Decisión Optima de Portafolio
Introducción

En esta primera parte nos dedicaremos a estudiar las decisiones individuales óptimas de elección de portafolios bajo incertidumbre y sus implicancias a la hora de valuar activos riesgosos. A lo largo de esta primera parte seguiremos muy de cerca el libro seminal de Huang & Litzenberger "Foundations for Financial Economics" (HL de ahora en más) que es el libro de texto por excelencia en cursos avanzados de teoría financiera. Nuestro objetivo no es sólo hacer un mero resumen de los primeros capitulos del libro sino presentar un enfoque más simplificado e intuitivo que ayude a entender las herramientas y conceptos presentados en HL como una teoría integral y no como resultados matemáticos aislados.

En pos de nuestro objetivo, el Capitulo 1 es un resumen de los conceptos básicos de probabilidad y estadística. Este capítulo presenta, en una apéndice, las definiciones básicas de la estadística. Luego muestra conceptos fundamentales de medición de riesgo como los son la Prima de Riesgo y la Desigualdad de Jensen. A continuación presentamos teoremas que enmarcan la decisión óptima de portafolio de un individuo, una estática comparada de cómo cambia esta decisión cuando lo hacen su actitud frente al riesgo o su riqueza inicial. Finalmente proveeremos condiciones suficientes para extender estos resultados a economías con tres o más activos a través del concepto de Separación Monetaria de dos Fondos.

El Capítulo 2 trata el concepto de Dominancia Estocástica. Estos conceptos, basados en supuestos mínimos de las preferencias, nos permitirán identificar condiciones estadísticas a través de las cuales podemos ordenar los activos riesgos.

En el Capítulo 3 presentamos el concepto de portafolio frontera y sus propiedades matemáticas. El conjunto de estos portafolios tiene la propiedad de minimizar la varianza dado un retorno esperado. En una primera sección estudiaremos condiciones suficientes que nos permitan caracterizar completamente las elecciones de maximización de utilidad a través de algunos momentos de la distribución de los activos, la media y la varianza. Esta primera sección da origen al Modelo de Media-Varianza. En este contexto de Media-Varianza derivaremos la frontera de portafolios y sus propiedades matemáticas. Finalmente, presentaremos la relación entre activos riesgoso y el activo libre de riesgo.

Por último, en el Capítulo 4, introduciremos, en primera instancia, las condiciones sobre las distribuciones de los activos que son suficientes para que los individuos elijan portafolios frontera, más aún, estas condiciones serán suficientes para que los individuos elijan una combinación lineal de dos portafolios frontera. Seguido a esto, introduciremos un concepto de equilibrio que, sumado a la primera parte de este capítulo, nos permitirá obtener el CAPM o en inglés, *Capital Asset Pricing Model*. Este modelo describe cómo el exceso de retorno esperado de un portafolio bien diversificado está relacionado con el riesgo inherente del mercado a través de una medida de riesgo de equilibrio, el *Beta*.

Por último, en este capítulo también discutimos un modelo de valuación más general, el APT o en inglés, Arbitrage Pricing Theory. Este modelo, a diferencia del CAPM, tiene un origen meramente estadístico y relaciona el exceso de retorno esperado de un portafolio con un número de factores de riesgo. Se demuestra que el CAPM puede ser visto como un caso particular del APT.

En resumen, la Teoría Financiera descansa en un principio: **El Principio de No Arbitraje**. Este principio estipula que no se puede crear algo de la nada, o mejor dicho, que no se puede obtener ganacias sin riesgo, sin que exista una inversión inicial. Los capítulos aquí presentados, en particular el 3 y el 4, descansan, implícitamente, en este precepto. A medida que se avanza en estos capítulos se agregarán supuestos para obtener resultados más potentes. Por ejemplo, se añaden condiciones sobre las distribuciones estadísticas para obtener condiciones suficientes sobre las elecciones individuales de portafolios, y posteriormente se agrega un concepto de equilibrio para obtener una relación de valuación como el CAPM.

(Chapter head:)Medidas de Riesgo

En este capítulo presentaremos, por un lado, una breve reseña sobre algunas definiciones básicas de estadística, probabilidad, y también un repaso sobre las definiciones de riesgo, como la Medida de Arrow-Pratt o la Desigualdad de Jensen. Estos conceptos serán utilizados exhaustivamente en el futuro.

1 Aversión al Riesgo *(Desigualdad de Jensen)*

Se dice que un individuo es *averso al riesgo* si este individuo no esta dispuesto a aceptar una *apuesta* actuarialmente justa.

Considere la siguiente *apuesta:* dada una riqueza inicial w_o, se toma una *apuesta* donde los posibles resultados son

$$\begin{aligned} h_1 &< 0 \text{ con probabilidad } p, \\ h_2 &> 0 \text{ con probabilidad } (1-p). \end{aligned}$$

Definition 1 *Una apuesta es actuarialmente justa si el valor esperado de su payoff es cero, es decir*

$$h_1 p + h_2(1-p) = 0.$$

Si el individuo es averso al riesgo este no está dispuesto a aceptar una apuesta actuarialmente justa, y por lo tanto obtiene más utilidad con su riqueza inicial que con la utilidad esperada por aceptar la apuesta. Esto es:

$$U(w_o) \geq U(w_o + h_1)p + U(w_o + h_2)(1-p).$$

Dado que, por definición, una apuesta *actuarialmente justa satisface que* $w_o = (w_o + h_1)p + (w_o + h_2)(1-p)$, podemos escribir la desigualdad como

$$U((w_o + h_1)p + (w_0 + h_2)(1-p)) \geq U(w_0 + h_1)p + U(w_0 + h_2)(1-p).$$

Esto es conocido como la *desigualdad de Jensen*. Esta relación demuestra que aversión al riesgo implica una función cóncava y que una función cóncava implica aversión al riesgo (no hay más que realizar la demostración al revés).

