Riesgo, Incertidumbre y Finanzas

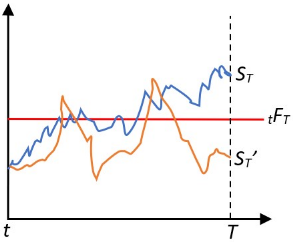
Forwards & Futures

Francisco Terfi

2do semestre de 2022

Forwards

- Un **forward** es un contrato que consiste en un arreglo para vender o comprar un activo en un futuro estipulado, T, y a un precio fijado, ${}_tF_T$, al tiempo de la firma del contrato, t.
- Las partes tienen la **obligación** de llevar a cabo la transacción.
- El precio pactado es un **precio justo**, tal que no hay erogación monetaria al momento de firmar el contrato.
    - Esto no quiere decir que el contrato no tenga valor durante la vida del mismo.



Futures

- Un **future** es un contrato similar, pero con la salvedad de que dichos instrumentos son estandarizados y son comerciados a través de un exchange house que fija ciertas condiciones sobre el contrato.
- En este tipo de contratos es relevante la trayectoria de S_t.
  - Las ganancias/pérdidas se realizan día a día según cómo evolucione la cotización.
  - Operacionalmente, el broker pide al inversor un depósito que se coloca en una *margin account*, que "puede requerir mantenimiento".
- Nosotros trabajaremos en un contexto en el cual la tasa libre de riesgo es flat y constante. Esto implica que futures y forwards son equivalentes.
  - Ver Hull para demostración.
  - Relajamos el supuesto en un ejercicio del práctico.

Precio forward de un activo sin flujo de ingresos

- Empecemos analizando el caso en el cual el activo subyacente no paga un flujo de ingresos (ej: acciones que no pagan dividendos, bonos sin cupón).
- El precio del subyacente en el momento t es S_t.
- Nuestro objetivo es hallar ${}_tF_T$ y para eso usaremos **argumentos de no arbitraje**
- Supongamos que hoy cuento con el stock (con precio S_t). Hay dos posibles alternativas de inversión libre de riesgo:

1. Vender a futuro a precio ${}_tF_T$.
2. Poner el dinero a rendir en un bono libre de riesgo con tasa r y por lo tanto precio $e^{-r(T-t)}$. Luego, puedo comprar

$$\frac{S_t}{e^{-r(T-t)}} = S_t e^{r(T-t)}$$

- Como ambas alternativas son libre de riesgo, por no arbitraje deben pagar lo mismo y por lo tanto

$${}_tF_T = S_t e^{r(T-t)}$$

Propiedades estocásticas del forward

- Veamos que el precio forward sigue un random walk.
  - Esto es, su cambio no es predecible.
- Bajo la medida neutral al riesgo tenemos que

$$_tF_T = E_t(S_T)$$

- Entonces (usando expectativas iteradas)

$$_tF_T = E_t(S_T) = E_t[\underbrace{E_{t+1}(S_T)}_{=_{t+1}F_T}] = E_t[_{t+1}F_T]$$

  es decir $_tF_T = E_t(_{t+1}F_T)$
- Pero entonces se sigue que

$$_{t+1}F_T =_t F_T + \varepsilon_{t+1}$$

  donde ε_{t+1} es una innovación.

Forward sintético

- Veamos que podemos reproducir las características de un forward utilizando opciones.
- En particular, queremos construir un portafolio usando opciones europeas que replique a un forward, es decir que:

1. No tenga inversión inicial a tiempo t (portafolio de arbitraje).
2. Debe tener el mismo pago a tiempo T: $S_T -_t F_T$.

- Consideremos el siguiente portafolio

$$\Pi = c(.) - p(.)$$

  donde $c(.)$ y $p(.)$ corresponden a un call y a un put europeos sobre un **activo de renta fija** con precio $P(t, T_1)$ y **strike price** $X =_t F_T$ que vencen en $T < T_1$.
- Verifiquemos que este portafolio replica a un forward sobre el activo de renta fija, es decir cumple con 1 y 2.

