

Modelo de Black-Scholes

1 Derivacion del Modelo

El modelo Black & Scholes (BS) permite hacer el pricing de una opción, bajo el supuesto de que el underlying sigue una Geometric Brownian Motion. Mostramos anteriormente que el valor de una opción depende de determinadas variables (como por ejemplo del stock, del tiempo, etc) y de ciertos parámetros (tasa de interes (asumida como constante) y volatilidad). De hecho el precio del derivado se puede escribir como una función que depende de S y t teniendo en cuenta que también es una función de los parámetros de interés

$$c(S, X, T - t, \sigma_S, r) = c(S, t).$$

Para hacer el pricing (utilizando el principio de no arbitraje) se utiliza la propiedad de que el cambio en el valor de la opción está localmente **perfectamente correlacionado** con el cambio en el valor del underlying asset. Esto es quizás el punto mas importante en el pricing de una opción pues uno puede construir un portafolio que consista de una cantidad de opciones y una cantidad de el stock **de modo de eliminar totalmente la incertidumbre de ese portafolio**. Ese portafolio sin riesgo debe de pagar la tasa libre de riesgo.

Por lo tanto, se forma un portafolio que tenga una posición long en la opción y una posición short en una cantidad *delta*: Δ en el underlying (stock). Denotando a Π como el valor del portafolio

$$\Pi = c(S, t) - \Delta S. \quad (1)$$

Si el underlying asset sigue una Brownian motion

$$\frac{dS}{S} = \mu_S dt + \sigma_S dz,$$

el cambio en el valor del portafolio

$$d\Pi = dc(S, t) - \Delta dS,$$

va a tambien seguir una Brownian Motion.

Utilizando el Lemma de $It\hat{o}$ sabemos que si el underlying sigue una Brownian Motion, el derivado tambien lo sigue y por lo tanto el cambio en el valor del call puede escribirse como

$$\begin{aligned} dc(S, t) &= c_t dt + c_S dS + \frac{1}{2} c_{SS} (dS)^2 \\ &= c_t dt + c_S S (\mu_S dt + \sigma_S dz) + \frac{1}{2} c_{SS} S^2 \sigma_S^2 dt \\ &= (c_t + c_S S \mu_S + \frac{1}{2} c_{SS} S^2 \sigma_S^2) dt + c_S S \sigma_S dz, \end{aligned}$$

lo que implica que el cambio en el portafolio sigue la siguiente Brownian Motion:

$$\begin{aligned} d\Pi &= c_t dt + c_S S(\mu_S dt + \sigma_S dz) + \frac{1}{2} \sigma_S^2 S^2 c_{SS} dt - \Delta S(\mu_S dt + \sigma_S dz) \quad (2) \\ &= (c_t + c_S S \mu_S + \frac{1}{2} \sigma_S^2 S^2 c_{SS} - \Delta S \mu_S) dt + (c_S S \sigma_S - \Delta S \sigma_S) dz. \end{aligned}$$

Para obtener el precio del call elegimos Δ tal que elimina el riesgo del portafolio, i.e.,

$$\Delta = c_S.$$

Una vez eliminado el riesgo, el valor del portafolio en el tiempo debe ser igual, por **el principio de no arbitraje**, a colocar la misma cantidad de dinero en un instrumento con tasa libre de riesgo.¹

$$\overbrace{c_t dt + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 c_{SS} dt}^{d\Pi} = \overbrace{r(c(S, t) - c_S S) dt}^{\Pi}. \quad (3)$$

Si el retorno del portafolio fuese mayor, entonces todos los individuos pedirían préstamos al banco, y re-invertirían en este portafolio. Estos movimientos de capitales explotarian potenciales oportunidades de arbitraje, haciendo que finalmente los precios se ajusten eliminando la oportunidad de arbitraje. Si el retorno del portafolio fuese menor el razonamiento es análogo.

Una expresion alternativa de la ecuación (3) nos da la siguiente ecuación diferencial parcial, que su solución es igual al precio del derivado a tiempo t ,

$$c_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 c_{SS} + r S c_S - r c = 0. \quad (4)$$

Notar que en esta ecuación **no aparece la tendencia del Stock** (i.e., μ) sino que aparece la tasa libre de riesgo (r). Esto no implica que el valor del call no dependa del drift del proceso, sino simplemente que no depende en forma directa: depende del drift a través del valor del stock que, claramente, está influido por μ . En un mundo de agentes neutrales al riesgo todos los activos crecerían a la misma tasa puesto que no sería necesario compensar mayores riesgos con mayores retornos. Dicho de otra forma: cuando los agentes son aversos al riesgo esperaríamos que valores más grandes de σ estén asociados a mayores valores de μ , es decir, que activos más riesgosos deberían crecer a tasas mayores para poder compensar por el aumento del riesgo. Como la ecuación diferencial que debe satisfacer el precio del derivado no depende explícitamente del drift podemos pensar que es posible encontrar dicho precio sin tener información acerca de las preferencias de riesgo que puedan tener los agentes.

Note que cuando nosotros hablamos de hacer el pricing de un derivado, en general, nos podemos referir a dos ejercicios alternativos.

¹Note la importancia de la correlación perfecta entre el contrato y el underlying asset. Esta correlación es la que permite eliminar totalmente el riesgo del portafolio. La reducción del riesgo del portafolio se conoce como Hedging, en este caso particular lo que se hizo fue **Delta Hedging**.