Si definimos la (riqueza *ex-ante*) como una variable aleatoria $\widehat{w} = w_o + h$, donde h es la variable aleatoria definida anteriormente, podemos expresar la desigualdad de Jensen como

$$U(E(\widehat{w})) \geq E(U(\widehat{w})).$$

Esto se cumple ya que concavidad (estricta) implica que la utilidad marginal de la riqueza es decreciente. Entonces para cada nivel de riqueza la utilidad adicional ganada por un peso más es menor (en valor absoluto) que la utilidad perdida por perder un peso. Por lo tanto, para un agente averso al riesgo no vale la pena tomar riesgo de entrar en una apuesta justa.

2 Prima de Riesgo *(Markowitz)*

Podemos describir la *prima de riesgo, Rp*, con respecto a una lotería. La prima de riesgo está definida como el monto de dinero que un individuo está dispuesto a *pagar* para evitar una lotería. Por lo tanto

$$Rp = E(\widehat{w}) - w_{Rp},$$

donde w_{Rp} es la riqueza de certeza equivalente definida como (ver Fig 1.1)

$$U(w_{Rp}) = E(U(\widehat{w})).$$

2.1 Costo de la apuesta

Otra posible convención es definir el costo de la apuesta como

$$C = w_0 - w_{Rp}.$$

Cuando el juego es actuarialmente justo las 2 definiciones son equivalentes.

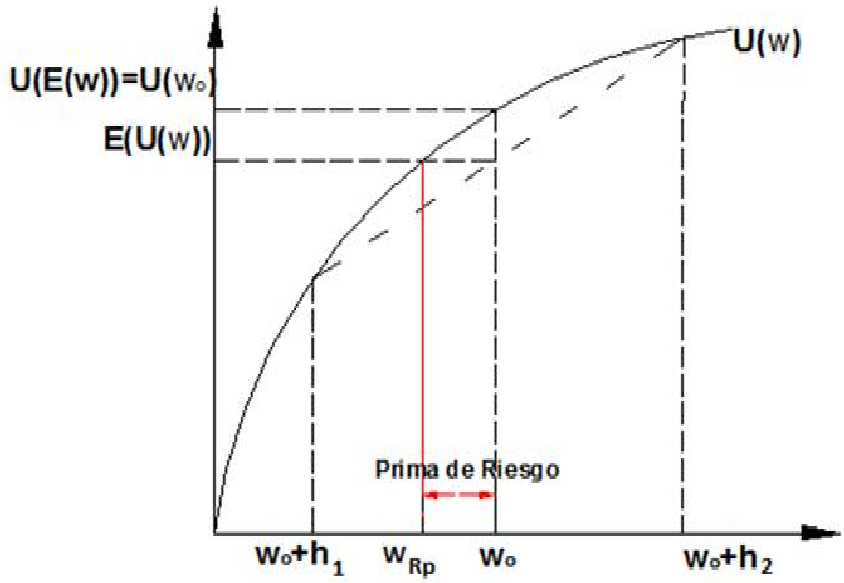

Figura 1.1

2.1.1 Prima de Riesgo *(Arrow Pratt R. A.)*

En vez de definir la medida de riesgo para una apuesta, podemos alternativamente dar una medida de aversión al riesgo relacionada con las preferencias del individuo. w_p

Considere un individuo que tiene riqueza inicial w_o y que está obligado a tomar una apuesta justa de h dólares. Un agente averso al riesgo va a estar indiferente entre tomar la apuesta y un monto seguro que sería igual a la riqueza inicial menos una prima. Por lo tanto, definimos la prima de riesgo como el monto Rp que el agente está dispuesto a pagar para que no se ejecute la lotería. La riqueza segura una vez pagada la prima es $w_o - Rp$. Algebraicamente lo expresamos como

$$\overbrace{U(w_{Rp}) = U(w_o - Rp)}^{1} = \overbrace{E(U(\widehat{w})) = E(U(w_o + h))}^{2}$$

$$\Leftrightarrow \exists \text{ una apuesta justa } h \text{ tal que } h_1 p + h_2(1-p) = 0.$$

Si se expande por Taylor la parte 1 alrededor de w_o se obtiene

$$U(w_o - Rp) = U(w_o) - U'(w_o)(Rp) + O((w_o - Rp)^2), \tag{1}$$

donde $O((\cdot)^n)$ significa el resto de Lagrange para un orden superior a n. Si además se expande $U(w_o + h)$ por Taylor alrededor de w_o, se obtiene

$$U(w_o + h) = U(w_o) + U'(w_o)h + \frac{U''(w_o)}{2}h^2 + O((w_o - Rp)^3).$$

Tomando el valor esperado de $U(w_o + h)$ obtenemos

$$E\left(U(w_o + h)\right) = U(w_o) + U'(w_o)\underbrace{E(h)}_{=0} + \frac{U''(w_o)}{2}\underbrace{E(h)^2}_{=Var(h)}. \tag{2}$$

Igualando las ecuaciones (1) y (2) se obtiene

$$Rp = -\frac{1}{2}\frac{U''(w_o)\sigma_h^2}{U'(w_o)}.$$

Definiendo R^A como el coeficiente de aversión por unidad de riesgo obtenemos el *Coeficiente de Aversión Absoluta al riesgo*

$$R^A = -\frac{U''(w_o)}{U'(w_o)}.$$

Este coeficiente también es conocido como de Arrow-Pratt, y estudia el grado de aversión al riesgo de un individuo basándose en la curvatura de la función de utilidad, donde el coeficiente lo que hace es resumir la información de cuanto crece y cuanto se desacelera el crecimiento de la utilidad en el margen.

3 Estática Comparada

Distintas funciones de utilidad implican distinto comportamiento del individuo ante un incremento de la riqueza. Por lo tanto, vamos a ver cómo cambia el coeficiente de riesgo cuando cambia la riqueza total, z. Podríamos pensar que cuanto mayor sea la riqueza del individuo, menos averso será a tomar apuestas, ya que la desutilidad de perder un dólar es menor cuanto más rico es. En ese caso $\frac{dR^A}{dz} < 0$.

