Bonos Corporativos

1. Introduccion

Hasta ahora cuando encontramos el precio justo de un bono asumimos que dichos bonos no tienen riesgo de default. Cuando evaluamos bonos corporativos claramente este supuesto no es correcto ya que dichos bonos van a poder pagarse unicamente si la empresa no quiebra. Como cualquier empresa tiene una probabilidad de quiebra, tambien existe una posibilidad de que los bonos no puedan ser pagados. Por lo tanto el valor de los bonos corporativos (el descuento por posibilidad de default) van a estar atados a la suerte de la empresa. Nosotoros vamos a evaluar el valor de los bonos como un derivado donde el subyacente va a ser el valor de la firma. Comenzamos repasando los modelos basicos de la valuacion de bonos corporativos. Aqui desarrollaremos la estructura del valor firma. Luego presentamos un modelo basico que toma a los activos de la empresa como derivados sobre el valor de la firma, donde se utiliza el modelo de Black and Scholes para realizar la valuacion de los mismos.

Este primer modelo asume que el momento de la quiebra esta fijado en el tiempo (como el tiempo de madurez de una opcion europea). El segundo y tercer modelo que presentamos relajan este supuesto ya que admiten un mayor rol de los accionistas y poseedores de bonos sobre las decisiones de quiebra, y por lo tanto se endogeniza el tiempo donde se produce la quiebra.

Por ultimo presentaremos modelos que capturan la interaccion entre poseedores de equity y de bonos. Tipicamente en un proceso de quiebra se da una negociacion entre los primeros y los ultimos para determinar el momento del default, esta interaccion es capturada en lo que se conoce en la literatura como *Optimal Stopping Games* o juegos de tiempo de detencion optimo. En este capitulo daremos una breve introduccion y presentaremos un modelo simple que asume un proceso estocastico discreto para el valor de la firma.

2. Valor de la Firma

Para hacer el pricing del riesgo de un bono emitido por la firma, primero debemos definir un modelo para el valor de la firma. Como punto de partida supondremos que el valor de mercado de la firma a tiempo t esta dado por V, donde V sigue un proceso browniano geometrico (BG),

$$dV = \mu V dt + \sigma V dz. \tag{1}$$

2.1. Modelo Simple de Black Scholes

El modelo mas simple de evaluacion de bonos corporatiovs, supone que la firma para financiarse emite un bono sin cupones que paga D, a tiempo $T < \infty$ y acciones.

Para determinar el pay-off de los poseedores del bono hay que notar que a tiempo T el valor de la firma puede ser mayor o menor a D. La idea es que, llegado el momento de pago, la firma paga si $V > D$, y sino quiebra, se liquidan la empresa y los inversores reciben V. Por lo tanto, el pago a los poseedores de bonos es

$$\begin{aligned} BP &= min\{D, V\} \\ &= D - max\{D - V, 0\}. \end{aligned}$$

Note que el valor del bono es igual al valor del principal, D, menos un *put* sobre el valor de la firma con strike price igual a D.

El pago para los poseedores de acciones es el valor residual de la firma luego de pagar a los bonistas, y si este valor es negativo el pago es igual a cero. Es decir

$$\begin{aligned} EP &= V - BP && (2)\\ &= V - D + max\{D - V, 0\} && (3)\\ &= max\{V - D, 0\}, && (4) \end{aligned}$$

o sea igual al valor de un call sobre el valor de la firma V con strike price igual a D.

Dado que asumimos el proceso estocastico que sigue el valor de la firma es facil calcular en todo momento del tiempo el valor del bono corporativo y del equity, simplemente aplicando las formulas de valuacion de un put y de un call.

3. Tiempo de Default Endogeno: Leland

El modelo anterior supone que el default solo puede ocurrir a tiempo T. Este supuesto es demasiado restrictivo e irrealista. Por ello asumiremos que la firma declara quiebra la primera vez que V toca la barrera $\underline{V}$, que puede ser distinta a D. Por lo tanto, si denotamos a τ como el tiempo de quiebra, τ debe cumplir que $\tau = \inf\{t \in [0, T] : V = \underline{V}\}$.

