Bonos

1 Introduccion y algunas definiciones

En esta seccion se trabajará con intrumentos financieros de **ingreso fijo**. Estos intrumentos tienen la peculiaridad que al ser comprados uno sabe cual es el rendimiento de dichos instrumentos. Un Bono es uno de los instrumentos más simples de ingreso fijo.

Los bonos pueden pagar o no cupones desde el momento que se compran hasta el momento del vencimiento del bono. Los bonos mas simples de analizar son aquellos que no pagan cupones. El problema clave es determinar el precio justo a pagar por un bono que paga al momento del vencimiento una cantidad determinada. Decimos que un **Zero Coupon Bond** es un bono que desde el momento de su compra hasta su vencimiento no paga cupones.

Comenzaremos dando definiciones sobre los distintos elementos que compenen el valor de un bono asumiendo *certidumbre.* Vamos a ver mas adelante que el paso de un mundo de certidumbre a uno de incertidumbre es el que plantea la problematica de hallar el precio justo del bono.

Si se supone que el bono paga \$1 en T, el momento del vencimiento, entonces se denota el precio del bono a tiempo t como: $P(t)$. Denotando a la tasa de rendimiento del bono como $R(t,T)$; se define que el precio del bono a tiempo t debe ser el valor descontado (por la tasa de retorno) de un peso. Como no hay incertidumbre, el valor de recibir \$1 en el futuro tiene que ser igual al valor presente de ese dolar hoy. Ahora bien, para calcular el valor actual de ese dolar a recibir en el futuro en terminos de dolares actuales, lo unico que hay que hacer es descontarlo mediante la tasa de interés. Como trabajamos en tiempo continuo, para descontar hay que multiplicar por $e^{-R(t,T)(T-t)}$. Con todo eso, el valor hoy de recibir un dolar en el tiempo T es de $e^{-R(t,T)(T-t)} * 1\$$. Por no arbitraje, ese tiene que ser el precio del bono, definido entonces como:

$$P(t,T) = \exp\{-R(t,T)(T-t)\}. \qquad (1)$$

Por lo tanto, la relacion entre el precio y la tasa de retorno de un **Zero Coupon Bond es**

$$R(t,T) = -\frac{1}{T-t}\ln[P(t,T)]. \qquad (2)$$

Se define una **tasa forward** como aquella tasa que es conocida en t, pero que se aplica entre S_1 y S_2, donde $t < S_1 < S_2$. Usando la definición anterior definimos el precio del bono en el período t igual al valor descontado (a la tasa de rendimiento) del precio del bono en el futuro. En este caso particular la tasa forward se aplica al rendimiento del bono en el intervalo $[S_1, S_2]$, por ende

$$P(t,S_2) = P(t,S_1)\exp\{-r(t,S_1,S_2)(S_2-S_1)\}.$$

La tasa **instantánea forward** se define como el limite de la tasa forward cuando $S_2 \to S_1$, en otras palabras la tasa de rendimiento contratada a tiempo t para el periodo $[S_1,\, S_1 + dt]$. Si recordamos que $lim_{x\to 0}\ e^x = lim_{x\to 0}\ (1 + x)$ podemos aplicarlo a la formula anterio obteniendo

$$\lim_{S_2\to S_1} \exp\{-r(t, S_1, S_2)(S_2 - S_1)\} = \lim_{S_1\to S_2} (1 - r(t, S_1, S_2)(S_2 - S_1)).$$

Vemos que el limite de $P(t, S_2)$ cuando $S_2 \to S_1$

$$\lim_{S_2\to S_1} P(t, S_2) = P(t, S_1) \lim_{S_2\to S_1} (1 - r(t, S_1, S_2)(S_2 - S_1)).$$

$$\lim_{S_2\to S_1} \frac{P(t, S_2) - P(t, S_1)}{P(t, S_1)(S_2 - S_1)} = -r(t, S_1).$$

Notar que es el producto de una constante por el limite del cociente incremental, es decir, la derivada del precio con respecto a S_1. Reordenando se obtiene **la tasa instantanea forward**

$$r(t, S_1) = \frac{-1}{P(t, S_1)} \frac{dP(t, S_1)}{dS_1}. \tag{3}$$

Usando la ecuación (3) podemos definir **la tasa spot (instantanea) en el momento t** como el limite de la tasa instantánea forward cuando S_1 tiende a t (como la tasa instantanea futura cuando "el futuro" tiende a cero), por lo tanto,

$$R(t, t) = r(t, t) = r(t). \tag{4}$$

Note que integrando la ecuación (3) se obtiene el precio del bono como un peso descontado por la suma de tasas forward entre t y T ,

$$P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T r(t, u)du\right). \tag{5}$$

(note que a tiempo t se conocen todas las tasas instantaneas forward).

Note que podemos sustituir (5) en (2), y expresar el retorno de un bono que vence a tiempo T como un promedio de los retornos forward instantaneos,

$$R(t, T) = \frac{1}{T - t} \int_t^T r(t, u)du.$$

El retorno es igual a un promedio de tasas forward de que son conocidas a tiempo t y contratadas para tiempo u $\in$ [t,T]**.**

Note que hasta ahora solamente hemos presentado una serie de definiciones y no ecuaciones de comportamiento. O en otras palabras tenemos 2 incognitas pues estamos resolviendo el precio de un bono a tiempo t como una función de las tasas futuras, pero el precio de las tasas futuras no lo conocemos a tiempo t. Mas adelante veremos que la literatura de pricing de bonos bajo incertidumbre resuelve este problema.

Si se supone que no existe incertidumbre, entonces la tasa spot en el período S debe ser, por el principio de no arbitrage, igual a la tasa instantánea forward en t contratada para S, i.e., $r(S) = r(t, S)$.

Entonces bajo ese supuesto, el retorno del bono no es más que un promedio de las tasas instantaneas (spot) entre t y T,

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T r(u)du.$$

Esto permite conocer la evolución del retorno o yield curve en cualquier momento del tiempo a través del valor de la tasa r (la yield curve es una función que relaciona el retorno de bonos de distinta madurez con la madurez para un momento del tiempo). Note que la tasa futura de retorno instantanea bajo certidumbre la asumimos como conocida, sin embargo en un mundo con incertidumbre no va a ser conocida. Como introducir un modelo de predición de las tasas spot en el futuro es una de las fuentes de mayor confusion al hacer el pricing de los bonos.

Por lo tanto, al introducir incertidumbre sobre la tasa instantanea spot de interes en el futuro, vamos a asumir que esta sigue un processo estocastico determinado. De este modo vamos a poder obtener como resultante el precio de un bono y el precio de las tasas de interes a futuro.

1.1 One-factor interest rate modelling

Como la tasa de interés no es conocida en el futuro, se supone que r sigue el siguiente proceso estocástico.

$$dr = u(r,t)dt + w(r,t)dz.$$

Vamos a caracterizar los distintos posibles modelos (de un factor) para obtener el precio de los bonos, mediante distintos supuestos sobre $u(r,t)$ y $w(r,t)$.

El pricing de bonos lo hacemos construyendo un portafolio que consiste de comprar y vender bonos (que son funciones de la tasa instantanea de interes) de distintas madureces Esto lo hacemos de este modo pues se puede demostrar, que no es posible construir un portafolio entre un bono de madurez T y la tasa instantanea de interes (un bono de madurez instantanea) y eliminarle la incertidumbre a dicho portafolio. Este problema es analogo al que se nos presentaba cuando haciamos opciones sobre una variable no comerciable como la tasa de inflación *(el caso 3)*.

1.1.1 Porque no podemos hacer hedging con un bono de vencimiento instantaneo.

Intuitivamente, en primera instancia, uno pensaría que se puede formar el portafolio haciendo hedging entre una cartera que consite en un bono de madurez

T y un bono instantaneo (donde la tasa instantanea, $r(t)$, es el retorno de un bono con madurez $t + dt$).

Considere la posibilidad de realizar una cartera que consite de un bono de madurez T_1 y un bono de madurez $t + dt$.

Para realizar el pricing procederiamos a eliminar la incertidumbre de dicho portafolio e igualar dicho importe a lo que se obtendria a la tasa libre de riesgo.

$$d\Pi = W_1 dP(r, t, T_1) - W_2 dP(r, t, t + dt).$$

Luego si aplicamos el lema de $It\widehat{o}$ para ver el cambio del precio del bono obtenemos

$$dP = P_t dt + P_r(\overbrace{u(r,t)dt + w(r,t)dz}^{dr}) + \frac{1}{2}w(r,t)^2 P_{rr} dt.$$

Ahora veremos que debido a las caracteristicas del bono instantaneo no vamos a poder eliminar la incertidubre del portafolio.

Recuerde que por definición

$$P(t, t + dt) = \exp(-r(t)dt),$$

donde tomando limites cuando dt tiende a cero obtenemos que

$$P(t, t + dt) \cong 1 - r(t)dt.$$

De la ecuación anterior se desprende que

$$\begin{aligned} P_r &= -dt. \\ P_{rr} &= 0. \end{aligned}$$

Entonces podemos ver que para el bono instantaneo la variación del precio es

$$\begin{aligned} dP &= (P_t + P_r u(r,t) + \frac{1}{2}w(r,t)^2 P_{rr})dt + P_r w(r,t)dz, \\ &= P_t dt - u(r,t)dt^2 - w(r,t)dzdt, \\ &= P_t dt, \end{aligned}$$

y por lo tanto no voy apoder eliminar la incertidubre del portafolio propuesto. Intuitivamente esto prueba que como el precio de un bono de madurez instantanea es inmediatamente 1, no hay posibilidad de realizar hedging.

Vamos a tener que calular el precio del bono utilizando un portafolio con bonos de distinta madurez, y por lo tanto el resultado va a ser una función del precio del riesgo.

1.2 Valuación del precio de los Bonos

La caracteristica principal del pricing de bonos es que no podemos armar una cartera comprando o vendiendo el bono instantaneo, por lo tanto se realiza el pricing utilizando 2 bonos de distinta madurez (o fecha de vencimiento), T_1 y T_2.

