La Frontera de Portafolios

En caso de que exista más de un activo riesgoso, de modo que el individuo pueda formar distintos portafolios (sin restricciones), si alguno de estos portafolios domina *estocásticamente en segundo orden* a todo el resto de los portafolios (dada una igual media), entonces este portafolio tiene que ser el que tiene la mínima varianza. El conjunto de todos los portafolios que minimizan la varianza (o el desvío), dadas diferentes medias, forman un conjunto que se denomina como la *frontera (*de portafolios con dicha característica*)*

El párrafo anterior se sugiere la existencia de un isomorfismo entre la maximización de la utilidad esperada y la minimización de la varianza (dada una media). Sin embargo, la aversión a una mayor varianza está implicita en la concavidad estricta de la función de utilidad y por lo tanto dicho isomorfismo (entre el modelo de media-varianza y la maximización de la utilidad esperada) **no es válido para funciones de utilidad y/o distribuciones arbitrarias**.

A los efectos de ver que dicho isomorfismo se cumple solo en casos particulares, se procede a expandir por Taylor la función de utilidad alrededor de la riqueza final esperada, $E(\widetilde{w})$, y luego tomar su valor esperado, es decir

$$\begin{aligned} U(\widetilde{w}) &= U(E(\widetilde{w})) + U'(E(\widetilde{w}))(\widetilde{w} - E(\widetilde{w})) \\ &\quad + \frac{1}{2}U''(E(\widetilde{w}))(\widetilde{w} - E(\widetilde{w}))^2 + O(\widetilde{w}^3), \end{aligned}$$

y tomando valor esperado obtenemos

$$\begin{aligned} E(U(\widetilde{w})) &= U(E(\widetilde{w})) + U'(E(\widetilde{w}))E(\widetilde{w} - E(\widetilde{w})) \\ &\quad + \frac{1}{2}U''(E(\widetilde{w}))E(\widetilde{w} - E(\widetilde{w}))^2 + E(O(\widetilde{w}^3)), \end{aligned}$$

donde

$$O\left(\widetilde{w}^3\right) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n U(E(\widetilde{w}))}{d^n \widetilde{w}} (\widetilde{w} - E(\widetilde{w}))^n,$$

es el resto de una expansión de Taylor (de aqui en más lo denominaremos simplemente como resto).

Entonces podemos expresar la utilidad esperada como

$$E(U(\widetilde{w})) = U(E(\widetilde{w})) + \frac{1}{2}U''(E(\widetilde{w}))\sigma_w^2 + E(O(\widetilde{w}^3)). \tag{1}$$

La ecuación (1) muestra (dado el carácter cóncavo de la función de utilidad), que la maximización de la utilidad esperada esta asociada a la aversión por la varianza, y la preferencia por una mayor media. Sin embargo, también demuestra que no se puede únicamente caracterizar la utilidad esperada como una función positiva de la esperanza y negativa de la varianza, ya que el agente también debería maximizar el resto de Lagrange. Para que se pueda tomar ambas operaciones (maximizar utilidad esperada o minimizar varianza dado una media) como equivalentes, se deben exigir ciertas restricciones sobre la distribución de los retornos, o sobre la función de utilidad.

Si se toma una función de utilidad cuadrática (dado que las derivadas de orden mayor a 2 son nulas), se puede caracterizar a la maximización de la utilidad esperada a través de un problema de media y de varianza. De hecho, si se considera la siguiente función de utilidad

$$U(\widetilde{w}) = \widetilde{w} - \frac{1}{2}b\widetilde{w}^2,$$

se obtiene

$$E(U(\widetilde{w})) = E(\widetilde{w}) - \frac{1}{2}bE(\widetilde{w}^2),$$

o

$$E(U(\widetilde{w})) = E(\widetilde{w}) - \frac{1}{2}b(E(\widetilde{w})^2 + \sigma_w^2).$$

Se puede observar que la utilidad esperada está caracterizada totalmente por la media y por la varianza. De hecho no hay más que aplicar el operador max para darse cuenta que maximizar la utilidad es igual a minimizar la varianza **dada la media**

$$\max\{E(U(\widetilde{w}))\} = E(\widetilde{w}) + \max\{-\frac{1}{2}b(E(\widetilde{w})^2 + \sigma_w^2)\},$$

$$\max\{E(U(\widetilde{w}))\} = \overbrace{E(\widetilde{w}) - \frac{1}{2}bE(\widetilde{w})^2}^{\text{es constante}} + \frac{1}{2}b\min\{\sigma_w^2\}.$$

Otra condición suficiente para que el modelo de media-varianza sea equivalente a maximizar la utilidad esperada, es que los retornos tengan una distribución Normal. La distribución Normal tiene la propiedad de que los momentos de orden mayor pueden ser expresados como funciones de los dos primeros momentos. Es decir que $E\{O(\widetilde{w})\}$ puede ser expresado como una sumatoria de funciones de media y varianza que son conocidas. Por lo tanto para funciones de utilidad arbitrarias, la normalidad de la distribución de los retornos es condición suficiente para caracterizar completamente a la utilidad esperada con la media y la varianza.

Lamentablemente estas condiciones presentan algunas propiedades no deseables. Por ejemplo, la utilidad cuadrática presenta la propiedad de saciedad y de aversion absoluta al riesgo creciente. La primer propiedad, no parece ser una buena representación del comportamiento de los agentes. La segunda propiedad, implica que el riesgo es tratado como un bien inferior (lo cual es contra intuitivo). Por su parte la distribución Normal no parece caracterizar correctamente las distribuciones de los retornos (componente estocástico de la riqueza), ya que permite que tomen valores infinitamente negativos.

