Soluciones a los ejercicios de muestra del primer parcial

Ejercicio 1

Considere los siguientes fondos de inversión: CBF-SA y AFA-SRL. Cada fondo tiene 10 activos cuyos retornos son $i.i.d.$ (los activos de CBF son distintos de los activos de AFA). Los activos de CBF estan distribuidos con media 100 y varianza 1 y los activos de AFA son distribuidos con media 1 y varianza 100.

i) Encuentre la media y la varianza de cada uno de los portafolios.

ii) Explique si es posible que algun individuo prefiera comprar el fondo AFA a comprar el fondo CBF.

0.1. Solución

0.1.1. i)

$$
\begin{aligned}
E\left(r_{CBF}\right) &= E\left(\sum_{i=1}^{10}\alpha_i r_{i,CBF}\right) = \sum_{i=1}^{10}\alpha_i E\left(r_{i,CBF}\right) = \sum_{i=1}^{10}\alpha_i 100 = 100 \\
V\left(r_{CBF}\right) &= V\left(\sum_{i=1}^{10}\alpha_i r_{i,CBF}\right) = \sum_{i=1}^{10}\left(\alpha_i\right)^2 V\left(r_{i,CBF}\right) = \sum_{i=1}^{10}\left(\alpha_i\right)^2 \\
E\left(r_{AFA}\right) &= E\left(\sum_{i=1}^{10}\alpha_i r_{i,AFA}\right) = \sum_{i=1}^{10}\alpha_i E\left(r_{i,AFA}\right) = \sum_{i=1}^{10}\alpha_i = 1 \\
V\left(r_{AFA}\right) &= V\left(\sum_{i=1}^{10}\alpha_i r_{i,AFA}\right) = \sum_{i=1}^{10}\left(\alpha_i\right)^2 V\left(r_{i,AFA}\right) = 100\sum_{i=1}^{10}\left(\alpha_i\right)^2
\end{aligned}
$$

0.1.2. ii)

Si asumimos que los retornos se distribuyen en forma normal multivariada, entonces el enfoque de media-varianza es equivalente al de maximizar utilidad esperada y nadie (con $u' > 0$, $u'' < 0$) compraría el fondo AFA. Sin ese supuesto no podemos decir nada más. La clave es que nos dicen 'algún agente', por lo que uno podria buscar alguna funcion de utilidad o dsitribucion rara para la cual no se cumpla.

Ejercicio 2

a) Explique en qué consiste el APT.

b) Suponga que el CAPM es cierto, y asuma los siguientes portafolios 1 y 2 tal que

$$r_1 - r_f = \beta_{r_1,m}(r_m - r_f) + \varepsilon_1$$

$$r_2 - r_f = \beta_{r_2,m}(r_m - r_f) + \varepsilon_2$$

i) Puede usted construir un portafolio entre 1 y 2 que elimine totalmente el riesgo? (asuma que existe inversion inicial). Discuta si su respuesta depende de la covarianza entre ε_1 y ε_2.

ii) Suponga que ε_1 y ε_2 son identicamente igual a cero. En dicho caso muestre la expresion algebraica del portafolio una vez sustituidos los pesos que eliminan el riesgo e interprete el resultado.

Solución

a)

Mirar las notas de clase.

b)

i) Podemos escribir los retornos de los activos como:

$$\begin{aligned} r_1 &= \beta_{r_1,m} r_m + \left(1 - \beta_{r_1,m}\right) r_f + \varepsilon_1 \\ r_2 &= \beta_{r_2,m} r_m + \left(1 - \beta_{r_2,m}\right) r_f + \varepsilon_2 \end{aligned}$$