Para encontrar el precio del bono construimos un portafolio con $P_1(r, t; T_1)$ y $P_2(r, t; T_2)$ donde el retorno del portafolio esta definido como

$$\frac{d\Pi}{\Pi} = \alpha \frac{dP_1}{P_1} + (1-\alpha)\frac{dP_2}{P_2},$$

y

$$\frac{dP_i}{P_i} = \mu_{P_i} dt + \sigma_{P_i} dz, \qquad para\ i = 1, 2.$$

Por lo tanto, el cambio del portafolio es igual a

$$\frac{d\Pi}{\Pi} = [\alpha\mu_{P_1} + (1-\alpha)\mu_{P_2}]dt + \Phi dz,$$

donde $\Phi = \alpha\sigma_{P_1} + (1-\alpha)\sigma_{P_2}$.

Para eliminar el riesgo Φ debe ser cero.por lo que obtenemos:

$$\alpha = \frac{\sigma_{P_2}}{(\sigma_{P_2} - \sigma_{P_1})}.$$

Una vez eliminado el riesgo, por el **Principio de no Arbitraje,** el retorno del portafolio debe ser igual a la tasa libre de riesgo

$$\frac{d\Pi}{\Pi} = rdt \Rightarrow$$
$$[\alpha\mu_{P_1} + (1-a)\mu_{P_2}]dt = rdt \Rightarrow$$
$$\left(\frac{\sigma_{P_2}}{(\sigma_{P_2} - \sigma_{P_1})}\mu_{P_1} + \left(1 - \frac{\sigma_{P_2}}{(\sigma_{P_2} - \sigma_{P_1})}\right)\mu_{P_2}\right) dt = rdt$$

$$\Rightarrow \frac{(\mu_{P_1} - r)}{\sigma_{P_1}} = \frac{(\mu_{P_2} - r)}{\sigma_{P_2}} = \lambda, \tag{6}$$

donde Lambda es el precio del riesgo de cada bono. Por el lema de $It\hat{o}$ sabemos que

$$\sigma_{P_i} = \frac{1}{P_i} w(r,t) P_{ir}, \text{ para } i = 1, 2.$$

y

$$\mu_{P_i} = \frac{1}{Pi}(P_{it} + P_{ir} u(r,t) + \frac{1}{2} P_{irr} w(r,t)^2), \text{ para } i = 1, 2;$$

por lo que podemos sustituir dichas expresiones en (6) y obtener la ecuación diferencial que caracteriza el precio de los bonos,

$$\begin{aligned}
\frac{(\frac{1}{Pi}(P_{it} + P_{ir}u(r,t) + \frac{1}{2}P_{irr}w(r,t)^2) - r)}{\frac{1}{P_i}w(r,t)P_{ir}} &= \lambda, \\
P_{it} + (u(r,t) - \lambda w(r,t))P_{ir} + \frac{1}{2}P_{irr}w(r,t)^2 - P_i r &= 0.
\end{aligned}$$

Obtenemos una ecuación diferencial que depende de λ pues no podemos hacer hedging con el underlying y de ese modo eliminar el precio del riesgo. Aqui λ debe ser obtenido independientemente.

A continuación se presentan dos modelos para hacer el pricing. Cada uno de ellos propone un proceso diferente para calcular la tasa spot modificando el supuesto sobre que proceso estocastico sigue la tasa instantanea de interes, o sea modificando los funciones $u(r,t)$ y $w(r,t)$.

Es importante aclarar que cuando realizamos el pricing de los bonos no tenemos ninguna razon para sospechar (como con las acciónes que por eficiencia a la Fama suponiamos que seguian un Random Walk) que dicha tasa sigue un proceso estocastico determinado. Es probable que en algunos momentos del tiempo sea mejor caracterizada por un u otro proceso estocastico. Será un problema de caracter empírico el decidir cual supuesto sobre la evolución de las tasas de corto plazo se condice con una muestra determinada. A continuación pasaremos a encontrar el precio de los bonos bajo el supuesto que la tasa instantanea sigue diferentes procesos estocasticos.

Modelo de Merton. Merton propone el proceso más simple para la tasa spot donde, $u(r,t) = \alpha$ y $w(r,t) = \sigma$, y por lo tanto la tasa de interes sigue una Brownian motion aritmética

$$dr = \alpha dt + \sigma dz.$$

Sustituyendo en la solución general obtenemos,

$$P_t + (\alpha - \lambda\sigma)P_r + \frac{1}{2}\sigma^2 P_{rr} - rP = 0. \tag{7}$$

La ecuación (7) es una ecuación diferencial, para la cual debemos: (i) encontrar una solución general; (ii) imponer una condición terminal. La condición terminal corresponde al pay-off del bono en madurez, *i.e.*, $P(r,T;T) = 1$.

Esta ecuación diferencial es de facil resolución por lo que la resolveremos a continuación.

La solución general de este tipo de ecuaciónes diferenciales parciales es

$$P(r,t,T) = \exp(-r\tau + F(\tau)),$$

donde $\tau = T - t$ y F es una función del tiempo a determinar.

La solución por definición debe satisfacer la ecuación diferencial parcial por lo que evaluaremos sus derivadas y sutituiremos en dicha ecuación. Esto nos permetira determinar F y obtener la solución para los bonos en forma explicita.

Derivando obtenemos

$$
\begin{aligned}
P_r &= -\tau \exp(-r\tau + F(\tau)), \\
P_{rr} &= \tau^2 \exp(-r\tau + F(\tau)), \\
P_t &= (r - F'(\tau)) \exp(-r\tau + F(\tau)).
\end{aligned}
$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial obtenemos

$$\left(r - F'(\tau) - (\alpha - \lambda\sigma)\tau + \frac{1}{2}\sigma^2\tau^2 - r \right) \exp(-r\tau + F(\tau)) = 0, \tag{8}$$

por lo que

$$F'(\tau) = -(\alpha - \lambda\sigma)\tau + \frac{1}{2}\sigma^2\tau^2,$$

o

$$F(\tau) = -(\alpha - \lambda\sigma)\frac{\tau^2}{2} + \frac{1}{6}\sigma^2\tau^3 + C.$$

Sutituyendo en el precio del bono y usando la condición terminal de que $P(r, T; T) = 1$, obtenemos que $C = 0$, por lo que la solución para el precio del bono puede ser escrita como

$$P(r, \tau) = \exp\{-r\tau - \frac{1}{2}(\alpha - \lambda\sigma)\tau^2 + \frac{1}{6}\sigma^2\tau^3\},$$

donde $\tau = T - t$.

El **retorno** es igual a

$$R(t, T) = r + \frac{1}{2}(\alpha - \lambda\sigma)\tau - \frac{1}{6}\sigma^2\tau^2.$$

Notar que si $\tau \to \infty$ entonces la tasa de retorno que estaria ofreciendo el bono seria negativa. Por lo tanto **el modelo de Merton no deberia en principio usarse para bonos de muy larga madurez**.

Una vez conocido el precio del bono (y el retorno del bono) podemos facilmente calcultar **la tasa forward** como

$$r(t, T) = \frac{-1}{P(t, T)} \frac{dP(t, T)}{dT} = r + (\alpha - \lambda\sigma)\tau - \frac{1}{2}\sigma^2\tau^2.$$

Modelo de Vasicek. Para evitar un yield negativo en el largo plazo se puede proponer un modelo alternativo para la tasa spot, en vez de suponer que r sigue un proceso Brownian Motion, Vasicek propuso un proceso de Mean Reverting Brownian Motion. Ahora el proceso de la **tasa spot r** es

$$dr = u(r, t)dt + w(r, t)dz,$$

con $u(r, t) = \alpha(\gamma - r)$ y $w(r, t) = \sigma$.

Bajo este proceso estocastico la tasa spot va a fluctuar alrededor de una media γ. Si la tasa r baja (con respecto a la de largo plazo), entonces el

$\alpha(\gamma - r)dt$ es positivo, por lo que es muy probable que la tasa de interes suba en el futuro. El proceso de r se puede ver como un proceso estocástico en el que eventualmente la tasa de interes retorna a su media (o su valor largo plazo).

El escalar α define con qué frecuencia la tasa retorna a la media. Si alfa es pequeño la tasa **no** retornará muy rapido (o seguido) a la media, pero si alfa es grande la frecuencia de retorno es mayor.

Por analogía la nueva ecuación diferencial es igual a

$$\begin{aligned} P_t + \frac{1}{2}\sigma^2 P_{rr}dt + (\alpha(\gamma - r) - \lambda\sigma)P_r - rP &= 0, & (9) \\ P_t + \frac{1}{2}\sigma^2 P_{rr}dt + \alpha(\widehat{\gamma} - r)P_r - rP &= 0, & (10) \end{aligned}$$

donde $\widehat{\gamma} = (\gamma - \frac{\lambda}{\alpha}\sigma)$.