Por estas razones el modelo de media-varianza no es un modelo general de elección de activos. Pero dado que tiene buenas predicciones empíricas y que, principalmente, es analíticamente manejable, ocupa un rol central en la teoría de elección de portafolios.

1 Modelo de Media-Varianza

1.1 Supuestos

1 Existen $n \geq 2$ activos riesgosos en la economía.

2 No existen fricciones en la economía.

3 Se permite ir corto (short-selling) en activos o portafolios.

4 Los activos tienen varianzas finitas y diferentes medias.

5 El retorno de cualquier activo no puede ser expresado como combinación lineal de retornos de otros activos.

1.2 El Modelo

Bajo estos supuestos la matriz de varianza-covarianza, V, es no singular y simétrica. Se define a $\alpha \in \mathbb{R}^n$, como los pesos de los diferentes activos dentro del portafolio, por ende $\alpha' V \alpha$ es la varianza del portafolio.[1]

Por lo tanto un portafolio es un *portafolio frontera* si tiene la mínima varianza entre todos los portafolios que tienen su misma media. Un portafolio p es frontera, si y sólo si, α_p es solución del siguiente programa

$$\min_{\{w\}} \frac{1}{2}\alpha' V \alpha \qquad \textit{sujeto a} \qquad \alpha' e = E(r_p) \ \ , \ \ \alpha' I = 1;$$

donde I es un vector de unos (de $n - \textit{componentes}$) y e es un vector de las esperanzas de los retornos de los n activos que componen el portafolio. Notemos que no existe restricción alguna sobre el límite de short-selling.

El Lagragiano que resuelve el programa de minimización es

$$\min_{\{\alpha,\lambda,\gamma\}} L = \frac{1}{2}\alpha' V \alpha + \lambda(E(r_p) - \alpha' e) + \gamma(1 - \alpha' I).$$

---

[1] Considere un portafolio que consiste en elegir cantidades de 2 activos r_1 y r_2. Definimos el retorno de dicho portafolio r_p, entonces

$$r_p = \alpha_{11}.r_1 + (1-\alpha_1)r_2.$$

La media de r_p puede ser expresada como

$$\mu_p = \alpha_1.\mu_1 + (1-\alpha_1).\mu_2$$

y la varianza como

$$\sigma_p^2 = \alpha_1^2.\sigma_1^2 + (1-\alpha_1)^2.\sigma_2^2 + 2\alpha_1(1-\alpha_1)cov(r_1, r_2).$$

Notemos que definimos el vector de pesos como $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ (1-\alpha_1) \end{bmatrix}$, y la matriz de varianza-covarianza como$V = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & cov(r_1, r_2) \\ cov(r_1, r_2) & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$, entonces

$$\sigma_p^2 = \alpha' V \alpha.$$

Las condiciones de primer orden (CPO) son

$$L_\alpha = V\alpha - \lambda e - \gamma I = 0, \tag{2}$$

$$L_\lambda = E(r_p) - \alpha' e = 0,$$

$$L_\gamma = 1 - \alpha' I = 0.$$

Como V es una matriz definida positiva, estas condiciones son necesarias y suficientes para la existencia de un máximo global.

Despejando α_p de (2), obtenemos

$$\alpha = \lambda V^{-1} e + \gamma V^{-1} I. \tag{3}$$

Pre-multiplicando en ambos lados de (3) por e' se obtiene

$$E(r_p) = \lambda(e'V^{-1}e) + \gamma(e'V^{-1}I),$$

(ya que $E(r_p) = \alpha' e$), y pre-multiplicando a ambos lados (3) por I', se obtiene

$$1 = \lambda(I'V^{-1}e) + \gamma(I'V^{-1}I),$$

(ya que $1 = \alpha' I$) por lo que definiendo

$$A = I'V^{-1}e, \quad B = e'V^{-1}e, \quad C = I'V^{-1}I, \quad D = BC - A^2,$$

se obtiene (notar que $A = A'$ y que $D > 0$[2])

$$E(r_p) = \lambda B + \gamma A,$$

y

$$1 = \lambda A + \gamma C.$$

$$\begin{bmatrix} B & A \\ A & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(r_p) \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, resolviendo este sistema se obtiene

$$\lambda = \frac{CE(r_p) - A}{D} \qquad \& \qquad \gamma = \frac{B - AE(r_p)}{D},$$

donde luego, reemplazando a λ y a γ en la ecuación (3), se obtiene

$$\alpha_p = \frac{CE(r_p) - A}{D} V^{-1} e + \frac{B - AE(r_p)}{D} V^{-1} I, \tag{4}$$

[2]Note que

$$\begin{aligned} (Ae - BI)'V^{-1}(Ae - BI) &= B(BC - A^2) \\ &= BD \end{aligned}$$

y dado que V es definida positiva B y D son ambas positivas.

y reagrupando obtenemos

$$\alpha_p = \overbrace{\frac{1}{D}(B(V^{-1}I) - A(V^{-1}e))}^{=g} + \overbrace{\frac{1}{D}(C(V^{-1}e) - A(V^{-1}I)}^{=h}E(r_p).$$

Por último se encuentra que el único set de pesos para formar el portafolio frontera, dada una esperanza $E(r_p)$ es

$$\alpha_p = g + hE(r_p). \tag{5}$$

Esta expresión nos dice que cualquier portafolio es un portafolio frontera si y sólo si sus ponderaciones son tales que dicho portafolio puede ser representado por (5) (pues es la solución del problema de maximización). El conjunto de todos los portafolios fronteras, forman la frontera de portafolios.

