

Dominancia Estocástica

A continuación vamos a presentar distintos criterios basados en las propiedades estocásticas de los retornos (o de las funciones de probabilidad de los retornos) que le aseguren al individuo que, al elegir un activo, obtenga mayor utilidad esperada. Es decir, vamos a tratar de ver qué propiedades de los retornos son necesarias y suficientes para poder decir que cierto tipo de individuos (vale decir, ciertas funciones de utilidad) prefieren un activo al otro. Por ejemplo, trataremos de dilucidar qué propiedades son necesarias y suficientes para que cualquier individuo que prefiera más a menos ($U(.)$ estrictamente creciente) y sea averso al riesgo ($U(.)$ cóncava¹) prefiera un activo por sobre otro. Los criterios de comparación que vamos a analizar se conocen como de *Dominancia Estocástica de Primer orden* y *Dominancia Estocástica de Segundo orden*. Estos criterios van a estar relacionados con *a)* nivel del retorno y *b)* la dispersión del retorno.

Denotamos F y G a las distribuciones acumuladas (funciones de probabilidad) de los activos riesgosos A y B (por simpleza asumimos que el dominio de los retornos, r_A y r_B , es $[0,1]$), donde

$$F(\nu) = P(r_A \leq \nu) = \int_0^\nu f(z)dz,$$

y

$$G(\nu) = P(r_B \leq \nu) = \int_0^\nu g(z)dz.$$

A continuación pasaremos a definir distintos tipos de dominancia estocástica.

1 Dominancia Estocástica de Primer Orden

Dominancia estocástica de primer orden provee una regla para ordenar de modo consistente activos riesgosos, para individuos que prefieren más riqueza a menos riqueza ($U' > 0$). Es decir, para este tipo de dominancia sólo requiremos que la función de utilidad sea creciente.

Definition 1 *El activo A domina estocásticamente de primer orden al activo B (y se denota como $A \underset{FSD}{\geq} B$) si para todo individuo con $U'(.) > 0$ es cierto que prefiere el activo A al B , es decir, vale que:*

$$E_F(U(r_A)) \geq E_G(U(r_B))$$

Notar que lo fuerte de esta definición viene dado por el cuantificador que dice que cuando efectivamente tenemos que *para todo* individuo que prefiera más a menos opta por el activo A antes que el B decimos que $A \underset{FSD}{\geq} B$. Esto es un criterio muy fuerte y por ende muy difícil de encontrar, por lo que, en

¹En lo que sigue utilizaremos la expresión $U(.)$ para referirnos a lo que usualmente se conoce como función de utilidad de Bernoulli.

general, no será posible decir que existe esta relación entre dos activos. Si bien esta definición es útil conceptualmente no es muy operativa, porque no nos dice lo que buscábamos en la introducción. Recordar que queremos alguna condición que sea necesaria y suficiente para que se cumple FSD que sea más operativa o más clara con respecto a cómo tienen que ser las distribuciones de probabilidad de los retornos. Intuitivamente, con la definición sola, para chequear que $A \underset{FSD}{\geq} B$ deberíamos computar las utilidades esperadas para todas las funciones de utilidad crecientes antes de afirmar que $A \underset{FSD}{\geq} B$. Por suerte, la siguiente proposición nos dice que no es necesario hacer eso, sino que alcanza (y es condición necesaria) con ver si existe una relación específica entre las distribuciones de probabilidad de sus retornos.

Proposition 2 $A \underset{FSD}{\geq} B \iff G(\nu) \geq F(\nu)$

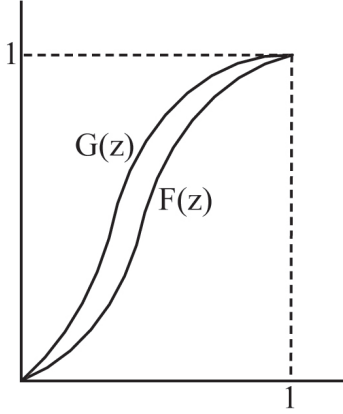


Figura 3.1

Como se puede apreciar en la Figura 3.1, al ser $G(\nu) \geq F(\nu)$, para valores bajos de los retornos, el activo B tiene asignada una masa mayor de probabilidad que el activo A . Esto a su vez implica que la probabilidad de obtener un reotorno mayor o igual a un número dado es más grande bajo F que bajo G ; a su vez, esto implica que la media de los retornos del activo A es mayor que la del activo B .