La solución (Guess) que se propone para (9) es

$$P = \exp\{A(\tau) + B(\tau)r\},$$

y el procedimiento para encontar la solución es igual al que mostramos en detalle para el modelo de Merton. Tras resolver la ecuación se encuentran las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} B(\tau) &= -\frac{1 - \exp\{-\alpha\tau\}}{\alpha}, \\ A(\tau) &= \left[\frac{(-B(\tau) - \tau)(\alpha^2(\widehat{\gamma}) - \frac{1}{2}\sigma^2)}{\alpha^2}\right] - \frac{1}{4\alpha}\sigma^2 B(\tau)^2. \end{aligned}$$

Siguiendo el mismo razonamiento del modelo anterior, se obtiene que el yield del bono es igual a

$$R(t,T) = -\frac{1}{\tau}[\ln[P(t,T)] = -\frac{1}{\tau}[A(\tau) + B(\tau)r]. \quad (11)$$

Dada la expresión (11) se concluye que cuando τ es muy grande $R(t,T)$ tiende a $(\widehat{\gamma}) - \frac{1}{2}(\frac{\sigma}{\alpha})^2$, que para valores razonables uno esperaría que sea positivo.[1]

[1]Note que en la sección (1) se definimos bajo certidumbre al retorno del bono que vence a tiempo T como el promedio de infinitas tasas instantáneas. Veremos ahora que al introcuir incertidumbre y resolver dicho problema como el valor esperado de dicho promedio obtenemos un valor para el retorno distinto de aquel obtenido con el modelo de Vasicheck.(dado por la expresión (11) cuando $\tau \to \infty$)

Considere el limite del valoresperado de

$$\lim_{T\to\infty} E[\frac{1}{T}\int_t^{t+T} rdr] = \widehat{\gamma} > \widehat{\gamma} - \frac{1}{2}\frac{1}{\alpha}\sigma. \quad (12)$$

La ecuación de la derecha es mayor al yield del bono. La precencia de la varianza no tiene nada que var con el riesgo. Bajo la no-linealidad de las funciones de descuento y bajo la incertidumbre, como resultado *Desigualdad de Jensen,* se obtiene el termino $\frac{1}{\alpha}\sigma$. A la

1.2.1 Two-factor interest rate modelling

Modelos simples de un factor como los presentados en la sección anterior no siempre pueden describir el comportamiento de la yield curve. El problema es que en ese tipo de modelos se usa solo información de la tasa de interes instantanea para predecir todo el yield curve. En esta sección se presentará un modelo que propone que el valor del bono depende de la tasa de interés spot y de un bono de madurez infinita. De este modo se busca utilizar información sobre los 2 extremos para predecir el comportamiento del yield curve, o hacer el pricing del bono.

Considere el precio de un bono con madurez T como una función de estas 2 tasas de retorno, $P(r, l, t; T)$, donde l es la tasa de retorno de el bono de madurez infinita. La evolución de estas tasas es la siguiente

$$dr = \mu_r dt + \sigma_r dz_r,$$

y

$$dl = \mu_l dt + \sigma_l dz_l,$$

donde $E(dz_r dz_l) = \rho dt$.

En general se define a l como una tasa de interés de largo plazo; en particular se fija a l como el retorno de un **Bono Consol.** Un bono Consol es un bono de madurez infinita, que paga cupones.

Por lo tanto, el valor de un bono que paga cuopones c por periodo y para siempre es

$$C_o = \frac{c}{l}.$$

Para encontrar el precio del derivado consideramos un portafolio que consiste de una cartera con 3 bonos de distinto vencimiento T_1, T_2 y T_3.

El retorno del portafolio es

$$\frac{d\Pi}{\Pi} = \alpha_1 \frac{dP_1(r,l,t;T_1)}{P_1(r,l,t;T_1)} + \alpha_2 \frac{dP_2(r,l,t;T_2)}{P_2(r,l,t;T_2)} + \alpha_3 \frac{dP_3(r,l,t;T_3)}{P_3(r,l,t;T_3)}, \text{ donde } \sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 1.$$

Por el Lema de $It\widehat{o}$ sabemos que el cambio proporciónal en el precio de los bonos sigue una Brownian motion donde la incertidumbre de dicho cambio es una función de dz_l y dz_r, por lo tanto,

$$\frac{dP_i(r,l,t;T_i)}{P_i(r,l,t;T_i)} = \mu_{P_i} dt + \sigma_{P_i l} dz_l + \sigma_{P_i r} dz_r, \quad para \quad i = 1, 2, 3.$$

---

parte izquierda de la ecuación (12) se le aplica el operador esperanza a una función de r (la integral): $E(y(r))$; en cambio a la parte derecha de (12) se le aplica esperanza a la tasa de interés: $y(E(r))$.

Por lo tanto, debido a la existencia de incertidumbre y por la Jensen Inequality

$$E(y(r)) > y(E(r)).$$

Por lo tanto el retorno del portafolio puede ser escrito como

$$\begin{aligned}\frac{d\Pi}{\Pi} &= (\alpha_1\mu_{P_1}+\alpha_2\mu_{P_2}+\alpha_3\mu_{P_3})dt+(\alpha_1\sigma_{P_1l}+\alpha_2\sigma_{P_2l}+\alpha_3\sigma_{P_3l})dz_l \\ &\quad +(\alpha_1\sigma_{P_1r}+\alpha_2\sigma_{P_2r}+\alpha_3\sigma_{P_3r})dz_r.\end{aligned}$$

Una vez que elijamos el α_i que elimina el riesgo, el retorno de dicho portafolio debe ser igual a la tasa libre de riesgo.

Esto me genera el siguiente sistema

$$\begin{pmatrix}\sigma_{P_1l} & \sigma_{P_2l} & \sigma_{P_3l}\\ \sigma_{P_1r} & \sigma_{P_2r} & \sigma_{P_3r}\\ \mu_{P_1}-r & \mu_{P_2}-r & \mu_{P_3}-r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Este sistema tiene la peculiaridad de que permite expresar cualquier fila como una combinación lineal de las otras (ya que los α suman 1, por lo que encontramos una solución al sistema homogeneo que no es cero), y por lo tanto, encontrar el exceso de retorno del bono como

$$\mu_P - r = \lambda_r\sigma_{\mathrm{Pr}} + \lambda_l\sigma_{Pl} \tag{13}$$

donde μ_P, σ_{Pl} y σ_{Pr} lo determinamos una vez que aplicamos *Itô*. Note que λ_i es el precio de mercado del riesgo de cada factor y es independiente de la madurez de cualquier bono (ver APT).

Si aplicamos el lema de *Itô* tenemos que

$$\begin{aligned}dP(r,l,t) &= P_rdr+P_ldl+P_tdt+\frac{1}{2}P_{rr}(dr)^2+\frac{1}{2}P_{ll}(dl)^2+P_{rl}drdl,\\ &= P_r(\mu_rdt+\sigma_rdz_r)+P_l(\mu_ldt+\sigma_ldz_l)+P_tdt+\\ &\quad \frac{1}{2}P_{rr}\sigma_r^2dt+\frac{1}{2}P_{ll}\sigma_l^2dt+P_{rl}\rho\sigma_r\sigma_ldt,\\ &= (P_t+P_r\mu_r+P_l\mu_l+\frac{1}{2}P_{rr}\sigma_r^2+\frac{1}{2}P_{ll}\sigma_l^2+P_{rl}\rho\sigma_r\sigma_l)dt\\ &\quad +P_r\sigma_rdz_r+P_l\sigma_ldz_l.\end{aligned}$$

(NB si asumimos que los bonos (el consol) pagan cupones cdt por unidad de tiempo este retorno debe ser sumado a la media de los bonos. Dado que uno de los bonos que consideramos es un consol lo mas natural es asumir que dichos bonos pagan cupones asi que sin perdida de generalidad le agregaremos el cupon instantaneo c al retorno del bono).

En terminos de proporciones

$$\begin{aligned}\frac{dP(r,l,t)}{P(r,l,t)} &= \overbrace{\frac{1}{P}(P_t+P_r\mu_r+P_l\mu_l+\frac{1}{2}P_{rr}\sigma_r^2+\frac{1}{2}P_{ll}\sigma_l^2+P_{rl}\rho\sigma_r\sigma_l+c)}^{\mu_P}\\ &\quad +\overbrace{\frac{1}{P}P_r\sigma_r}^{\sigma_{P_r}}dz_r+\overbrace{\frac{1}{P}P_l\sigma_l}^{\sigma_{P_l}}dz_l.\end{aligned}$$

Reemplazando en (13) se obtiene

$$P_t+\frac{1}{2}\sigma_r^2P_{rr}+\frac{1}{2}\sigma_l^2P_{ll}+\rho\sigma_r\sigma_lP_{rl}+(\mu_r-\lambda_r\sigma_r)P_r+(\mu_l-\lambda_l\sigma_l)P_l-rP+c=0. \tag{14}$$

Ahora bien, la ecuación (14) contiene dos incognitas, λ_r y λ_l, por lo que en principio habria que obterner los dos precios con información indeperndiente. Sin embargo podemos explotar el hecho de que sabemos cual es la forma estructural del precio de los consols para re escribir esta ecuación y eliminar un precio del riesgo. En particular dicha ecuación diferencial debe de ser valida para todo bono incluyendo los consols, por lo tanto, si remplazamos las derivadas en dicha ecuación, encontramos un precio del riesgo como función de variables conocidas.

Recordemos que definimos el precio del consol (un bono que es comerciable y debe satisfacer la ecuación diferencial) como:

$$P=C=\frac{c}{l},$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
P_l &= C_l=-\frac{c}{l^2},\\
P_{ll} &= C_{ll}=\frac{2c}{l^3},\\
P_r &= C_r=0,\\
P_{rr} &= C_{rr}=0,\\
P_{rl} &= C_{rl}=0,\\
P_t &= C_t=0.
\end{aligned}$$

Si sutituimos en la ecuación (14), obtenemos

$$\frac{1}{2}\sigma_l^2\frac{2c}{l^3}-(\mu_l-\lambda_l\sigma_l)\frac{c}{l^2}-r\frac{c}{l}+c=0. \tag{15}$$

Lo que nos permite expresar la prima de riesgo como

$$(\mu_l-\lambda_l\sigma_l)=\frac{\sigma_l^2}{l}+l^2-rl.$$

Por lo tanto la ecuación (14) que inicialmente estaba escrita como una función de los dos precios de los riesgos (incognitas), ahora la podemos expresar como una función de λ_r, *i.e.*,

$$P_t+\frac{1}{2}\sigma_r^2P_{rr}+\frac{1}{2}\sigma_l^2P_{ll}+\rho\sigma_r\sigma_lP_{rl}+(\mu_r-\lambda_r\sigma_r)P_r+(\frac{\sigma_l^2}{l}+l^2-rl)P_l-rP+c=0. \tag{16}$$

La prima de riesgo del mercado de la tasa spot no se puede reemplazar y por lo tanto ella debe ser estimada.