Denotemos a $L_t(V)$ como el valor del precio del bono emitido por la firma. En este caso asumiremos que el bono paga cupones fijos, b de forma continua.

Si los agentes son neutrales al riesgo, el precio de bono a tiempo $t < \tau$ es la suma descontada de los cupones hasta el momento de default, mas el valor de la firma al tiempo de default (menos el costo del default) descontado. En definitiva L_t viene dado por

$$L_t = E_t[\int_t^\tau (e^{-r(s-t)}b)ds + e^{-r(\tau-t)}(\underline{V} - \delta)] \qquad (5)$$

donde r es la tasa libre de riesgo y δ es el costo de default. La primera parte de la ecuacion se puede simplificar

$$\int_t^\tau e^{-r(s-t)}bds = \frac{b}{r}(1 - e^{-r(\tau-t)}).$$

Por lo que la ecuacion 5 se puede re escribir como

$$L_t = \frac{b}{r} + E_t[e^{-r(\tau-t)}](\underline{V} - \delta - \frac{b}{r}).$$

El valor del bono queda expresado como el valor de la perpetuidad, $\frac{b}{r}, menos$, la diferencia actualizada entre el valor del bono y el de la firma (ajustado por el costo de default) a tiempo de default.

Note que se puede escribir el valor de una perpetuidad como:

$$rL = b + \frac{1}{dt}E_t[dL]$$

donde se tomo $dt = 0$. Aplicando Lema de Ito, obtenemos la ecuacion diferencial de segundo orden que caracteriza la evolucion del precio del bono

$$rL(V) = b + rVL_V(V) + \frac{\sigma^2}{2}V^2L_{VV}(V).$$

La solucion particular de dicho modelo es simplemente $\frac{b}{r}$, por lo que la solucion general del valor del bono es $L(V) = \frac{b}{r} + C_1 V^{\lambda_1} + C_2 V^{\lambda_2}$. Ahora, si notamos que si $V \to \infty$ la posibilidad de default deberia ser nula, por lo que el valor del bono deberia aproximarse al valor de un bono libre de riesgo de default, $L(V) = \frac{b}{r}$. Entonces asumiendo que $\lambda_2 > 0$ la solucion a la ecuacion diferencial esta dada por

$$L(V) = \frac{b}{r} + C_1 V^{\lambda_1}, \tag{6}$$

donde $\lambda_1 < 0$.

Por otra parte, si notamos que a tiempo de liquidacion (cuando $V = \underline{V}$), el valor de la deuda debe satisfacer $L(\underline{V}) = \underline{V} - \delta$, obtenemos que $C_1 = \frac{(\underline{V} - \delta - \frac{b}{r})}{\underline{V}^{\lambda_1}}$. Por lo que el valor del bono (como funcion de $\underline{V}$) es

$$\begin{aligned} L(V) &= \frac{b}{r} + \frac{(\underline{V} - \delta - \frac{b}{r})}{\underline{V}^{\lambda_1}} V^{\lambda_1}. && (7) \\ & \frac{b}{r} + (\underline{V} - \delta - \frac{b}{r}) \left(\frac{V}{\underline{V}}\right)^{\lambda_1} && (8) \\ & \frac{b}{r} - (\frac{b}{r} - (\underline{V} - \delta)) \left(\frac{V}{\underline{V}}\right)^{\lambda_1} && (9) \end{aligned}$$

.

Comparando la ecuacion 5 con la ecuacion 9 (siendo $L_t \triangleq L(V)$) notamos que

$$E_t[e^{-r(\tau - t)}] = \left(\frac{V}{\underline{V}}\right)^{\lambda_1}.$$

Podemos intenterpretar el valor del bono como el valor de la perpeuidad menos la diferencia entre el valor descontado del bono y de la firma al tiempo de la quiebra.

3.1. $\underline{V}$ Endogeno

Hasta ahora asumimos que $\underline{V}$ era una constante exogena. En esta sección levantaremos este supuesto. Asumiremos que los poseedores de acciones pueden forzar la quiebra, decidiendo cuando cesan de inyectar dinero (o dejar de pagar cupones) a la firma.

