Riesgo, Incertidumbre y Finanzas

Bonos II

Francisco Terfi

2do semestre de 2022

Bonos con cupones

- Trabajaremos en un marco más general, introduciendo bonos que pagan cupones.
- Son bonos que además de pagar un monto principal, pagan cupones hasta el día de su madurez.
- En general, los cupones se especifican como una fracción del monto principal.
- Podemos pensar un bono con cupones como un portafolio de bonos *zero-coupon*, donde cada cupón se interpreta como el cobro de un bono *zero-coupon* en el intervalo de tiempo correspondiente.
- Nuestro objetivo es examinar cómo cubrirnos ante cambios en la tasa de interés para bonos con cupón (el *zero-coupon* es un caso particular).
- Antes de esto debemos presentar algunos conceptos preliminares.

Tasa interna de retorno (TIR)

- La **tasa interna de retorno, TIR** (*"yield to maturity"*, *YTM*) puede pensarse como la tasa de interés consistente con el precio actual asumiendo que es la única tasa para todo el horizonte.
- Es una promesa de rendimiento (asume que el bono se mantiene hasta su madurez).
- Podemos definirla de la siguiente manera

$$P_t = P(y) = \sum_{i=1}^{m} \frac{C_i}{(1+y)^{T_i - t}}$$

- Por ejemplo, consideremos el siguiente bono
  - A dos años.
  - Valor nominal: \$100
  - Cupón del 2 % que se paga **semestralmente**.
  - Valor de mercado del bono es 90,9

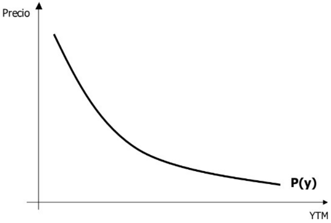
  La *yield* se obtiene de

$$90{,}9 = \frac{1}{(1+y/2)} + \frac{1}{(1+y/2)^2} + \frac{1}{(1+y/2)^3} + \frac{101}{(1+y/2)^4}$$

- La *yield* es de 6,95 % (anual).

Precio del bono y TIR

- Naturalmente la relación entre el precio del bono y la TIR es negativa



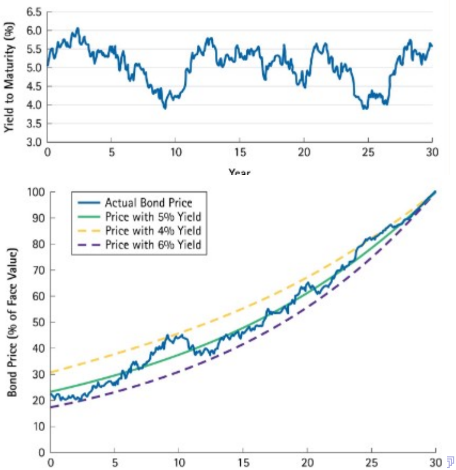
- El precio de un bono que paga cupones viene dado por

$$P_t = \sum_{i=1}^{m} \frac{C_i}{(1 + R(t, T_i - t))^{T_i - t}}$$

- Esto muestra que el precio depende de m distintas tasas de interés (variables) y de la madurez; y por lo tanto, el precio depende de varios factores de riesgo.
- Podemos pensar que la TIR sirve de proxy de toda esta estructura de riesgo.

Precio del bono y TIR

- Pensemos en un bono zero-coupon a 30 años.
- Los gráficos a continuación muestran los cambios en la TIR durante la vida del bono, el cambio en el precio del bono (debido a fluctuaciones de la TIR) y el precio del bono si la TIR se mantiene fija para ciertos valores.