- (i) La ecuación diferencial parcial.
- (ii) La formula de Black and Scholes.

La ecuación diferencial parcial la podemos usar con cualquier condición terminal y encontrar “numericamente” el precio de cualquier derivado, mientras que la fórmula de Black and Scholes es la solución de la ecuación diferencial parcial, dada ciertas condiciones terminales.

La formula Black-Scholes es la solución a la ecuación diferencial (4), dadas las condiciones terminales de un call europeo. Para derivarla asumimos:

1. El underlying sigue una geometric Brownian Motion.
2. La tasa libre de riesgo es conocida.
3. No existen dividendos en el underlying.
4. El delta Hedging es dinámico y continuo.
5. No existen costos de transacción.
6. No existen oportunidades de arbitraje.

Note que la derivación de la ecuación (4) fue hecha en términos de un call, sin embargo solo utilizamos el hecho de que sea un call en las condiciones terminales por lo tanto dicho procedimiento es válido para cualquier tipo de opción. Para encontrar el precio de un Call o un Put hay que establecer distintas Condiciones Terminales. Las condiciones terminales no son más que los distintos pay-off de cada contrato.

Para el caso de un Call

$$\max(S - X, 0),$$

mientras que en el caso de un Put

$$\max(X - S, 0).$$

El resultado del valor de un call una vez resuelta la ecuación diferencial parcial es

$$C(S, T - t) = SN(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2), \quad (5)$$

donde

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\{\ln(\frac{S}{X}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)\}}{\sigma(\sqrt{T - t})}, \\ d_2 &= d_1 - \sigma(\sqrt{T - t}), \end{aligned}$$

y el resultado para un put es

$$P(S, T - t) = -SN(-d_1) + Xe^{-r(T-t)}N(-d_2).$$

1.1 Relación entre el retorno-volatilidad de un Call y el Underlying.

Se pueden encontrar como producto de la derivación del precio de la opción ciertas relaciones que serán de gran importancia al realizar diferentes estrategias utilizando portafolios que contengan el underlying y la opción.

Proposition 1 (i) *El exceso de retorno de una opción es igual a la elasticidad de la opción multiplicada por el exceso de retorno del stock,*

$$(\mu_c - r) = \frac{\sigma_c}{\sigma_S}(\mu_S - r) = \Omega(\mu_S - r).$$

(ii) *La volatilidad del call es igual a la elasticidad del call multiplicada por la volatilidad del stock,*

$$\sigma_c = \frac{c_S S}{c(S, t)} \sigma_S = \Omega \sigma_S.$$

$$(\text{donde } \Omega = \frac{c_S S}{c(S, t)} = \frac{\sigma_c}{\sigma_S})$$

Para demostrar ambas proposiciones notamos que el cambio proporcional en el precio de un call puede ser escrito como

$$\frac{dc(S, t)}{c} = \mu_c dt + \sigma_c dz.$$

Para encontrar μ_c y σ_c , evaluamos el cambio proporcional del precio del Call como una función del underlying,

$$\begin{aligned} \frac{dc(S, t)}{c(S, t)} &= \overbrace{\left(\frac{c_t + c_S S \mu_S + \frac{1}{2} c_{SS} S^2 \sigma_S^2}{c(S, t)} \right)}^{\mu_c} dt + \overbrace{\left(\frac{c_{SS} S \sigma_S}{c(S, t)} \right)}^{\sigma_c} dz \\ &= \mu_c dt + \sigma_c dz. \end{aligned}$$

Note que la proposición (ii) se prueba simplemente aplicando el lema de $It\hat{o}$, ya que $\sigma_c = \frac{c_{SS} S \sigma_S}{c(S, t)}$.

Para probar la proposición (i) definimos el cambio instantáneo en el retorno del portafolio como

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi}{\Pi} &= \frac{c}{\Pi} \frac{dc}{c} - \frac{\Delta S}{\Pi} \frac{dS}{S} \\ &= \frac{c}{\Pi} (\mu_c dt + \sigma_c dz) - \frac{\Delta S}{\Pi} (\mu_S dt + \sigma_S dz) \\ &= \alpha (\mu_c dt + \sigma_c dz) + (1 - \alpha) (\mu_S dt + \sigma_S dz). \quad (\text{donde } \alpha = \frac{c}{\Pi}) \\ &= (\alpha \mu_c + (1 - \alpha) \mu_S) dt + (\alpha \sigma_c + (1 - \alpha) \sigma_S) dz. \end{aligned}$$

Para eliminar la incertidumbre de dicho portafolio debemos elegir

$$\alpha = \frac{\sigma_S}{\sigma_S - \sigma_c}.$$

Una vez eliminado el riesgo el portafolio de arbitraje debe de pagar la tasa libre de riesgo por **el principio de no arbitraje**

$$\overbrace{\left(\frac{\sigma_S}{\sigma_S - \sigma_c} \mu_c + \left(1 - \frac{\sigma_S}{\sigma_S - \sigma_c}\right) \mu_S\right)}^{\frac{d\Pi}{\Pi}} dt = r dt,$$

que puede ser re escrito como

$$\frac{\mu_c - r}{\sigma_c} = \frac{\mu_S - r}{\sigma_S},$$

que implica que el exceso de retorno del call estandarizado es igual al exceso de retorno del stock estandarizado (que anteriormente lo habiamos denominado como el precio del riesgo, λ).

