Riesgo, Incertidumbre y Finanzas

Bonos I

Francisco Terfi

2do semestre de 2022

Bonos y tasas de interés

- Empezamos a trabajar con instrumentos financieros de **renta fija**.
  - Al momento de compra se conoce el rendimiento del instrumento.
- Hay cuatro grandes "tipos" de riesgo asociados a estos instrumentos
  1. Riesgo de tasa de interés.
  2. Riesgo inflacionario.
  3. Riesgo crediticio (default).
  4. Riesgo de liquidez.
- Nosotros nos concetraremos en el primero.
- Los bonos pueden o no pagar cupones; empezamos estudiando los **zero-coupon bonds**.
- Consideremos un bono que paga 1$ a tiempo T. Denotando su precio a tiempo t como $P(t)$ y su rendimiento como $R(t,T)$ se verifica que

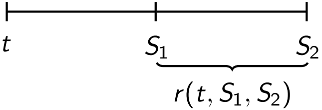
$$P(t) = e^{-R(t,T)(T-t)}$$

- Entonces, el retorno del bono es

$$R(t,T) = -\frac{1}{(T-t)} \log P(t,T)$$

Bonos y tasas de interés

- La **tasa forward** es la tasa conocida en t, pero que se aplica entre los períodos S_1 y S_2, donde $t < S_1 < S_2$.



- Podemos entonces escribir el precio del bono con madurez S_2

$$P(t, S_2) = P(t, S_1) e^{-r(t, S_1, S_2)(S_2 - S_1)}$$

Bonos y tasas de interés

- La **tasa instantánea forward** se define como el límite de la tasa forward cuando $S_2 \to S_1$.
  - Es la tasa de rendimiento contratada a tiempo t para el período $[S_1, S_1 + dt]$
- Usando que $lim_{x \to 0}\ e^x = lim_{x \to 0}\ (1 + x)$ tenemos

$$\lim_{S_2 \to S_1} \exp\{-r(t, S_1, S_2)(S_2 - S_1)\} = \lim_{S_1 \to S_2} (1 - r(t, S_1, S_2)(S_2 - S_1))$$

- Podemos computar el límite para $P(t, S_2)$ cuando $S_2 \to S_1$

$$\lim_{S_2 \to S_1} P(t, S_2) = P(t, S_1) \lim_{S_2 \to S_1} (1 - r(t, S_1, S_2)(S_2 - S_1))$$

$$\lim_{S_2 \to S_1} \frac{P(t, S_2) - P(t, S_1)}{P(t, S_1)(S_2 - S_1)} = -r(t, S_1)$$

  - Obtenemos una constante por la derivada del precio respecto a S_1.
- Reordenando términos obtenemos

$$r(t, S_1) = \frac{-1}{P(t, S_1)} \frac{dP(t, S_1)}{dS_1}$$

- La **tasa spot (instantánea) en el momento** t se define como el límite de la tasa instantánea forward cuando S_1 tiende a t

$$R(t,t) = r(t,t) = r(t)$$

- Podemos escribir el precio de un bono como 1 peso descontado por la suma de tasas forward entre t y T

$$P(t,T) = e^{-\int_t^T r(t,u)du}$$

  - Notar que a tiempo t se conocen todas las tasas instantáneas forward.

- Además, podemos expresar el retorno de un bono que vence a tiempo T como un promedio de los retornos forward instantáneos

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T r(t,u)du$$

Modelos de un factor

- Introducimos incertidumbre al problema y nos ocupamos del riesgo de tasa de interés.
- Suponemos un único factor de riesgo.
- Asumimos el siguiente proceso estocástico para la tasa de interés

$$dr = u(r,t)dt + w(r,t)dz$$

- Los modelos que estudiaremos consisten en hacer supuestos sobre $u(r,t)$ y $w(r,t)$.
- Nuestro objetivo es realizar valuación de bonos y seguiremos un argumento similar al que vimos para el pricing de opciones: construir un portafolio y eliminar el riesgo (hedging).
- El portafolio lo debemos construir con dos bonos de distinta madurez.
- Veamos que no podemos utilizar un bono de madurez instantánea para hacer el pricing.