Duration de un bono

- Supongamos (a modo de simplificación) que el único factor de riesgo que afecta el precio del bono es la YTM.
  - Similar a pensar una curva de rendimientos plana.
- **Definición:** *La \$duration mide cuán sensible es el precio del bono a cambios en la TIR (en pesos).*
- Si el precio es

$$P(y) = \sum_{i=1}^{m} \frac{C_i}{(1+y)^{T_i - t}}$$

entonces

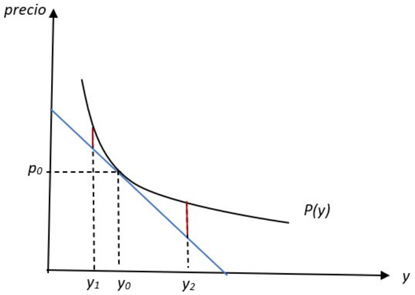
$$\$Dur = P'(y) = -\sum_{i=1}^{m} \frac{(T_i - t)C_i}{(1+y)^{T_i - t + 1}} < 0$$

- Luego, $dP(y) = P'(y)dy = \$Dur\ dy$
- **Definición:** *La modified duration como el cambio porcentual en el nivel de precios para cambios en el yield.*

$$MD = -\frac{P'(y)}{P(y)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{(T_i - t)C_i}{(1+y)^{T_i - t + 1}} \frac{1}{P}$$

Duration de un bono

- Podemos usar estas medidas para computar ganancias o pérdidas ($P\&L$) absoluta o relativa del valor del bono ante *cambios pequeños y paralelos* en la TIR.
  - $P\&L \text{ absoluta} \approx \$Dur \cdot \Delta y$
  - $P\&L \text{ relativa} \approx -MD \cdot \Delta y$
- Notar que el cambio en el precio usando la *duration* es una aproximación (lineal) y el precio es una función convexa en la TIR.
  - Aproxima *bien* para cambios *chicos*.



- Otra medida usada es la *Maculay duration* (ver notas).

Cobertura usando la *duration*

- Utilizaremos estos conceptos para realizar hedging y asumiremos que el único factor de riesgo que afecta al bono es la YTM.
- Pensemos en un bono con YTM y y precio $P(y)$ y usaremos otro con YTM y_1 y precio $H(y_1)$.
- Consideremos un portafolio con precio P^* compuesto por $P(y)$ y una proporción ϕ de $H(y_1)$
$$P^* = P(y) + \phi H(y_1)$$
- La idea es hacer el portafolio insensible a cambios pequeños en la tasa de interés.
- Comencemos con el supuesto simplificador de **movimientos paralelos** $dy = dy_1$.
- Luego, se tiene que
$$dP^* = [P'(y) + \phi H'(y_1)]dy = 0$$
- Entonces, para que el portafolio esté cubierto
$$\phi^* = -\frac{P'(y)}{H'(y_1)} = -\frac{\$Dur(P(y))}{\$Dur(H(y_1))} = -\frac{MD(P(y))}{MD(H(y_1))}\frac{P(y)}{H(y_1)}$$

Cobertura ante cambios grandes (y movimientos paralelos)

- Para cubrirnos ante cambios grandes debemos incorporar la noción de convexidad.
- **Definición:** *La \$ convexity de un bono se define como*

$$\$Conv(P(y)) = P''(y) = \sum_{i=1}^{m} \frac{(T_i - t)(T_i - t + 1)C_i}{(1+y)^{T_i - t + 2}}$$

- Tomando una aproximación de segundo orden

$$dP(y) = P'(y)dy + \frac{1}{2}P''(y)(dy)^2$$
$$dP(y) = \$Dur(P(y))dy + \frac{1}{2}\$Conv(P(y))(dy)^2$$

- Notar que el cambio relativo puede expresarse como

$$\frac{dP(y)}{P(y)} = \frac{P'(y)}{P(y)}dy + \frac{1}{2}\frac{P''(y)}{P(y)}(dy)^2$$
$$\frac{dP(y)}{P(y)} = -MD(P(y))dy + \frac{1}{2}RC(P(y))(dy)^2$$

donde $RC(P(y)) = P''(y)/P(y)$ se conoce como *convexidad relativa*.