A continuación se presentan una serie de teoremas (cuatro) que serán útiles para definir la forma de esta frontera y sus puntos críticos.

Theorem 1 *Si dos portafolios pertenecen al conjunto forntera $\alpha_{p_1}, \alpha_{p_2} \in Front(\alpha)$, entonces toda combinación lineal entre ellos también pertenece a la frontera.*

Demostración. Por hipótesis sabemos que

$$\alpha_{p_1} = g + hE(r_{p_1}) \qquad y \qquad \alpha_{p_2} = g + hE(r_{p_2}).$$

Si definimos $\alpha_p = \gamma\alpha_{p_1} + (1-\gamma)\alpha_{p_2}$, se obtiene que

$$\alpha_p = \gamma(g + hE(r_{p_1})) + (1-\gamma)(g + hE(r_{p_2})) \Rightarrow \alpha_p = g + h(E(r_p)),$$

donde

$$E(r_p) = \alpha_p' e = (\gamma\alpha_{p_1}' + (1-\gamma)\alpha_{p_1}')e = \gamma E(r_{p_1}) + (1-\gamma)E(r_{p_2}).$$

Por lo tanto $\alpha_p = \gamma\alpha_{p_1} + (1-\gamma)\alpha_{p_2} \in Front(\alpha)$. ■

Este teorema nos permite generar toda la frontera, a partir de dos portafolios frontera distintos.

A continuación presentamos un teorema que nos permite inferir la forma de la frontera, sus asíntotas y el punto donde se encuentra el portafolio de mínima varianza.

Theorem 2 *La covarianza de dos portafolios forntera p y q es*

$$Cov(r_p, r_q) = \alpha_p' V \alpha_q = \frac{C}{D}(E(r_p) - \frac{A}{C})(E(r_q) - \frac{A}{C}) + \frac{1}{C}.$$

Demostración. Dado que $\alpha_p' V \alpha_q$ es igual a

$$\begin{aligned}(g + hE(r_p))'V(g + hE(r_q)) &= g'Vg + g'VhE(r_q) + \\ &\quad + E(r_p)h'Vg + E(r_p)h'VhE(r_q).\end{aligned}$$

A partir de ahora se analizará sumando por sumando para obtener términos más simplificados.

El primer sumando es equivalente a

$$\begin{aligned} g'Vg &= \frac{1}{D^2}(I'V^{-1}B - e'V^{-1}A)V(BV^{-1}I - AV^{-1}e), \\ &= \frac{1}{D^2}(I'B - e'A)(BV^{-1}I - AV^{-1}e), \\ &= \frac{1}{D}B \end{aligned}$$

(No olvidar que tanto A, B, C, D son matrices de 1×1).

El segundo sumando es igual a

$$\begin{aligned} g'VhE(r_q) &= \frac{1}{D^2}(I'B - e'A)(CV^{-1}e - AV^{-1}I)E(r_q), \\ &= -\frac{A}{D}E(r_q) \end{aligned}$$

El tercer sumando es análogo al anterior $-\frac{A}{D}E(r_p)$.

Por último, el cuarto sumando es equivalente a

$$\begin{aligned} E(r_p)h'VhE(r_q) &= \frac{1}{D^2}E(r_p)(e'C - I'A)(CV^{-1}e - AV^{-1}I)E(r_q), \\ &= E(r_p)E(r_q)\frac{C}{D}. \end{aligned}$$

En conclusión, la expresión primera quedó reducida a

$$\alpha_p' V \alpha_q = \frac{1}{D}[B - AE(r_q) - AE(r_p) + E(r_p)E(r_q)C],$$

reemplazando B por $D/C + A^2/C$ y diviendo y mutliplicando por C

$$\alpha_p' V \alpha_q = \frac{1}{D}[\frac{D}{C} + \{(\frac{A}{C})^2 - \frac{A}{C}E(r_q) - \frac{A}{C}E(r_p) + E(r_p)E(r_q)\}C],$$

lo que esta entre llaves es equivalente a $(E(r_p) - \frac{A}{C})(E(r_q) - \frac{A}{C})$.

Por lo tanto

$$\alpha_p' V \alpha_q = \frac{1}{C} + \{(E(r_p) - \frac{A}{C})(E(r_q) - \frac{A}{C})\}\frac{C}{D}.$$

■

2 Derivación de la Frontera de Activos

De la fórmula para la covarianza se puede inferir la siguiente expresión para la varianza

$$\sigma^2(r_p) = \frac{1}{C} + (E(r_p) - \frac{A}{C})^2\frac{C}{D}, \tag{6}$$

donde reordenando obtenemos que

$$\frac{\sigma^2(r_p)}{1/C} - \frac{(E(r_p) - \frac{A}{C})^2}{D/C^2} = 1.$$

Esta última expresión es la ecuación (implícita) de una Hipérbola en el plano $(\sigma(r_p), E(r_p))$, con centro en $(0, \frac{A}{C})$ y asíntotas

$$E(r_p) = \frac{A}{C} \pm \sqrt{\frac{D}{C}}\sigma(r_p).$$

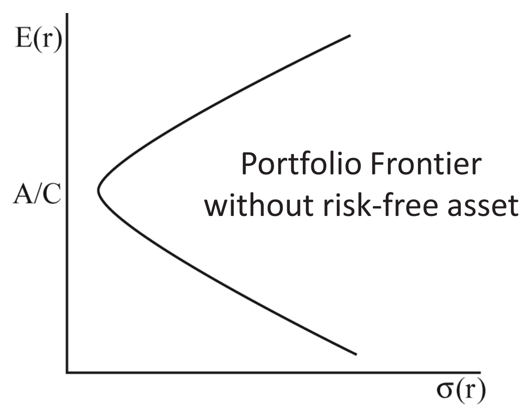

Figure 1: Frontera de activos sin libre de riesgo

En la Figura 1 podemos observar a la frontera de portfolios, sin activo libre de riesgo.