Armando un portafolio con retorno $r = \alpha r_1 + (1-\alpha) r_2$ con una inversión incial de 1 tenemos que la varianza de nuestro retorno es:

$$\begin{aligned} & V(\alpha r_1 + (1-\alpha) r_2) \\ = \; & V(\left[\alpha\beta_{r_1,m} + (1-\alpha)\beta_{r_2,m}\right] r_m + \left[\alpha\left(1-\beta_{r_1,m}\right) + (1-\alpha)\left(1-\beta_{r_2,m}\right)\right] r_f + \alpha\varepsilon_1 + (1-\alpha)\varepsilon_2) \\ = \; & V(\left[\alpha\beta_{r_1,m} + (1-\alpha)\beta_{r_2,m}\right] r_m + \alpha\varepsilon_1 + (1-\alpha)\varepsilon_2) \\ = \; & \left[\alpha\beta_{r_1,m} + (1-\alpha)\beta_{r_2,m}\right]^2 V(r_m) + \alpha^2 V(\varepsilon_1) + (1-\alpha)^2 V(\varepsilon_2) \\ & +2\left[\alpha\beta_{r_1,m} + (1-\alpha)\beta_{r_2,m}\right] \alpha Cov(r_m, \varepsilon_1) + 2\left[\alpha\beta_{r_1,m} + (1-\alpha)\beta_{r_2,m}\right](1-\alpha) Cov(r_m, \varepsilon_2) \\ & +2\alpha(1-\alpha) Cov(\varepsilon_{1,}\varepsilon_2) \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$V(\alpha r_1+(1-\alpha)r_2) = \left[\alpha\beta_{r_1,m} + (1-\alpha)\beta_{r_2,m}\right]^2 V(r_m)+\alpha^2V(\varepsilon_1)+(1-\alpha)^2V(\varepsilon_2)+2\alpha(1-\alpha)Cov(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$$

Como vemos, si los errores no están correlacionados, es imposible construir un portafolio que no tenga riesgo ya que $\left[\alpha\beta_{r_1,m} + (1-\alpha)\beta_{r_2,m}\right]^2 V(r_m) + \alpha^2V(\varepsilon_1) + (1-\alpha)^2V(\varepsilon_2) > 0$. Si en cambio $Cov(\varepsilon_1,\varepsilon_2) \neq 0$ entonces ya no podemos afirmar que no exista un α que anule la varianza.

ii) Si los errores son identicamente igual a cero entonces:

$$V(\alpha r_1 + (1-\alpha)r_2) = \left[\alpha\beta_{r_1,m} + (1-\alpha)\beta_{r_2,m}\right]^2 V(r_m)$$

Entonces ahora llamemos α^* al que hace que:

$$\alpha^*\beta_{r_1,m} + (1-\alpha^*)\beta_{r_2,m} = 0 \Rightarrow \alpha^* = \frac{\beta_{r_2,m}}{\beta_{r_2,m} - \beta_{r_1,m}}$$

Entonces tenemos que:

$$V(\alpha^* r_1 + (1-\alpha^*)r_2) = 0$$

Y entonces el retorno de nuestro portafolio tiene la siguiente expresión:

$$\alpha^* r_1 + (1-\alpha^*)r_2 = \left(\frac{\beta_{r_2,m}}{\beta_{r_2,m} - \beta_{r_1,m}}\right) r_1 - \left(\frac{\beta_{r_1,m}}{\beta_{r_2,m} - \beta_{r_1,m}}\right) r_2$$

Ejercicio 4

Considere la siguiente economía donde los agentes maximizan la utilidad esperada de la riqueza eligiendo para ello el portafolio óptimo que consiste de $n+1$ activos (n activos riesgosos y el activo libre de riesgo). Definimos α como un vector columna de n componentes que denota el peso de los activos riesgosos dentro del portafolio y r_f al retorno del activo libre de riesgo.

Los individuos maximizan el valor esperado de dicha utilidad sujeto a las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} \widehat{W} &= W_0\left[1 + (1-\alpha' I)\, r_f + \alpha' r\right], \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}}_{m_{2x1}} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{M_{2xn}} \alpha_{nx1}, \end{aligned}$$

donde $\widehat{W}$ y W_o son la riqueza final e inicial respectivamente del individuo, r_f es la tasa libre de riesgo y r es un vector que contiene los retornos de los n activos riesgosos.