Valuación de bonos: preliminares

- Veamos que no es posible realizar el hedging con un bono de madurez instantánea.
- Consideremos la posibilidad de realizar una cartera con un bono de madurez T_1 y un bono con madurez $t + dt$.

$$\Pi = W_1 P(r, t, T_1) + W_2 P(r, t, t + dt)$$

- Tenemos que eliminar el riesgo del portafolio e igualar dicho importe a lo obtenido a la tasa libre de riesgo.

$$d\Pi = W_1 dP(r, t, T_1) - W_2 dP(r, t, t + dt)$$

- Aplicando el lema de Ito para obtener la evolución del precio del bono

$$dP = P_t dt + P_r(\overbrace{u(r,t)dt + w(r,t)dz}^{dr}) + \frac{1}{2}w(r,t)^2 P_{rr} dt$$

Valuación de bonos: preliminares

- Recordemos que, por definición, el precio de un bono de madurez instantánea es $P(t, t + dt) = e^{-r(t)dt}$
- Dado que *"dt chico"*, $P(t, t + dt) \approx 1 - r(t)dt$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} P_r &= -dt \\ P_{rr} &= 0 \end{aligned}$$

- Luego, la variación del precio de un bono de madurez instantánea es

$$\begin{aligned} dP &= (P_t + P_r u(r,t) + \frac{1}{2} w(r,t)^2 P_{rr})dt + P_r w(r,t)dz \\ &= P_t dt - u(r,t)dt^2 - w(r,t)dzdt \\ &= P_t dt \end{aligned}$$

- Concluimos entonces que no es posible realizar pricing de bonos utilizando un bono de madurez instantánea.
- Debemos usar dos bonos de madureces distintas (T_1 y T_2).

Valuación de bonos: generalidades

- Comenzamos con un tratamiento general del tema: sin formas explícitas para $u(r,t)$ y $w(r,t)$.
- Construimos un portafolio con bonos de precios $P_1(r,t,T_1)$ y $P_2(r,t,T_2)$ cuyo retorno es
$$\frac{d\Pi}{\Pi} = \alpha\frac{dP_1}{P_1} + (1-\alpha)\frac{dP_2}{P_2}$$
- Dado el proceso asumido para la tasa de interés, sabemos que
$$\frac{dP_i}{P_i} = \mu_{P_i}dt + \sigma_{P_i}dz \qquad \text{para } i = 1,2$$
- El cambio en el valor del portafolio es
$$\frac{d\Pi}{\Pi} = [\alpha\mu_{P_1} + (1-\alpha)\mu_{P_2}]dt + \Phi dz$$
donde $\Phi = \alpha\sigma_{P_1} + (1-\alpha)\sigma_{P_2}$.
- Para eliminar el riesgo elegimos α tal que $\Phi = 0$, de modo que
$$\alpha = \frac{\sigma_{P_2}}{(\sigma_{P_2} - \sigma_{P_1})}$$

Valuación de bonos: generalidades

- Para el portafolio libre de riesgo, por no arbitraje

$$
\begin{aligned}
\frac{d\Pi}{\Pi} &= rdt \\
[\alpha\mu_{P_1} + (1-\alpha)\mu_{P_2}]dt &= rdt \\
\left(\frac{\sigma_{P_2}}{(\sigma_{P_2}-\sigma_{P_1})}\mu_{P_1} + \left(1 - \frac{\sigma_{P_2}}{(\sigma_{P_2}-\sigma_{P_1})}\right)\mu_{P_2}\right)dt &= rdt \\
\frac{(\mu_{P_1}-r)}{\sigma_{P_1}} &= \frac{(\mu_{P_2}-r)}{\sigma_{P_2}}
\end{aligned}
$$

- La última igualdad vale para dos bonos con madureces arbitrarias.
- Definimos λ como el precio del riesgo de un bono

$$\lambda \equiv \frac{\mu_{P_i} - r}{\sigma_{P_i}}$$

Valuación de bonos: generalidades

- Del lema de Ito se sigue que

$$\sigma_{P_i} = \frac{1}{P_i} w(r,t) P_{ir}$$
$$\mu_{P_i} = \frac{1}{Pi}(P_{it} + P_{ir} u(r,t) + \frac{1}{2} P_{irr} w(r,t)^2) \quad \text{para } i = 1, 2$$

- Sustituyendo en la definición de λ obtenemos una ecuación diferencial que caracteriza el precio de un bono

$$\begin{aligned} \frac{(\frac{1}{Pi}(P_{it} + P_{ir} u(r,t) + \frac{1}{2} P_{irr} w(r,t)^2) - r)}{\frac{1}{P_i} w(r,t) P_{ir}} &= \lambda \\ P_{it} + (u(r,t) - \lambda w(r,t)) P_{ir} + \frac{1}{2} P_{irr} w(r,t)^2 - P_i r &= 0 \end{aligned}$$

- Notar que la ecuación diferencial depende de λ, que debe ser obtenido de forma independiente (exógeno).
- Ahora examinaremos modelos que dan formas funcionales explícitas para $u(r,t)$ y $w(r,t)$.