Definition 2 *Una función de utilidad $U(\bullet)$ exhibe aversión absoluta decreciente al riesgo, si R^A es una función decreciente de la riqueza, i.e., $\frac{dR^A}{dz} < 0$.*

Por analogía se dice que $\frac{dR^A}{dz} = 0$ implica aversión absoluta constante al Riesgo, y $\frac{dR^A}{dz} > 0$ aversión absoluta creciente al riesgo.

Notar que

$$\begin{aligned}
\frac{dR^A}{dz} &= \frac{d\left(-\frac{U''(z)}{U'(z)}\right)}{dz} = \frac{[(U''(z))^2 - U'(z)U'''(z)]}{(U'(z))^2}, \\
&= [\frac{(U''(z))^2}{(U'(z))^2} - \frac{U'(z)U'''(z)}{(U'(z))^2}], \\
&= \left[R^A\right]^2 - \frac{U'''(z)}{(U'(z))}\frac{U''(z)}{U''(z)}, \\
&= \left[R^A\right]^2 + R^A\frac{U'''(z)}{U''(z)},
\end{aligned}$$

por lo que $U'''(z) > 0$ es una condición necesaria para que $\frac{dR^A}{dz} < 0$.

4 Activos: riesgosos y libre de riesgo *(decisión de portafolio)*

Considere un individuo representativo al que se le plantea la posibilidad de poner toda su riqueza en un activo libre de riesgo que pague una tasa de interés r_f (lo cual le daría un ingreso cierto para el período siguiente), o, alternativamente, comprar un activo riesgoso (tomar una lotería). Para caracterizar el comportamiento de dicho individuo es útil analizar cuánto más retorno esperado tiene que recibir para poner todo su ingreso en el activo riesgoso. Típicamente el individuo va a colocar parte de su ingreso en el activo seguro y parte en el activo riesgoso, pero casos extremos como el recientemente mencionado van a ser útiles para caracterizar su comportamiento ante el riesgo.

Supongamos que en esta economía existen J activos riesgosos y un activo libre de riesgo. Si un individuo invierte su riqueza inicial, w_o, a la tasa libre de riesgo obtendría: $w_o(1+r_f)$; y si la invierte en un portafolio de activos riesgosos obtendría: $w_o(1+r_p)$; donde r_p el retorno de un portafolio riesgoso (una variable aleatoria) y está definida como $r_p = \sum\limits_j \alpha_j r_j$, donde α_j es la proporción del activo j-ésimo en el portafolio, y r_j es el retorno del activo j.

El individuo típicamente no coloca toda su riqueza en el riesgoso o en el libre de riesgo sino que debe elegir cuánto de w_o, destina a un activo libre de riesgo,$w_o - \sum\limits_j a_j$, y cuánto a los activos riesgosos, $\sum\limits_j a_j$, donde a_j es la cantidad invertida en cada activo riesgoso y $j = 1, 2, 3, 4, ..., J$. Al mismo tiempo el individuo debe determinar las proporciones en las que desea los activos riesgosos (Notar que $\alpha_j = \frac{a_j}{\sum_j a_j}$).

Por lo tanto el individuo busca resolver el siguiente problema de optimización

$$\max_{a_j} E(U(\widetilde{w}))$$

donde

$$\widetilde{w} = (w_o - \sum_j a_j)(1+r_f) + \sum_j a_j(1+r_j).$$

La condición de primer orden es

$$E(U'(\widetilde{w})(r_j - r_f)) = 0, \forall j.$$

Como por hipótesis $U' > 0$ entonces no puede darse que $(r_j - r_f) < 0$ o que $(r_j - r_f) > 0$ con probabilidad 1, es decir que se debe satisfacer que $P(r_j - r_f > 0) \in (0,1)$.

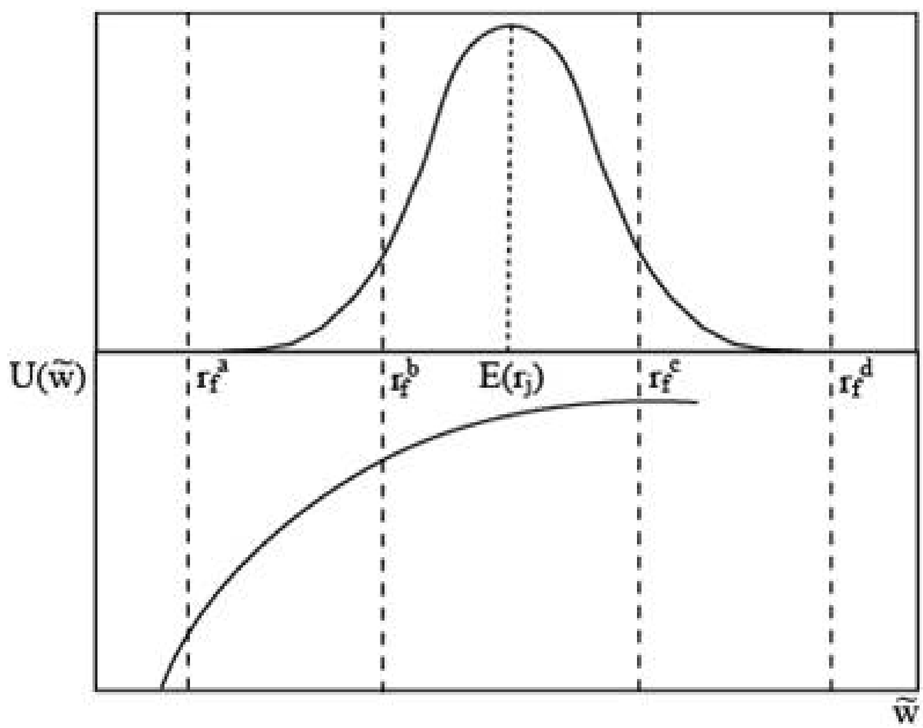

Figura 1.2

Utilizando la Figura 1.2 podemos intentar comprender el significado de la condición antedicha e interpretar las condiciones de primer orden. Podemos ver que: *i*) Si la tasa libre de riesgo es r_f^a o r_f^d, entonces no se puede cumplir la condicion de primer orden, ya que la esperanza sería siempre positiva (para r_f^a) o negativa (para r_f^d). *ii*) Si la tasa de interes es r_f^c, los valores de $(r_j - r_f^c) < 0$