Cobertura ante cambios grandes (y movimientos paralelos)

- Utilizaremos dos bonos para hacer el *hedging* con precios $H(y_1)$ y $H(y_2)$.
- El portafolio viene dado por

$$P^* = P(y) + \phi_1 H(y_1) + \phi_2 H(y_2)$$

- Elegimos ϕ_1 y ϕ_2 tales que $dP = 0$ y $d^2P = 0$; es decir tenemos que resolver el sistema

$$\begin{aligned} -P'(y)dy &= \phi_1 H_1'(y_1)dy_1 + \phi_2 H_2'(y_2)dy_2 \\ -P''(y)(dy)^2 &= \phi_1 H_1''(y_1)(dy_1)^2 + \phi_2 H_2''(y_2)(dy_2)^2 \end{aligned}$$

- Asumiendo movimientos paralelos $dy = dy_1 = dy_2$ se tiene que

$$\begin{aligned} -P'(y) &= \phi_1 H_1'(y_1) + \phi_2 H_2'(y_2) \\ -P''(y) &= \phi_1 H_1''(y_1) + \phi_2 H_2''(y_2) \end{aligned}$$

- Notar que modemos escribir el sistema en términos de la *duration* y *convexity* de los bonos. De este sistema se obtienen ϕ_1^* y ϕ_2^*

$$\begin{aligned} -Dur(P(y)) &= \phi_1 Dur(H_1(y_1)) + \phi_2 Dur(H_2(y_2)) \\ -Conv(P(y)) &= \phi_1 Conv(H_1(y_1)) + \phi_2 Conv(H_2(y_2)) \end{aligned}$$

Abandonamos el supuesto de movimientos paralelos

- Relajemos ahora el supuesto de movimientos paralelos para hacer el hedging.
- Recordemos que el precio del bono puede escribirse como

$$P_t = \sum_{i=1}^{m} \frac{C_i}{(1 + R(t, T_i - t))^{T_i - t}}$$

- El factor de riesgo en este caso es *toda* la *yield curve* representada ahora por m componentes (a diferencia del caso anterior con un único componente, YTM).
- Examinemos cambios pequeños en la *yield curve* y por lo tanto usamos una aproximación de primer orden

$$dP_t \simeq \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial P_t}{\partial R_t^i} dR_t^i \qquad donde \quad R_t^i = R(t, T_i - t)$$

Abandonamos el supuesto de movimientos paralelos

- El inversor utilizará m activos para hacer el hedging (igual al número de madureces), con precios H^j con $j = 1, 2, ..., m$.
  - Notar que la estrategia puede ser costosa.
- Consideremos un caso con $m = 2$.
- El precio de los activos para hacer el hedging dependerá de todas las tasas *zero-coupon* R_t^j, por lo que la aproximación de primer orden será

$$dH_t^j \simeq \frac{\partial H_t^j}{\partial R_t^1} dR_t^1 + \frac{\partial H_t^j}{\partial R_t^2} dR_t^2 \quad j = 1, 2$$

- Construimos el portafolio $P^* = P_t + \phi_1 H_t^1 + \phi_2 H_t^2$.
- Luego, la condición que deben verificar ϕ_1 y ϕ_2 es $dP^* = 0$, de modo que

$$\begin{aligned} dP_t^* \simeq & \left(\frac{\partial P_t}{\partial R_t^1} + \phi_1 \frac{\partial H_t^1}{\partial R_t^1} + \phi_2 \frac{\partial H_t^2}{\partial R_t^1}\right) dR_t^1 \\ & + \left(\frac{\partial P_t}{\partial R_t^2} + \phi_1 \frac{\partial H_t^1}{\partial R_t^2} + \phi_2 \frac{\partial H_t^2}{\partial R_t^2}\right) dR_t^2 = 0 \end{aligned}$$

Abandonamos el supuesto de movimientos paralelos

- La condición anterior puede expresarse como

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial P_t}{\partial R_t^i}+\sum_{j=1}^{2}\phi_j\frac{\partial H_t^j}{\partial R_t^i}\right)dR_t^i=0$$

- Entonces para hedgear este portafolio con $m+1$ bonos, se debe cumplir para cada i

$$\frac{\partial P_t}{\partial R_t^i}+\sum_{j=1}^{m}\phi_j\frac{\partial H_t^j}{\partial R_t^i}=0.$$

- De esta forma tenemos un sistema lineal que permite resolver para los ϕ_j, $j=1,...,m$.