Modelo de Merton

- El modelo espefifica $u(r,t) = \alpha$ y $w(r,t) = \sigma$, de modo que el proceso asumido para la tasa de interés es

$$dr = \alpha dt + \sigma dz$$

- Sustituyendo en la solución general obtenemos la siguiente ecuación diferencial

$$P_t + (\alpha - \lambda\sigma)P_r + \frac{1}{2}\sigma^2 P_{rr} - rP = 0$$

- Asumiendo que el bono paga 1$ en T, la condición terminal relevante es $P(r, T, T) = 1$.
- Ecuaciones diferenciales parciales de esta forma tiene soluciones del tipo

$$P(r,t,T) = \exp(-r\tau + F(\tau))$$

donde $\tau = T - t$ y F es una función del tiempo a determinar.

- A partir de la conjetura

$$\begin{aligned} P_t &= (r - F'(\tau))\exp(-r\tau + F(\tau)) \\ P_r &= -\tau\exp(-r\tau + F(\tau)) \\ P_{rr} &= \tau^2\exp(-r\tau + F(\tau)) \end{aligned}$$

Modelo de Merton

- Sustituyendo en la ecuación diferencial

$$\left(r - F'(\tau) - (\alpha - \lambda\sigma)\tau + \frac{1}{2}\sigma^2\tau^2 - r\right)\exp(-r\tau + F(\tau)) = 0$$

- Luego, tenemos que

$$F'(\tau) = -(\alpha - \lambda\sigma)\tau + \frac{1}{2}\sigma^2\tau^2$$

$$F(\tau) = -(\alpha - \lambda\sigma)\frac{\tau^2}{2} + \frac{1}{6}\sigma^2\tau^3 + C$$

  donde C es una constante a determinar.
- Reemplazando en la conjetura para el precio del bono

$$P(r,\tau) = \exp\left(-r\tau - (\alpha - \lambda\sigma)\frac{\tau^2}{2} + \frac{1}{6}\sigma^2\tau^3 + C\right)$$

- De la condición terminal $P(r,0) = 1$ se sigue que $C = 0$ por lo que el precio del bono viene dado por

$$P(r,\tau) = \exp\left(-r\tau - (\alpha - \lambda\sigma)\frac{\tau^2}{2} + \frac{1}{6}\sigma^2\tau^3\right)$$

Modelo de Merton

- El retorno del bono en el modelo de Merton viene dado por

$$R(t,T) = r + \frac{1}{2}(\alpha - \lambda\sigma)\tau - \frac{1}{6}\sigma^2\tau^2$$

- Notar que si $\tau \to \infty$ el retorno del bono sería negativo.
  - No es un modelo razonable para modelar bonos de larga madurez.
- La tasa instantánea forward en este modelo viene dada por

$$r(t,T) = \frac{-1}{P(t,T)}\frac{dP(t,T)}{dT} = r + (\alpha - \lambda\sigma)\tau - \frac{1}{2}\sigma^2\tau^2$$

Modelo de Vasicek

- Busca *"solucionar el problema"* del modelo de Merton.
- Asume $u(r,t) = \alpha(\gamma - r)$ y que $w(r,t) = \sigma$, de modo que el proceso que sigue la tasa es
$$dr = \alpha(\gamma - r)dt + \sigma dz$$
- Este proceso se conoce como **mean reverting brownian motion**.
- Bajo este proceso la tasa spot r fluctúa alrededor de su media γ (o valor de largo plazo).
- El parámetro α mide con qué frecuencia la tasa retorna a su valor de largo plazo.
    - Si α es bajo, la tasa no retorna rápido.