1.3 Prima de riesgo

En esta sección derivaremos la prima de riesgo.como el resultado de la maximizaxcion de la utilidad esperada del consumo de un agente representativo, que posee como parte de su dotacion dos bonos de distinta madurez. Este problema nos va a mostrar bajo que condiciones es conveniente demandar el bono de largo plazo, y bajo cuales no. Tambien nos va a mostrar cuales son los riesgos asociados con cada estrategia

Planteamos el siguiente programa de maximización

$$\begin{array}{rc} & \underset{\{c,L\}}{Max} E_o\{\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t U(c_t)\}, \\ sa & c_t + L_{1t} + L_{2t} = div_t + L_{1t-1}R_{1t-1} + L_{2t-2}R_{2t-2}. \end{array}$$

Dicho problema lo podemos resolver utilizando el Lagrangiano

$$L(c,L,\lambda) = E_o\left\{\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\left[U(c_t) - \lambda_t\left(c_t + L_{1t} + L_{2t} - (div_t + L_{1t-1}R_{1t-1} + L_{2t-2}R_{2t-2})\right)\right]\right\},$$

donde L_{it-i} son cantidades del bono de madurez i que vence a tiempo t, R_{it-i} es el retorno de los bonos de dichos bonos y estan medidos en unidades de consumo (es decir que R_{1t-1} equivale a una unidad de consumo en el periodo t) y div_t son dividendos que se asume que el agente recibe en cada periodo y que siguen un proceso de Markov.

Las condiciones de primer orden son

$$\begin{array}{rcl} U'(c_t) & = & \lambda_t, \\ E_t(\beta\lambda_{t+1}R_{1t}) & = & \lambda_t, \\ E_t(\beta^2\lambda_{t+2}R_{2t}) & = & \lambda_t. \end{array}$$

Notemos que $U'(c_{t+1}) = \lambda_{t+1}$ por lo que, usando que $E_t(\beta\lambda_{t+1}R_{1t}) = \lambda_t$, obtenemos,

$$E_t\left(\beta\frac{U'(c_{t+1})}{U'(c_t)}\right) = R_{1t}^{-1}. \tag{17}$$

Analogamente podemos mostrar que

$$E_t\left(\beta^2\frac{U'(c_{t+2})}{U'(c_t)}\right) = R_{2t}^{-1},$$

y dividiendo y multiplicando por $U'(c_{t+1})$ obtenemos

$$E_t\left(\beta^2\frac{U'(c_{t+2})}{U'(c_t)}\frac{U'(c_{t+1})}{U'(c_{t+1})}\right) = R_{2t}^{-1}.$$

Por ultimo, aplicando expectativas iteradas podemos expresar el precio de bono de 2 periodos como

$$E_t\left(E_{t+1}\left(\beta\frac{U'(c_{t+2})}{U'(c_{t+1})}\right)\beta\frac{U'(c_{t+1})}{U'(c_t)}\right) = R_{2t}^{-1},$$

donde $E_{t+1}\left(\beta\frac{U'(c_{t+2})}{U'(c_{t+1})}\right)$ es, usando la ecuacion (17) igual a R_{1t+1}^{-1},por lo que el precio del bono de 2 periodos lo podemos expresar como

$$R_{2t}^{-1} = E_t[R_{1t+1}^{-1}\beta\frac{U'(c_{t+1})}{U'(c_t)}],$$

donde R_{it+j}^{-1} es el precio del bono que paga una unidad de consumo dentro de i periodos a partir de la fecha $t+j$. La formula anterior la podemos rescibir (usando la definicion de covarianza), como

$$R_{2t}^{-1} = R_{1t}^{-1}E_t[R_{1t+1}^{-1}] + Cov_t\{R_{1t+1}^{-1}, \beta\frac{U'(c_{t+1})}{U'(c_t)}\}.$$

Esta ultima ecuación nos dice que el valor de un bono (a tiempo t) que me da una unidad de consumo en dos periodos es igual a: *i*) el valor esperado (a tiempo t) del precio (a tiempo $t+1$) de un bono de un periodo que paga una unidad de consumo a tiempo $t+2$, descontado por el precio de un bono de un periodo (a tiempo t). Si no hubiese riesgo (o si los agentes no fuesen aversos al riesgo) por arbitraje esta sería la relacion que deberia cumplirse entre los precios de un bono de un y dos periodos. Cuando los agentes son adversos al riesgo existe una prima de riesgo que viene dada por *ii*) la covarianza entre el ratio de utilidades marginales (*i.e.*, cuanto consumo hoy estoy dispuesto a intercambiar por consumo mañana (descontado por β)) y el precio futuro de un bono de un periodo (un coeficiente que me dice cuanto sale cambiar en el mercado consumo del mañana por consumo pasado mañana).

Si el bono de un periodo mañana es caro (R_{1t+1}^{-1} es alto) cuando $U'(c_{t+1})$ es alto, o sea cuando c_{t+1} es bajo, la estrategia de roll es muy costosa. Por lo tanto el bono a dos periodos debe valer mas. En cambio si bono de mañana es caro cuando el consumo de mañana es alto, entonces la estrategia de roll es buena. Por lo tanto el bono a dos periodos no es tan valioso

2 Bonos con cupones

Estos bonos son muy similares a los zero-coupon bond con la salvedad que estos ademas de pagar un monto principal, pagan cupones a lo largo del tiempo hasta el dia de madurez del bono. Los cupones generalmente se especifican como fracciones del monto principal. Se puede pensar al bono con cupones como un portafolio de zero-coupon bonds, donde cada cupon puede ser interpretado como el cobro de un bono con cero cupon (CC) en el intervalo del tiempo que corresponde al cupon que se paga en ese periodo, i.e., el monto principal del bono CC es igual al cupon. Asi formamos el flujo de pago de cupones con n bonos CC. Finalmente tomamos un bono CC final con la misma madurez que el bono inicial, que represente al pago del principal.

Otra forma de pensarlo es suponer que los cupones se pagan al final del periodo todos juntos, llevados a valor futuro se suman al monto principal y se hace el pricing del bono como si no tendria cupones (pero con un monto principal mayor). En otras palabras, siempre existe un cero cupon bond que sea equivalente (en precio y retorno) al bono que paga cupones.

Supongamos que el valor de el bono B es igual a la suma de los cupones que se pagan en cada periodo, descontados usando la tasa interna de retorno del bono

$$B = \sum_{i=1}^{n} C_i \exp\{-y t_i)\}.$$

Cuando estamos buscando encontrar el precio de un bono en modelos de derivados como los vistos anteriormente, simplemente suponemos que los intervalos de tiempo son infinitecimales: dt y en cada uno de estos intervalos se recibe un cupon de monto $K(r,t)$.

Los cupones entran en la ecuación del precio de un bono de forma similar a como entraban los dividendos en la ecuación del precio de una opción:

$$P_t + \frac{1}{2} w^2 P_{rr} + (u - \lambda w) P_r + K(r,t) - rP = 0.$$

Hedgeando un portafolio de bonos con cupones

El poseedor de una **cartera** de bonos que pagan cupones generalmente esta interesado en protegerse *(hedging o cobertura) ante* cambios grandes en el valor de los mismos. Vamos a ver distintos enfoques de como inmunizar un portafolio. Una primera aproximación es pensar que los cambios son debidos a potenciales cambios en las tasas de interes que afectan el precio de los bonos (inversamente) y el valor al que teoricamente se va a reinvertir el dinero cobrado por los cupones recibidos. Antes de analizar cualquier tipo de *hedging o cobertura* de un portafolio de bonos ante cambios en la tasa de interés, debemos entender cómo el cambio en la misma afecta el rendimiento de un bono. Es decir, para ver como cubrirnos del riesgo de la tasa de interés, lo primero que tenemos que hacer es saber como cambios en la misma afectan el valor de los distintos bonos. Comenzaremos analizando el problema bajo el supuesto de que la curva de rendimiento es flat[2] y que toda la información se obtiene usando la tasa interna de retorno del Bono o la YTM, yield to maturity.

[2]Esto quiere decir que el rendiemiento es igual para culquier maturity, es decir, todos tendrían la misma tasa de retorno anual.

Definición. La relación entre un bono con precio $P(t)$, que genera pagos C_i a lo largo del tiempo (pueden ser cupones o amortizaciones de capital), la **Yield To Maturity (YTM** o **Tasa Interna de Retorno (TIR)**, y, viene dada por:

$$P_t = P(y) = \sum_{i=1}^{m} \frac{C_i}{[1+y]^{T_i - t}}.$$

Comenzaremos analizando 2 tipos de riesgo: el **Reinvestment Risk** y el **Capital Gain Risk**. Lo escencial para entender este riesgo es definir con presición la *yield to maturity* -YTM- (rendimiento hasta la madurez) de un bono. Básicamente, la YTM es *una promesa* de rendimiento, porque supone que el bono será mantendido hasta su madurez y que **todos los cupones podrán ser reinvertidos a la YTM**.

Si el inversor decide gastar esos cupones en otra cosa o los reinvierte a una tasa distinta a la YTM, el rendimiento final de dicho bono diferirá de la YTM. Dado que en general no todos los cupones pueden ser reinvertidos a la YTM, el rendimeinto final del bono no será igual al calculado ex-ante. En general, los bonos de mayor madurez y aquellos que con mayores cupones conllevan un mayor reinvestment risk. A medida que cae la tasa del mercado, el precio de los bonos sube, y vice versa.

Ejemplo Numérico: Supongamos un bono a **2 años**, con 10% de **cupon** y un valor **nominal** de \$1.000. Supongamos que la **tasa** del mercado está en 8,8% anual y que el cupón se paga **semestralmente**. El precio del bono estaría dado por la siguiente ecuación

$$\frac{50}{(1+4,4\%)} + \frac{50}{(1+4,4\%)^2} + \frac{50}{(1+4,4\%)^3} + \frac{1050}{(1+4,4\%)^4} = \$1.021,58$$

Si la tasa cae de manera abrupta a 7,8% anual, el precio del bono aumentará instantaneamente a $\$1.040,02$

$$\frac{50}{(1+3,9\%)} + \frac{50}{(1+3,9\%)^2} + \frac{50}{(1+3,9\%)^3} + \frac{1050}{(1+3,9\%)^4} = \$1.040,02$$

Como se puede ver, si la tasa de interés cae una vez y luego se mantiene a un nivel constante existen 2 efectos: (i) un efecto asociado con una inmediata apreciación del valor del bono, (ii) otro asociado con una perdida por la reinversión de cupones a una tasa menor. Existe un horizonte de inversión D, tal que los inversores con ese horizonte estén indiferentes a los movimientos en la tasa de interés (siempre y cuando esos movimientos sean relativamente pequeños) ya que los efectos se cancelan. En general, esos efectos no se van a cancelar por lo que el inversor debera disenar estrategias para eliminar el riesgo.

