Universidad Torcuato Di Tella

Licenciatura en Economía

PRIMER PARCIAL de RIF

NÚMERO DE REGISTRO:..................

1. **(50% de la nota del parcial)**

a) Considere los siguientes fondos de inversión: AUF, AFA y FPF. Se sabe que AUF domina estocasticamente de primer orden a FPF y que FPF domina estocasticamente de primer orden a AFA.

(i) Explique si se puede establecer algun tipo de dominancia estocástica entre AUF y AFA.

(ii) Explique si es posible que algún individuo prefiera comprar el fondo AFA a comprar el fondo FPF.

b) Suponga que la economía está poblada por agentes adversos al riesgo ($U'(.) > 0$ y $U''(.) \leq 0$). Asuma también que para dichos agentes $U'''(.) > 0$.

-Suponga que el individuo que invierte toda su riqueza, w_0, en el activo riesgoso por lo que se cumple que

$$E(U'(w_o(1 + r))(r - r_f)) \geq 0.$$

- Suponga que el agente considera importante también el tercer momento de la distribución, $E(r - r_f)^3$

(i) Realize una expansión de Taylor de *segundo orden* de $U'(w_o(1+r))$ alrededor de $w_o(1+r_f)$ y muestre como tendría que ser el excesso de retorno, $E(r - r_f)$, para que el individuo invierta toda su riqueza en el activo riesgoso.

(ii) Discuta como depende dicho resultado de que $E(r - r_f)^3$ sea mayor, menor o igual a cero.

(iii) Interprete dichos resultados.

c) Considere la frontera que solo incluye activos riesgosos. Las ponderaciones del portafolio de cero covarianza, $zc(p)$, con un portafolio frontera (p) se pueden escribir como una combinación lineal del portafolio (p) y el portafolio de mínima varianza,

$$\alpha_{zc(p)} = \theta\alpha_p + (1-\theta)\alpha_{mv}.$$

i) Encuentre θ sabiendo que $E(r_{zc(p)}) = \frac{A}{C} - \frac{\frac{D}{C^2}}{E(r_p)-\frac{A}{C}}$ y que $E(r_{mv}) = \frac{A}{C}$.

ii) Dado que $\alpha_{zc(p)} = \theta\alpha_p + (1-\theta)\alpha_{mv}$, pruebe que

$$\sigma^2(r_{zc(p)}) = \theta^2\sigma^2(r_p) + (1-\theta)^2\sigma^2(r_{mv}) + 2\theta(1-\theta)cov(r_p, r_{mv}).$$

iii)

Encuentre una expresión para $\sigma^2(r_{zc(p)})$ sabiendo que $cov(r_p, r_{mv}) = \sigma^2(r_{mv}) = \frac{1}{C}$, y que $\sigma^2(r_p) = \frac{C}{D}(E(r_p) - \frac{A}{C})^2 + \frac{1}{C}$.

d) Los pesos óptimos de los activos riesgosos de un portafolio que también incluye la tasa libre de riesgo son:

$$\alpha_p = V^{-1}(e - r_f\widetilde{1})\frac{E(r_p) - r_f}{H}$$

donde V es la matriz de varianza-covarianza del los activos riesgosos, $\widetilde{1}$ es un vector de unos y $H = (e - r_f\widetilde{1})'V^{-1}(e - r_f\widetilde{1})$ es un escalar que denota el cuadrado de los excesos de retornos estandarizado.

(i) Derive la expresión de la covarianza entre cualquier portafolio *frontera* q, y el portafolio p:

$$cov(r_q, r_p) = \alpha_q' V \alpha_p.$$

(ii) Use la expresión derivada en el punto $d)$ (i) para encontrar el valor del retorno esperado del portafolio de cero covarianza con p, $E(r_{zc(p)})$.

e) (i) Utilice la expresión de α_p presentada en $d)$ y muestre que $\gamma\alpha_{p1} + (1-\gamma)\alpha_{p2}$ es frontera si α_{p1} y α_{p2} lo son.