tienen mayor probabilidad de ocurrir y están multiplicados por valores mayores de U'(pues U es estríctamente cóncava), y los valores $(r_j - r_f^c) > 0$ tienen menor probabilidad de ocurrir y están multiplicados por valores menores de U', por lo que la esperanza no puede ser igual a cero. *iii*) Si la tasa de interés es r_f^b, los valores de $(r_j - r_f^b) < 0$ tienen menor probabilidad de ocurrir pero están multiplicados por valores mayores de U', y los valores $(r_j - r_f^b) > 0$ tienen mayor probabilidad de ocurrir pero están multiplicados por valores menores de U', por lo que en este caso la esperanza sí puede ser igual a cero.

4.1 Teoremas sobre la Decisión de Inversión

Se presentarán 3 teoremas que describirán bajo qué condiciones los agentes invierten toda su riqueza en los activos riesgosos, en los no riesgosos o en ambos.

Theorem 3 *Si no se invierte en activos riesgosos entonces* $\forall j$ $E(r_j) \leq r_f$.

Demostracion. La cantidad invertida en los activos riesgosos, a_j, es menor o igual a cero siempre que no se invierta en activos riesgosos (con el signo $<$ quiere decir que se endeuda en activos riesgosos para poner más dinero en el activo libre de riesgo, esto se define como *Short Selling*, con el signo $=$ quiere decir que no elige activos de riesgo). Si $a_j = 0 \Longrightarrow \widetilde{w} = w_o(1 + r_f)$ entonces debe ser cierto que

$$E(U'(w_o(1 + r_f))(r_j - r_f))_{a_j=0} \leq 0,\ \forall j$$

ya que, o bien el individuo está satisfecho o su utilidad crecería para valores negativos de a_j. Por lo tanto, la derivada se encontraría en la parte decreciente del funcional de máximo.

Tomando en cuenta que el término $U'(w_o(1 + r_f))$ es positivo y constante, se obtiene

$$E((r_j - r_f)) \leq 0, \forall j,$$

y por lo tanto

$$E(r_j) \leq r_f, \forall j.$$

■

Este primer teorema nos indica que los agentes **no invierten** en activos riesgosos si el valor esperado de **todos** los retornos de los activos riesgosos son menores a la tasa libre de riesgo o, en otras palabras, si ninguno de los activos riesgosos tiene un premio estríctamente positivo.

Si algún activo tiene retorno positivo, va a existir inversión positiva en algún activo riesgoso (no necesariamente en aquel con exceso de retorno positivo). En otras palabras si existe un activo j' tal que $E(r_{j'}) > r_f$, entonces existe un activo j tal que $a_j > 0$

Theorem 4 *Si no se invierte en el activo libre de riesgo entonces* $\forall j$ $E(r_j - r_f) \geq R^A(w_o(1 + r_f))w_oE(r_j - r_f)^2$.

Demostracion. La demostración se realizará para $j = 1$, por lo que $a_j = a$, $r_j = r$ y $\widetilde{w} = w_o(1 + r)$.

Dado que el individuo que invierte toda su riqueza en el activo riesgoso está satisfecho o desearía invertir más en dicho activo (short sell el libre de riesgo), se debe de cumplir que

$$E(U'(w_o(1 + r))(r - r_f))_{a=w_0} \geq 0.$$

Si se expande $U'(w_o(1 + r))$ por Taylor alrededor de $(1 + r_f)$ se obtiene, (notar que w_o es una constante),

$$\begin{gathered} E(U'(w_o(1 + r))(r - r_f)) = U'(w_o(1 + r_f))E((r - r_f))+ \\ +U''(w_o(1 + r_f))E(r - r_f)^2 w_o + O(w(1 + r)^2) \geq 0, \end{gathered}$$

donde $O(w(1 + r)^2)$ es el Resto de Lagrange y en este caso es despreciable. Finalmente, como $E(U'(w_o(1 + r))(r - r_f)) \geq 0$ reordenando los términos de la expansión de Taylor obtenemos

$$\begin{aligned} E(r - r_f) &\geq -\frac{U''(w_o(1 + r_f))}{U'(w_o(1 + r_f))} E(r - r_f)^2 w_o \\ &\geq R^A(\cdot) w_o E[(r - r_f)^2] \\ &\geq R^R(\cdot) E[(r - r_f)^2]. \end{aligned}$$

Esta última expresión nos dice que si el exceso de retorno es mayor que un término que es el producto del **Coeficiente de Aversión relativa al riesgo** y a **la variabilidad de retorno del activo riegoso** con respecto a la tasa libre de riesgo, se invierte todo en los activos riesgosos. ■

El tercer teorema es un corolario de los teoremas anteriores.

Corollary 5 *Para que se invierta en ambos activos (riesgoso y no riesgoso) debe cumplirse que*

$$0 \leq E(r_j - r_f) \leq -\frac{U''(w_o(1 + r_f))}{U'(w_o(1 + r_f))} w_o E(r_j - r_f)^2.$$

5 Teoremas de Arrow-Pratt

5.1 Teorema de Arrow

Las carecterísticas del coeficiente R^A nos permite determinar si el individuo considera al activo riesgoso como un bien normal (bajo el supuesto de que debe elegir entre un solo activo riesgoso y el libre de riesgo). Anteriormente demostramos bajo qué condiciones la función de utilidad del individuo presenta aversión absoluta decreciente, constante o creciente. Ahora vamos a determinar qué implicancia tiene esa característica de la función de utilidad en cuanto a la percepción del riesgo del individuo.