Para fijar ideas cosideremos el siguiente bono (o portafolio).

- Llamemos P_t al precio del bono que paga cupones (o portafolio de ceros) en el momento t. Llamemos C_i a los pagos del los cupones a dicho portafolio en t_i con $i = 1, ..., m$.
- Llamaremos $B(t, T_i)$ al precio de un bono de Zero-Coupon entre t y T_i ($B(t, T_i)$ es la tasa a la que se descuentan los distintos cupones). De esta forma:

$$P_t = \sum_{i=1}^{m} C_i \ B(t, T_i) = \sum_{i=1}^{m} \frac{C_i}{[1 + R(t, T_i - t)]^{T_i - t}} \tag{18}$$

La ecuación (18) muestra que el precio P_t es una función de m distintas tasas de interés (variables) y de la madurez del portafolio. Esto hace que el precio del bono dependa de un gran número de factores de riesgos, por lo que en la práctica es dificil (o costoso) eliminar el riesgo de todos estos factores. En la practica se intenta simplificar el manejo de los portafolios reduciendo el número de variables riesgosas.

Hedging with duration

La idea principal detrás de hacer *hedging* con la duration del bono es la de eliminar el problema multidimensional que plantea las diferentes tasas presentes en la ecuación (18). Para ello, se hace el supuesto simplificador que existe un unico factor, la YTM, que afecta el precio del bono y que sirve de "proxy" de toda la estructura de riesgo. Notemos que la YTM es un promedio de las tasas, lo que implica la curva de tasas de interés es plana. Para estudiar la sensibilidad del precio del portafolio utilizarmemos una expansión de Taylor del mismo.

El precio del portafolio P_t como una función de la YTM, y, es

$$P_t = P(y) = \sum_{i=1}^{m} \frac{C_i}{[1 + y]^{T_i - t}}.$$

Bajo este supuesto simplificafor podemos analizar los efectos del cambio del valor del portafolio ante un cambio en la tasa de interes, y. Para ello podemos utilizar una expansión de Taylor de Primer Orden de la siguiente manera:

$$dP(y) = P'(y) \ dy + o(y) \tag{19}$$

Donde

$$P'(y) = -\sum_{i=1}^{m} \frac{(T_i - t) \ C_i}{[1 + y]^{T_i - t + 1}}$$

Si denominamos la primera derivada $P'(y)$ como $\$Dur$ (la duratión en pesos), podemos ver que el cambio del valor del portafolio puede ser expresado en terminos de esta medida: $dP(y) = \$Dur \ dy$. (ya que asumimos que $o(y)$ es un término depreciable).

Definición. La derivada del precio del portafolio con respecto a su YTM es conocida como la \$duration *(o sensibilidad).*

$$\$Dur = P'(y) = -\sum_{i=1}^{m} \frac{(T_i - t)\ C_i}{[1+y]^{T_i - t + 1}}$$

Asimismo, podemos ver que $\$Dur < 0$, ya que mayores yields estan asociados con menores precios.

Por otra parte Dividiendo la ecuación (19) por $P(y)$ obtenemos un proxy del cambio proporcional en el precio del portafolio.

$$\frac{dP(y)}{P(y)} = \frac{P'(y)}{P(y)} dy + o_1(y) \simeq -MD\left(P(y)\right)\ dy$$

Donde

$$MD(P(y)) = -\frac{P'(y)}{P(y)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{(T_i - t)\ C_i}{[1+y]^{T_i - t + 1}} \frac{1}{P_i}$$

es conocida como la *modified* duration (MD) del portafolio.

Definicion. La *modified* duration (MD) del portafolio viene dada por:

$$MD(P(y)) = -\frac{P'(y)}{P(y)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{(T_i - t)\ C_i}{[1+y]^{T_i - t + 1}} \frac{1}{P_i}$$

Estas dos medidas son my útiles, ya que la \$duratión y la modified duratión no solo miden la volatilidad del portafolio, sino que nos permiten computar la ganancía o pérdida (Profit \$ Loss, P&L) absoluta ó relativa del portafolio ante cambios *pequeños y paralelos* en la YTM, Δy.

En particular, para cambios chicos en la tasa de interés, podemos aproximar:

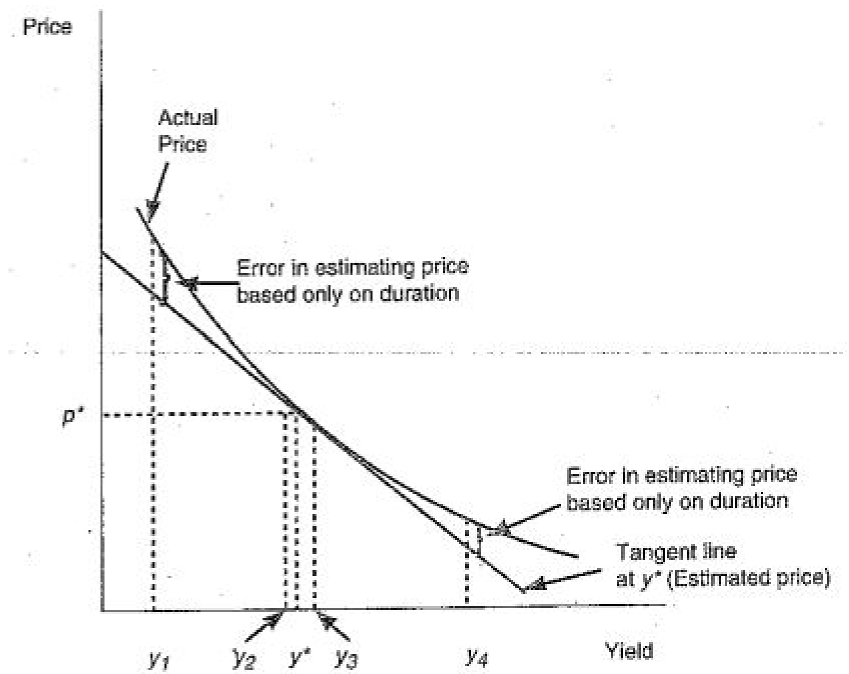
- Aboslute P&L $\simeq \$Dur\ \times \Delta y$. Es decir, si queremos saber cuando bajará (*en unidades de plata, por ejemplo, en dólares*) el bono ante un cambio en la tasa de interés, podemos aproximarlo mediante el cambio en la tasa multiplicado por la duration.
- Relative P&L $\simeq -MD\ \times \Delta y$. Es decir, si queremos calcuar en que porcentaje caerá el bono ante un cambio en la tasa, podemos aproximarlo de la forma mencionada.

  Otra medida muy utlizada es la *basis point value* (BPV), que es el cambio en el precio de un bono dado el cambio en puntos básicos del yield,

$$BPV = \frac{MD \times P}{10,000} = \frac{-\$Dur}{10,000}$$

Ejemplo Numérico: supongamos un bono con 10 años de madurez, un cupón del 6% y una YTM del 5% (lo que quiere decir, un precio de \$107,72). La \$duratión de este Bono es $-809,67$, la BPV es $0,0809$ y la modified duratión es $7,52$. Si la YTM crece un 0,1%, el tenedor del bono experimentará una pérdida de abosluta de $-809,67 \times 0,1\% = -\$0,80967$ y una pérdida relativa de $-7,52 \times 0,1\% = -0,752\%$.

Hay que notar que el calculo del cambio en el precio usando la *Duration* es en realidad una aproximacion. En realidad, el precio del bono es una función convexa de la tasa interna de retorno, mientras que la aproximacion con la duration es una aproximación lineal. Por eso es que decimos que esto sirve para medir cambios "chicos". La diferencia entre ambas cosas puede verse graficamente:



Finalmente, definiremos la Duratión (Macaulay duratión) del portafolio de la siguiente manera:

Definicion. La *Maculay Duratión* de un portafolio viene dada por

$$D \equiv D(P(y)) \equiv -(1+y)\frac{P'(y)}{P(y)} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \frac{(T_i-t)C_i}{[1+y]^{T_i-t}}}{P(y)}$$

La Macaulay Duratión se puede interpretar como la "madurez ponderada" del portafolio[3], donde el coeficiente de ponderación para cada madurez $T_i - t$ es

$$w_i = \frac{C_i}{P(y)\,[1+y]^{T_i - t}}$$

Es sencillo ver que la Duratión es siempre menor o igual que la madurez, y es igual solo si, el portafolio tiene un solo pago al final (como un bono zero-coupon). La Duratión de un bono o de un portafolio de bonos es el horizonte temporal en el que su rendimiento no se ve afectado por cambios (pequeños) en la tasas de interés. En otras palabras, el capital gain risk y el reinvestment risk se compensan.

Ejemplo numérico: Consideremos un bono con madurez de 3 años, un cupon del 5% (pagado anualmente) y un precio de mercado de \$100 (YTM=5%). La Duratión del bono es

$$\frac{\frac{1\times 5}{1+5\%} + \frac{2\times 5}{(1+5\%)^2} + \frac{3\times 105}{(1+5\%)^3}}{100} = 2,86$$

Podemos ver que por construcción este bono es muy parecido a un zero ya que casi todo su valor esta al final. Asumamos que la YTM se mueve en $t = 0 + \varepsilon$ (una vez emitido el bono a la par) y luego se mantiene en ese valor. En el siguiente cuadro, veremos que sin importar la dirección del cambio en la tasa de interés, la suma del precio del bono al momento $t = 0 + \varepsilon$ y de los cupones a ser cobrados y reinvertidos es constante. Esto se da porque la Duratión es muy cercana la madurez:

YTM(%)	Precio del Bono	Cupones Reinvertidos	Total
4	104,42	10,55	114,97
4,5	104,35	10,62	114,97
5	104,28	10,69	114,97
5,5	104,21	10,76	114,97
6	104,14	10,83	114,97

¿Cómo hacer el hedging en la práctica?