Alternativamente se puede escribir de la siguiente manera

$$(\mu_c - r) = \frac{\sigma_c}{\sigma_S} (\mu_S - r),$$

que relaciona el exceso de retorno de un call con el exceso de retorno del stock.

2 Derivacion del Precio de una Opcion dado Diferentes Escenarios

A continuaci3n se presentan a modo de ejemplo tres casos distintos de pricing.²

Caso (1). El Stock o underlying asset paga dividendos en el periodo entre el momento en que se escribio la opci3n y el momento en que ella expira, (aqu3 se estar3a levantando el supuesto n3mero 3 del modelo BS). Intuitivamente lo que ocurre es muy simple: el entregar dividendos quiere decir que el activo se va desprendiendo de “pedazos” de su valor a lo largo de un intervalo de tiempo anterior al expiration date. Como los dividendos se pagan antes del expiration date no los percibe el poseedor del call, por lo hay que ajustar el valor del Call cuando el underlying paga dividendos a lo largo de la duraci3n del call para que el precio sea el correcto. Si suponemos que los dividendos se pagan en forma continua como un porcentaje del valor del call, es decir, que en un tiempo dt el Stock paga una cantidad por $D = \delta S$ donde δ es menor a uno, la ecuaci3n (2) de la secci3n 6.2, se transforma en

$$d\Pi = c_t dt + c_S dS + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 c_{SS} dt - \Delta(dS + \delta S dt).$$

²Aparte de los ejemplos aqu3 presentados existen muchos m3s casos de pricing de otras opciones como por ejemplo opciones en futuros, commodities, currency, etc. Pero el criterio para determinar el precio del contrato es igual para todos. Esto, entre otras cosas, es lo que hace comprender la logica de la derivacion del modelo de BS tan importante.

Si eliminamos el riesgo y lo igualamos al retorno de dicho portafolio ($c - \Delta S$) a la tasa libre de riesgo obtenemos la siguiente ecuación (que es semejante a la ecuación (??))

$$c_t + \left(\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\right)c_{SS} + (r - \delta)Sc_S - rc = 0.$$

Caso (2). Supongamos que queremos encontrar el precio de la opción de intercambiar activos en un momento determinado en futuro. Por ejemplo, el precio de el derecho a intercambiar acciones de IBM por acciones de Toshiba en el futuro. El individuo que compra la opción va a estar intreresado en saber si a tiempo T las acciones de Toshiba son mas valiosas.

Denotando la opción como $F(S_1, S_2; t)$ donde S_i denota el underlying i y asumiendo que

$$\begin{aligned} \frac{dS_i}{S_i} &= \mu_i dt + \sigma_i dz_i \quad \text{para } i = 1, 2., \\ &\text{y } E(dz_1 dz_2) = \rho dt. \end{aligned}$$

se forma el siguiente portafolio

$$P = F(\cdot) - \Delta_1 S_1 - \Delta_2 S_2.$$

El cambio en el precio del portafolio es

$$dP = dF(\cdot) - \Delta_1(\mu_1 S_1 dt + \sigma_1 S_1 dz_1) - \Delta_2(\mu_2 S_2 dt + \sigma_2 S_2 dz_2),$$

por lo que aplicando el Lema de $It\hat{o}$ (para encontrar $dF(\cdot)$) obtenemos

$$\begin{aligned} dF(\cdot) &= F_{S_1}(\mu_1 S_1 dt + \sigma_1 S_1 dz_1) + F_{S_2}(\mu_2 S_2 dt + \sigma_2 S_2 dz_2) + \frac{1}{2}F_{S_1 S_1} S_1^2 \sigma_1^2 dt + \\ &\quad + \frac{1}{2}F_{S_2 S_2} S_2^2 \sigma_2^2 dt + F_{S_1 S_2} S_1 S_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho dt + F_t dt. \end{aligned}$$

Para eliminar el riesgo del portafolio elegimos Δ_1 y Δ_2 tal que

$$(F_{S_1} - \Delta_1)\sigma_1 S_1 dz_1 + (F_{S_2} - \Delta_2)\sigma_2 S_2 dz_2 = 0,$$

o sea

$$\begin{aligned} F_{S_1} &= \Delta_1, \\ F_{S_2} &= \Delta_2. \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores en el portafolio de arbitrage obtenemos

$$dP = \frac{1}{2}S_1^2 F_{S_1 S_1} \sigma_1^2 dt + \frac{1}{2}S_2^2 F_{S_2 S_2} \sigma_2^2 dt + F_{S_1 S_2} S_1 S_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho dt + F_t dt.$$

y dado que ya se eliminó el riesgo, el cambio en el valor del portafolio debe ser igual (por el principio de no arbitraje) a el valor de dicho portafolio invertido a la tasa libre de riesgo, obteniendo.

$$F_t + \left(\frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2\right)F_{S_1 S_1} + \left(\frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2\right)F_{S_2 S_2} + (\sigma_1 \sigma_2 \rho S_1 S_2)F_{S_1 S_2} - rP = 0,$$

donde $P = F(\cdot) - F_{S_1}S_1 - F_{S_2}S_2$.