En 1970 Arrow demostró que aversión absoluta decreciente (creciente) al riesgo **sobre todo el dominio** de $R^A(\cdot)$ implica que el activo riesgoso es un bien normal (inferior).

Theorem 6 (Arrow) *Si* $\frac{dR^A}{dz} < 0 \Longrightarrow \frac{da}{dw_o} > 0$ *,*$\forall w_o$ *(también es cierto que* $\frac{dR^A}{dz} > 0 \Longrightarrow \frac{da}{dw_o} < 0$ *y que*$\frac{dR^A}{dz} = 0 \Longrightarrow \frac{da}{dw_o} = 0$*)*

Demostración. Dado que el individuo elige a para maximizar su utilidad esperada, la condición de primer orden es

$$E(U'(w_o(1+r_f)+a(r-r_f))(r-r_f)) = 0,$$

y dado que es una solución interior, se puede diferenciar totalmente obteniendo

$$\frac{da}{dw_o} = \frac{-E(U''(\widetilde{w})(1+r_f)(r-r_f))}{E(U''(\widetilde{w})(r-r_f)^2)}.$$

Para probar el teorema simplemente tenemos que demostrar que si la aversión al riesgo es decreciente, el cociente es positivo. Primero analizemos el denominador; como $U'' < 0$ y $(r-r_f)^2 > 0$, se puede concluir que el denominador es siempre negativo, por lo tanto el signo de $\frac{da}{dw_o}$ depende solo del signo de $-E(U''(\widetilde{w})(r-r_f))$.

Para analizar el signo del numerador debemos considerar el numerador cuando $r < r_f$ por un lado y por otro cuando $r > r_f$.

Si $r < r_f$, entonces $\widetilde{w} < w_o(1+r_f)$ (recuerde que $\widetilde{w} = w_o(1+r_f)+a(r-r_f)$). Como por hipótesis $R^A(\cdot)$ es decreciente en todo su dominio se debe cumplir que

$$R^A(\widetilde{w}) > R^A(w_o(1+r_f)).$$

Para obtener el resultado deseado debemos multiplicar en los dos lados de la desigualdad por $-U'(\widetilde{w})(r-r_f)$ (Note que este valor es positivo ya que asumimos $r < r_f$, y por lo tanto no se altera el signo de la desigualdad).

$$U''(\widetilde{w})(r-r_f) > -R^A(w_o(1+r_f))U'(\widetilde{w})(r-r_f).$$

Análogamente si $r \geq r_f$ entonces $\widetilde{w} \geq w_o(1+r_f)$, por lo que $R^A(\widetilde{w}) \leq R^A(w_o(1+r_f))$. Multiplicando a ambos lados de las desigualdad por $-U'(\widetilde{w})(r-r_f)$ se obtiene

$$U''(\widetilde{w})(r-r_f) \geq -R^A(w_o(1+r_f))U'(\widetilde{w})(r-r_f).$$

(Note que como $r \geq r_f$ entonces multiplicamos por un número negativo y se altera el signo de la desigualdad). Ahora para terminar la demostración debemos tomar valor esperado en ambas ecuaciones, condicional en el signo del spread de tasas. Para la primera desigualdad obtenemos

$$E(U''(\widetilde{w})(r-r_f)|\, r < r_f) > E(-R^A(w_o(1+r_f))U'(\widetilde{w})(r-r_f)\big|\, r < r_f), \quad \text{(A)}$$

y para la segunda

$$E(U''(\widetilde{w})(r-r_f)|r \geq r_f) \geq E(-R^A(w_o(1+r_f))U'(\widetilde{w})(r-r_f)|r \geq r_f). \quad \text{(B)}$$

Usando la ley de expectativas iteradas $(E(E(y|x)) = E(y))$, notamos que

$$\begin{aligned} E(U''(\widetilde{w})(r-r_f)) = {} & E(U''(\widetilde{w})(r-r_f)|r \geq r_f)\Pr\{r \geq r_f\} \\ & + E(U''(\widetilde{w})(r-r_f)|r < r_f)\Pr\{r < r_f\}, \end{aligned}$$

y que

$$E(-R^A(w_o(1+r_f))U'(\widetilde{w})(r-r_f)) = E(-R^A(w_o(1+r_f))U'(\widetilde{w})(r-r_f)\big| \, r \geq r_f) \Pr\{r \geq r_f\}$$
$$+E(-R^A(w_o(1+r_f))U'(\widetilde{w})(r-r_f)\big| \, r < r_f) \Pr\{r < r_f\}.$$

Por lo tanto, si se multiplica la desigualdad (A) por $\Pr\{r < r_f\}$ y se multiplica la desigualdad (B) por $\Pr\{r \geq r_f\}$ y luego se suman se obtienen las esperanzas incondicionales, es decir

$$E(U''(\widetilde{w})(r-r_f)) > -R^A(w_o(1+r_f))E(U'(\widetilde{w})(r-r_f)),.$$

como la condición de primer orden del problema de maximización del individuo cumple que $E(U'(\widetilde{w})(r-r_f)) = 0$, entonces el signo de $\frac{da}{dw_o}$ es positivo porque $E(U''(\widetilde{w})(r-r_f)) > 0$. ■

5.2 Teorema de Pratt

A continuación se presenta el Teorema de Pratt (1964), donde se muestra que R^A es una medida de riesgo que permite ordenar y comparar a diferentes individuos.

Theorem 7 (Pratt) *Si existen dos individuos i y k con $R_i^A(z) \geq R_k^A(z)$ entonces el individuo i se dice que es más averso al riesgo, porque exige una mayor prima que el otro individuo.*

Demostraremos que si el individuo i es más averso al riesgo que el individuo k (ambos con igual riqueza inicial), entonces, la prima de riesgo requerida por el individuo i para invertir toda su riqueza en un activo riesgoso debe ser mayor que la requerida por el individuo k.