Intentaremos hacer el hedging de un portafolio de bonos con YTM y y precio $P(y)$.con *otro bono* con YTM y_1, (*a priori* diferente de y), cuyo precio estará dado por $H(y_1)$. Construiremos un portafolio global con precio P^* compuesto por el portafolio $P(y)$ y una proporción ϕ del activo $H(y_1)$.

$$P^* = P(y) + \phi H(y_1)$$

La idea es hacer que este portafolio global no sea sensible a cambios pequeños en la tasa de interés. Para esto, usaremos la ecuación (19) y asumiremos que la curva de la YTM se ve afectada solo por cambios paralelos, por lo que $dy = dy_1$. De esta forma obtenemos

$$dP^* = [P'(y) + \phi H'(y_1)]\ dy = 0$$

[3]De hecho en general se la mide en años

Por lo que para hacer $dP^* = 0$ elejimos $P'(y) + \phi H'(y_1) = 0$, o alternativamente

$$\phi \$Dur(H(y_1)) = -\$Dur(P(y)),$$

$$\phi H(y_1) MD(H(y_1)) = -P(y) MD(P(y)),$$

por lo que podemos encontrar la cantidad del bono $H(y_1)$ que se debe comprar para hedgear el portafolio,

$$\phi = -\frac{\$Dur(P(y))}{\$Dur(H(y_1))} = -\frac{P(y)MD(P(y))}{H(y_1)MD(H(y_1))}. \tag{20}$$

Como se puede ver, la cobertura requiere tomar una posición contraría en el activo que se utiliza para hacer el hedging. La idea es que cualquier pérdida (ganancia) obtenida con el portafolio inicial sea cubierta por una ganancía (pérdida) del activo utilizado para hedgear. En otras palabras, dado que asumimos que la yield curve es plana, usamos la Duratión de los distintos portafolio para encontrar la proporción que se debe invertir en el activo utilizado para hacer el hedging. En este caso particular, *hedge ratio* (HR), ϕ, se puede escribir como

$$\phi = -\frac{P(y)D(p(y))}{H(y)D(H(y))}$$

Ejemplo numérico: Supongamos un portafolio con YTM = 5,143%, MD = 6,760 y Precio = $328,635. Ademas, asumamos que el activo con el que se quiere hacer la cobertura tiene un YTM = 4,779%, MD=5,486 y Precio=$118,786. De la ecuación (20) podemos ver que:

$$\phi = -\frac{328,635 \times 6,760}{118,786 \times 5,486} = -3,409$$

Lo que quiere decir que el inversor debe tomar una posición short en 3,409 unidades del instrumento de hedging.

Cuando tenemos que usar una expansión de Taylor de Segundo Orden

Como vimos anteriormente, un supuesto fundamental del análisis nos indicaba que solo podíamos *hedgear* el riesgo del portafolio **para pequeños cambios** en la tasa de interés. En casos en que los cambios en la tasa de interes no son pequeños debemos utilizar una expansión de Taylor de Segundo Orden:

$$\begin{aligned} dP(y) &= P'(y)dy + \frac{1}{2}P''(y)(dy)^2 + o((dy)^2) \qquad (21) \\ &\simeq \$Dur(P(y))dy + \frac{1}{2}\$Conv(P(y))(dy)^2 \end{aligned}$$

Donde

$$\$Conv(P(y)) = P''(y) = \sum_{i=1}^{m} \frac{(T_i - t)(T_i - t + 1)C_i}{[1+y]^{T_i - t + 2}}$$

El término $\$Conv(P(y))$ es conocido como el **\$convexity** del portafolio P.

Definición. La convexity del bono se define como:

$$\$Conv(P(y)) = P''(y) = \sum_{i=1}^{m} \frac{(T_i - t)(T_i - t + 1)C_i}{[1+y]^{T_i - t + 2}}$$

Si dividimos la ecuación (21) por $P(y)$ obtenemos una aproximación del cambio relativo en el precio del portafolio ante cambios en la tasa de interés:

$$\frac{dP(y)}{P(y)} \simeq -MD(P(y))dy + \frac{1}{2}RC(P(y))(dy)^2$$

donde

$$RC(P(y)) = \frac{P''(y)}{P(y)}$$

es conocido como la **convexidad relativa** del portafolio P.

Como hedgearse ante cambios "grandes"

La idea es encontrar un portafolio que **sea \$duratión-neutral y \$convexity-neutral**. Para ello utilizamos 2 bonos $H_1(y_1)$ y $H_2(y_2)$ para hacer el hedging. Lo que debemos eligir son las cantidades óptimas ϕ_1 y ϕ_2 de dichos activos. El nuevo portafolio P^* tendrá la siguiente forma:

$$P^* = P(y) + \phi_1 H_1(y_1) + \phi_2 H_2(y_2)$$

Las cantidades ϕ_1 y ϕ_2 deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} P'^* = 0 \\ P''^* = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -P'(y)dy = \phi_1 H_1'(y_1)dy_1 + \phi_2 H_2'(y_2)dy_2 \\ -P''(y)(dy)^2 = \phi_1 H_1''(y_1)(dy_1)^2 + \phi_2 H_2''(y_2)(dy_2)^2 \end{array} \right.$$

La ecuación $P'^* = 0$ garantiza que la \$duration sea cero y la ecuación $P''^* = 0$ hace que la *\$convexity* sea cero. Si suponemos cambios **paralelos** en la yield curve ($dy = dy_1 = dy_2$):

$$\left\{ \begin{array}{l} -P'(y) = \phi_1 H_1'(y_1) + \phi_2 H_2'(y_2) \\ -P''(y) = \phi_1 H_1''(y_1) + \phi_2 H_2''(y_2) \end{array} \right.$$

Lo que se puede re-escribir como

$$\left\{ \begin{array}{l} -\$Dur(P(y)) = \phi_1 \$Dur(H_1'(y_1)) + \phi_2 \$Dur(H_2'(y_2)) \\ -\$Conv(P(y)) = \phi_1 \$Conv(H_1'(y_1)) + \phi_2 \$Conv(H_2'(y_2)) \end{array} \right.$$

o análogamente

$$\left\{ \begin{array}{l} -P(y)MD(P(y) = \phi_1 H_1(y_1) MD(H_1(y_1)) + \phi_2 H_2(y_2) MD(H_2(y_2)) \\ -P(y)RC(P(y) = \phi_1 H_1(y_1) RC(H_1(y_1)) + \phi_2 H_2(y_2) RC(H_2(y_2)) \end{array} \right.$$

Las soluciones de ϕ_1 y ϕ_2 que resuelvan estos sistemas lineales serán aquellas que permitan hedgear el riesgo del portafolio.

Eliminamos el supuesto de Movimientos Paralelos

Hasta aqui hemos analizado como realizar el hedging de un portafolio ante cambios muy particular en la *yield curve*. Sin embargo, en la práctica los moviemientos de la misma son muy variados habiendo cambios no solo en el nivel, sino en la pendiente y la curvatura que no eran capturados bajo los supuestos anteriormente estudiados. Veamos entonces un modelo general de hedging, que relaja el supuesto de que movimientos en la yield curve son paralelos.

Expresemos el precio P_t del portafolio en el momento t utilizando toda la curva de tasas de zero-coupon

$$P_t = \sum_{i=1}^{m} \frac{C_i}{(1 + R(t, T_i - t))^{T_i - t}}.$$

El factor de riesgo en este caso es *toda* la yield curve, representada *a priori* por m componentes (en compración al análisis anterior que tenía uno solo, la YTM). Por simplicidad, denotaremos a $R(t, t_i - t)$ como R_t^i.
Consideremos por simplicidad **cambios pequeños** en la Yield curve. Para ello necesitamos solo realizar una expansión de primer orden:

$$dP_t \simeq \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial P_t}{\partial R_t^i} dR_t^i, \qquad donde \quad R_t^i = R(t, T_i - t).$$

Asumamos que el inversor utilizará $m = 2$ activos para hacer el hedging (igual al numero de factores de riesgo que es igual al numero de madureces, R_t^1 y R_t^2), cuyos precios los expresamos como H^j, con $j = 1, ..., m = 2$. Esta estrategía en la práctica puede resultar muy costosa ya que implica comprar m activos para hacer el hedging (con potencialmente elevados costos de transacción). El precio de estos $m = 2$ activos, H_t^j, dependerá de todas las tasas de zero-coupon R_t^i por lo que la expansión de Taylor de primer orden (considero solo cambios chicos en la tasa de interes) será:

$$dH_t^j \simeq \frac{\partial H_t^j}{\partial R_t^1} dR_t^1 + \frac{\partial H_t^j}{\partial R_t^2} dR_t^2, \; i = j = 2.$$

Luego construimos nuestro portafolio global P^* como

$$P_t^* = P_t + \phi_1 H_t^1 + \phi_2 H_t^2$$

La condición que deben verificar los ϕ_j es

$$\begin{aligned} dP_t^* &= 0 \Longrightarrow && (22) \\ dP_t^* &\simeq \left(\frac{\partial P_t}{\partial R_t^1} + \phi_1 \frac{\partial H_t^1}{\partial R_t^1} + \phi_2 \frac{\partial H_t^2}{\partial R_t^1}\right) dR_t^1 && (23) \\ &\quad + \left(\frac{\partial P_t}{\partial R_t^2} + \phi_1 \frac{\partial H_t^1}{\partial R_t^2} + \phi_2 \frac{\partial H_t^2}{\partial R_t^2}\right) dR_t^2 && (24) \\ & && (25) \end{aligned}$$

o análogamente

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial P_t}{\partial R_t^i}+\sum_{j=1}^{2}\phi_j\frac{\partial H_t^j}{\partial R_t^i}\right)dR_t^i=0$$