Asumimos que los agentes tienen una función de utilidad cuadrática,

$$U(\widehat{W}) = \widehat{W} - \beta(\widehat{W})^2.$$

a) Interprete las condiciones de primer orden.

b) Encuentre el vector α que resuelve el problema de optimizacion.

c) Encuentre una expresión para el exceso de retorno de cada activo si el individuo coloca toda su riqueza en los acitvos riesgosos.

Solución

a)

El problema lo podemos escribir como:

$$\max_{\alpha} \quad E\left[\widehat{W} - \beta(\widehat{W})^2\right]$$

$$s.a. \quad : \quad \begin{cases} \widehat{W} = W_0\left[1 + (1-\alpha' I)\, r_f + \alpha' r\right] \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}}_{m_{2x1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{M_{2xn}} \alpha_{nx1} \end{cases}$$

Armamos entonces el lagrangeano como (notar que, en lo que sigue, λ es un vector columna de $2x1$ que contiene los multiplicadores del problema):

$$\max_{\alpha} \quad L = E\left[W_0\left[1 + (1-\alpha' I)\, r_f + \alpha' r\right] - \beta(W_0\left[1 + (1-\alpha' I)\, r_f + \alpha' r\right])^2\right] - \underbrace{\lambda'}_{1x2}\left[M\alpha - m\right]$$

Las condiciones de primer orden de este problema nos quedan:

$$(\alpha) \quad : \quad E\left[(1 - 2\beta W_0\left[1 + (1-\alpha' I)\, r_f + \alpha' r\right])\, W_0\,(r - I r_f)\right] - M'\lambda = 0 \qquad (1)$$

$$(\lambda) \quad : \quad M\alpha = m \qquad (2)$$

0.1.3. b)

Tenemos que encontrar el vector óptimo que resuelve el sistema de $(n+2)$ por $(n+2)$ dado por (1) y (2):

$$
\begin{aligned}
E\left[\left(1-2\beta W_0\left[1+\left(1-\alpha' I\right) r_f+\alpha' r\right]\right) W_0\left(r-I r_f\right)\right]-M'\lambda &= 0\\
E\left[W_0\left(r-I r_f\right)-2\beta W_0^2\left[1+\left(1-\alpha' I\right) r_f+\alpha' r\right]\left(r-I r_f\right)\right]-M'\lambda &= 0\\
E\left[W_0\left(r-I r_f\right)-2\beta W_0^2\left[1+r_f+\alpha'\left(r-I r_f\right)\right]\left(r-I r_f\right)\right]-M'\lambda &= 0\\
W_0 E\left[r-I r_f\right]-2\beta W_0^2\left(1+r_f\right) E\left[r-I r_f\right]-2\beta W_0^2 E\left[\alpha'\left(r-I r_f\right)\left(r-I r_f\right)\right]-M'\lambda &= 0\\
\left[W_0-2\beta W_0^2\left(1+r_f\right)\right] E\left[r-I r_f\right]-2\beta W_0^2 E\left[\alpha'\left(r-I r_f\right)\left(r-I r_f\right)\right]-M'\lambda &= 0
\end{aligned}
$$

Reescribiendo un poco esa última expresión notando que $\alpha'\left(r-I r_f\right)$ es un escalar y por lo tanto :

$$
\left[W_0-2\beta W_0^2\left(1+r_f\right)\right] E\left[r-I r_f\right]-2\beta W_0^2 E\left[\left(r-I r_f\right)\left(r-I r_f\right)'\right]\alpha=M'\lambda
$$

Y entonces:

$$
\left[W_0-2\beta W_0^2\left(1+r_f\right)\right] E\left[r-I r_f\right]-M'\lambda=2\beta W_0^2 E\left[\left(r-I r_f\right)\left(r-I r_f\right)'\right]\alpha
$$