Suponiendo que el individuo k está satisfecho invirtiendo toda su riqueza en el activo riesgoso, entonces por condición de primer orden

$$E(U_k^{'}(w_o(1+r))(r-r_f)) = 0.$$

La prueba consiste en demostrar que

$$E(U_i^{'}(w_o(1+r))(r-r_f)) \leq 0,$$

ya que esto implica que el individuo i estaría mejor si invierte una cantidad menor en el activo riesgoso, lo que a su vez implica que el individuo i exige una prima de riesgo mayor para poner toda su riqueza en el activo de riesgo.

Para para demostrar el toerema de Pratt debemos, primero, demostrar el siguiente lema que nos permite establecer una relación entre las funciones de utilidad de los dos individuos.

Lemma 8 *Existe una función G creciente ($G' > 0$) y cóncava ($G'' \leq 0$) tal que*

$$U_i = G(U_k) \Longleftrightarrow R_i^A(z) \geq R_k^A.$$

Demostración de Lema. Para probar que G es creciente, tomaremos la primera derivada, $U_i^{'}$,

$$U_i^{'} = G^{'}(\cdot)(U_k^{'})$$

por lo tanto $G' > 0$. Para probar concavidad, se debe derivar U_i', obteniendo

$$U_i^{''} = G^{''}(\cdot)(U_k^{'})^2 + G^{'}(\cdot)U_k^{''},$$

y luego dividiendo por $-U_i^{'} = -G^{'}(\cdot)(U_k^{'})$ en ambos lados de la igualdad, llegamos a

$$-\frac{U_i^{''}}{U_i^{'}} = -\frac{G^{''}(\cdot)(U_k^{'})}{G'(\cdot)} - \frac{U_k^{''}}{U_k^{'}},$$

que re-escribiendo obtenemos el coeficiente de aversión al riesgo del individuo i,

$$R_i^A(z) = -\frac{G^{''}(\cdot)(U_k^{'})}{G'(\cdot)} + R_k^A.$$

Como $R_i^A(z) \geq R_k^A$ se debe cumplir que $G^{''}(\cdot) \leq 0$. ■

Demostración del Teorema de Pratt. Considere la condición de primer orden para el individuo i cuando este decide invertir toda su riqueza en el activo riesgoso,

$$E(U_i^{'}(w_o(1+r)(r-r_f))) = E(G^{'}(\cdot)U_k^{'}(w_o(1+r)(r-r_f))).$$

Debemos demostrar que dicha expresión es negativa, y para ello analizaremos el lado derecho de la igualdad, ya que será posible determinar su signo. Para ello aplicaremos nuevamente la ley de expectativas iteradas

$$\begin{aligned} E(G^{'}(\cdot)U_k^{'}(w_o(1+r)(r-r_f))) &= E(G^{'}(\cdot)U_k^{'}(w_o(1+r)(r-r_f))|\, r \geq r_f)\Pr(r \geq r_f) \\ &+E(G^{'}(\cdot)U_k^{'}(w_o(1+r)(r-r_f))|\, r < r_f)\Pr(r < r_f). \end{aligned}$$

Consideremos ahora cuando $r \geq r_f$ donde se cumple que $w_o(1+r) \geq w_o(1+r_f)$. Usando que, G es cóncava, U es monótona y que $U_i^{'} = G^{'}(\cdot)(U_k^{'})$ (ver figura 1.3) se puede ver que

$$\begin{aligned} & E\left(G^{'}(U_k(w_o(1+r))U_k^{'}(w_o(1+r))(r-r_f)|r \geq r_f\right) \\ \leq \quad & G^{'}(U_k(w_o(1+r_f))E(U_k^{'}(w_o(1+r))(r-r_f)|r \geq r_f) \end{aligned}$$

Análogamente, cuando $r < r_f$, se cumple que $w_o(1+r) < w_o(1+r_f)$ por lo que, siguiendo el mismo razonamiento, se obtiene la misma desigualdad anterior, pero condicional en que $r < r_f$, es decir[1]

$$\begin{aligned} & E\left(G^{'}(U_k(w_o(1+r))U_k^{'}(w_o(1+r))(r-r_f)|r < r_f\right) \\ & \leq G^{'}(U_k(w_o(1+r_f))E(U_k^{'}(w_o(1+r))(r-r_f)|r < r_f). \end{aligned}$$

[1] Este resultado se debe a que, como $r < r_f$, $U_k(w_o(1+r)) < U_k(w_o(1+r_f))$, (porque $U' > 0$), y por lo tanto $G'(U_k(w_o(1+r)) > G'(U_k(w_o(1+r_f))$ (porque $G'' < 0$). Dado que ambos valores esperados son negativos la desigualdad se cumple con el signo invertido

Multiplicando las respectivas desigualdades por $P(r \geq r_f)$ y $P(r < r_f)$ y sumando obtenemos, por ley de expectativas iteradas,

$$E\left(G^{'}\left(U_k(w_o(1+r))\right)U_k^{'}(w_o(1+r))(r-r_f)\right)$$
$$\leq G^{'}(U_k(w_o(1+r_f))E(U_k^{'}(w_o(1+r))(r-r_f))).$$

Pero por hipótesis, el individuo k está satisfecho invirtiendo toda su riqueza en el activo riesgoso, por lo que sabemos que $E(U_k^{'}(w_o(1+r))(r-r_f)) = 0$ es la condición de primer orden del problema de optimización del individuo k cuando invierte toda su riqueza en el activo riesgoso, por lo tanto el lado derecho de la desigualdad es igual a 0. Por lo que