Abandonamos el supuesto de movimientos paralelos

- Lo expresamos en términos matriciales, para eso definimos

$$
\begin{aligned}
H' &= \left(\frac{\partial H_t^j}{\partial R_t^i}\right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,m}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_t^1}{\partial R_t^1} & \cdots & \frac{\partial H_t^1}{\partial R_t^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial H_t^1}{\partial R_t^m} & \cdots & \frac{\partial H_t^m}{\partial R_t^m} \end{pmatrix} \\
\Phi &= \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_m \end{pmatrix} \quad P' = \begin{pmatrix} -\frac{\partial P_t}{\partial R_t^1} \\ \vdots \\ -\frac{\partial P_t}{\partial R_t^m} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

- Luego, el sistema puede expresarse como $H'\Phi = P'$ y la solución viene dada por

$$\Phi = (H')^{-1} P'$$

  - Notar que usamos que H' es inversible, es decir, asumimos que ninguno de los instrumentos usados para hacer el hedging es una combinación lineal de los otros $m-1$ insturmentos.

Pocos factores explican los yields

- En general, se observa que pocos componentes principales (combinaciones de tasas) explican el movimiento de la curva de rendimiento.
- Podemos agrupar los factores de riesgo en componentes principales y reducir el número de instrumentos utilizados.
- Asumimos que cada una de las tasas de interés (de los *zero-coupon* con madurez τ), $R(t,\tau)$ se puede expresar como función de k factores (componentes principales).
- Cada componente principal, PC_{lt} de τ tasas $R(t,\tau)$ que explican la mayor parte de su variabilidad

$$R(t,\tau) = \sum_{l=1}^{k<\tau} b_{\tau l} PC_{lt} + \varepsilon_{ti}$$

donde $b_{\tau l}$ es la sensibilidad de la tasa $R(t,\tau)$ al $l-\textit{ésimo}$ componente principal.

Pocos factores explican los yields

- Asumamos que el término ε_{ti} es despreciable y se utilizan $k = 3$ activos (hay 3 componentes principales) para hacer el hedging.
- Recordemos que

$$dP_t^* \simeq \sum_{\tau=1}^{m} \left(\frac{\partial P_t}{\partial R(t,\tau)} + \sum_{j=1}^{3} \phi_j \frac{\partial H_t^j}{\partial R(t,\tau)} \right) dR(t,\tau)$$

- Usando los componentes principales se tiene que

$$dR(t,\tau) \simeq \sum_{l=1}^{3} b_{\tau l} dPC_{lt}$$

- De modo que obtenemos

$$dP_t^* \simeq \sum_{\tau=1}^{m} \left(\left(\frac{\partial P_t}{\partial R(t,\tau)} + \sum_{j=1}^{3} \phi_j \frac{\partial H_t^j}{\partial R(t,\tau)} \right) \sum_{l=1}^{3} b_{\tau l} dPC_{lt} \right)$$

Pocos factores explican los yields

- Desglosando la expresión anterior

$$
\begin{aligned}
dP_t^* \simeq & \sum_{\tau=1}^{m} \left(\frac{\partial P_t}{\partial R(t,\tau)} b_{\tau 1} + \sum_{j=1}^{3} \phi_j \frac{\partial H_t^j}{\partial R(t,\tau)} b_{\tau 1} \right) dPC_{1t} \\
& + \sum_{\tau=1}^{m} \left(\frac{\partial P_t}{\partial R(t,\tau)} b_{\tau 2} + \sum_{j=1}^{3} \phi_j \frac{\partial H_t^j}{\partial R(t,\tau)} b_{\tau 2} \right) dPC_{2t} \\
& + \sum_{\tau=1}^{m} \left(\frac{\partial P_t}{\partial R(t,\tau)} b_{\tau 3} + \sum_{j=1}^{3} \phi_j \frac{\partial H_t^j}{\partial R(t,\tau)} b_{\tau 3} \right) dPC_{3t}
\end{aligned}
$$