Definiendo $R=\left(r-I r_f\right)\left(r-I r_f\right)'$ una matriz de nxn entonces:

$$
\left[W_0-2\beta W_0^2\left(1+r_f\right)\right]\left(E[R]\right)^{-1} E\left[r-I r_f\right]-\left(E[R]\right)^{-1} M'\lambda=2\beta W_0^2\left(E[R]\right)^{-1}\left(E[R]\right)\alpha
$$

$$
\frac{\left[W_0-2\beta W_0^2\left(1+r_f\right)\right]}{2\beta W_0^2}\underbrace{\left(E[R]\right)^{-1} E\left[r-I r_f\right]}_{nxn\ nx1}-\frac{1}{2\beta W_0^2}\underbrace{\left(E[R]\right)^{-1} M'}_{nxn\ nx2}\underbrace{\lambda}_{2x1}=\alpha \quad (3)
$$

Ahora ya puedo usar la restricción en esa ecuación:

$$
\frac{\left[W_0-2\beta W_0^2\left(1+r_f\right)\right]}{2\beta W_0^2}\underbrace{M\left(E[R]\right)^{-1} E\left[r-I r_f\right]}_{2xn\ nxn\ nx1}-\frac{1}{2\beta W_0^2}\underbrace{M\left(E[R]\right)^{-1} M'}_{2xn\ nxn\ nx2}\underbrace{\lambda}_{2x1}=M\alpha=m
$$

Y ahora despejo λ de esa ecuación:

$$
\frac{1}{2\beta W_0^2} M\left(E[R]\right)^{-1} M'\lambda=-m+\frac{\left[W_0-2\beta W_0^2\left(1+r_f\right)\right]}{2\beta W_0^2} M\left(E[R]\right)^{-1} E\left[r-I r_f\right]
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda &= -2\beta W_0^2\underbrace{\left[M\left(E[R]\right)^{-1} M'\right]^{-1}}_{2xn\ nxn\ nx2}\underbrace{m}_{2x1}\\
&\quad+\left[W_0-2\beta W_0^2\left(1+r_f\right)\right]\underbrace{\left[M\left(E[R]\right)^{-1} M'\right]^{-1}}_{2xn\ nxn\ nx2}\underbrace{M\left(E[R]\right)^{-1} E\left[r-I r_f\right]}_{2xn\ nxn\ nx1}
\end{aligned}
$$

Ahora vuelvo a (3) y reemplazo el vector de los multiplicadores y terminé:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\left[W_0 - 2\beta W_0^2 \left(1 + r_f\right)\right]}{2\beta W_0^2} \left(E\left[R\right]\right)^{-1} E\left[r - Ir_f\right] - \frac{1}{2\beta W_0^2} \left(E\left[R\right]\right)^{-1} M'\lambda \\
\alpha &= \frac{\left[1 - 2\beta W_0 \left(1 + r_f\right)\right]}{2\beta W_0} \left(E\left[R\right]\right)^{-1} E\left[r - Ir_f\right] \\
&\quad - \frac{1}{2\beta W_0^2} \left(E\left[R\right]\right)^{-1} M' \left[M \left(E\left[R\right]\right)^{-1} M'\right]^{-1} \\
&\quad \left[-2\beta W_0^2 m + \left[W_0 - 2\beta W_0^2 \left(1 + r_f\right)\right] M \left(E\left[R\right]\right)^{-1} E\left[r - Ir_f\right]\right]
\end{aligned}
$$