2.1 Portafolio de Mínima Varianza.

Se puede ver claramente de la fórmula (6) que la mínima varianza se obtiene cuando $E(r_p) = A/C$. El desvío estándar de dicho portafolio es $\sigma(r_p) = \sqrt{1/C}$. Se denota al retorno del portafolio de mínima varianza como r_{mv}.

2.1.1 Propiedades del portafolio de Minima Varianza

A continuación se demostrará que la covarianza entre el retorno de cualquier portafolio p (*no necesariamente de la frontera*) y el retorno del portafolio de mínima varianza es siempre igual a la varianza del retorno del portafolio de mínima varianza, es decir

$$Cov(r_p, r_{mv}) = Var(r_{mv})$$

Para ello construimos un portafolio entre un portafolio cualquiera, r_p, y el portafolio de minima varianza, $r_1 = ar_p + (1-a)r_{mv}$. La varianza de este portafolio es

$$Var(r_1) = a^2Var(r_p) + 2a(1-a)Cov(r_p, r_{mv}) + (1-a)^2Var(r_{mv}),$$

por lo que si elegimos a tal que minimiza dicha varianza tendriamos que obtener, para alguna ponderacion de los portafolios, el portafolio de minima varianza.

Para hallar el mínimo diferenciamos la varianza del portafolio obteniendo

$$2aVar(r_p) + 2(1-2a)Cov(r_p, r_{mv}) - 2(1-a)Var(r_{mv}) = 0.$$

Sabemos que dicha ecuación tiene que cumplirse con igualdad en el minimo, es decir, cuando el portafolio esta formado solo por el portafolio de minima varianza. Por lo tanto, sabemos que la solución a la ecuación se da cuando $a = 0$, por lo que obtenemos:

$$\begin{gathered} 2aVar(r_p) + 2(1-2a)Cov(r_p, r_{mv}) - 2(1-a)Var(r_{mv})\lfloor_{a=0} = 0, \\ Cov(r_p, r_{mv}) = Var(r_{mv}). \end{gathered}$$

2.2 Portafolios Eficientes

Todos los portafolios frontera que tengan un retorno esperado más alto que el portafolio de mínima varianza, son **portafolios eficientes.**

Debido a la forma de la frontera para cada portafolio eficiente, existe un portafolio ineficiente con una misma varianza pero un menor retorno esperado.

A continuación se demostrará que cualquier *combinación convexa* de portafolios eficientes será un portafolio eficiente. Es decir, sea $\gamma_i \in \{\gamma : \gamma_i \in \mathbb{R}^+ \cap \sum \gamma_i = 1, \forall i\}$ y α_i pesos de portafolios eficientes, entonces podemos definir una combinacion convexa, $\sum \gamma_i \alpha_i$, donde

$$\sum \gamma_i \alpha_i = \sum \gamma_i (g + hE(r_i)) = g + h \sum \gamma_i E(r_i) = g + hE(r_{conv}).$$

Como los portafolios, α_i, son eficientes, entonces

$$E(r_{conv}) = \sum \gamma_i E(r_i) \geq \sum \gamma_i \frac{A}{C} = \frac{A}{C}.$$

La combinación convexa de portafolios eficientes, es eficiente.

Theorem 3 *Si los agentes son estrictamente aversos al riesgo, entonces eligirán portafolios eficientes.*

Demostración. Se define z como, $z = (r_p - \mu)/\sigma$, por lo que la utilidad esperada la podemos expresar como

$$E(U(\cdot)) = \int_R U(r_p) f(r_p : \mu, \sigma) dr.$$

Utilizando que $r_p \longrightarrow \sigma z + \mu$, podemos expresar la utilidad esperada como una funcion de $f(z)$,

$$E(U(\cdot)) = \int_R U(\sigma z + \mu) \{ \overbrace{\frac{1}{\sigma} f(z)}^{f(r_p:\mu,\sigma)} \} \overbrace{\sigma dz}^{dr} \Rightarrow \int_R U(\sigma z + \mu) f(z) dz,$$

$$\text{dado que } f(z) = \frac{\overbrace{dr_p}^{\sigma}}{dz} f(r_p : \mu, \sigma).$$

Las curvas de indiferencia van a ser aquellas que satisfagan que $E(U(\cdot)) = cons\tan te$, por lo que para encontar la pendiente de dichas curvas en el plano (μ, σ), diferenciamos totalmente la curvas de indiferencia con respecto a μ y σ.

$$0 = \{ \int_R U'(\sigma z + \mu) f(z) dz \} d\mu + \{ \int_R U'(\sigma z + \mu) z f(z) dz \} d\sigma.$$