- Para hedgear el portafolio tenemos que elegir ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3 tales que

$$
\sum_{\tau=1}^{m} \left(\frac{\partial P_t}{\partial R(t,\tau)} b_{\tau l} + \sum_{j=1}^{3} \phi_j \frac{\partial H_t^j}{\partial R(t,\tau)} b_{\tau l} \right) = 0 \qquad \text{para } l = 1, 2, 3
$$

Pocos factores explican los yield

- Para expresar el sistema en términos matriciales definimos

$$H' = \begin{pmatrix} \sum_{\tau=1}^{m} \frac{\partial H_t^1}{\partial R(t,\tau)} b_{\tau 1} & \sum_{\tau=1}^{m} \frac{\partial H_t^2}{\partial R(t,\tau)} b_{\tau 1} & \sum_{\tau=1}^{m} \frac{\partial H_t^3}{\partial R(t,\tau)} b_{\tau 1} \\ \sum_{\tau=1}^{m} \frac{\partial H_t^1}{\partial R(t,\tau)} b_{\tau 2} & \sum_{\tau=1}^{m} \frac{\partial H_t^2}{\partial R(t,\tau)} b_{\tau 2} & \sum_{\tau=1}^{m} \frac{\partial H_t^3}{\partial R(t,\tau)} b_{\tau 2} \\ \sum_{\tau=1}^{m} \frac{\partial H_t^1}{\partial R(t,\tau)} b_{\tau 3} & \sum_{\tau=1}^{m} \frac{\partial H_t^2}{\partial R(t,\tau)} b_{\tau 3} & \sum_{\tau=1}^{m} \frac{\partial H_t^3}{\partial R(t,\tau)} b_{\tau 3} \end{pmatrix}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} \qquad P' = \begin{pmatrix} -\sum_{\tau=1}^{m} \frac{\partial P_t}{\partial R(t,\tau)} b_{\tau 1} \\ -\sum_{\tau=1}^{m} \frac{\partial P_t}{\partial R(t,\tau)} b_{\tau 2} \\ -\sum_{\tau=1}^{m} \frac{\partial P_t}{\partial R(t,\tau)} b_{\tau 3} \end{pmatrix}$$

- El sistema lineal a resolver es $H'\Phi = P'$ y por lo tanto la solución es

$$\Phi = (H')^{-1} P'$$

Pocos factores explican los yields

- Veamos un ejemplo con 4 tasas (madureces) y 2 componentes principales (por lo que deberemos usar dos bonos para hacer el hedging).
- El cambio en el valor de los bonos es función del cambio en el valor de las tasas.

$$
\begin{aligned}
dP &= \frac{\partial P_t}{\partial R(t,1)} dR(t,1) + \frac{\partial P_t}{\partial R(t,2)} dR(t,2) \\
&\quad + \frac{\partial P_t}{\partial R(t,3)} dR(t,3) + \frac{\partial P_t}{\partial R(t,4)} dR(t,4) \\
dH^1 &= \frac{\partial H^1}{\partial R(t,1)} dR(t,1) + \frac{\partial H^1}{\partial R(t,2)} dR(t,2) \\
&\quad + \frac{\partial H^1}{\partial R(t,3)} dR(t,3) + \frac{\partial H^1}{\partial R(t,4)} dR(t,4) \\
dH^2 &= \frac{\partial H^2}{\partial R(t,1)} dR(t,1) + \frac{\partial H^2}{\partial R(t,2)} dR(t,2) \\
&\quad + \frac{\partial H^2}{\partial R(t,3)} dR(t,3) + \frac{\partial H^2}{\partial R(t,4)} dR(t,4)
\end{aligned}
$$