Ahora bien, para encontrar la solución a la ecuación anterior definiremos

$$Y \equiv \frac{S_1}{S_2},$$

donde tambien asumimos que la opción $F(\cdot)$ es una funcion homogenea,

$$F(S_1, S_2, t) = S_2 f(Y, t).$$

Una vez hecho, expresamos las derivadas originales como una funcion de las derivadas con respecto a Y .

$$\begin{aligned} F_{S_1} &= f_Y(Y, t), \\ F_{S_1 S_1} &= \frac{1}{S_2} f_{YY}(Y, t), \\ F_{S_2} &= f(Y, t) - Y f_Y(Y, t), \\ F_{S_2 S_2} &= \frac{Y^2}{S_2} f_{YY}(Y), \\ F_{S_2 S_1} &= -\frac{Y}{S_2} f_{YY}(Y, t), \\ F_t(\cdot) &= S_2 f_t(Y, t). \end{aligned}$$

Reemplazando estas expresiones en

$$F_t + \left(\frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2\right) F_{S_1 S_1} + \left(\frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2\right) F_{S_2 S_2} + (\sigma_1 \sigma_2 \rho S_1 S_2) F_{S_1 S_2} - rP = 0,$$

obtenemos,

$$S_2 f_t(Y, t) + \left(\frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2\right) \frac{1}{S_2} f_{YY}(Y, t) + \left(\frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2\right) \frac{Y^2}{S_2} f_{YY}(Y) - (\sigma_1 \sigma_2 \rho S_1 S_2) \frac{Y}{S_2} f_{YY}(Y, t) - rP = 0,$$

donde

$$P = S_2 f(Y, t) - f_Y(Y, t) S_1 - (f(Y, t) - Y f_Y(Y, t)) S_2.$$

Si se divide la expresion superior por S_2 y se reemplaza $Y \equiv \frac{S_1}{S_2}$, esta ecuación se reduce a

$$\frac{1}{2}(\sigma_1^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 \rho + \sigma_2^2) Y^2 f_{YY}(Y, t) + f_t(Y, t) = 0,$$

con la condición terminal

$$f(Y, T) = \max(Y - 1, 0).$$

Caso (3). Aquí se realiza un contrato sobre un factor macroeconómico que es exógeno, por ejemplo: la inflación (Y_t). Se asume que la variable estado Y_t sigue un proceso de Brownian Motion Geométrica.

$$\frac{dY}{Y} = \mu dt + \sigma dz.$$

La característica principal de este método de hacer el pricing es que no podemos armar una cartera comprando o vendiendo inflación por lo tanto se realiza el pricing utilizando 2 opciones distintas sobre el underlying.

Para encontrar el precio del call construimos un portafolio con $c_1(Y, t)$ y $c_2(Y, t)$ donde

$$\frac{dc_i}{c_i} = \mu_{c_i} dt + \sigma_{c_i} dz, \quad \text{para } i = 1, 2$$

y

$$\frac{dP}{P} = \alpha \frac{dc_1}{c_1} + (1 - \alpha) \frac{dc_2}{c_2}.$$

Por lo tanto, el cambio del portafolio es igual a

$$\frac{dP}{P} = [\alpha \overbrace{\frac{1}{c_1}(c_{1t} + Y c_{1Y} \mu + \frac{1}{2} Y^2 c_{1YY} \sigma^2)}^{\mu_{c_1}} + (1 - \alpha) \overbrace{\frac{1}{c_2}(c_{2t} + Y c_{2Y} \mu + \frac{1}{2} Y^2 c_{2YY} \sigma^2)}^{\mu_{c_2}}] dt + \Phi dz,$$

donde $\Phi = \alpha \sigma_{c_1} + (1 - \alpha) \sigma_{c_2}$.

Para eliminar el riesgo Φ debe ser cero, por lo que obtenemos

$$\alpha = \frac{\sigma_{c_2}}{(\sigma_{c_2} - \sigma_{c_1})}.$$

Una vez eliminado el riesgo, por **Principio de Arbitraje** dicho portafolio debe pagar la tasa libre de riesgo,

$$\begin{aligned} \frac{dP}{P} &= r dt \Rightarrow \\ [\alpha \mu_{c_1} + (1 - \alpha) \mu_{c_2}] dt &= r dt \Rightarrow \\ (\frac{\sigma_{c_2}}{(\sigma_{c_2} - \sigma_{c_1})} \mu_{c_1} + (1 - \frac{\sigma_{c_2}}{(\sigma_{c_2} - \sigma_{c_1})}) \mu_{c_2}) dt &= r dt. \\ \Rightarrow \frac{(\mu_{c_1} - r)}{\sigma_1} &= \frac{(\mu_{c_2} - r)}{\sigma_2} = \lambda. \end{aligned}$$

Aquí Lambda es el precio del riesgo de cada contrato y todos los λ 's son iguales entre sí. Por el Lema de $It\hat{o}$ sabemos que

$$\sigma_i = \frac{1}{C} \sigma_Y Y C_Y.$$

Ademas sabemos que

$$\mu_i = \frac{1}{C} (C_t + Y C_Y \mu + \frac{1}{2} C_{YY} \sigma_Y^2 Y^2),$$

sustituyendo obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{(\frac{1}{C} (C_t + Y C_Y \mu + \frac{1}{2} Y^2 C_{YY} \sigma^2) - r)}{\frac{1}{C} \sigma_Y C_Y} &= \lambda, \\ C_t + (\mu - \lambda \sigma_Y) Y C_Y + \frac{1}{2} C_{YY} \sigma^2 Y^2 - Cr &= 0. \end{aligned}$$

Si observamos la ecuación del pricing la diferencia con la ecuación diferencial de BS es que en vez de rYC_Y obtenemos $(\mu - \lambda\sigma_Y)YC_Y$ pues no podemos hacer hedge con un activo para eliminar el precio del riesgo. Aquí λ debe ser obtenido independientemente.