Despejando, se obtiene que la pendiente de las curvas de indiferencia es un cociente de integrales

$$\frac{d\mu}{d\sigma} = -\frac{[\int_R U'(\sigma z + \mu) z f(z) dz]}{\int_R U'(\sigma z + \mu) f(z) dz}.$$

Para analizar el signo de dicho cociente notamos que, dado que $U'(\cdot)$ es positiva (al igual que $f(z)$), el denominador es positivo. Para hallar el signo del numerador notamos que $U'(\cdot)$ esta multiplicada por una variable $z \in R$, por lo que el signo de la integral no es facilmente determinable. Sin embargo, si notamos que $f(z)$ es simétrica y que la función de utilidad es estrictamente cóncava, entonces es facil de ver que la integral le da mayor peso a los valores negativos de z que a los positivos, por lo que se concluye que el signo del numerador es negativo. Por lo tanto $\frac{d\mu}{d\sigma} > 0$. Este resultado implica que las *curvas de indiferencia* tienen pendiente positiva (los individuos toman el desvío estándar como un mal) en el plano (μ, σ).

Dado que la frontera es el conjunto de portafolios que, para una media, minimizan la varianza, el individuo maximiza la utilidad esperada sujeta a este conjunto, es decir,

$$MaxE(U(\cdot)) \qquad sa \qquad \mathcal{P}.$$

Donde $\mathcal{P} = \{p : E(r_p) = \mu \in \mathbb{R} \wedge Var(r_p) = MinVar(r_p)\}$. Dada que la frontera esta caracterizada por una Hipérbola, se desprende que el individuo nunca eligirá un portafolio en la parte ineficiente ya que puede elegir un portafolio con igual desvío y mayor media, y alcanzar una curva de indiferencia más alta. Esto se puede ver en la Figura 2

■

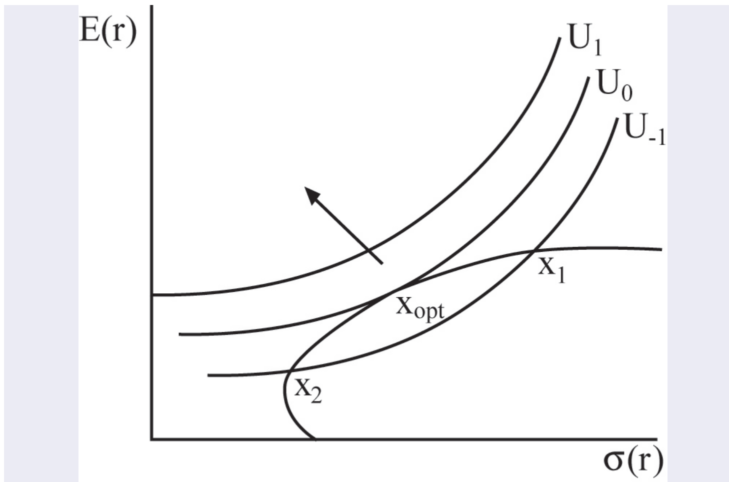

Figure 2: Las curvas de indiferencia son tangentes en la parte eficiente de la frontera

2.3 Portafolio de Cero Covarianza

Una propiedad de los portafolios frontera es que para cualquier portafolio p, exceptuando el de mínima varianza, existe un único portafolio frontera tal que tiene cero covarianza con p, y se denota como $zc(p)$.

Usando la formula de la covarianza, se obtiene

$$E(r_{zc(p)}) = \frac{A}{C} - \frac{\frac{D}{C^2}}{E(r_p) - \frac{A}{C}}. \tag{7}$$

De la ecuación (7) se deriva que:

1. Dicha expresión determina $E(r_{zc(p)})$ de forma única.
2. *El portafolio de mínima varianza no posee un portafolio de cero covarianza.*

Esta expresión permite localizar (geometricamente) al portafolio $zc(p)$ (dada la posición de p). Si p es un portafolio eficiente, entonces $\frac{\frac{D}{C^2}}{E(r_p)-\frac{A}{C}} > 0$ y por ende $E(r_{zc(p)}) < A/C$, el portafolio de cero covarianza es ineficiente. Claramente si el portafolio p es ineficiente, entonces $zc(p)$ es eficiente (ver Figura 3).

2.3.1 Interpretacíon Geométrica

El retorno esperado del portafolio de cero covarianza $E(r_{zc(p)})$ es igual a la ordenada al origen de la tangente de la frontera asociada al portafolio p (en el

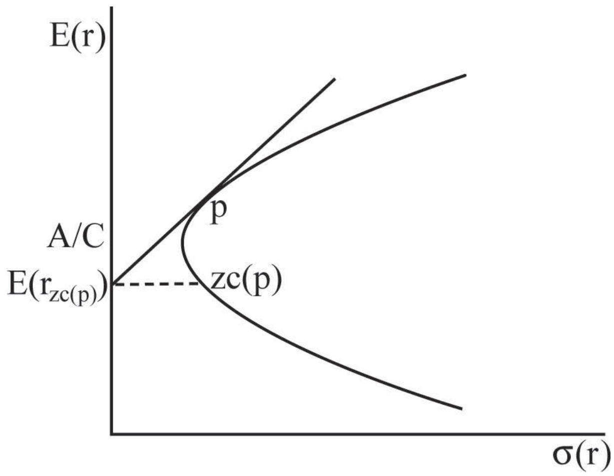

Figure 3: Para cualquier portafolio frontera eficiente, el correspondiente portafolio de cero covarianza es ineficiente

plano $(E(r), \sigma(r)))$. Esto puede verse fácilmente si se define la recta tangente como

$$E(r_p) = k + \frac{dE(r_p)}{d\sigma(r_p)}\sigma(r_p),$$

donde k es la ordenada al origen, y la pendiente (que se deriva de la ecuación (6)) es

$$2\sigma(r_p)d\sigma(r_p) = 2(E(r_p) - \frac{A}{C})\frac{C}{D}dE(r_p).$$

Despejando, se obtiene

$$\frac{dE(r_p)}{d\sigma(r_p)} = \frac{\sigma(r_p)}{(E(r_p) - A/C)\frac{C}{D}}.$$