$$E(U_i^{'}(w_o(1+r))(r-r_f)) \leq 0$$

■

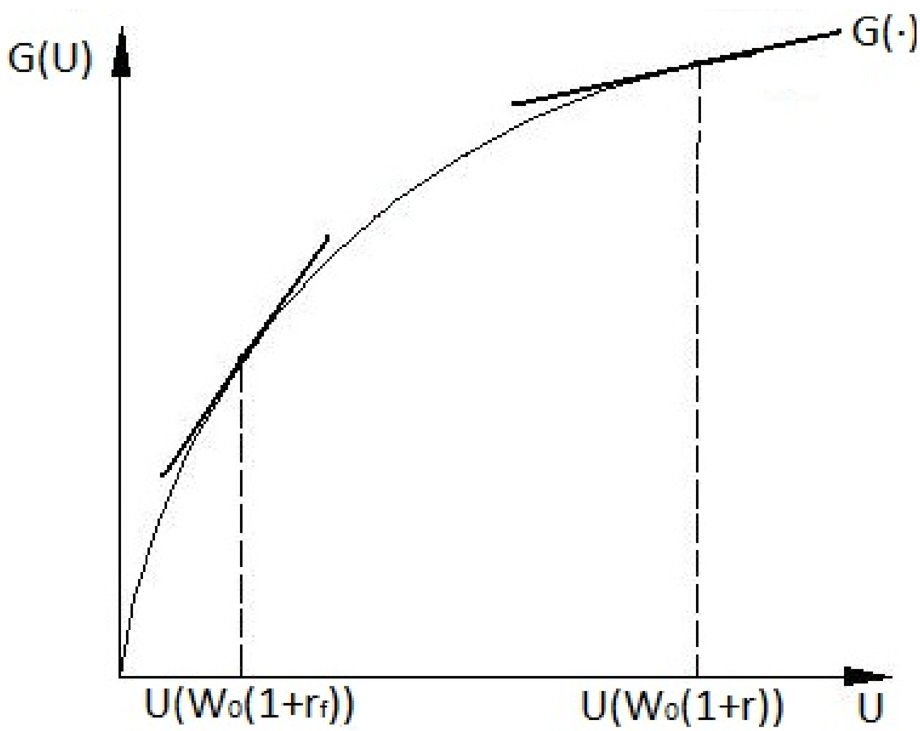

Figura 1.3

6 Separación Monetaria de Dos Fondos

Hasta ahora hemos demostrado varias proposiciones de estática comparativa bajo el supuesto de la existencia de un sólo activo libre de riesgo y un sólo activo riesgoso. Ahora bien, extrapolar las proposiciones antedichas para casos en que exista más de un activo riesgoso, en general, no es válido . Por ejemplo, si cambia la riqueza puede ser que la proporción invertida en un activo riesgoso suba y la inversión en otro baje. Sin embargo, las proposiciones anteriores también serían válidas, aunque existan múltiples activos riesgosos, si el individuo elige mantener el mismo portafolio de activos riesgosos (las mismas proporciones) y sólo cambie las proporciones entre este portafolio y el activo libre de riesgo.

Si esto se cumple, el portafolio óptimo del individuo (para diferentes niveles de riqueza) está compuesto por una combinación lineal del activo libre de riesgo y un fondo mutuo de activos riesgosos. Esto se conoce como *Separación Monetaria de dos fondos (Two fund monetary separation).*

Stiglitz y Case (1970) demostraron que una condición necesaria para que la separación monetaria de dos fondos se cumpla, es que las utilidades marginales sean de la forma

$$U^{'}(z) = (A + Bz)^{C}$$

ó

$$U^{'}(z) = A\exp\{Bz\}.$$

A continuación se presenta una demostración (heurística) sobre lo expuesto en el párrafo anterior. La riqueza está definida por

$$\widetilde{w} = w_o(1 + \alpha r_f + (1-\alpha)\sum_j b_j r_j),$$

donde α es la proporción destinada al activo libre de riesgo y b_j es la proporción destinada al j-ésimo activo riesgoso. Para demostrar lo antedicho basta sólo con demostrar que b_j permanece invariable frente a cambios en w_o.

Para hallar α y b_j óptimos, se debe maximizar

$$\max_{\alpha, b_j} E(U(\widetilde{w}))$$

sujeto a

$$\sum b_j = 1.$$

El Lagrangiano para este problema viene dado por

$$\mathfrak{L}(\alpha, b_j, \lambda) = E\left(U\left(w_o(1 + \alpha r_f + (1-\alpha)\sum_j b_j r_j)\right) + \lambda\left(1 - \sum_j b_j\right)\right).$$

Cuyas condiciones de primer orden son

$$\{\alpha\} : E(U^{'}(\widetilde{w})w_o(r_f - \sum b_j r_j)) = 0,$$

y

$$\{b_j\} : E(U^{'}(\widetilde{w})w_o(1-\alpha)r_j) = \lambda.$$

La primera condición implica

$$E(U^{'}(\widetilde{w})r_f) = E(U^{'}(\widetilde{w})\sum b_j r_j),$$

y la segunda condición

$$E(U^{'}(\widetilde{w})r_j) = \lambda'$$

donde $\lambda' = \lambda/\left(w_o(1-\alpha)\right)$. Ahora usando que $E(U^{'}(\widetilde{w})r_j) = \lambda'$ (es constante), podemos re-escribir la derivada con respecto a α como

$$E(U^{'}(\widetilde{w})r_f) = \sum b_j \underbrace{E(U^{'}(\widetilde{w})r_j)}_{cons\tan te} = E(U^{'}(\widetilde{w})r_j)$$

ya que los pesos suman uno. Por lo tanto

$$E(U^{'}(\widetilde{w})(r_j - r_f)) = 0.$$

Si asumimos que la utilidad marginal posee una de las formas funcionales antes enunciadas *(por ejemplo $U^{'}(z) = (A{+}Bz)^C$ con B>0, C<0 y Z>*$\max(0, -\frac{A}{B})$*)*, se puede probar que un cambio en la riqueza ($w_o \longrightarrow w_o^{'}$) deja las proporciones de los activos riesgosos invariantes ($b_j = b_j^{'}$).