Aclaración conceptual.

Puede resultar confuso que aparezca el precio del riesgo en la ecuación, cuando justamente lo que hicimos es eliminar el riesgo. Una pregunta válida sería, ¿por qué en este caso aparece y en el caso “estándar” no? ¿Cuál es la diferencia?

Para responder esta pregunta, uno podría hacer lo siguiente: pensar en el pricing de una opción sobre un stock (tradeable), pero derivar el precio con la metodología que acabamos de usar (armarse el portafolio con dos opciones). Los pasos serían exactamente lo mismos, por lo que se terminaría llegando a la misma ecuación diferencial:

$$C_t + (\mu - \lambda\sigma_S)SC_S + \frac{1}{2}C_{SS}\sigma^2S^2 - Cr = 0.$$

Donde en este caso también nos aparece el precio del riesgo. Pero, para el caso donde S es tradeable, podemos hacer una aclaración más. La ecuación de no arbitraje que usamos para nuestro pricing nos terminó diciendo que, para cualquier derivado, tiene que valer que:

$$\frac{\mu_F - r}{\sigma_F} = \lambda$$

Donde μ_F y σ_F son el drift y la volatilidad de un derivado cualquiera sobre el stock. Básicamente, lo que nos dice eso es que cualquier cosa cuyo riesgo dependa del stock, tiene que tener el mismo valor de exceso de retornos dividido volatilidad.

Ahora bien: como eso vale para cualquier derivado, también vale para el stock en sí mismo! Como el stock es un activo que se puede tradear, tiene que cumplir la misma ecuación de no arbitraje. Por lo tanto,

$$\frac{\mu - r}{\sigma} = \lambda$$

Donde μ y σ son el drift y la volatilidad del stock, es decir, los mismos que aparecían en la ecuación diferencial. De la ecuación de arriba, despejando, obtenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{\mu - r}{\sigma} &= \lambda \\ \mu - r &= \lambda\sigma \\ \mu - \lambda\sigma &= r\end{aligned}$$

Ese $\mu - \lambda\sigma = r$ lo podemos reemplazar en la ecuación diferencial (porque es justo lo que teníamos) y nos queda

$$C_t + rSC_S + \frac{1}{2}C_{SS}\sigma^2S^2 - Cr = 0.$$

Que es la ecuación diferencial de Black and Scholes derivada antes.

En resumen: uno podría usar esta estrategia para hacer el pricing siempre y obtendría el mismo resultado que antes. La diferencia sustancial entre el caso en donde el underlying es tradeable y el caso donde no, es que en el primero tiene que valer $\frac{\mu - r}{\sigma} = \lambda$ para el underlying (si no pasa, se puede arbitrar), mientras que en el caso donde el underlying Y no es tradeable, no tiene por que valer, entonces $\mu - \lambda\sigma$ en general va a ser distinto de r .

2.1 Neutralidad al Riesgo

Habíamos visto anteriormente que el pricing de las opciones puede realizarse **como si los agentes fuesen neutrales al riesgo**. En término de nuestro modelo en tiempo continuo esto se observa en que la ecuación diferencial (4) no depende de ninguna medida afectada por las preferencias de riesgo de los individuos. Si la ecuación (4) tuviese el retorno esperado del underlying μ entonces ya no sería independiente de las preferencias de riesgo de los individuos, porque a mayor nivel de aversión al riesgo más alto sería μ para un Stock dado. Como la ecuación (4) depende de la tasa libre de riesgo, se dice que los agentes no exigen prima por el riesgo, los agentes se comportan como si fuesen neutrales al riesgo. En un mundo neutral al riesgo cualquier valor presente de un cash-flow se descuenta por la tasa libre de riesgo, además el retorno esperado de cualquier derivado es la tasa libre de riesgo, ya que los agentes no necesitan un premium por tomar riesgo.

Vimos anteriormente que cuando $\lambda = 0$, $\mu_S = r$ y en principio podríamos intentar resolver el problema de hacer el pricing de la opción calculando el valor descontado de S bajo esta ley de movimiento alternativa.

Para clarificar el argumento podemos proponer dos economías, una en donde los underlying siguen

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz,$$

que es la economía Actual; y otra economía que sea neutral al riesgo, entonces los underlying siguen

$$dS = r S dt + \sigma S dz.$$

Notemos las diferencias en las drifts, que se puede interpretar como que en el caso neutral la prima de riesgo es nula, *i.e.*, $\lambda = 0$.