Entonces la ordenada en el origen, k, es

$$\begin{aligned} k &= E(r_p) - \frac{\sigma(r_p)}{(CE(r_p) - A)}D\sigma(r_p) \\ &= E(r_p) - \frac{\sigma^2(r_p)}{(CE(r_p) - A)}D, \end{aligned}$$

donde operando podremos demostrar que $k = E(r_{zc(p)})$.

Note que reemplazando $\sigma^2(r_p) = \frac{1}{C} + (E(r_p) - A/C)^2\frac{C}{D}$, se obtiene

$$
\begin{aligned}
k &= E(r_p) - \frac{\frac{1}{C} + (E(r_p) - A/C)^2 \frac{C}{D}}{(CE(r_p) - A)} D \\
&= E(r_p) - \frac{\frac{1}{C} + (E(r_p) - A/C)^2 \frac{C}{D}}{C(E(r_p) - \frac{A}{C})} D \\
&= E(r_p) - \frac{D/C^2}{(E(r_p) - A/C)} - (E(r_p) - A/C) \\
&= A/C - \frac{D/C^2}{(E(r_p) - A/C)} = E(r_{zc(p)}).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, todo portafolio $zc(p)$ va a estar ubicado en la recta $\mu = E(r_{zc(p)})$. De estos portafolios, algunos no van a ser asequibles y otros no van a ser optimos.

A continuacion derivaremos (como resultado de un programa de optimizacion) el portafolio de cero covarianza que es óptimo. Esto nos permitira ver que se puede generar el portafolio de cero covarianza usando el portafoilo p y el de minima varianza.

2.3.2 Portafolio de Minima Varianza y de Cero Covarianza con p

Para encontrar analíticamente el portafolio frontera de cero covarianza (con el portafolio p) se plantea el siguiente programa cuadrático

$$
\min_{\alpha_q} \frac{1}{2} \alpha_q' V \alpha_q \qquad sa \qquad \alpha_q' V \alpha_p = 0 \qquad \& \qquad \alpha_q' I = 1.
$$

Donde el Lagrangiano es

$$
\min_{\alpha_q} L = \frac{1}{2} \alpha_q' V \alpha_q - \lambda \alpha_q' V \alpha_p + \gamma(1 - \alpha_q' I),
$$

y las condiciones de primer orden son

$$
L_\alpha = V\alpha_q - \lambda V \alpha_p - \gamma I = 0, \tag{8}
$$

$$
L_\lambda = \alpha_q' V \alpha_p = 0,
$$

$$
L_\gamma = 1 - \alpha_q' I = 0.
$$

Pre-multiplicando la ecuación (8) por V^{-1} obtenemos

$$
\alpha_q = \lambda \alpha_p + \gamma V^{-1} I,
$$

y luego pre multiplicando por I', obtenemos,

$$
\overbrace{I'\alpha_q}^{=1} = \lambda \overbrace{I'\alpha_p}^{=1} + \gamma \overbrace{I'V^{-1}I}^{=C} = \lambda + \gamma C.
$$

Por otro lado, si pre-multiplicamos (8) por α'_p, obtenemos,

$$\alpha'_p V \alpha_q - \lambda \alpha'_p V \alpha_p - \gamma \overbrace{\alpha'_p I}^{=1} = 0,$$

que puede escribirse como

$$\overbrace{\alpha'_q V \alpha_p}^{=0} = \lambda \sigma_p^2 + \gamma.$$

Estas dos ecuaciones pueden escribirse como el siguiente sistema,

$$\begin{bmatrix} 1 & C \\ \sigma_p^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De este sistema, se obtiene $\lambda = -\frac{1}{C\sigma_p^2 - 1}$ y $\gamma = \frac{\sigma_p^2}{C\sigma_p^2 - 1}$. Reemplazando en la condición de primer orden obtenemos las ponderaciones optimas de dicho portafolio

$$\begin{aligned} \alpha_q &= \lambda \alpha_p + \gamma V^{-1} I \\ &= \lambda \alpha_p + \gamma C \frac{V^{-1} I}{C} \\ &= -\frac{1}{C\sigma_p^2 - 1} \alpha_p + \frac{C\sigma_p^2}{C\sigma_p^2 - 1} \frac{V^{-1} I}{C}. \end{aligned}$$

Theorem 4 *El portafolio $zc(p) = q$ es una combinación lineal entre el portafolio p y el de mínima varianza.*

$$\alpha_q = \Theta \alpha_p + (1 - \Theta) \alpha_{mv} \tag{9}$$

Para probar dicho teorema note que:

(i) $\lambda + \gamma C = 1$, (definimos $\Theta = \lambda$, $(1 - \Theta) = \gamma C$.)