Y reemplazando R por lo que es:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\left[1 - 2\beta W_0 \left(1 + r_f\right)\right]}{2\beta W_0} \left(E\left[\left(r - Ir_f\right)\left(r - Ir_f\right)'\right]\right)^{-1} E\left[r - Ir_f\right] \\
&\quad - \frac{1}{2\beta W_0^2} \left(E\left[\left(r - Ir_f\right)\left(r - Ir_f\right)'\right]\right)^{-1} M' \left[M \left(E\left[\left(r - Ir_f\right)\left(r - Ir_f\right)'\right]\right)^{-1} M'\right]^{-1} \\
&\quad \left[-2\beta W_0^2 m + \left[W_0 - 2\beta W_0^2 \left(1 + r_f\right)\right] M \left(E\left[\left(r - Ir_f\right)\left(r - Ir_f\right)'\right]\right)^{-1} E\left[r - Ir_f\right]\right]
\end{aligned}
$$

0.1.4. c)

Si el individuo pone toda su riqueza en los activos riesgosos entonces debe valer que el α óptimo cumple:

$$
\begin{aligned}
1 &= I'\alpha = \frac{\left[1 - 2\beta W_0 \left(1 + r_f\right)\right]}{2\beta W_0} I' \left(E\left[R\right]\right)^{-1} E\left[r - Ir_f\right] \\
&\quad - \frac{1}{2\beta W_0^2} I' \left(E\left[R\right]\right)^{-1} M' \left[M \left(E\left[R\right]\right)^{-1} M'\right]^{-1} \\
&\quad \left[-2\beta W_0^2 m + \left[W_0 - 2\beta W_0^2 \left(1 + r_f\right)\right] M \left(E\left[R\right]\right)^{-1} E\left[r - Ir_f\right]\right]
\end{aligned}
$$

Y queremos una expresión para $E\left[r - Ir_f\right]$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\left[1 - 2\beta W_0 \left(1 + r_f\right)\right]}{2\beta W_0} I' \left(E\left[R\right]\right)^{-1} E\left[r - Ir_f\right] \\
&- \frac{\left[W_0 - 2\beta W_0^2 \left(1 + r_f\right)\right]}{2\beta W_0^2} I' \left(E\left[R\right]\right)^{-1} M' \left[M \left(E\left[R\right]\right)^{-1} M'\right]^{-1} M \left(E\left[R\right]\right)^{-1} E\left[r - Ir_f\right] \\
= \;& 1 - \frac{1}{2\beta W_0^2} I' \left(E\left[R\right]\right)^{-1} M' \left[M \left(E\left[R\right]\right)^{-1} M'\right]^{-1} 2\beta W_0^2 m
\end{aligned}
$$

Sacando factor común y cancelando algunos términos:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\left[1 - 2\beta W_0 \left(1 + r_f\right)\right]}{2\beta W_0} I' \left(E\left[R\right]\right)^{-1} E\left[r - Ir_f\right] \\
&- \frac{\left[1 - 2\beta W_0 \left(1 + r_f\right)\right]}{2\beta W_0} I' \left(E\left[R\right]\right)^{-1} M' \left[M \left(E\left[R\right]\right)^{-1} M'\right]^{-1} M \left(E\left[R\right]\right)^{-1} E\left[r - Ir_f\right] \\
= \;& 1 - I' \left(E\left[R\right]\right)^{-1} M' \left[M \left(E\left[R\right]\right)^{-1} M'\right]^{-1} m
\end{aligned}
$$

$$\underbrace{I'\left(E\left[R\right]\right)^{-1}}_{1xn\ nxn}\left[\underbrace{ID}_{nxn}-\underbrace{M'}_{nx2}\underbrace{\left[M\left(E\left[R\right]\right)^{-1}M'\right]^{-1}}_{2xn\ nxn\ nx2}\underbrace{M\left(E\left[R\right]\right)^{-1}}_{2xn\ nxn}\right]\frac{\left[1-2\beta W_0\left(1+r_f\right)\right]}{2\beta W_0}\underbrace{E\left[r-Ir_f\right]}_{nx1}$$

$$= 1-\underbrace{I'\left(E\left[R\right]\right)^{-1}}_{1xn\ nxn}\underbrace{M'}_{nx2}\underbrace{\left[M\left(E\left[R\right]\right)^{-1}M'\right]^{-1}}_{2xn\ nxn\ nx2}\underbrace{m}_{2x1}$$