Pocos factores explican los yields

- Los componentes principales permiten expresar el cambio en las m madureces como función de k componentes.
- En nuestro ejemplo tenemos $m = 4$ y $k = 2$, de modo que

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} R(t,1) \\ R(t,2) \\ R(t,3) \\ R(t,4) \end{bmatrix}
&= \begin{bmatrix} b_{11}PC_{1t} + b_{12}PC_{2t} + \varepsilon_{1t} \\ b_{21}PC_{1t} + b_{22}PC_{2t} + \varepsilon_{2t} \\ b_{31}PC_{1t} + b_{32}PC_{2t} + \varepsilon_{3t} \\ b_{41}PC_{1t} + b_{42}PC_{2t} + \varepsilon_{4t} \end{bmatrix} \\
&\approx \begin{bmatrix} b_{11}PC_{1t} + b_{12}PC_{2t} \\ b_{21}PC_{1t} + b_{22}PC_{2t} \\ b_{31}PC_{1t} + b_{32}PC_{2t} \\ b_{41}PC_{1t} + b_{42}PC_{2t} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

- Notar entonces que podemos expresar $dR(\cdot)$ como función únicamente de dPC_{1t} y dPC_{2t}.

Pocos factores explican los yields

- Expresamos el cambio en el valor de los bonos como función de los cambios en los componentes principales

$$
\begin{aligned}
dP &= \frac{\partial P}{\partial R(t,1)}(b_{11}dPC_{1t} + b_{12}dPC_{2t}) \\
&\quad + \frac{\partial P}{\partial R(t,2)}(b_{21}dPC_{1t} + b_{22}dPC_{2t}) \\
&\quad + \frac{\partial P}{\partial R(t,3)}(b_{31}dPC_{1t} + b_{32}dPC_{2t}) \\
&\quad + \frac{\partial P}{\partial R(t,4)}(b_{41}dPC_{1t} + b_{42}dPC_{2t}) \\
&= (\frac{\partial P}{\partial R(t,1)}b_{11} + \frac{\partial P}{\partial R(t,2)}b_{21} + \frac{\partial P}{\partial R(t,3)}b_{31} + \frac{\partial P}{\partial R(t,4)}b_{41})dPC_{1t} \\
&\quad (\frac{\partial P}{\partial R(t,1)}b_{12} + \frac{\partial P}{\partial R(t,2)}b_{22} + \frac{\partial P}{\partial R(t,3)}b_{32} + \frac{\partial P}{\partial R(t,4)}b_{42})dPC_{2t}
\end{aligned}
$$

Pocos factores explican los yields

$$
\begin{aligned}
dH^1 &= \frac{\partial H^1}{\partial R(t,1)}\left(b_{11} dPC_{1t} + b_{12} dPC_{2t}\right) \\
&\quad + \frac{\partial H^1}{\partial R(t,2)}\left(b_{21} dPC_{1t} + b_{22} dPC_{2t}\right) \\
&\quad + \frac{\partial H^1}{\partial R(t,3)}\left(b_{31} dPC_{1t} + b_{32} dPC_{2t}\right) \\
&\quad + \frac{\partial H^1}{\partial R(t,4)}\left(b_{41} dPC_{1t} + b_{42} dPC_{2t}\right) \\
&= \left(\frac{\partial H^1}{\partial R(t,1)} b_{11} + \frac{\partial H^1}{\partial R(t,2)} b_{21} + \frac{\partial H^1}{\partial R(t,3)} b_{31} + \frac{\partial H^1}{\partial R(t,4)} b_{41}\right) dPC_{1t} \\
&\quad + \left(\frac{\partial H^1}{\partial R(t,1)} b_{12} + \frac{\partial H^1}{\partial R(t,2)} b_{22} + \frac{\partial H^1}{\partial R(t,3)} b_{32} + \frac{\partial H^1}{\partial R(t,4)} b_{42}\right) dPC_{2t}
\end{aligned}
$$