(ii) $\frac{V^{-1} I}{C} = \alpha_{mv}$

Para determinar que $\frac{V^{-1} I}{C} = \alpha_{mv}$ utilizamos la definición de portafolio frontera y lo evaluamos en el retorno de el de minima varianza

$$\begin{aligned} \alpha_p &= \frac{CE(r_p) - A}{D} V^{-1} e + \frac{B - AE(r_p)}{D} V^{-1} I, \\ \alpha_{mv} &= \frac{C\frac{A}{C} - A}{D} V^{-1} e + \frac{B - A\frac{A}{C}}{D} V^{-1} I, \\ &= \frac{B - A\frac{A}{C}}{BC - A^2} V^{-1} I \\ &= \frac{V^{-1} I}{C}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el portafolio $zc(p) = q$ es una combinación lineal entre el portafolio p y el de mínima varianza, $\alpha_q = \Theta\alpha_p + (1-\Theta)\alpha_{mv}$. Es más, dado que $\sigma_p^2 > 1/C$, el portafolio q se construye haciendo short-selling del portafolio p y comprando (yendo long) el de mínima varianza.

2.4 Retorno requerido por cualquier activo para ser incluido en un portafolio

Una de las preguntas de mayor relevancia para cualquier individuo que desea comprar un activo riesgioso es, cual es el exceso de retorno (con respecto a un activo libre de riesgo) requerido para aceptar tener dicho activo dentro de su portafolio de activos riesgosos. A continuacion presentamos la relacion entre el retorno esperado de cualquier activo y el de un portafolio (frontera).

Theorem 5 *El retorno esperado de cualquier portafolio q (no necesariamente frontera) puede ser escrito como una combinación lineal del retorno esperado de un portafolio frontera p y del de cero covarianza $zc(p)$ con pesos β_{qp} y $(1-\beta_{qp})$, i.e.,*

$$E(r_q) = \beta_{qp}E(r_p) + (1-\beta_{qp})E(r_{zc(p)}).$$

Demostración. Sea p un portafolio frontera (distinto al de mínima varianza) y sea q un portafolio cualquiera. La covarianza de r_p y r_q es igual a

$$Cov(r_p, r_q) = \alpha_p' V \alpha_q = (\lambda e' V^{-1} + \gamma I' V^{-1}) V \alpha_q$$

$$\Rightarrow \lambda \overbrace{e'\alpha_q}^{E(r_q)} + \gamma \overbrace{I'\alpha_q}^{1} \Rightarrow$$

$$Cov(r_p, r_q) = \lambda E(r_q) + \gamma,$$

donde reemplazando a λ y a γ por las expresiones $\frac{CE(r_p)-A}{D}$ y $\frac{B-AE(r_p)}{D}$, respectivamente obtenemos

$$E(r_q) = -\frac{\gamma}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}Cov(r_p, r_q) \Rightarrow$$

$$E(r_q) = \frac{AE(r_p) - B}{CE(r_p) - A} + Cov(r_p, r_q)\frac{D}{CE(r_p) - A} \tag{10}$$

Note que:

(i) En el primer sumando es igual a $E(r_{zc(p)})$:

$$
\begin{aligned}
E(r_{zc(p)}) &= \frac{A}{C} - \frac{\frac{D}{C^2}}{E(r_p) - \frac{A}{C}}, \\
&= \frac{A(E(r_p) - \frac{A}{C}) - \frac{D}{C}}{C(E(r_p) - \frac{A}{C})}, \\
&= \frac{AE(r_p) \overbrace{- \frac{A^2}{C} - \frac{D}{C}}^{-B}}{CE(r_p) - A}, \\
&= \frac{AE(r_p) - B}{CE(r_p) - A}.
\end{aligned}
$$

(ii) Que al dividir y multiplicar el segundo término de (10) por $\sigma^2(r_p)$ obtenemos

$$
E(r_q) = E(r_{zc(p)}) + \overbrace{\frac{Cov(r_p, r_q)}{\sigma^2(r_p)}}^{\beta_{qp}} \frac{\sigma^2(r_p)D}{CE(r_p) - A}. \tag{11}
$$

(iii) Que $\sigma^2(r) = \frac{1}{C} + (E(r_p) - A/C)^2 \frac{C}{D}$, por lo que la ecuación (11) puede escribirse como

$$
\begin{aligned}
E(r_q) &= E(r_{zc(p)}) + \beta_{qp} \frac{\left(\frac{1}{C} + (E(r_p) - A/C)^2 \frac{C}{D}\right) D}{C(E(r_p) - \frac{A}{C})}, \\
&= E(r_{zc(p)}) + \beta_{qp} \left(E(r_p) \overbrace{- \frac{A}{C} + D/C^2 \frac{1}{E(r_p) - A/C}}^{-E(r_{zc(p)})} \right), \qquad (12) \\
&= E(r_{zc(p)}) + \beta_{qp} \left(E(r_p) - E(r_{zc(p)}) \right), \qquad (13) \\
&= \beta_{qp} E(r_p) + (1 - \beta_{qp}) E(r_{zc(p)}). \qquad (14)
\end{aligned}
$$