Si nos encontramos en el mundo neutral, podemos descontar los pay-off por la tasa libre de riesgo, Por lo tanto se cumple que el precio del Call es el pay-off esperado descontado por la tasa libre de riesgo

$$C(\cdot) = E_{II} \{ e^{-rT} \max(S_T - X, 0) \},$$

donde E_{II} es el valor esperado bajo la densidad de la economía neutral. Por ende describimos la anterior expresión como

$$C(\cdot) = e^{-rT} \int_{S \in (X, \infty)} (S_T - X) f_{II}(S_T) dS_T.$$

Se puede demostrar que si resolvemos la integral obtendríamos la ecuación de Black & Scholes (Ver Apéndice A). Intuitivamente logramos establecer una relación (precisamente un mapping) entre la función de densidad de una economía neutral ($f_{II}(S_T)$) y la función de densidad de la economía actual, esto nos permite hacer el pricing en la primera economía y luego extrapolarlo a la segunda economía sin problemas. La demostración matemática lo único que hace es verificar la existencia y unicidad de este mapping, esta demostración no se presentará, pero a continuación derivaremos intuitivamente la existencia del mapping utilizando precios (probabilidades) de Arrow-Debreu.

Consideremos una economía con 2 periodos y E estados posibles de la naturaleza. Definamos al valor de cualquier activo como:

$$S = \sum_{\forall e \in E} \frac{P_e}{1+r} S_e$$

donde $E = \{e_1, e_2, \dots, e_E\}$ es un conjunto finito que define a los diferentes estados de la naturaleza y S_e es el pago de este activo en el estado e en el período siguiente (más abajo definiremos a P_e).

Ahora bien, si definimos a $c(S_e)$, $\forall e$ como el pago de la opción sobre el activo S en el estado e , entonces el valor de la opción es

$$c = \sum_{\forall e \in E} \frac{P_e}{1+r} c(S_e).$$

Pero si recordamos el problema del consumidor en una economía en la que un individuo puede asegurarse en consumo futuro usando activos financieros a la Arrow Debreu, la condición de primer orden establecía que

$$\frac{P_e}{1+r} = \frac{\beta U'(Consumo_e)}{U'(Consumo_o)} \Pi_e,$$

donde Π_e es la probabilidad que ocurra el estado e .

La anterior ecuación nos dice que P_e es igual a una probabilidad obtenida (se puede probar fácilmente que $\sum_e P_e = 1$) como si los agentes fuesen neutrales al riesgo (probabilidades que en tiempo continuo definiremos como $f_{II}(S_T)$). Por lo tanto podemos describir la ecuación del valor de la opción como

$$\begin{aligned} c &= \sum_{\forall e \in E} \frac{P_e}{1+r} c(S_e), \\ &= \frac{1}{1+r} \sum_{\forall e \in E} P_e c(S_e), \\ &= \frac{E_P(c(S_e))}{1+r}. \end{aligned}$$

Entonces logramos establecer que el valor de la opción es la esperanza sobre los estados de la naturaleza, descontado por la tasa libre de riesgo.

2.2 Montecarlo

El método Monte Carlo está basado en la analogía entre probabilidad y volumen. La matemática de medida formaliza la noción intuitiva de probabilidad, asociando un evento con un conjunto de realizaciones y definiendo la probabilidad de un evento como su volumen o medida relativa con respecto al universo posible de realizaciones.

Monte Carlo usa esta identidad en forma inversa, calculando el volumen del conjunto interpretando el volumen como una probabilidad. En el caso más simple, esto significa tomar un muestreo aleatorio sobre el universo de realizaciones posibles y luego tomar la fracción de la muestra que cae en un determinado conjunto como un estimador del volumen del conjunto. La ley de los grandes números asegura que el estimador converge al valor correcto mientras el número de observaciones aumenta. El teorema central del límite provee información acerca de la magnitud del error en el estimador luego de un número finito de observaciones.

Consideremos, por ejemplo, el problema de estimar la integral de la función f en el intervalo unitario. Podemos representar la integral

$$\alpha = \int_0^1 f(x) dx$$

como la esperanza $E(f(U))$, donde U se distribuye uniformemente en el intervalo $[0, 1]$.

Supongamos que tenemos un mecanismo para obtener observaciones U_1, U_2, \dots independientemente y uniformemente de $[0, 1]$. Evaluando la función f en n de estas observaciones y promediando el resultado produce el estimador de Monte Carlo

$$\hat{\alpha}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(U_i).$$

Si f es integrable en el $[0, 1]$ entonces, por la ley fuerte de los grandes números,

$$\hat{\alpha}_n \rightarrow \alpha \quad \text{con probabilidad 1 cuando } n \rightarrow \infty.$$

Si el cuadrado de f es integrable, definimos

$$\sigma_f^2 = \int_0^1 (f(x) - \alpha)^2 dx,$$

y el error $\hat{\alpha}_n - \alpha$ en el estimador de Monte Carlo se distribuye aproximadamente normal con media 0 y desvío estándar σ_f/\sqrt{n} , y la calidad de la aproximación aumenta cuando aumenta n .

El parámetro σ_f será típicamente desconocida en un caso en el que α es desconocido, pero puede ser estimado usando el desvío estándar muestral

$$s_f = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (f(U_i) - \hat{\alpha}_n)^2}.$$

Por lo tanto, de los valores $f(U_1), \dots, f(U_n)$ obtenemos no solo un estimador de la integral α sino que también una medida del error de dicha estimación. La forma del error estándar σ_f/\sqrt{n} es una característica central del método de Monte Carlo. Achicar el error a la mitad requiere aumentar el número de observaciones por un factor de 4; aumentar una posición decimal la precisión requiere multiplicar la cantidad de observaciones por 100.

2.2.1 ¿Cuál es la relación entre simulación de Monte Carlo e ingeniería financiera?

Una implicancia fundamental de la teoría de valuación de activos es que, bajo ciertas circunstancias, el precio de un derivado financiero puede ser representado por una esperanza. Por lo tanto, valorar un derivado se reduce a calcular esperanzas.