Para ello lo primero que debemos hacer es evaluar el payoff de los equity holders en tiempo para determinar cuando (para que valor de $\underline{V}$) es optimo para ellos cerrar la firma (para obtener el remanente maximo posible). El valor del equity es igual al valor de la firma menos el valor descontado del costo de liquidacion, menos el valor del bono:

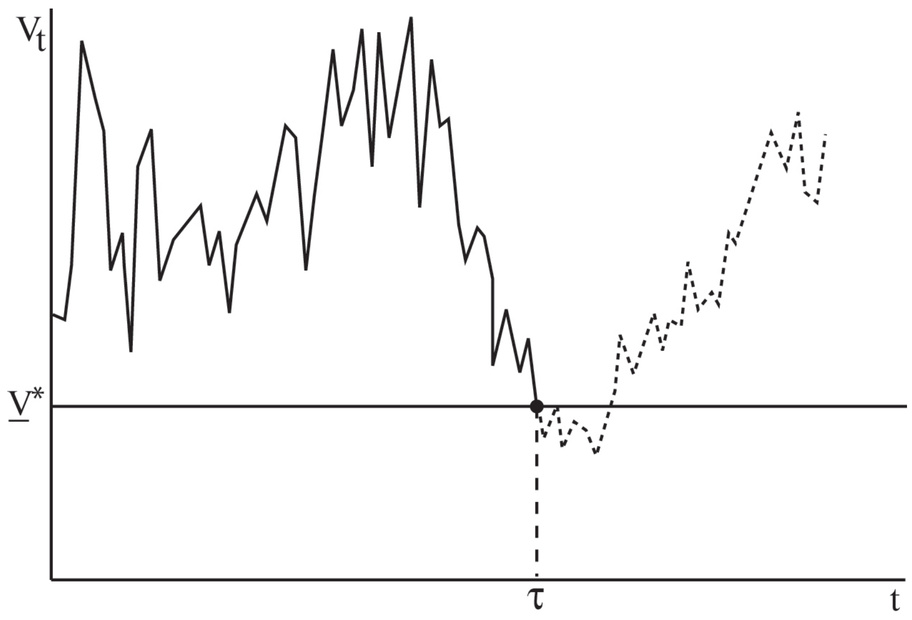
$$\begin{aligned} EP &= V - \delta \left(\frac{V}{\underline{V}}\right)^{\lambda_1} - L(V) \\ &= V - \delta \left(\frac{V}{\underline{V}}\right)^{\lambda_1} - \frac{b}{r} - (\underline{V} - \delta - \frac{b}{r}) \left(\frac{V}{\underline{V}}\right)^{\lambda_1} \\ &= (V - \frac{b}{r}) - (\underline{V} - \frac{b}{r})(\frac{V}{\underline{V}})^{\lambda_1}. \end{aligned}$$

Note que a tiempo de quiebra (cuando $V = \underline{V}$) el valor del equity es igual a cero.

Dado que los poseedores del equity van a maximizar su pay-off, esto se logra haciendo $\frac{\partial EP}{\partial \underline{V}} = 0$, la condicion de primer orden del problema de maximizacion del equity de los accionistas. .

Esta condicion es analoga a la condcion de "smooth pasting" ($\frac{\partial EP}{\partial V}\big|_{V=\underline{V}}$). De ambas formas obtenemos

$$\underline{V}^{*}=-\frac{\lambda_1}{1-\lambda_1}\frac{b}{r}.$$



En la figura vemos una trayectoria de la evolucion del valor de la firma que que eventualmente toca la barrera V, y en dicho momento se declara el defualt sobre los bonos.