Pocos factores explican los yields

$$
\begin{aligned}
dH^2 &= \frac{\partial H^2}{\partial R(t,1)}\left(b_{11}dPC_{1t} + b_{12}dPC_{2t}\right) \\
&\quad + \frac{\partial H^2}{\partial R(t,2)}\left(b_{21}dPC_{1t} + b_{22}dPC_{2t}\right) \\
&\quad + \frac{\partial H^2}{\partial R(t,3)}\left(b_{31}dPC_{1t} + b_{32}dPC_{2t}\right) \\
&\quad + \frac{\partial H^2}{\partial R(t,4)}\left(b_{41}dPC_{1t} + b_{42}dPC_{2t}\right) \\
&= \left(\frac{\partial H^2}{\partial R(t,1)}b_{11} + \frac{\partial H^2}{\partial R(t,2)}b_{21} + \frac{\partial H^2}{\partial R(t,3)}b_{31} + \frac{\partial H^2}{\partial R(t,4)}b_{41}\right)dPC_{1t} \\
&\quad + \left(\frac{\partial H^2}{\partial R(t,1)}b_{12} + \frac{\partial H^2}{\partial R(t,2)}b_{22} + \frac{\partial H^2}{\partial R(t,3)}b_{32} + \frac{\partial H^2}{\partial R(t,4)}b_{42}\right)dPC_{2t}
\end{aligned}
$$

Pocos factores explican los yields

- Usando el portafolio $P^* = P + \phi_1 H_1 + \phi_2 H_2$ debemos resolver $dP^* = 0$ para hacer el hedging.
- Sin embargo, dado que

$$
\begin{aligned}
P^* = {} & P(R(t,1), R(t,2), R(t,3), R(t,4)) \\
& + \phi_1 H_1(R(t,1), R(t,2), R(t,3), R(t,4)) \\
& + \phi_2 H_2(R(t,1), R(t,2), R(t,3), R(t,4))
\end{aligned}
$$

Elegimos ϕ_1 y ϕ_2 de forma tal de cubrirnos solo para los cambios en componentes principales.

Pocos factores explican los yields

- Luego, tenemos el siguiente sistema de dos ecuaciones que resuelve para ϕ_1 y ϕ_2

$$\left(\frac{\partial P}{\partial R(t,1)}b_{11}+\frac{\partial P}{\partial R(t,2)}b_{21}+\frac{\partial P}{\partial R(t,3)}b_{31}+\frac{\partial P}{\partial R(t,4)}b_{41}\right)=$$
$$\phi_1(\frac{\partial H^1}{\partial R(t,1)}b_{11}+\frac{\partial H^1}{\partial R(t,2)}b_{21}+\frac{\partial H^1}{\partial R(t,3)}b_{31}+\frac{\partial H^1}{\partial R(t,4)}b_{41})$$
$$+\phi_2(\frac{\partial H^2}{\partial R(t,1)}b_{11}+\frac{\partial H^2}{\partial R(t,2)}b_{21}+\frac{\partial H^2}{\partial R(t,3)}b_{31}+\frac{\partial H^2}{\partial R(t,4)}b_{41})$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial R(t,1)}b_{12}+\frac{\partial P}{\partial R(t,2)}b_{22}+\frac{\partial P}{\partial R(t,3)}b_{32}+\frac{\partial P}{\partial R(t,4)}b_{42}\right)=$$
$$\phi_1(\frac{\partial H^1}{\partial R(t,1)}b_{12}+\frac{\partial H^1}{\partial R(t,2)}b_{22}+\frac{\partial H^1}{\partial R(t,3)}b_{32}+\frac{\partial H^1}{\partial R(t,4)}b_{42})$$
$$+\phi_2(\frac{\partial H^2}{\partial R(t,1)}b_{12}+\frac{\partial H^2}{\partial R(t,2)}b_{22}+\frac{\partial H^2}{\partial R(t,3)}b_{32}+\frac{\partial H^2}{\partial R(t,4)}b_{42})$$