Entonces si definimos a $G'\equiv\underbrace{I'\left(E\left[R\right]\right)^{-1}}_{1xn\ nxn}\left[\underbrace{ID}_{nxn}-\underbrace{M'}_{nx2}\underbrace{\left[M\left(E\left[R\right]\right)^{-1}M'\right]^{-1}}_{2xn\ nxn\ nx2}\underbrace{M\left(E\left[R\right]\right)^{-1}}_{2xn\ nxn}\right]$ un vector de $1xn$ tenemos:

$$\underbrace{G}_{nx1}\underbrace{G'}_{1xn}\frac{\left[1-2\beta W_0\left(1+r_f\right)\right]}{2\beta W_0}\underbrace{E\left[r-Ir_f\right]}_{nx1}$$

$$= \underbrace{G}_{nx1}\left(1-\underbrace{I'\left(E\left[R\right]\right)^{-1}}_{1xn\ nxn}\underbrace{M'}_{nx2}\underbrace{\left[M\left(E\left[R\right]\right)^{-1}M'\right]^{-1}}_{2xn\ nxn\ nx2}\underbrace{m}_{2x1}\right)$$

Finalmente tenemos:

$$\underbrace{E\left[r-Ir_f\right]}_{nx1}$$

$$= \frac{2\beta W_0}{\left[1-2\beta W_0\left(1+r_f\right)\right]}\left(\underbrace{GG'}_{nx1\ 1xn}\right)^{-1}\underbrace{G}_{nx1}\left(1-\underbrace{I'\left(E\left[R\right]\right)^{-1}}_{1xn\ nxn}\underbrace{M'}_{nx2}\underbrace{\left[M\left(E\left[R\right]\right)^{-1}M'\right]^{-1}}_{2xn\ nxn\ nx2}\underbrace{m}_{2x1}\right)$$

Y reemplazando G por lo que es:

$$E\left[r-Ir_f\right]$$

$$= \frac{2\beta W_0}{\left[1-2\beta W_0\left(1+r_f\right)\right]}$$

$$\left\{\left(\underbrace{I'\left(E\left[R\right]\right)^{-1}}_{1xn\ nxn}\left[\underbrace{ID}_{nxn}-\underbrace{M'}_{nx2}\underbrace{\left[M\left(E\left[R\right]\right)^{-1}M'\right]^{-1}}_{2xn\ nxn\ nx2}\underbrace{M\left(E\left[R\right]\right)^{-1}}_{2xn\ nxn}\right]\right)'\right.$$

$$\left.\left(\underbrace{I'\left(E\left[R\right]\right)^{-1}}_{1xn\ nxn}\left[\underbrace{ID}_{nxn}-\underbrace{M'}_{nx2}\underbrace{\left[M\left(E\left[R\right]\right)^{-1}M'\right]^{-1}}_{2xn\ nxn\ nx2}\underbrace{M\left(E\left[R\right]\right)^{-1}}_{2xn\ nxn}\right]\right)\right\}^{-1}$$

$$\left(\underbrace{I'\left(E\left[R\right]\right)^{-1}}_{1xn\ nxn}\left[\underbrace{ID}_{nxn}-\underbrace{M'}_{nx2}\underbrace{\left[M\left(E\left[R\right]\right)^{-1}M'\right]^{-1}}_{2xn\ nxn\ nx2}\underbrace{M\left(E\left[R\right]\right)^{-1}}_{2xn\ nxn}\right]\right)'$$

$$\left(1-\underbrace{I'\left(E\left[R\right]\right)^{-1}}_{1xn\ nxn}\underbrace{M'}_{nx2}\underbrace{\left[M\left(E\left[R\right]\right)^{-1}M'\right]^{-1}}_{2xn\ nxn\ nx2}\underbrace{m}_{2x1}\right)$$