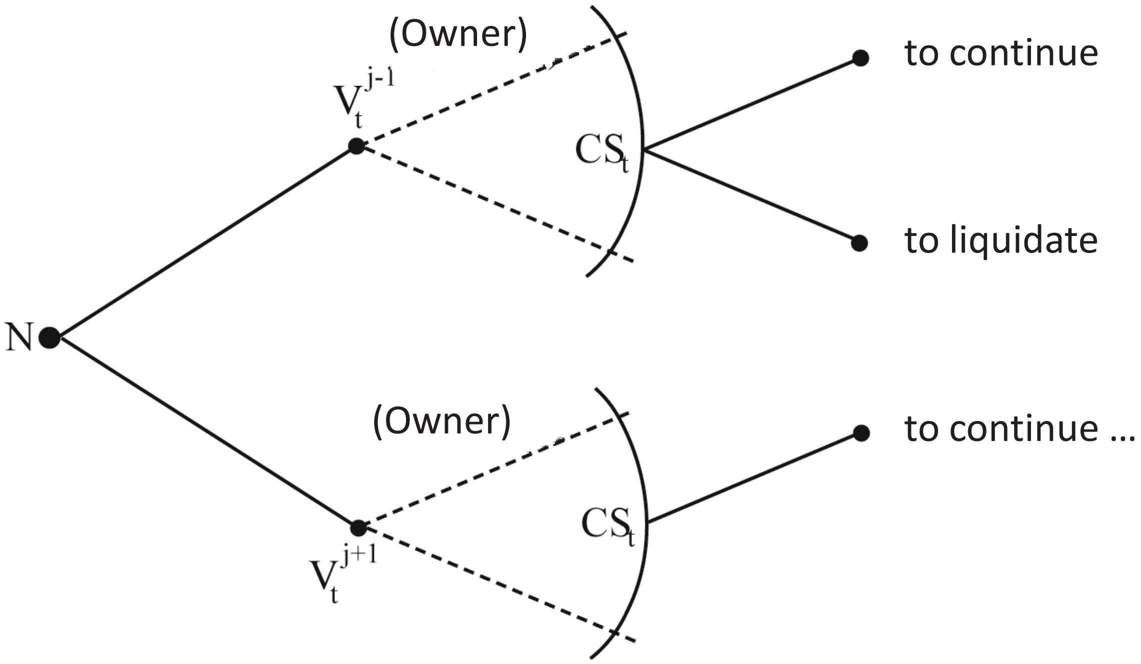
4. Prima de Default

El problema con los modelos recien expuestos es que no pueden generar la prima de default que exigen los individuos en los mercados. Solo pueden generar dicha prima para valores exesivamente altos de los costos de cierre, δ. Por otra parte, pareceria que, en general, los poseedores de bonos pueden ser "inducidos" por los poseedores del equity a aceptar concesiones en el cobro de los cupones cuando la alternativa es la bancarrota.

4.1. Modelos de Renegociacion: Modelo de Anderson y Sundaresan

A continuacion presentaremos un modelo binomial que estudia el comportamiento de los poseedores de bonos y de los poseedores de equity. Supongamos que en el tiempo t al valor de la firma se le asigna un estado j; en $t+1$ el valor de la firma puede pasar a un estado mayor $j+1$ (el valor se incrementa) o a un estado menor $j-1$ (el valor desciende). Supongamos tambien que la firma produce un flujo de ganancias f_t^j, que depende del estado en que se encuentre. Ademas la firma posee un contrato que especifica que se le paga un flujo CS_t a los poseedores de los bonos.

Si existen costos de cierre los poseedores del equity pueden inducir a los poseedores de bonos a aceptar un valor del cupon menor al inicialmente pactado, porque en caso de que no acepten y provoquen la quiebra pueden cobrar poco debido a los costos de quiebra (esto vale en un tiempo cercano a la quiebra).



Para encontrar el equilibrio de este juego haremos uso del caracter finito del mismo, resolviendo de adelante para atras. Empecemos entonces por el valor de madurez terminal, T.

En T, V_T esta dado, y el poseedor del equity elige un S_T como cashflow para ofrecerle a los poseedores de deuda. Si $S_T > CS_T$, no hay ningun conflicto; el conflicto ocurre en caso de que $S_T \leq CS_T$.

Ahora los poseedores de bonos tienen dos opciones:

1. No exigir la quiebra y dejar que continue el juego,

2. exigir la quiebra.

   La opcion, **2.**, resulta en un pay-off para los poseedores de bonos igual a: $max\{V_T - K, 0\}$, donde K es el costo de bancarrota.

   La opcion **1.** resulta en un pay-off de

   S_T para el poseedor del bono,

   y

   $V_T - S_T$ para los del equity.