Forward sintético

1. **No requiere inversión inicial**
   - Usando paridad call-put
$$\Pi = c(.) - p(.) = P(t, T_1) - Xe^{-r(T-t)}$$
   - Dado que el strike price es $X = {}_tF_T$ tenemos
$$\Pi = P(t, T_1) - {}_tF_T e^{-r(T-t)}$$
   - Sabemos que el precio del forward es
$${}_tF_T = P(t, T_1)e^{r(T-t)}$$
   tenemos que el costo del portafolio es
$$\Pi = P(t, T_1) - \underbrace{P(t, T_1)e^{r(T-t)}}_{= {}_tF_T} e^{-r(T-t)} = P(t, T_1) - P(t, T_1) = 0$$
2. **Replica el payoff a tiempo T**
   - El payoff del portafolio a tiempo T viene dado por
$$\text{máx}\{P(T, T_1) - {}_tF_T, 0\} - \text{máx}\{{}_tF_T - P(T, T_1), 0\} = P(T, T_1) - {}_tF_T$$

Forward sintético: valor del forward

- El valor de un contrato forward (ganancia que obtengo si lo vendo) es nulo inicialmente, pero varía durante la vida del contrato.
- Llamemos f_s al valor del contrato en un momento $s \in [t, T]$. Sabemos que
  - $f_t = 0$
  - $f_T = S_T -_t F_T$
  - ¿Cuál debería serl el valor del contrato f_s para $s \in (t, T)$?
- Usando el argumento de répica anterior, sabemos que f_s debe igualarse al valor de este portafolio para todo $s \in [t, T]$

$$
\begin{aligned}
f_s &= c(.) - p(.) \\
&= S_s - Xe^{-r(T-s)} && \text{por put-call parity} \\
&= S_s -_t F_T e^{-r(T-s)} \\
&= S_s - S_t e^{r(T-t)} e^{-r(T-s)} && \text{usando } {}_tF_T = S_t e^{r(T-t)} \\
&= S_s - S_t e^{r(s-t)}
\end{aligned}
$$

Forward sintético: valor del forward

- Concluimos entonces que

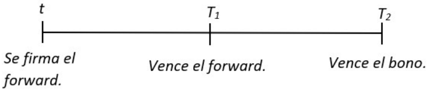
$$f_s = S_s - S_t e^{r(s-t)}$$

- Notar que

$$\begin{aligned} f_t &= S_t - S_t = 0 \\ f_T &= S_T - S_t e^{r(T-t)} = S_T -_t F_T \end{aligned}$$

Forward sobre activo con flujo de pagos conocidos

- Consideremos ahora un forward sobre un activo que paga un flujo de ingresos conocido (ej: bono con cupones).
- El precio de este activo en t es S_t. Supongamos que el forward tiene una madurez de T_1 años y el bono vence en T_2 años, con $T_1 < T_2$.



- Supongamos que los cupones que paga el bono durante la vida del forward tiene un valor presente igual a I.
- Para hallar el precio del forward ${}_tF_{T_1}$ usamos un argumento similar al caso anterior. Supongamos que tengo S_t pesos y por lo tanto tengo dos alternativas de inversión libre de riesgo:

1. Comprar el bono y venderlo a futuro, de modo que gano los cupones durante la vida del forward y en T_1 obtengo ${}_tF_{T_1} + Ie^{r(T_1-t)}$.
2. Poner el dinero a rendir en un bono libre de riesgo

$$\frac{S_t}{e^{-r(T_1-t)}} = S_t e^{r(T_1-t)}$$

Forward sobre activo con flujo de pagos conocidos

- Luego, por no arbitraje se sigue que

$$
\begin{aligned}
{}_tF_{T_1} + Ie^{r(T_1-t)} &= S_t e^{r(T_1-t)} \\
{}_tF_{T_1} &= (S_t - I)e^{r(T_1-t)}
\end{aligned}
$$

- Si el activo, en lugar de proveer un ingreso conocido, tiene una yield conocida q, el argumento es similar.