Por lo que para hedgear este portafolio de $m+1$ bonos se debe cumplir **para cada** i

$$\frac{\partial P_t}{\partial R_t^i}+\sum_{j=1}^{m}\phi_j\frac{\partial H_t^j}{\partial R_t^i}=0.$$

De esta forma, resolviendo el sistema lineal obtendremos las cantidades ϕ_j (con $j=1,...,m$) que hedgean el riesgo del portafolio original ante cambios en la Yield curve. Podemos expresarlo en terminos maticiales:

$$\begin{aligned} H' &= \left(\frac{\partial H_t^j}{\partial R_t^i}\right)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,m}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_t^1}{\partial R_t^1} & \cdots & \frac{\partial H_t^1}{\partial R_t^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial H_t^1}{\partial R_t^m} & \cdots & \frac{\partial H_t^m}{\partial R_t^m} \end{pmatrix}; \\ \Phi &= \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_m \end{pmatrix}; P' = \begin{pmatrix} -\frac{\partial P_t}{\partial R_t^1} \\ \vdots \\ -\frac{\partial P_t}{\partial R_t^m} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo que el sistema lineal a resolver puede ser escrito como

$$H'\cdot\Phi=P'$$

La solución estará dada por

$$\Phi=(H')^{-1}\cdot P'$$

Es importante notar que el supuesto que hemos utilizado es que la matriz H_t es invertible, lo que quiere decir que ninguno de los instrumentos utilizados para hacer el hedging es una combinación lineal de los otros $m-1$ instrumentos.

Pocos factores explican los Yields: Agrupamos los factores de riesgo

Se puede probar que pocos componentes principales(combinaciones de las tasas) explican el movimiento de la curva. Por lo que una posibilidad es agrupar los factores de riesgo utilizando Componentes Principales. La idea es que de esta manera se puede reducir el numero de instrumentos de hedging utilizados, y de esta forma reducir los costos de transacción incurridos en el hedging.

Si asumimos que cada una de las tasas de interés (de los zero-coupon con *maduréz* τ), $R(t,\tau)$, las puedo expresar como una función de k factores (principal components) que les denotaremos PC_{lt} (cada PC_{lt} es una combinación lineal de los τ tasas $R(t,\tau)$) que explican la mayor parte (ordenada) de su variación)

$$R(t,\tau)=\sum_{l=1}^{k<\tau}b_{\tau l}PC_{lt}+\varepsilon_{ti} \tag{26}$$

donde $b_{\tau l}$ es la sensibilidad de la tasa $R(t,\tau)$ (del zero-coupon de madurez τ) al l-ésimo componente principal donde PC_{lt}. Usando (22) y (26) y asumiendo: que el término ε_{ti} es despreciable y que se utiliza $k=3$ activos (*3 componentes, el nivel, la pendiente y la curvatura, se dice que explican la mayor parte de la variabilidad de las tasas*) para hacer el hedging, se obtiene la siguiente expresión

$$dP_t^* \simeq \sum_{\tau=1}^{m} \left(\frac{\partial P_t}{\partial R(t,\tau)} + \sum_{j=1}^{3} \phi_j \frac{\partial H_t^j}{\partial R(t,\tau)} \right) \, dR(t,\tau)$$

Utilizando los componentes principales, o sea $dR(t,\tau) \simeq \sum\limits_{l=1}^{3} b_{\tau l} dPC_{lt}$ obtenemos:

$$\Delta P_t^* \simeq \sum_{\tau=1}^{m} \left(\left(\frac{\partial P_t}{\partial R(t,\tau)} + \sum_{j=1}^{3} \phi_j \frac{\partial H_t^j}{\partial R(t,\tau)} \right) \sum_{l=1}^{3} b_{\tau l} dPC_{lt} \right) \tag{27}$$

o análogamente

$$\begin{aligned} \Delta P_t^* \quad \simeq \quad & \sum_{\tau=1}^{m} \left(\frac{\partial P_t}{\partial R(t,\tau)} b_{\tau 1} + \sum_{j=1}^{3} \phi_j \frac{\partial H_t^j}{\partial R(t,\tau)} b_{\tau 1} \right) dPC_{1t} \\ & + \sum_{\tau=1}^{m} \left(\frac{\partial P_t}{\partial R(t,\tau)} b_{\tau 2} + \sum_{j=1}^{3} \phi_j \frac{\partial H_t^j}{\partial R(t,\tau)} b_{\tau 2} \right) dPC_{2t} \\ & + \sum_{\tau=1}^{m} \left(\frac{\partial P_t}{\partial R(t,\tau)} b_{\tau 3} + \sum_{j=1}^{3} \phi_j \frac{\partial H_t^j}{\partial R(t,\tau)} b_{\tau 3} \right) dPC_{3t} \end{aligned}$$

El término $\sum\limits_{\tau=1}^{m} \left(\frac{\partial P_t}{\partial R(t,\tau)} b_{\tau 1} + \sum\limits_{j=1}^{3} \phi_j \frac{\partial H_t^j}{\partial R(t,\tau)} b_{\tau 1} \right)$ es conocido como el *principal component* \$duration del portafolio P^* con respecto al $factor 1$.
Para hedgear el portafolio tendremos que encontrar los valores de ϕ^1, ϕ^2 y ϕ^3 tales que la expresión (27) sea igual a cero. Notar que la solución es :

$$\sum_{\tau=1}^{m} \left(\frac{\partial P_t}{\partial R(t,\tau)} b_{\tau l} + \sum_{j=1}^{3} \phi_j \frac{\partial H_t^j}{\partial R(t,\tau)} b_{\tau l} \right) = 0 \qquad \text{para } l = 1,2,3$$

Lo que quiere decir, que el portafolio tendrá *principal component* \$duration*s* neutrales. Si definimos las siguientes variables:

$$
\begin{aligned}
H' &= \begin{pmatrix} \sum\limits_{\tau=1}^{m} \frac{\partial H_t^1}{\partial R(t,\tau)} b_{\tau 1} & \sum\limits_{\tau=1}^{m} \frac{\partial H_t^2}{\partial R(t,\tau)} b_{\tau 1} & \sum\limits_{\tau=1}^{m} \frac{\partial H_t^3}{\partial R(t,\tau)} b_{\tau 1} \\ \sum\limits_{\tau=1}^{m} \frac{\partial H_t^1}{\partial R(t,\tau)} b_{\tau 2} & \sum\limits_{\tau=1}^{m} \frac{\partial H_t^2}{\partial R(t,\tau)} b_{\tau 2} & \sum\limits_{\tau=1}^{m} \frac{\partial H_t^3}{\partial R(t,\tau)} b_{\tau 2} \\ \sum\limits_{\tau=1}^{m} \frac{\partial H_t^1}{\partial R(t,\tau)} b_{\tau 3} & \sum\limits_{\tau=1}^{m} \frac{\partial H_t^2}{\partial R(t,\tau)} b_{\tau 3} & \sum\limits_{\tau=1}^{m} \frac{\partial H_t^3}{\partial R(t,\tau)} b_{\tau 3} \end{pmatrix}; \\
\Phi &= \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}; P' = \begin{pmatrix} -\sum\limits_{\tau=1}^{m} \frac{\partial P_t}{\partial R(t,\tau)} b_{\tau 1} \\ -\sum\limits_{\tau=1}^{m} \frac{\partial P_t}{\partial R(t,\tau)} b_{\tau 2} \\ -\sum\limits_{\tau=1}^{m} \frac{\partial P_t}{\partial R(t,\tau)} b_{\tau 3} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

El sistema lineal a resolver es:

$$H' \cdot \Phi = P'$$

y la solución estará dada por

$$\Phi = (H')^{-1} \cdot P'$$

Ejemplo

Consideremos el caso de 4 tasas distintas (madureces) y 2 componentes principales. Si bien hay 4 madureces (con sus conrrespondientes tasas), hay dos componentes principales que explican la mayor parte de la variabilidad de dichas tasas. Por lo tanto, utilizo 2 bonos para hedgear: si bien hay 4 tasas, son solo 2 las fuentes de riesgo (los dos componentes principales). El cambio de estos bonos es una función del cambio en las tasas:

$$
\begin{aligned}
dP &= \frac{\partial P_t}{\partial R(t,1)} dR(t,1) + \frac{\partial P_t}{\partial R(t,2)} dR(t,2) \\
&\quad + \frac{\partial P_t}{\partial R(t,3)} dR(t,3) + \frac{\partial P_t}{\partial R(t,4)} dR(t,4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
dH^1 &= \frac{\partial H^1}{\partial R(t,1)} dR(t,1) + \frac{\partial H^1}{\partial R(t,2)} dR(t,2) \\
&\quad + \frac{\partial H^1}{\partial R(t,3)} dR(t,3) + \frac{\partial H^1}{\partial R(t,4)} dR(t,4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
dH^2 &= \frac{\partial H^2}{\partial R(t,1)} dR(t,1) + \frac{\partial H^2}{\partial R(t,2)} dR(t,2) \\
&\quad + \frac{\partial H^2}{\partial R(t,3)} dR(t,3) + \frac{\partial H^2}{\partial R(t,4)} dR(t,4)
\end{aligned}
$$

Los componentes principales me permiten expresar la evolución (los cambios) de las m madureces como función de k componentes (combinaciones lineales). Cuando $m = 4$ y $k = 2$ tengo:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} R(t,1) \\ R(t,2) \\ R(t,3) \\ R(t,4) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} b_{11}PC_{1t} + b_{12}PC_{2t} + \varepsilon_{1t} \\ b_{21}PC_{1t} + b_{22}PC_{2t} + \varepsilon_{2t} \\ b_{31}PC_{1t} + b_{32}PC_{2t} + \varepsilon_{3t} \\ b_{41}PC_{1t} + b_{42}PC_{2t} + \varepsilon_{4t} \end{bmatrix} \\
&\approx \begin{bmatrix} b_{11}PC_{1t} + b_{12}PC_{2t} \\ b_{21}PC_{1t} + b_{22}PC_{2t} \\ b_{31}PC_{1t} + b_{32}PC_{2t} \\ b_{41}PC_{1t} + b_{42}PC_{2t} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Por lo que los cambios en las tasas los puedo expresar como una función de los cambios en los componentes principales.
Esto lleva a que el cambio del valor del bono se pueda agrupar como una función de los cambios en los componentes pricipales.

