Riesgo, Incertidumbre y Finanzas
Trabajo Práctico 2: Solución

August 14, 2020

1. Partimos de dos agentes con:
$$R_A^1(w) < R_A^2(w) \quad \forall w$$

a) Tomamos
$$u_2(w) = g(u_1(w)) \tag{1}$$
y queremos ver que $g(.)$ es una función concava. [1] Diferenciando en (1) tenemos:
$$u_2'(w) = g'(u_1(w))\, u_1'(w), \tag{2}$$
y dado que $u_i'(w) > 0$, obtenemos que $g'(.) > 0$. Diferenciando nuevamente en (2) obtenemos:
$$u_2''(w) = g''(u_1(w))\,[u_1'(w)]^2 + g'(u_1(w))\, u_1''(w). \tag{3}$$
Dividiendo (3) por (2) obtenemos:
$$\begin{aligned} \frac{u_2''(w)}{u_2'(w)} &= \frac{g''(u_1(w))\,[u_1'(w)]^2}{g'(u_1(w))\,u_1'(w)} + \frac{g'(u_1(w))\,u_1''(w)}{g'(u_1(w))\,u_1'(w)} \\ \underbrace{\frac{u_2''(w)}{u_2'(w)}}_{-R_A^2(w)} &= \frac{g''(u_1(w))}{g'(u_1(w))}u_1'(w) + \underbrace{\frac{u_1''(w)}{u_1'(w)}}_{-R_A^1(w)}, \end{aligned}$$
luego
$$\underbrace{R_A^1(w) - R_A^2(w)}_{<0} = \frac{g''(u_1(w))\overbrace{u_1'(w)}^{>0}}{\underbrace{g'(u_1(w))}_{>0}},$$
de donde vemos que $g''(.) < 0$ y la función $g(.)$ es concava.

b) Sea $\tilde{w}$ una lotería. Calculamos el equivalente cierto del agente i de la siguiente manera:
$$E[u_i(\tilde{w})] = u\left[w_{rp}^i\right],$$
donde w_{rp}^i es el equivalente cierto del agente i. Es decir, entre enfrentar la loteria o recibir w_{rp}^i de forma segura, el agente esta indiferente. Lo que queremos mostrar es que $w_{rp}^2 \leq w_{rp}^1$. Esto es intuitivo: si el agente 2 es mas averso al riesgo, dandole menos plata lo dejo indiferente a enfrentar la lotería.
Usando lo que probamos en el inciso anterior, sabemos que $u_2(w) = g(u_1(w))$ con $g(\bullet)$ creciente y cóncava.
De la definición de equivalente cierto para el agente 2 tenemos que:
$$g\left(u_1(w_{rp}^2)\right) = u_2\left(w_{rp}^2\right) = E[u_2(\tilde{w})]$$
Pero:
$$E[u_2(\tilde{w})] = E[g(u_1(\tilde{w}))] \leq g(E[u_1(\tilde{w})])$$

[1] Notamos que siempre va a existir una g(.) que cumpla que $u_2(w) = g(u_1(w))$. Esto es porque u_1 y u_2 son ordinalmente idénticas. En criollo, son las dos estrictamente crecientes, por lo que siempre ordenan a los valores de igual forma.

Donde la ultima desigualdad sale de la Desigualdad de Jensen, que nos dice que para cualquier $g(.)$ concava, $E(g(x)) \leq g(E(x))$. De todo lo anterior, en resumen, tenemos que:

$$g\left(u_1(w_{rp}^2)\right) \leq g\left(E\left[u_1\left(\tilde{w}\right)\right]\right)$$

Ahora bien, como g es creciente, la desigualdad de arriba solo puede valer si:

$$u_1(w_{rp}^2) \leq E\left[u_1\left(\tilde{w}\right)\right]$$

Ya que si g es creciente, entonces $g(a) \leq g(b)$ implica $a \leq b$. si miramos al lado derecho de la desigualdad, tenemos la utilidad esperada de la lotería para el agente 1. Por definición, esto es igual a la utilidad evaluada en el equivalente cierto. Por lo tanto, haciendo ese reemplazo, obtenemos:

$$u_1(w_{rp}^2) \leq u_1\left(w_{rp}^1\right)$$

Y, como u_1 es creciente, eso implica que:

$$\boxed{w_{rp}^2 \leq w_{rp}^1}$$

Que era lo que queríamos probar.