Demostración. Considere $\int_0^1 U(\nu) dF(\nu)$, integrando por partes obtenemos (recordemos que para simplificar asumimos que el dominio de los retornos es el intervalo $[0, 1]$)

$$U(\nu)F(\nu)|_0^1 - \int_0^1 F(\nu) dU(\nu).$$

(Notar que la regla de integración por partes establece que $\int_a^b h(x) dz(x) = h(x)z(x)|_a^b - \int_a^b z(x) dh(x)$, en este caso $h(x) = U(\nu)$ y $z(x) = F(\nu)$). Análoga-

mente

$$\int_0^1 U(\nu) dG(\nu) = U(\nu)G(\nu)|_0^1 - \int_0^1 G(\nu) dU(\nu).$$

De estas dos últimas expresiones para la utilidad esperada de los retornos se infiere que la condición para que se cumpla dominancia estocástica,

$$\int_0^1 U(\nu) dF(\nu) \geq \int_0^1 U(\nu) dG(\nu),$$

es equivalente a

$$U(\nu)F(\nu)|_0^1 - \int_0^1 F(\nu) dU(\nu) \geq U(\nu)G(\nu)|_0^1 - \int_0^1 G(\nu) dU(\nu).$$

Sustituyendo los límites de integración ($F(1) = G(1) = 1$) y simplificando

$$-\int_0^1 F(\nu) dU(\nu) \geq -\int_0^1 G(\nu) dU(\nu),$$

o

$$\int_0^1 (G(\nu) - F(\nu)) dU(\nu) \geq 0.$$

Esta expresión puede también escribirse como

$$\int_0^1 (G(\nu) - F(\nu)) U'(\nu) d\nu \geq 0,$$

por lo tanto, como asumimos que $U'(\nu) > 0$, se desprende que el activo A domina al activo B si $G(\nu) \geq F(\nu)$. ■

Se puede demostrar que $G(\nu) \geq F(\nu)$ también es condición necesaria como enuncia la proposición. Por lo tanto se puede afirmar $A \underset{FSD}{\geq} B$ si y sólo si $G(\nu) \geq F(\nu)$.

1.1 Consecuencias de Dominancia estocástica de primer orden

Una consecuencia de dominancia de primer orden es que si $A \underset{FSD}{\geq} B$, podemos expresar el retorno del activo dominante A como la suma de el retorno del activo B más una variable aleatoria *positiva*, i.e., $r_A = r_B + \vartheta$, donde ϑ representa la variable aleatoria *positiva*. Esta relación se cumple ya que

$$E(u(r_A)) = E(u(r_B + \vartheta)) \underset{\text{como } U \text{ es creciente}}{\geq} E(u(r_B))$$

entonces

$$E(u(r_A)) \geq E(u(r_B)).$$

Por otra parte es fácil de ver, tomando valor esperado en ambos lados de la ecuación, que $r_A = r_B + \vartheta$ implica $E(r_A) \geq E(r_B)$.

Para resumir, si bien no hemos hecho todas las demostraciones podemos afirmar que las siguientes afirmaciones son equivalentes (es decir, que si vale alguna de ellas, cualquiera, entonces valen también las restantes):

1. $A \underset{FSD}{\geq} B$
2. $G(\nu) \geq F(\nu), \forall \nu \in [0, 1]$
3. $r_A = r_B + \vartheta, \vartheta \geq 0$

Como último comentario, notar que de 3 se sigue que $E(r_A) \geq E(r_B)$; sin embargo, NO vale la vuelta, es decir, NO es cierto que cuando un activo A tiene mayor retorno esperado que otro B entonces vale que $r_A = r_B + \vartheta$ y por ende que $A \underset{FSD}{\geq} B$.

2 Dominancia Estocástica de Segundo Orden

En esta sección y en la siguiente daremos dos definiciones de dominancia estocástica de segundo orden (a la segunda la llamaremos monotónica). Es preciso mencionar que lo que comunmente se llama dominancia estocástica de segundo orden es lo que aquí, en pos de seguir el libro de Huang & Litzenberg, llamamos dominancia estocástica de segundo orden monotónica.

Dominancia estocástica de segundo orden ranquea los activos para todos los individuos que:

- i) Son aversos o neutrales al riesgo ($U'' \leq 0$).

El criterio de dominancia estocástica de segundo orden está preponderantemente relacionado a la dispersión de los retornos.

Definition 3 *Se dice que A domina estocásticamente de segundo orden a B , y se denota como $A \underset{SSD}{\geq} B$, si para todo individuo con $U''(.) \leq 0^2$ es cierto que prefiere el activo A al B , es decir, vale que:*

$$E_F(U(r_A)) \geq E_G(U(r_B))$$

²En realidad hay que pedir un poquito más, tendríamos que restringir la definición a los individuos que además de ser aversos o neutrales al riesgo poseen una función de utilidad con derivada primera continua excepto en un conjunto numerable.

