Riesgo, Incertidumbre y Finanzas
Trabajo Práctico 1

6 de agosto de 2020

1. Partiendo de la siguiente definición

$$E\left[u\left(w\left(1+h\right)\right)\right]=u\left(E\left[w\left(1+h\right)\right]\left(1-RR_{p}\right)\right)$$

   donde $E\left(h\right)=0$, $Var\left(h\right)=\sigma^{2}$ y RR_{p} es la prima de riesgo relativa, muestre que la misma puede aproximarse por:

$$RR_{p}\left(w\right)=-\frac{\sigma^{2}}{2}\frac{u''\left(w\right)}{u'\left(w\right)}w=\frac{\sigma^{2}}{2}R_{R}$$

   Donde R_R es el coeficiente de aversión relativa al riesgo.

2. Muestre que si un individuo tiene un coeficiente absoluto de aversión al riesgo constante y debe elegir cuanto invertir en un activo riesgoso, entonces la cantidad invertida en ese activo no cambia con el nivel de riqueza.

3. Considere un individuo que maximiza su utilidad esperada sujeto a que su riqueza inicial puede ser invertida tanto en un activo libre de riesgo, que paga la tasa de interes r_f y **n** activos riesgos que tienen retorno esperado $E(r)$ (un vector de nx1 retornos esperados).
   El individuo maximiza

$$\begin{aligned} & E(U(\widehat{W})) \\ \widehat{W} &= W_0(1+(1-\alpha' I)r_f+\alpha' r) \end{aligned}$$

   donde α_{nx1} es un vector que nos dice la proporcion de la riqueza invertida en cada activo, r_{nx1} es un vector de retornos, I_{nx1} es un vector de unos y W_0 es la riqueza inicial.

   a) Encuentre las condiciones de primer orden que resuelven el problema de optimizacion.

   b) Halle una aproximación de los pesos optimos, $\frac{\alpha}{\alpha' I}$, haciendo una expansion de Taylor de primer grado (en las condiciones de primer orden) de $U'(\widehat{W})$ alrededor de $W_0(1+r_f)$. (Hint: use que $\widehat{W}-W_0(1+r_f)=W_0(\alpha'(r-Ir_f))$.)¿Dependen de la función de utilidad?¿Por qué?

   c) Suponga que la funcion de utilidad es $U\left(\widehat{W}\right)=\left(\widehat{W}-B\widehat{W}^2\right)$. Encuentre los pesos optimos en este caso (Hint: especialice la expresion que encontro en el punto **(b)**) ¿Son estos pesos aproximados o exactos? Utilice el code *EXAMPLE1a_v2* en MATLAB para encontrar los pesos que resuelven este problema.

   d) Asuma ahora que la funcion de utilidad es $U(\widehat{W})=\dfrac{\widehat{W}^{1-\gamma}}{1-\gamma}$. ¿Cambian los pesos óptimos $\frac{\alpha}{\alpha' I}$? Encuentre la proporcion de la riqueza aproximada invertida en cada activo, α. ¿Como cambia con γ? Explique.

   e) Modifique el codigo *EXAMPLE1a_v2* para obtener las proporciones de la riqueza invertidas en cada activo óptimas aproximadas en este caso.

   f) Suponga que el agente no puede invertir cantidades negativas (*ir short*) en ningún activo. Explique bajo que condiciones (propiedades de los retornos) el vector de proporciones es igual a cero, $\alpha=0$. La afirmacion anterior, ¿vale para los proporciones de la riqueza optimas reales o para las aproximadas? Explique por qué

4. Seguimos trabajando en MATLAB. Use el archivo *EXAMPLE1b*. Este codigo calcula los pesos óptimos (exactos, no aproximados) para el portafolio de un agente con distintas funciones de utilidad en forma numérica. Aqui pueden ir cambiando el tipo de agente introduciendo distintas expresiónes de la utilidad marginal- recuerden definir todos los elementos que van a utilizar posteriormente[1]. Para el caso de la funcion de utilidad CES, compare los resultados obtenidos con este codigo con los derivados del punto **2.(e).**.
   Modifique la rutina para un agente con una función de utilidad utilidad cuadratica y uno con función de utilidad logarítmica.

[1]Por ejemplo, en este momento el code esta con una función de utilidad CES, por lo que hay que definir un valor para el parametro γ antes de escribir la CPO.