Dada las condiciones de primer orden y sustituyendo $U^{'}(z) = (A + Bz)^C$, donde $z = w_o(1 + \alpha r_f + (1-\alpha)\sum\limits_j b_j r_j)$, obtenemos

$$E((A + B(w_o(1 + \alpha r_f + (1-\alpha)\sum_j b_j r_j)))^C (r_j - r_f)) = 0,$$

y análogamente para otro nivel de riqueza inicial podríamos haber derivado

$$E((A + B(w_o^{'}(1 + \alpha^{'} r_f + (1-\alpha^{'})\sum_j b_j^{'} r_j)))^C (r_j - r_f)) = 0.$$

Se puede probar que estas dos condiciones implican la siguiente relación entre los parametros

$$w_o'(1-\alpha')b_j' = \frac{A + B(w_o^{'}(1 + r_f))}{A + B(w_o(1 + r_f))} w_o(1-\alpha)b_j, \qquad \forall j. \tag{3}$$

La prueba de que las proporciones de los activos riesgosos no cambian al cambiar la riqueza la derivamos simplemente notando que tras aplicar sumatoria a ambos lados, y dado que $\sum\limits_j b_j^{'} = \sum\limits_j b_j = 1$, se obtiene

$$w_o'(1-\alpha') = \frac{A + B(w_o^{'}(1 + r_f))}{A + B(w_o(1 + r_f))} w_o(1-\alpha). \tag{4}$$

Por lo tanto *solo si* $b_j^{'} = b_j$, (3) *y* (4) pueden ser válidos simultaneamente. Por lo tanto, ante un cambio en la riqueza inicial no cambian los porcentajes invertidos en cada activo riesgoso, pero sí cambia la asignación entre riesgosos y no riesgosos (ver en D que $\alpha \neq \alpha'$).

7 Anexo

7.1 Decisión de Portafolio: una aproximación

En la sección 4 de este capítulo discutimos la elección óptima de un portafolio para un agente representativo. Allí pudimos caracterizamos el comportamiento del individuo sin econtrar los pesos asignados a cada activo. Si bien, en general, dicho problema no tiene solución, en esta sección utilizaremos una aproximación sobre la condición de primer orden que nos permitirá obtener los pesos aproximados para cualquier función de utilidad.

Consideremos un individuo que enfrenta el siguiente problema,

$$\begin{cases} \max\limits_{\alpha} & E\left[U\left(\widehat{w}\right)\right] \\ sujeto\ a & \widehat{w} = w_0\left[\left(1-\alpha' I\right) r_f + \alpha' r\right] \end{cases}$$

donde α es el vector de ponderaciones asignadas a los n activos, r_{nx1} es el vector retornos (aleatorios) de los activos, r_f es un escalar que denota el retorno del activo no riesgoso de esta economía, w_0 es el escalar que denota la riqueza inicial del agente e I_{nx1} es un vector de unos. La condición de primer orden del agente es,

$$E(U'(\widetilde{w})(r_j - r_f)) = 0, \forall j = 1, \ldots, n.$$

Escribiendolo en forma matricial,

$$E(U'(\widetilde{w})(r - r_f I)) = 0_{nx1} \tag{5}$$

Para obtener una solución (aproximada) de los pesos óptimos tomaremos una expansión de Taylor de primer orden de $U'\left(\widehat{W}\right)$ alrededor de $W_0\left(1+r_f\right)$,

$$U'\left(\widehat{w}\right) \simeq U'\left(w_0\left(1+r_f\right)\right) + U''\left(w_0\left(1+r_f\right)\right)\left(\widehat{w} - w_0\left(1+r_f\right)\right).$$

Si notamos que

$$\widehat{w} - w_0\left(1+r_f\right) = w_0 \alpha'\left(r - r_f I\right),$$

podemos re-escribir la utilidad marginal de la riqueza como,

$$U'\left(\widehat{w}\right) \simeq U'\left(w_0\left(1+r_f\right)\right) + U''\left(w_0\left(1+r_f\right)\right) w_0 \alpha'\left(r - r_f I\right)$$

Postmultiplicando por $(r - r_f I)$ y tomando el valor esperado de ambos lados de la ecuación obtenemos,

$$\begin{aligned} E\left[U'\left(\widehat{w}\right)\left(r - r_f I\right)\right] \simeq\ & U'\left(w_0\left(1+r_f\right)\right) E\left(r - r_f I\right) \\ & + U''\left(w_0\left(1+r_f\right)\right) w_0 E\left[\alpha'\left(r - r_f I\right)\left(r - r_f I\right)\right] \end{aligned} \tag{6}$$

Notar que $\alpha'\left(r - r_f I\right)$ es un escalar, por lo que

$$\alpha'\left(r - r_f I\right)\left(r - r_f I\right) = \left(r - r_f I\right)\alpha'\left(r - r_f I\right), \tag{7}$$

$$= \left(r - r_f I\right)\left(r - r_f I\right)' \alpha, \tag{8}$$

lo que nos permite expresar la condición de primer orden, remplazando (8) en (6) como,

$$U'(w_0(1+r_f))E(r-r_fI)+U''(w_0(1+r_f))w_0E[R]\alpha=0,$$

donde $R=(r-r_fI)(r-r_fI)'$.

De lo cual obtenemos los pesos óptimos,

$$\alpha=-\frac{U'(w_0(1+r_f))}{U''(w_0(1+r_f))w_0}[E(R)]^{-1}E(r-r_fI). \tag{9}$$

Esta es una aproximación de los pesos óptimos del portafolio.

Example 9 *Supongamos que*

$$U(X)=\frac{X^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

luego

$$-\frac{U''(w_0(1+r_f))w_0}{U'(w_0(1+r_f))}=\frac{\gamma}{1+r_f}$$

por lo que los pesos óptimos para esta función de utilidad son:

$$\alpha=\frac{1+r_f}{\gamma}[E(R)]^{-1}E(r-r_fI)$$

La función de utilidad analizada exhibe aversión al riesgo relativa constante e igual a γ. Notemos que cuanto mayor es la aversión al riesgo (es decir, mayor es γ), menores serán las ponderaciones asignadas a cada uno de los activos riegosos. Es decir, a mayor aversión relativa (y dados unos retornos esperados y volatilidades), el agente elegirá invertir una mayor proporción de su riqueza en el activo libre de riesgo.