Valuar un derivado por simulación de Monte Carlo típicamente involucra simular trayectorias de procesos estocásticos usados para describir la evolución de los precios de los activos subyacentes, tasas de interés, parámetros de modelos y otros factores relevantes para el derivado en cuestión. En lugar de observaciones aleatorias de $[0,1]$ o $[0,1]^d$, buscamos observaciones de un espacio de trayectorias.

2.2.2 Ejemplo 1

Como primer ejemplo del método de Monte Carlo, consideramos el cálculo del valor presente esperado de los pagos de un call sobre una acción. Sea $S(t)$ el precio de una acción a tiempo t . Consideremos un call europeo con un strike price X y un expiration date T ; en el momento de la firma del contrato $t = 0$. Sabemos que si a tiempo T el precio de la acción $S(T)$ excede el strike price X , el poseedor de la opción la ejercita y obtiene una ganancia $S(T) - X$; si, por el contrario, $S(T) \leq X$, la opción expira con precio nulo.

Por lo tanto, el pago del call a tiempo T es

$$(S(T) - X)^+ = \max\{S(T) - X, 0\}.$$

Para obtener el valor presente de este pago, lo multiplicamos por el factor de descuento e^{-rT} , siendo r el interés compuesto continuo. Denotamos el valor presente esperado como $E[e^{-rT}(S(T) - X)^+]$.

Para que esta esperanza tenga sentido, necesitamos especificar la distribución de la variable aleatoria $S(T)$. El modelo Black-Scholes describe la evolución

del precio de la acción a través de la ecuación diferencial estocástica

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = rdt + \sigma dz(t), \quad (6)$$

donde dz es un proceso browniano estándar (o proceso de Wiener).

Al tomar la tasa de retorno igual a la tasa de interés r estamos describiendo implícitamente el proceso de S bajo la medida neutral al riesgo (recordemos que esta medida era tal que todos los activos de la economía crecían, en promedio, a la tasa libre de riesgo).

La solución de la ecuación diferencial estocástica (6) es

$$S(T) = S(0) \exp \left(\left[r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right] T + \sigma z(T) \right). \quad (7)$$

Como $S(0)$ es el precio actual de la acción, es una variable conocida. La variable aleatoria $z(T)$ se distribuye en forma normal con media 0 y varianza T ; esto es también la distribución de $\sqrt{T}\varepsilon$ donde ε es una variable normal estándar. Por lo tanto, el logaritmo del precio de la acción se distribuye en forma normal, y el precio de la acción tiene una distribución lognormal.

La esperanza $E \left[e^{-rT} (S(T) - X)^+ \right]$ es una integral con respecto a la densidad lognormal de $S(T)$. Esta integral puede ser evaluada en términos de la función de distribución normal estándar Φ obteniendo

$$\begin{aligned} B(S(0), \sigma, T, r, X) &= S(0) \Phi \left(\frac{\log(S(0)/X) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \\ &\quad - e^{-rT} X \Phi \left(\frac{\log(S(0)/X) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \right). \end{aligned}$$

Esta es la fórmula de Black-Scholes para valuación de un call.

Debido a la existencia de esta fórmula, no es necesaria la utilización de Monte Carlo para computar $E \left[e^{-rT} (S(T) - X)^+ \right]$. Sin embargo, usamos este ejemplo para ilustrar los pasos clave en Monte Carlo.

De (7) vemos que tomar observaciones del precio terminal de la acción, $S(T)$, es suficiente tener un mecanismo para obtener observaciones de una distribución normal estándar.

Supongamos que tenemos la posibilidad de obtener una secuencia Z_1, Z_2, \dots de variables aleatorias normales estándar independientes. Dado el mecanismo para generar Z_i , podemos estimar $E \left[e^{-rT} (S(T) - X)^+ \right]$ usando el siguiente algoritmo:

Algorithm 2 para $i = 1, \dots, n$

generar Z_i

define $S_i(T) = S(0) \exp \left(\left[r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right] T + \sigma \sqrt{T} Z_i \right)$

define $C_i = e^{-rT} (S_i(T) - X)^+$

define $\hat{C}_n = (C_1 + \dots + C_n) / n$

Para todo $n \geq 1$, el estimador \hat{C}_n es insesgado, en el sentido de que su valor esperado es la cantidad buscada:

$$E(\hat{C}_n) = C \equiv E \left[e^{-rT} (S(T) - X)^+ \right].$$

El estimador es consistente, en el sentido que cuando $n \rightarrow \infty$,

$$\hat{C}_n \rightarrow C \quad \text{con probabilidad 1.}$$

Para un n finito pero moderadamente grande, podemos armar un intervalo de confianza para \hat{C}_n . Sea

$$s_C = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (C_i - \hat{C}_n)^2} \quad (8)$$

el desvío estándar muestral de C_1, \dots, C_n y sea z_δ el cuantil $1 - \delta$ de una distribución normal estándar (es decir, $\Phi(z_\delta) = 1 - \delta$).