   Ahora sabemos que si $S_T \leq CS_T$, el poseedor del bono elige la opcion **1.** si y solo si $S_T > max\{V_T - K, 0\}$. Por otro lado, dada esta eleccion, la respuesta optima de los poseedores del equity, es elegir el S_T tal que

$$S_T = \begin{array}{ll} CS_T, & \text{si } \; V_T - K > CS_T \\ \max\{V_T - K, 0\}, \text{ si} & V_T - K \leq CS_T \end{array}$$

Si $V_T - K \leq CS_T$ los dueños del equity le pagan lo minimo posible de modo de dejar al poseedor del bono indiferentes entre exigir o no la quiebra, lo que es igual a $max\{V_T - K, 0\}$.

Los pay-offs de los dueños de los bonos y del equity son

$$\begin{aligned} B(V_T) &= min\{CS_T, max\{V_T - K, 0\}\} \\ E(V_T) &= V_T - B(V_T) \end{aligned}$$

<u>El problema a tiempo t</u>

Consideremos el problema ahora a tiempo t, donde $t < T$. En este caso tenemos que el valor de la firma correspondiente al estado j esta dado por V, y los dueños del equity eligen S_t. El caso relevante es cuando $S_t \leq CS_t$. Los argumentos a tiempo t son similares pues los dueños de los bonos pueden elegir entre exigir el pago de la deuda y cobrar: $max\{V_t - K, 0\}$ o elegir la continuacion del funcionamiento de la firma y obtener lo que le corresponde por el cashflow que proponen pagar los dueños del equity: S_t.

Como la firma permanece en funcionamiento, los poseedores del bono calculan que el valor del bono en $t+1$ va a depender del valor de la firma en dicho momento. Con probabilidad p_t el valor de la firma sera bajo y los poseedores de bonos obtendran $B(V_{t+1}^{j-1})$. Con probabilidad $1-p_t$ el valor de la firma sera alto y los poseedores de bonos obtendran $B(V_{t+1}^{j+1})$. En conclusion, si los poseedores de los bonos aceptan la continuacion de la firma, el valor de los bonos sera

$$S_t + \frac{1}{r}\{p_t B(V_{t+1}^{j-1}) + (1 - p_t) B(V_{t+1}^{j+1})\},$$

donde p_t son las probabilidades neutrales al riesgo.

Dado esto, los dueños de los bonos, aceptan la continuacion si y solo si

$$S_t + \frac{1}{r}\{p_t B(V_{t+1}^{j-1}) + (1 - p_t) B(V_{t+1}^{j+1})\} > max\{V_t - K, 0\}.$$

Por lo tanto los dueños del equity le pagan

$$S_T = \begin{array}{ll} CS_T, & \text{si } \; V_T - K > CS_T + \frac{1}{r}[p_t B(V_{t+1}^{j-1}) + (1 - p_t) B(V_{t+1}^{j+1}), \\ max\{max\{V_t - K, 0\} - \frac{1}{r}[p_t B(V_{t+1}^{j-1}) + (1 - p_t) B(V_{t+1}^{j+1})]\}, 0\}, & \text{en caso contrario.} \end{array}$$

Escrito de otro modo, el S_t que eligen optimamente los duenos del equity es igual a

$$S(t, j, V) = min\{CS_t, max\{max\{V_t - K, 0\} - \frac{1}{r}[p_t B(V_{t+1}^{j-1}) + (1 - p_t) B(V_{t+1}^{j+1})]\}, 0\},$$

por lo que los valores a tiempo t ($\forall\ t < T$) de los bonos y el equity son

$$\begin{aligned} B(V, t, j) &= S(t, j, V) + \frac{1}{r}\{p_t B(V_{t+1}^{j-1}) + (1 - p_t) B(V_{t+1}^{j+1})\} \\ E(V, t, j) &= f_t^j - B(V, t, j). \end{aligned}$$

Estas dos ecuaciones representan la dinamica de la negociacion entre los dueños del equity y los dueños de bonos cuando se acerca la bancarota. Los dueños del equity ofrecen pagar menos que el cupón pactado y a los acreedores se le presenta un Trade-off entre forzar la quiebra o dejar que la firma continue, y correr el riesgo de que quiebre en un mal estado de la naturaleza y cobrar aun menos. Este trade-off es el puede justificar la elevada la prima por riesgo que vemos en los datos.