$$\begin{aligned}
dP &= \frac{\partial P}{\partial R(t,1)}\left(b_{11}dPC_{1t} + b_{12}dPC_{2t}\right) \\
&\quad + \frac{\partial P}{\partial R(t,2)}\left(b_{21}dPC_{1t} + b_{22}dPC_{2t}\right) \\
&\quad + \frac{\partial P}{\partial R(t,3)}\left(b_{31}dPC_{1t} + b_{32}dPC_{2t}\right) \\
&\quad + \frac{\partial P}{\partial R(t,4)}\left(b_{41}dPC_{1t} + b_{42}dPC_{2t}\right) \\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial R(t,1)}b_{11} + \frac{\partial P}{\partial R(t,2)}b_{21} + \frac{\partial P}{\partial R(t,3)}b_{31} + \frac{\partial P}{\partial R(t,4)}b_{41}\right)dPC_{1t} \\
&\quad \left(\frac{\partial P}{\partial R(t,1)}b_{12} + \frac{\partial P}{\partial R(t,2)}b_{22} + \frac{\partial P}{\partial R(t,3)}b_{32} + \frac{\partial P}{\partial R(t,4)}b_{42}\right)dPC_{2t}
\end{aligned}$$

Como asumi 2 componentes principales (2 factores de riesgo) tomo 2 bonos que sean función de las mismas 4 tasas para hedgear, los cuales tambien se puedan expresar como función de dos componentes principales.

$$
\begin{aligned}
dH^1 &= \frac{\partial H^1}{\partial R(t,1)}\left(b_{11}dPC_{1t}+b_{12}dPC_{2t}\right)\\
&\quad+\frac{\partial H^1}{\partial R(t,2)}\left(b_{21}dPC_{1t}+b_{22}dPC_{2t}\right)\\
&\quad+\frac{\partial H^1}{\partial R(t,3)}\left(b_{31}dPC_{1t}+b_{32}dPC_{2t}\right)\\
&\quad+\frac{\partial H^1}{\partial R(t,4)}\left(b_{41}dPC_{1t}+b_{42}dPC_{2t}\right)\\
&= \left(\frac{\partial H^1}{\partial R(t,1)}b_{11}+\frac{\partial H^1}{\partial R(t,2)}b_{21}+\frac{\partial H^1}{\partial R(t,3)}b_{31}+\frac{\partial H^1}{\partial R(t,4)}b_{41}\right)dPC_{1t}\\
&\quad+\left(\frac{\partial H^1}{\partial R(t,1)}b_{12}+\frac{\partial H^1}{\partial R(t,2)}b_{22}+\frac{\partial H^1}{\partial R(t,3)}b_{32}+\frac{\partial H^1}{\partial R(t,4)}b_{42}\right)dPC_{2t}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
dH^2 &= \frac{\partial H^2}{\partial R(t,1)}\left(b_{11}dPC_{1t}+b_{12}dPC_{2t}\right)\\
&\quad+\frac{\partial H^2}{\partial R(t,2)}\left(b_{21}dPC_{1t}+b_{22}dPC_{2t}\right)\\
&\quad+\frac{\partial H^2}{\partial R(t,3)}\left(b_{31}dPC_{1t}+b_{32}dPC_{2t}\right)\\
&\quad+\frac{\partial H^2}{\partial R(t,4)}\left(b_{41}dPC_{1t}+b_{42}dPC_{2t}\right)\\
&= \left(\frac{\partial H^2}{\partial R(t,1)}b_{11}+\frac{\partial H^2}{\partial R(t,2)}b_{21}+\frac{\partial H^2}{\partial R(t,3)}b_{31}+\frac{\partial H^2}{\partial R(t,4)}b_{41}\right)dPC_{1t}\\
&\quad+\left(\frac{\partial H^2}{\partial R(t,1)}b_{12}+\frac{\partial H^2}{\partial R(t,2)}b_{22}+\frac{\partial H^2}{\partial R(t,3)}b_{32}+\frac{\partial H^2}{\partial R(t,4)}b_{42}\right)dPC_{2t}
\end{aligned}
$$

Entonces si uso $P^* = P + \phi_1 H_1 + \phi_2 H_2$, hago $dP^* = 0$, hedgeando contra los cambios en los P.C.

$$
\begin{aligned}
P^* &= P(R(t,1),R(t,2),R(t,3),R(t,4))\\
&\quad+\phi_1 H_1(R(t,1),R(t,2),R(t,3),R(t,4))\\
&\quad+\phi_2 H_2(R(t,1),R(t,2),R(t,3),R(t,4))
\end{aligned}
$$

o sea cuando

$$\left(\frac{\partial P}{\partial R(t,1)}b_{11}+\frac{\partial P}{\partial R(t,2)}b_{21}+\frac{\partial P}{\partial R(t,3)}b_{31}+\frac{\partial P}{\partial R(t,4)}b_{41}\right)=$$
$$\phi_1(\frac{\partial H^1}{\partial R(t,1)}b_{11}+\frac{\partial H^1}{\partial R(t,2)}b_{21}+\frac{\partial H^1}{\partial R(t,3)}b_{31}+\frac{\partial H^1}{\partial R(t,4)}b_{41})$$
$$+\phi_2(\frac{\partial H^2}{\partial R(t,1)}b_{11}+\frac{\partial H^2}{\partial R(t,2)}b_{21}+\frac{\partial H^2}{\partial R(t,3)}b_{31}+\frac{\partial H^2}{\partial R(t,4)}b_{41})$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial R(t,1)}b_{12}+\frac{\partial P}{\partial R(t,2)}b_{22}+\frac{\partial P}{\partial R(t,3)}b_{32}+\frac{\partial P}{\partial R(t,4)}b_{42}\right)=$$
$$\phi_1(\frac{\partial H^1}{\partial R(t,1)}b_{12}+\frac{\partial H^1}{\partial R(t,2)}b_{22}+\frac{\partial H^1}{\partial R(t,3)}b_{32}+\frac{\partial H^1}{\partial R(t,4)}b_{42})$$
$$+\phi_2(\frac{\partial H^2}{\partial R(t,1)}b_{12}+\frac{\partial H^2}{\partial R(t,2)}b_{22}+\frac{\partial H^2}{\partial R(t,3)}b_{32}+\frac{\partial H^2}{\partial R(t,4)}b_{42})$$

Lo cual es un sistema de dos ecuaciones con 2 incognitas.

Caso particular: Hedging en el modelo de Nelson-Siegel

El modelo de Nelson-Siegel asume una forma funcional particular que es empiricamente muy exitosa para explicar la curva de rendimiento. De hecho es un caso particular de agrupamiento de factores de riesgo que similar al que hemos visto. La forma funcional que le dieron a la zero-coupon rate es:

$$R(\tau)=\beta_1+\beta_2\frac{1-\exp(-\theta\tau)}{\theta\tau}+\beta_3\left[\frac{1-\exp(-\theta\tau)}{\theta\tau}-\exp(-\theta\tau)\right],$$

donde θ es un parmetro a estimar, τ es la madurez del bono y β_1, β_2 y β_3 son parametros a estimar asociados con el nivel, la pendiente y la curvatura.

Bajo este modelo, el precio del portafolio en $t=0$ sería:

$$P_0=\sum_\tau F_\tau \exp(-R(\tau)\tau)$$

De esta forma, podemos definir las \$duratións $D_i=\frac{\partial P_0}{\partial \beta_i}$ para $i=0,1,2$ del portafolio P con respecto a los parametros β_0, β_1, y β_2 de la siguiente forma:

$$\begin{cases} D_0=-\sum\limits_\tau \tau F_\tau\exp(-R(\tau)\tau) \\ D_1=-\sum\limits_\tau \tau\frac{1-\exp(-\theta\tau)}{\theta\tau}F_\tau\exp(-R(\tau)\tau) \\ D_2=-\sum\limits_\tau \tau[\frac{1-\exp(-\theta\tau)}{\theta\tau}-\exp(-\theta\tau)]F_\tau\exp(-R(\tau)\tau) \end{cases} \tag{28}$$

Utilizando este modelo construimos un portafolio compuesto por el portafolio inicial que se desea hedgear (cuyo precio en \$ llamaremos P) y 3 instrumentos

de hedging cuyos precios llamaremos H_i para $i = 1, 2, 3$. El objetivo será hacer que el nuevo portafolio sea neutral a los parámetros β_0, β_1y β_2 (cambios en el nivel, la pendiente y la curvatura).
Para esto, buscaremos las cantidades ϕ_1, ϕ_2,y ϕ_3 que serán invertidas respectivamente en los instrumentos H_1, H_2 y H_3 que satisfagan el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{l} -D_0 = \phi_1 \frac{\partial H_1}{\partial \beta_0} + \phi_2 \frac{\partial H_2}{\partial \beta_0} + \phi_3 \frac{\partial H_3}{\partial \beta_0} = 0 \\ -D_1 = \phi_1 \frac{\partial H_1}{\partial \beta_1} + \phi_2 \frac{\partial H_2}{\partial \beta_1} + \phi_3 \frac{\partial H_3}{\partial \beta_1} = 0 \\ -D_2 = \phi_1 \frac{\partial H_1}{\partial \beta_2} + \phi_2 \frac{\partial H_2}{\partial \beta_2} + \phi_3 \frac{\partial H_3}{\partial \beta_2} = 0 \end{array} \right.$$

Como se puede ver, tenemos un sistema de ecuaciones de 3 variables con 3 incognitas, por lo que la solución es fácilmente obtenible.