Lo primero que notamos de la definición es que es exactamente la misma que la de FSD con la salvedad de que el conjunto de individuos al que se la aplicamos es DISTINTO del anterior ya que ahora debe valer no para todos los que tienen $U'(\cdot) > 0$ sino para los que tienen $U''(\cdot) \leq 0$ (notar que estamos permitiendo que haya individuos que prefieran menos a más en esta definición). Como para el caso de FSD en esta ocasión también queremos encontrar un criterio que sea más operativa que la definición y equivalente a ésta de forma de poder decidir si vale de manera práctica. También como antes la siguiente proposición nos da un criterio de equivalencia en términos de una expresión que podemos calcular en forma práctica:

Proposition 4 $A \underset{SSD}{\geq} B$ si y sólo si $\int_0^1 (G(z) - F(z)) dz \geq 0 \wedge E(r_A) = E(r_B)$

La siguiente figura ilustra la proposición:

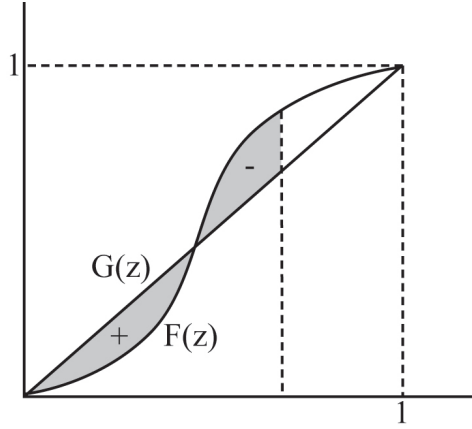


Figura 3.2

Demostración (suficiencia). Anteriormente probamos que

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 U(\nu) dF(\nu) &= U(\nu)F(\nu)|_0^1 - \int_0^1 F(\nu) dU(\nu) \\
 &= U(1) - \int_0^1 F(\nu) dU(\nu) \\
 &= U(1) - \int_0^1 F(\nu) U'(\nu) d\nu.
 \end{aligned}$$

Aplicando integración por partes nuevamente obtenemos (tomando $z(x) = F(\nu)$)

y $h(x) = U'(\nu)$

$$\int_0^1 U(\nu) dF(\nu) = U(1) - \left[U'(\nu) \int_0^\nu F(z) dz \right]_0^1 + \int_0^1 \left(U''(\nu) \int_0^\nu F(z) dz \right) d\nu$$

simplificando y sutituyendo los límites de integración obtenemos

$$\int_0^1 U(\nu) dF(\nu) = U(1) - U'(1)(1 - E(r_A)) + \int_0^1 \left(U''(\nu) \int_0^\nu F(z) dz \right) d\nu,$$

(este resultado se obtiene porque $\int_0^1 F(z) dz = F(z)z|_0^1 - \int_0^1 z dF = 1 - E(r_A)$).

Análogamente podemos probar que

$$\int_0^1 U(\nu) dG(\nu) = U(1) - U'(1)(1 - E(r_B)) + \int_0^1 \left(U''(\nu) \int_0^\nu G(z) dz \right) d\nu.$$

Por lo tanto es fácil ver que si $\int_0^\nu (G(z) - F(z)) dz \geq 0$ entonces

$$\int_0^1 U(\nu) dF(\nu) \geq \int_0^1 U(\nu) dG(\nu),$$

ya que las ecuaciones anteriores implican que

$$\int_0^1 \left(U''(\nu) \int_0^\nu F(z) dz \right) d\nu \geq \int_0^1 \left(U''(\nu) \int_0^\nu G(z) dz \right) d\nu,$$

o

$$\int_0^1 U''(\nu) \left[\int_0^\nu (F(z) - G(z)) dz \right] d\nu \geq 0,$$

y dado que $U''(\nu)$ es negativa, esto prueba la parte de suficiencia. ■

La parte de necesidad no será demostrada (por una prueba ver Foundations for Financial Economics de Huang & Litzemberger, capítulo 2, pág. 47).

2.1 Consecuencias de Dominancia estocástica de segundo orden

Comenzaremos dando una definición:

Definition 5 Dado un activo A con retorno aleatorio r_A decimos que un activo B con retorno aleatorio r_B es un mean preserving spread de A si es cierto que podemos encontrar una variable ε tal que:

$$r_B = r_A + \varepsilon, \text{ con } E(\varepsilon|r_A) = 0$$

Se puede demostrar que $A \underset{SSD}{\geq} B$ si y sólo si A es un mean preserving spread de B .

Es decir, el retorno del activo B es igual al retorno del activo A más una variable aleatoria ortogonal al retorno de A . Notar que r_B y r_A tienen igual media, pero el retorno del activo B tiene mayor varianza y por lo tanto el activo es más riesgoso.

Proposition 6 $A \underset{SSD}{\geq} B \iff r_B = r_A + \varepsilon$, con $E(\varepsilon|r_A) = 0$.