Modelo de Vasicek

- A partir de las especificaciones de $u(\cdot)$ y $w(\cdot)$ la ecuación diferencial que caracteriza el precio del bono es

$$
\begin{aligned}
P_t + \frac{1}{2}\sigma^2 P_{rr} dt + (\alpha(\gamma - r) - \lambda\sigma)P_r - rP &= 0 \\
P_t + \frac{1}{2}\sigma^2 P_{rr} dt + \alpha(\widehat{\gamma} - r)P_r - rP &= 0
\end{aligned}
$$

  donde $\widehat{\gamma} = (\gamma - \frac{\lambda}{\alpha}\sigma)$.
- Ecuaciones diferenciales de esta forma tiene soluciones del tipo

$$P(r,\tau) = \exp(A(\tau) + B(\tau)r)$$

  donde $A(\tau)$ y $B(\tau)$ son funciones a determinar.
- Procediendo de la misma forma que en Merton

$$
\begin{aligned}
B(\tau) &= -\frac{1 - \exp\{-\alpha\tau\}}{\alpha} \\
A(\tau) &= \left[\frac{(-B(\tau) - \tau)(\alpha^2(\widehat{\gamma}) - \frac{1}{2}\sigma^2)}{\alpha^2}\right] - \frac{1}{4\alpha}\sigma^2 B(\tau)^2
\end{aligned}
$$

Modelo de Vasicek

- En este modelo, el retorno del bono viene dado por

$$R(t, T) = -\frac{1}{\tau}[\ln[P(t, T)] = -\frac{1}{\tau}[A(\tau) + B(\tau)r]$$

- Notar que cuando $\tau \to \infty$, el yield del bono converge a

$$\hat{\gamma} - \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\alpha}\right)^2$$

- Bajo ciertas configuraciones razonables de parámetros este valor es positivo.
- Un modelo de un solo factor más sofisticado es el de Cox-Ingersoll-Ross el cual asume $u(r, t) = \alpha(\gamma - r)$ y $w(r, t) = \sigma\sqrt{r}$ de modo que

$$dr = \alpha(\gamma - r)dt + \sigma\sqrt{r}dz$$

  - En el práctico.

Modelos de dos factores

- Extendamos nuestro tratamiento para el modelado de la tasa de interés.
- Consideremos el precio de un bono de madurez T como función de dos tasas de retorno $P(r, l, t, T)$ donde l es la tasa de retorno de un bono de madurez infinita.
- Asumimos los siguientes procesos para las tasas de interés

$$dr = \mu_r dt + \sigma_r dz_r$$
$$dl = \mu_l dt + \sigma_l dz_l$$

  donde $E(dz_r dz_l) = \rho dt$.
- En general fijamos l a la tasa de un **bono consol** (bono de madurez infinita que paga cupones).
- Luego, el precio de un bono consol que paga cupones c por período es

$$C_o = \int_0^\infty c e^{-lt} dt = \frac{c}{l}$$

Modelos de dos factores

- Examinamos la determinación del precio de un bono en este contexto.
  - Ver el modelo APT de la primera parte del curso.
- Consideremos un portafolio que consiste en un cartera con tres bonos con distintos vencimientos, T_1, T_2 y T_3.
- El retorno del portafolio es

$$\frac{d\Pi}{\Pi} = \alpha_1 \frac{dP_1(r,l,t;T_1)}{P_1(r,l,t;T_1)} + \alpha_2 \frac{dP_2(r,l,t;T_2)}{P_2(r,l,t;T_2)} + \alpha_3 \frac{dP_3(r,l,t;T_3)}{P_3(r,l,t;T_3)}$$

- Del Lema de Ito sabemos que el cambio proporcional del precio de un bono sigue una brownian motion, donde la incertidumbre viene dada por dz_r y dz_l

$$\frac{dP_i(r,l,t;T_i)}{P_i(r,l,t;T_i)} = \mu_{P_i} dt + \sigma_{P_i l} dz_l + \sigma_{P_i r} dz_r, \quad \text{para} \qquad i = 1,2,3$$

- Por lo tanto, el retorno del portafolio puede escribirse como

$$\begin{aligned}
\frac{d\Pi}{\Pi} &= (\alpha_1 \mu_{P_1} + \alpha_2 \mu_{P_2} + \alpha_3 \mu_{P_3}) dt + (\alpha_1 \sigma_{P_1 l} + \alpha_2 \sigma_{P_2 l} + \alpha_3 \sigma_{P_3 l}) dz_l \\
&\quad + (\alpha_1 \sigma_{P_1 r} + \alpha_2 \sigma_{P_2 r} + \alpha_3 \sigma_{P_3 r}) dz_r
\end{aligned}$$

Modelos de dos factores

- Debemos elegir α_i de forma tal de eliminar el riesgo (dz_r y dz_l).
- El retorno del portafolio sin riesgo debe igualarse a la tasa libre de riesgo.
- Estas condiciones generan el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} \sigma_{P_1 l} & \sigma_{P_2 l} & \sigma_{P_3 l} \\ \sigma_{P_1 r} & \sigma_{P_2 r} & \sigma_{P_3 r} \\ \mu_{P_1} - r & \mu_{P_2} - r & \mu_{P_3} - r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- En este sistema cualquier fila puede escribirse como una combinación lineal de las otras; por lo tanto podemos escribir el exceso de retorno de un bono como

$$\mu_P - r = \lambda_r \sigma_{\mathrm{Pr}} + \lambda_l \sigma_{Pl}$$

- Notar que μ_P, σ_{P_r} y σ_{P_l} se obtienen con Ito.
- El precio del riesgo λ_i es independiente de la madurez de cualquier bono.