  En este caso, el pago por la estrategia 1 sería

$$
{}_tF_T + S_t e^{q(T_1-t)}
$$

  Luego, el precio del forward es

$$
{}_tF_T = S_t e^{(r-q)(T_1-t)}
$$

Forwards en monedas

- La moneda extranjera tiene la propiedad de que el inversor puede ganar una tasa de interés libre de riesgo vigente en el país extranjero durante el tiempo que tiene la moneda extranjera.
- Notación:
  - r: tasa libre de riesgo en moneda local (pesos)
  - r_f: tasa libre de riesgo en moneda extranjera (USD)
  - S_t: precio de una unidad de moneda extranjera en términos de la moneda doméstica (tipo de cambio)
- Queremos buscar el precio a futuro de una unidad de moneda extranjera.

Forwards en monedas

- Supongamos que tengo 1 USD, de modo que tengo a disposición dos alternativas de inversión libre de riesgo:

1. Con el dólar compro S_t pesos y poniendo a rendir este monto a la tasa r obtengo $S_t e^{r(T-t)}$ pesos en el período T.
2. Vender a futuro a un precio unitario ${}_tF_T$; sin embargo, hasta T puedo poner a rendir el USD a la tasa r_f de modo que en T tengo $e^{r_f(T-t)}$ y gano ${}_tF_T e^{r_f(T-t)}$.

- Luego, por no arbitraje se sigue que

$$
\begin{aligned}
{}_tF_T e^{r_f(T-t)} &= S_t e^{r(T-t)} \\
{}_tF_T &= S_t e^{(r-r_f)(T-t)}
\end{aligned}
$$

- Tomando logs y reordenando términos obtenemos la **paridad cubierta de tasas**

$$
r = r_f + \frac{\ln_t F_T - \ln S_t}{(T-t)}
$$

Forwards sobre commodities

- Si el activo en cuestión es un commodity hay que tener en cuenta dos aspectos fundamentales:
    - costos de almacenamiento.
    - si se trata de un *investment asset* (especulación) o *consumption asset*.
- Caractericemos, inicialmente, el precio futuro de commodities que son *investment assets*, por ejemplo el oro o la plata.
    - Podemos pensar estos costos como un *ingreso negativo*; si U representa el valor presente de todos los costos de almacenamiento a pagar durante la vida del futuro, entonces

$$_tF_T = (S_t + U)e^{r(T-t)}$$

    - Si el costo de almacenamiento es proporcional al precio del commmodity en cada momento del tiempo, puede pensarse como una yield negativa, y en este caso

$$_tF_T = S_t e^{(r+u)(T-t)}$$

      donde u es el costo de almacenamiento por año como proporción del precio spot.

Forwards sobre commodities

- Si pensamos en commodities que son *consumption assets*, el argumento debe revisarse.
  - Partiendo de que tengo un stock con valor S_t de un *consumption asset* puedo:
    1. Venderlo a futuro (y pagar el almacenamiento) obteniendo ${}_tF_T - Ue^{r(T-t)}$.
    2. Poner a rendir el dinero equivalente a la tasa libre de riesgo obteniendo $S_te^{r(T-t)}$.
  - Ahora bien, si consumir el commodity tiene valor, entonces

$$ {}_tF_T \leq (S_t + U)e^{r(T-t)} $$

- La **convenience yield** (y) comprende los beneficios de mantener el activo físicamente, refleja la expectativa del mercado respecto a la disponibilidad futura del commodity.
  - Cuanto mayor sea la probabilidad de desabastecimiento, mayor será la convenience yield.
  - Viene definida por

$$ {}_tF_Te^{y(T-t)} = (S_t + U)e^{r(T-t)} $$

Normal backwardation y contango

- A pesar de que un forward debería tener el mismo retorno que un bono libre de riesgo, podemos observar *desviaciones* del precio justo para "convencer" a la otra parte del mercado.
- Decimos que el mercado está en **normal backwardation** cuando ${}_tF_T < E_t(S_T)$.
  - Productores venden contratos con algún descuento sobre el valor esperado del spot futuro para atraer especuladores.
- Decimos que la situación del mercado es **contango** cuando ${}_tF_T > E_t(S_T)$.
  - Los especuladores pagan un sobre precio para atraer productores a vender a futuro.