c) Que para el agente i una apuesta $\tilde{w}$ sea mas atractiva que un monto seguro W implica:

$$u_i\left(W\right) \leq E\left[u_i\left(\tilde{w}\right)\right].$$

El enunciado nos pide que mostremos

$$u_2\left(W\right) \leq E\left[u_2\left(\tilde{w}\right)\right] \Rightarrow u_1\left(W\right) \leq E\left[u_1\left(\tilde{w}\right)\right]$$

Partamos de $u_2\left(W\right) \leq E\left[u_2\left(\tilde{w}\right)\right]$. Usando nuevamente que $u_2\left(w\right) = g\left(u_1\left(w\right)\right)$ con $g(\bullet)$ creciente y cóncava, podemos reescribir como:

$$g\left(u_1\left(W\right)\right) \leq E\left[g\left(u_1\left(\tilde{w}\right)\right)\right]$$

Por Desigualdad de Jensen en el término del lado derecho sabemos que $E\left[g\left(u_1\left(\tilde{w}\right)\right)\right] \leq g\left(E\left[u_1\left(\tilde{w}\right)\right]\right)$. Reemplazando, obtenemos:

$$g\left(u_1\left(W\right)\right) \leq g\left(E\left[u_1\left(\tilde{w}\right)\right]\right)$$

Como g es creciente, eso implica que:

$$\boxed{u_1\left(W\right) \leq E\left[u_1\left(\tilde{w}\right)\right]}$$

Que era lo que queríamos probar.

2. Para resolver este ejercicio utilizaremos el teorema de Arrow que se encuentra en las notas de medidas de riesgo.

Theorem 1 *Si* $\frac{dR^A}{dz} < 0 \Longrightarrow \frac{da}{dw_o} > 0$ *,*$\forall w_o$ *(también es cierto que* $\frac{dR^A}{dz} > 0 \Longrightarrow \frac{da}{dw_o} < 0$ *y que*$\frac{dR^A}{dz} = 0 \Longrightarrow \frac{da}{dw_o} = 0$*), donde* z *es el activo riesgoso y* w_0 *es la riqueza inicial.*

En nuestro caso tenemos:

(a) $u(z) = z - \beta z^2 \Longrightarrow u'(z) = 1 - 2\beta z$ y $u''(z) = -2\beta \Longrightarrow R_A(z) = \frac{2\beta}{1-2\beta z} \Longrightarrow \frac{\partial R_A(z)}{\partial z} = \frac{4\beta^2}{(1-2\beta z)^2} > 0 \Longrightarrow$ $bien\ inferior$ Por lo tanto, con esta función de utilidad, si la elección es entre un activo libre de riesgo y uno riesgoso, a mayor cantidad de riqueza inicial menos cantidad de plata se invertirá en el activo riesgo. Para este caso particular, tambien vale para la elección entre n activos, puesto que la función de utilidad es tal que se cumple separación monetaria de dos fondos.

(b) $u(z) = 1 - e^{-\beta z} \Longrightarrow u'(z) = \beta e^{-\beta z}$ y $u''(z) = -\beta^2 e^{-\beta z} \Longrightarrow R_A(z) = \beta \Longrightarrow \frac{\partial R_A(w)}{\partial z} = 0$
En este caso, aumentar la riqueza incial no generará ningun cambio en la cantidad invertida en activo riesgoso. Con esta función tambien vale separación monetaria de dos fondos, por lo que esta conclusión puede extenderse al caso con n activos.

(c) $u(z) = \ln(z) \Longrightarrow u'(z) = \frac{1}{z}$ y $u''(z) = -\frac{1}{z^2} \Longrightarrow R_A(w) = \frac{1}{z} \Longrightarrow \frac{\partial R_A(w)}{\partial w} = -\frac{1}{z^2} < 0 \Longrightarrow$ *bien normal*
En este caso, aumentar la riqueza incial generar un aumento de la cantidad invertida en activo riesgoso. En particular (no lo demostramos), el aumento será proporcional: aumentar 10% la riqueza inicial llevará a un aumento de 10% en la cantidad invertida en activo riesgoso, es decir, la elasticidad entre ambos es 1. Esto ocurre porque el coeficiente de aversión al riesgo **RELATIVO** es constante. Ver Huang y Litzemberger, Cap. 1, sec. 22 para una discusión sobre esta propiedad.
Notamos también que esta función de utilidad cumple con separación monetaria de dos fondos, por lo que las conclusiones se extienden a n activos.