Modelos de dos factores

- Aplicando Ito (para determinar μ_P, σ_{P_r} y σ_{P_l})

$$
\begin{aligned}
dP(r,l,t) &= P_r dr + P_l dl + P_t dt + \frac{1}{2}P_{rr}(dr)^2 + \frac{1}{2}P_{ll}(dl)^2 + P_{rl} dr dl, \\
&= P_r(\mu_r dt + \sigma_r dz_r) + P_l(\mu_l dt + \sigma_l dz_l) + P_t dt + \\
&\quad \frac{1}{2}P_{rr}\sigma_r^2 dt + \frac{1}{2}P_{ll}\sigma_l^2 dt + P_{rl}\rho\sigma_r\sigma_l dt, \\
&= (P_t + P_r\mu_r + P_l\mu_l + \frac{1}{2}P_{rr}\sigma_r^2 + \frac{1}{2}P_{ll}\sigma_l^2 + P_{rl}\rho\sigma_r\sigma_l)dt \\
&\quad + P_r\sigma_r dz_r + P_l\sigma_l dz_l.
\end{aligned}
$$

- Si asumimos que los bonos (en particular el consol) pagan cupones *cdt* por unidad de tiempo ese retorno debe incorporarse a la media de los bonos.
- Entonces, expresando el proceso en términos proporcionales

$$
\begin{aligned}
\frac{dP(r,l,t)}{P(r,l,t)} &= \frac{1}{P}\Big(P_t + P_r\mu_r + P_l\mu_l + \frac{1}{2}P_{rr}\sigma_r^2 + \frac{1}{2}P_{ll}\sigma_l^2 + \\
&\quad + P_{rl}\rho\sigma_r\sigma_l + c\Big) + \frac{1}{P}P_r\sigma_r dz_r + \frac{1}{P}P_l\sigma_l dz_l.
\end{aligned}
$$

Modelos de dos factores

- La ecuación $\mu_P - r = \lambda_r \sigma_{\mathrm{Pr}} + \lambda_l \sigma_{Pl}$ nos queda

$$P_t + \frac{1}{2}\sigma_r^2 P_{rr} + \frac{1}{2}\sigma_l^2 P_{ll} + \rho\sigma_r\sigma_l P_{rl} + (\mu_r - \lambda_r\sigma_r)P_r + (\mu_l - \lambda_l\sigma_l)P_l -$$

$$-rP + c = 0$$

- Esta ecuación diferencial es válida para cualquier bono, en particular, un bono consol.
- Podemos aprovechar el hecho de que conocemos la forma estructura del precio de un bono consol para eliminar un precio de riesgo (λ_l) de la ecuación anterior.
- Para el consol se verifica $P = \frac{c}{l}$, entonces

$$P_l = -\frac{c}{l^2}$$

$$P_{ll} = \frac{2c}{l^3}$$

$$P_r = P_{rr} = P_{rl} = P_t = 0$$

Modelos de dos factores

- Sustituyendo en la ecuación diferencial obtenemos

$$\frac{1}{2}\sigma_l^2\frac{2c}{l^3} - (\mu_l - \lambda_l\sigma_l)\frac{c}{l^2} - r\frac{c}{l} + c = 0$$

- La ecuación anterior permite expresar la prima de riesgo como

$$(\mu_l - \lambda_l\sigma_l) = \frac{\sigma_l^2}{l} + l^2 - rl$$

- Usando el resultado anterior podemos reescribir la ecuación diferencial para el precio de un bono cualquiera como

$$P_t + \frac{1}{2}\sigma_r^2 P_{rr} + \frac{1}{2}\sigma_l^2 P_{ll} + \rho\sigma_r\sigma_l P_{rl} + (\mu_r - \lambda_r\sigma_r)P_r + (\frac{\sigma_l^2}{l} + l^2 - rl)P_l -$$

$$-rP + c = 0$$

- La prima de riesgo del mercado de la tasa spot no puede reemplazarse y por lo tanto debe ser estimada.