(ii) encontrar las ponderaciónes óptimas del portafolio de activos riesgosos, α_e.

(HINT: use que $\widetilde{1}'\alpha_p = 1$)

(iii) mostrar que para dicho portafolio el exceso de retorno con respecto a la tasa libre de riesgo es $\dfrac{H}{\widetilde{1}'V^{-1}(e - r_f\widetilde{1})}$.

Hint: $E(r_e) - r_f = (e - r_f\widetilde{1})'\alpha_e$

f) Utilizando la formula de las ponderaciones del portafolio α_e derivado en e), encuentre los pesos óptimos de una cartera con 2 activos riesgosos, r_1, r_2 y la tasa libre de riesgo r_f, sabiendo que dichos activos tienen la misma media, la misma varianza y estan incorrelaciónados.

2) **(50% de la nota del parcial)**

Conidere una economía donde existen N activos riesgosos y un activo libre de riesgo cuyo retorno es rf. En equilibrio existe un portafolio de mercado, α_m, que tiene un retorno esperado $E(r_m)$. Suponga que existen 3 tipos de agentes con distintos grados de aversión al riesgo.

a) Muestre en un diagrama la frontera compuesta por los N+1 activos y la compuesta solo por los activos riesgosos. Represente en ella las tres curvas de indiferencia asumiendo que i) todos los agentes son adversos al riesgo y ii) uno de los agentes (el agente 1) esta satisfecho invirtiendo toda su riqueza en el portafolio de mercado.

b) Explique cuanto demandarían el agente 2 y 3 del portafolio de mercados si asumimos que el agente 2 es mas adverso al riesgo que el agente 1 y que el agente 3 es menos adverso al riesgo que el agente 1. Muestre su respuesta graficamente. (**BONUS:** Muestre su respuesta algebraicamente).

c) Dado que el portafolio de mercado es frontera, puede ser escrito como

$$\alpha_m = g + hE(r_m)$$

(i) Muestre como sería el portafolio del agente 2, α_2 y el del agente 3, α_3.

d) Suponga que el CAPM es cierto, y por lo que los retornos de los portafolios de los agentes 2 y 3 se pueden expresar como

$$r_2 - r_f = \beta_{r_2,m}(r_m - r_f) + \varepsilon_2$$

$$r_3 - r_f = \beta_{r_3,m}(r_m - r_f) + \varepsilon_3$$

Encuentre la relación de equilibrio entre el exceso de retorno esperado del portafolio 1 y el portafolio 2. Explique cual es mayor.

e) Considere ahora el activo q. Su precio hoy (observado), P_q depende del valor esperado del valor del mismo en el periodo siguiente, $E(\widetilde{P}_q)$, de acuerdo a la siguiente formula

$$P_q = \frac{E(\widetilde{P}_q)}{1 + r_f + \beta_{q,m}(E(r_m) - r_f)}.$$

(i) Muestre que las siguientes expresiones también son validas

$$\begin{aligned} P_q &= \frac{E(\widetilde{P}_q) - \lambda_m Cov(r_q, r_m) P_q}{1 + r_f} \\ &= \frac{E(\widetilde{P}_q) - \lambda_m Cov(\widetilde{P}_q, r_m)}{1 + r_f}, \end{aligned}$$

donde $r_q = \frac{\widetilde{P}_q - P_q}{P_q}$ y $\lambda_m = \frac{E(r_m) - r_f}{\sigma^2(r_m)}$, es el precio del riesgo del portafolio de mercado.

(ii) Interprete las formulas.

f) Como descontaría un proyecto en el sector q si utilizare el APT como metodo de valuación (considere que hay dos factores, f_1 y f_2 que explican el riesgo no diversificable de los retornos).

g) Discuta brevemente porque decidiría usar uno u el otro metodo de evaluación (CAPM vs APT).