Demostración (suficiencia). (Si $r_B = r_A + \varepsilon$, con $E(\varepsilon|r_A) = 0$ entonces $A \underset{SSD}{\geq} B$).

$$E(U(r_B)) = E(U(r_A + \varepsilon)) \stackrel{\text{por expectativas iteradas}}{=} E(E(U((r_A + \varepsilon)|r_A))),$$

por Jensen Inequality se infiere que

$$\begin{aligned} E(U((r_A + \varepsilon)|r_A)) &\leq U(E(r_A + \varepsilon|r_A)), \\ E(U((r_A + \varepsilon)|r_A)) &\leq U(E(r_A|r_A) + E(\varepsilon|r_A)), \\ E(U((r_A + \varepsilon)|r_A)) &\leq U(r_A), \end{aligned}$$

finalmente, aplicando a ambos lados el operador esperanza, se obtiene

$$E(U(r_B)) \leq E(U(r_A)).$$

■

De la misma forma que sucedía con FSD aquí también citaremos tres condiciones que son equivalentes y cuya demostración no realizaremos:

1. $A \underset{SSD}{\geq} B$
2. $\int_0^\nu (G(z) - F(z)) dz \geq 0, \forall \nu \in [0, 1] \wedge E(r_A) = E(r_B)$
3. $r_B = r_A + \varepsilon$, con $E(\varepsilon|r_A) = 0$ (B es un mean preserving spread de A).

De nuevo, notar, parecido al caso de FSD, que 3 implica que $Var(r_B) \geq Var(r_A)$ (recordar que $E(\varepsilon|r_A) = 0$ implica que $cov(\varepsilon, r_A) = 0$, ¿por qué?); sin embargo, tampoco en este caso es cierto que cuando un activo A tiene menor varianza que otro B entonces vale que $r_B = r_A + \varepsilon$, con $E(\varepsilon|r_A) = 0$ y por ende que $A \underset{SSD}{\geq} B$.

3 Dominancia Estocástica de Segundo Orden Monotónica

Dominancia estocástica de segundo orden monotónica ranquea los activos para todos los individuos que:

- i) Prefieren más a menos riqueza ($U' > 0$).

ii) Son aversos o neutrales al riesgo ($U'' \leq 0$).

El criterio de dominancia estocástica de segundo orden monotónica también está preponderantemente relacionado a la dispersión de los retornos.

Definition 7 Se dice que A domina estocásticamente de segundo orden en forma monotónica a B , y se denota como $A \underset{SSDM}{\geq} B$, si para todo individuo con $U'(\cdot) > 0$ y $U''(\cdot) \leq 0$ es cierto que prefiere el activo A al B , es decir, vale que:

$$E_F(U(r_A)) \geq E_G(U(r_B))$$

Lo primero que notamos de la definición es que es exactamente la misma que la de FSD con la salvedad de que el conjunto de individuos al que se la aplicamos es más chico y *es un subconjunto* del anterior ya que ahora debe valer no para todos los que tienen $U'(\cdot) > 0$ sino sólo para los que *además* de tener $U'(\cdot) > 0$ tienen $U''(\cdot) \leq 0$. Como para el caso de FSD en esta ocasión también queremos encontrar un criterio que sea más operativa que la definición y equivalente a ésta de forma de poder decidir si vale de manera práctica. También como antes la siguiente proposición nos da un criterio de equivalencia en términos de una expresión que podemos calcular en forma práctica:

Proposition 8 $A \underset{SSDM}{\geq} B$ si y sólo si $\int_0^v (G(z) - F(z)) dz \geq 0 \wedge E(r_A) \geq E(r_B)$

La siguiente figura ilustra la proposición:

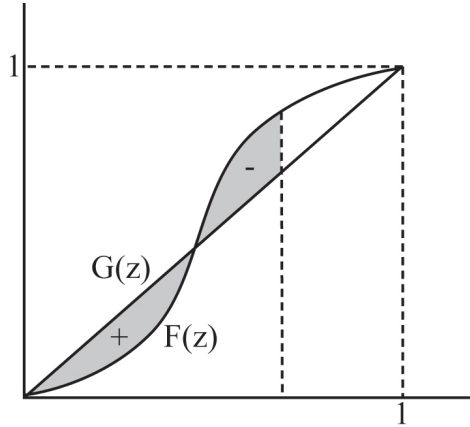


Figura 3.2

3.1 Consecuencias de Dominancia estocástica de segundo orden monotónica

De la misma forma que sucedía con SSD aquí también citaremos tres condiciones que son equivalentes y cuya demostración no realizaremos:

1. $A \underset{SS\overline{DM}}{\geq} B$
2. $\int_0^\nu (G(z) - F(z)) \, dz \geq 0, \quad \forall v \in [0, 1] \quad \wedge \quad E(r_A) \geq E(r_B)$
3. $r_B = r_A + \varepsilon, \text{ con } E(\varepsilon|r_A) \leq 0$