-p)c_{ud} + (1-p)^2 c_{dd}].$$

Generalizando a n periodos obtenemos

$$c = \frac{1}{r^n}\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{(n-i)!i!}p^i(1-p)^{n-i}c(u^i, d^{n-i}),$$

donde $c(u^i, d^{n-i}) \triangleq \max\{Su^i d^{n-i} - X, 0\}$.[2]

Esta fórmula nos da el precio de un call que va a vencer en n periodos. Podemos re-escribir dicha formula si definamos $\underline{a}$ como el número entero mas pequeño tal que $Su^i d^{n-i} > X$,entonces podemos expresar el precio de la opción como

$$\begin{aligned} c &= \sum_{i=a}^{n}\frac{n!}{(n-i)!i!}p^i(1-p)^{n-i}\frac{Su^i d^{n-i} - X}{r^n} \\ &= S\sum_{i=a}^{n}\frac{n!}{(n-i)!i!}(\frac{pu}{r})^i(\frac{(1-p)d}{r})^{n-i} - \\ &\quad -\frac{X}{r^n}\sum_{i=a}^{n}\frac{n!}{(n-i)!i!}(p)^i(1-p)^{n-i}. \end{aligned}$$

Ahora si definimos $p^* = \frac{pu}{r}$ (notar que $p^* = \frac{ru-du}{ru-dr} < 1$), y por lo tanto $1 - p^* = \frac{(1-p)d}{r}$ podemos expresar la fórmula anterior como

$$c = S\theta(a|n, p^*) - \frac{X}{r^n}\theta(a|n, p).$$

donde $\theta(x|y, z)$ denota una función de distribución binomial complementaria, donde y es el número de eventos con probabilidad z donde la función de distribución esta evaluada en x.

5.1.1 Evaluación de la formula cuando $\underline{\text{n}}$ tiende a infinito.

Nosotros sabemos que el tiempo hasta la expiración del call es $T - t$. Ahora lo que vamos a hacer es un mapping entre los n periodos y el tiempo hasta la expiración.

Considere la realización del stock que tiene como resultante a tiempo T (desde tiempo t) i movimientos hacia arriba (u) y $n - i$ movimientos hacia abajo (d).

$$S_T = S_t u^i d^{n-i}.$$

Tomando logaritmos en ambos lados la expresion de arriba puede escribirse como

$$\ln(S_T) - \ln(S_t) = i\ln(u) + (n-i)\ln(d)$$

Por lo tanto el el cambio en el logaritmo del precio del activo tiene las siguientes propiedades

$$E(\Delta \ln(S)) = \ln\left(\frac{u}{d}\right)E(i) + n\ln(d)$$

[2]El signo $\triangleq$ significa "se define como"

$$Var(\Delta\ln(S)) = \left(\ln\left(\frac{u}{d}\right)\right)^2 Var(i)$$

Ahora, si recordamos que $E(i) = nq$ y que $Var(i) = nq(1-q)$, podemos expresar los resultados de la siguiente manera.

$$E(\Delta\ln(S)) = \ln(u/d)nq + n\ln(d) = \widehat{\mu}n$$
$$Var(\Delta\ln(S)) = (\ln(u/d))^2 nq(1-q) = \widehat{\sigma}^2 n$$

Como la distribución Binomial converge a la Normal lo único que restaria sería elegir u, d, q como función de tiempo y del número de intervalos. La elección de ellos esta motivada por el hecho de que con los valores que se presentarán a continuación, se puede reproducir exactamante la fórmula del call derivada por metodos alternativos.

Supongamos que elegimos

$$u = \exp\left(\sigma\sqrt{\frac{T-t}{n}}\right),$$
$$d = \exp\left(-\sigma\sqrt{\frac{T-t}{n}}\right),$$

y

$$q = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\frac{T-t}{n}}\right).$$

Entonces para todo n

$$\widehat{\mu}n = \mu(T-t),$$

y

$$\widehat{\sigma}^2 n = [\sigma^2 - \frac{\mu^2(T-t)}{n}](T-t),$$

que cuanto $n \to \infty$, $\widehat{\sigma}^2 n = \sigma^2(T-t)$

Entonces utilizando que la binomial converge a la Normal se puede probar que el precio de un call es

$$c = S\Phi(z + \sigma\sqrt{T-t}) - \frac{X}{r^{(T-t)}}\Phi(z),$$

donde

$$z = \frac{\log(S) - \log(\frac{X}{r^{(T-t)}}) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma(T-t)}.$$

Note que $S\Phi(z+\sigma\sqrt{T-t})$ es el valor presente de recibir el stock cuando $S > X$, y $\frac{X}{r^{(T-t)}}\Phi(z)$ es el valor presente de pagar el strike price si $S > X$. Note que cuando S es muy grande con respecto a X, las probabilidades tienden a 1 y c es aproximadamente $S - \frac{X}{r^{(T-t)}}$, la cota inferior del valor del call.

Otra interpretación particularmente útil es que $\Delta = \Phi(z + \sigma\sqrt{T-t})$, es el número de acciones en el portafolio que replica el payoff del call: $c = S\Delta + X$. Claramente $\frac{X}{r^{(T-t)}}\Phi(z)$ es la cantidad de dinero invertido a la tasa libre de riesgo. Por lo tanto el portafolio equivalente consiste en ir long en S financiado pidiendo prestado a la tasa libre de riesgo por las cantidades óptimas.