Entonces

$$\hat{C}_n \pm z_{\delta/2} \frac{s_C}{\sqrt{n}} \quad (9)$$

es un intervalo de confianza de $1 - \delta$ para C válido asintóticamente. (Para un intervalo de confianza del 95%, $\delta = 0,05$ y $z_{\delta/2} \cong 1,96$)

Alternativamente, como el desvío estándar es estimado en lugar de conocido, es preferible reemplazar $z_{\delta/2}$ con el correspondiente cuantil de una distribución t con $n - 1$ grados de libertad, lo que resulta en un intervalo levemente más largo. En cualquier caso, la probabilidad de que el intervalo cubre C se aproxima a $1 - \delta$ cuando $n \rightarrow \infty$.

2.3 Ejemplo 2

Ejemplo de opción cuyo pago depende de la trayectoria del precio El pago de un call europeo vanilla está determinado por el precio terminal de la acción $S(T)$ y no depende de la evolución de $S(t)$ entre los momentos 0 y T .

Cuando calculamos $E \left[e^{-rT} (S(T) - X)^+ \right]$, pudimos pasar directamente del momento 0 a T usando (7) para obtener valores de $S(T)$. Cada "trayectoria" del activo subyacente simulada consistía de sólo dos puntos: $S(0)$ y $S(T)$. Cuando se valúan derivados usando modelos de la dinámica del activo subyacente más complicado, es necesario, generalmente, simular trayectorias en múltiples fechas intermedias y no sólo en las fechas inicial y final.

Dos consideraciones pueden hacer esto necesario: 1) el pago del derivado puede depender explícitamente en el valor del activo subyacente en múltiples fechas; puede ser que no sepamos cómo obtener observaciones del activo subyacente en forma exacta y, por lo tanto, necesitamos dividir el intervalo de tiempo $[0, T]$ en subintervalos más pequeños para obtener una aproximación más precisa del proceso. 2) el payoff de la opción puede depender de toda la trayectoria.

Consideremos una generalización de (6) en el cual la dinámica del activo subyacente, $S(t)$, está dado por

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma(S(t))S(t)dW(t). \quad (10)$$

Excepto en casos muy especiales, esta ecuación no admite una solución explícita del tipo (7) y no tenemos un mecanismo exacto para obtener observaciones de la distribución de $S(T)$. En este caso, podemos partir el intervalo $[0, T]$ en m subintervalos de largo $\Delta t = T/m$ y sobre cada subintervalo $[t, t + \Delta t]$ simular la transición usando una aproximación discreta (Euler) de (10) de la forma

$$S(t + \Delta t) = S(t) + rS(t)\Delta t + \sigma(S(t))S(t)\sqrt{\Delta t}Z,$$

siendo Z una variable aleatoria normal estándar.

Este resultado se deriva del hecho de que $W(t + \Delta t) - W(t)$ tiene media cero y desvío estándar $\sqrt{\Delta t}$. Repitiendo esto para los m saltos produce un valor de $S(T)$ cuya distribución aproxima la distribución exacta (y desconocida) de $S(T)$ implícita en (10). Mientras m se vaya agrandando (tal que Δt se hace más chico) la distribución aproximada de $S(T)$ se acerca a la distribución exacta. En este ejemplo, saltos intermedios son introducidos en la simulación para reducir el "error de discretización".

Pero incluso si asumimos que la dinámica en (6) del modelo de Black-Scholes, puede ser necesaria la simulación de trayectorias del activo subyacente si el pago del derivado depende del valor del activo subyacente en fechas intermedias y no solo del valor terminal.

2.3.1 Opciones Asiáticas

Las **opciones asiáticas** son las opciones que dependen de la trayectoria del activo subyacente más simples de valuar usando simulación de Monte Carlo. Estas son opciones cuyos pagos dependen del nivel promedio del activo subyacente. Esto incluye, por ejemplo, el pago $(\bar{S} - X)^+$ con

$$\bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m S(t_j) \quad (11)$$

para algún conjunto prefijado de fechas $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < T$, donde T es la fecha en la cual el se recibe el pago. Para calcular el valor presente esperado del pago $E[e^{-rT}(\bar{S} - X)^+]$, necesitamos generar observaciones del promedio \bar{S} . La manera más simple de hacer esto es simular las trayectorias $S(t_1), \dots, S(t_m)$ y luego computar el promedio sobre la trayectoria.

Vimos en (7) cómo simular $S(T)$ dado $S(0)$; simular $S(t_{j+1})$ de $S(t_j)$ funciona de la misma manera:

$$S(t_{j+1}) = S(t_j) \exp \left(\left[r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right] (t_{j+1} - t_j) + \sigma \sqrt{t_{j+1} - t_j} Z_{t+1} \right) \quad (12)$$

donde Z_1, \dots, Z_m son variables aleatorias normales estándar independientes. Dada una trayectoria, es simple calcular \bar{S} y después el pago descontado $e^{-rT} (\bar{S} - X)^+$.

El siguiente algoritmo ilustra los pasos para simular n trayectorias de m saltos cada una. Es decir, sea Z_{ij} la observación j de la distribución normal en la trayectoria i . Los $\{Z_{ij}\}$ son independientes entre sí.

Algorithm 3 para $i = 1, \dots, n$

para $j = 1, \dots, m$

generar Z_{ij}

defino $S_i(t_j) = S_i(t_{j-1}) \exp \left[\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t_j - t_{j-1}) + \sigma \sqrt{(t_j - t_{j-1})} Z_{ij} \right]$

defino $\bar{S} = (S_i(t_1) + \dots + S_i(t_m)) / m$

defino $C_i = e^{-rT} (\bar{S} - X)^+$