■

2.4.1 Relación entre β_{qp}, $\beta_{qzc(p)}$.

Considere

$$
E(r_q) = \beta_{qp} E(r_p) + (1 - \beta_{qp}) E(r_{zc(p)}),
$$

entonces (como el portafolio de cero covarianza con el de cero covarianza con p es simplemente p, (ie : $zc(zc(p)) = p$)), si expresamos el retorno de cualquier portafolio q como una combinación lineal de un portafoilo frontera (y tomamos como portafolio principal el de cero covarianza con p, $zc(p)$) y aquel que tiene cero covarianza con dicho portafolio frontera ($zc(zc(p))$), obtenemos,

$$E(r_q) = \beta_{qzc(p)}E(r_{zc(p)}) + (1 - \beta_{qzc(p)})E(r_p).$$

Pero debido a que $E(r_{zc(p)}) \neq E(r_p)$, existe un sólo γ tal que $E(r_q) = (1 - \gamma)E(r_{zc(p)}) + \gamma E(r_p)$. Por lo tanto se infiere que $\gamma = (1 - \beta_{qzc(p)}) = \beta_{qp}$, por lo que $\beta_{qzc(p)} = (1 - \beta_{qp})$. de lo que se desprende que

$$E(r_q) = \beta_{qzc(p)}E(r_{zc(p)}) + \beta_{qp}E(r_p), \tag{15}$$

o

$$E(r_q - r_{zc(p)}) = \beta_{qp}E(r_p - r_{zc(p)}) \tag{16}$$

La ecuación (16) expresa que el exceso de retorno de cualquier portafolio q (con respecto al retorno del portafolio de cero covarianza) es igual al exceso de retorno del portafolio frontera p (con respecto al de cero covarianza) ponderado por una medida de riesgo o volatilidad β_{qp} (del portafolio q con respecto al portafolio referente p).

Dado que, para portafolios eficientes, $E(r_p - r_{zc(p)}) \geq 0$, cuando $\beta_{qp} \geq 1$ el activo/portafolio (q) es más volátil que el portafolio referente (p), ya que $V(r_q - r_{zc(p)}) = \beta_{qp}^2 V(r_p - r_{zc(p)}) + V(\varepsilon)$ (donde ε es un error definido a continuación), y consecuentemente se exije un mayor retorno.

Note que bajos supuestos débiles, la ecuación (16) puede ser escrita como un modelo de regresión,

$$\begin{aligned} r_q &= r_{zc(p)} + \beta_{qp}(r_p - r_{zc(p)}) + \varepsilon, \\ &= (1 - \beta_{qp})r_{zc(p)} + \beta_{qp}r_p + \varepsilon, \\ &= \beta_{qzc(p)}r_{zc(p)} + \beta_{qp}r_p + \varepsilon, \end{aligned}$$

donde ε es un ruido blanco. De hecho, como $r_{zc(p)}$ y r_p son ortogonales entre sí ($Cov(r_{zc(p)}, r_p) = 0$), entonces, los coeficientes de la regresión son

$$\beta_{qp} = \frac{Cov(r_q, r_p)}{\sigma^2(p)} \text{ y } \beta_{qzc(p)} = \frac{Cov(r_q, r_{zc(p)})}{\sigma^2 zc(p)}.$$

Concluyendo, en esta sección se presentó al portafolio de cero covarianza "cumpliendo el rol" del activo libre de riesgo. El análisis se basó en que no extistía un portafolio libre de riesgo.

En la próxima sección se presentarán las propiedades de la frontera con la existencia de un activo libre de riesgo, y se concluirá que existen ciertas similitudes entre el activo libre de riesgo y el de cero covarianza.

2.5 Anexo

2.5.1 Restricciones en la inversión

Anteriormente derivamos los pesos optimos de un portafolio resolviendo el modelo de media-varianza **cuando solo teniamos activos riesgosos**. En este apartado nos proponemos resolver el mismo problema pero agregando restricciones sobre la proporción del portafolio que se debe invertir en determinados activos. Pensemos por ejemplo una situación donde estamos obligados a invertir el 20% del portafolio en el segundo activo y el 10% en el tercero. Dicha restricción la podríamos escribir de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{2*n} \alpha.$$

En general, podemos pensar en una matriz M que tenga tantas filas como restricciones (y n columnas) y un vector m tal que cualquier restriccion la podemos escribir como:

$$m = M\alpha;$$

donde la matriz M contiene los unos correspondientes a la restricción impuesta, y el vector m tiene los pesos restringidos. De este modo, podemos escribir el problema de media-varianza, con las nuevas restricciones, de la siguiente manera:

$$\left\{ \begin{array}{cc} \min & \frac{1}{2}\alpha' V\alpha, \\ \textit{sujeto a} & E(r_p) = \alpha' e, \\ & 1 = \alpha' I, \\ & m = M\alpha. \end{array} \right.$$

Notar que podemos escribir las restricciones de manera conjunta. Definamos:

$$r = \begin{pmatrix} E(r_p) \\ 1 \\ m \end{pmatrix},$$

y

$$R = \begin{pmatrix} e' \\ I' \\ M \end{pmatrix},$$

y rescribimos el problema de minimización de la siguiente manera:

$$\left\{ \begin{array}{cc} \min & \frac{1}{2}\alpha' V\alpha, \\ \textit{sujeto a} & r = R\alpha. \end{array} \right.$$

Escribimos el lagrangeano:

$$\mathcal{L} : \frac{1}{2}\alpha' V\alpha + \lambda [r - R\alpha]$$

donde λ es un vector fila de $1 * k$ y $k - 2$ es el numero de restricciones impuestas a la inversión (el numero de filas en M y en m). Las condiciones de primer orden son:

$$\begin{array}{ll} (\alpha) & V\alpha = R'\lambda' \\ (\lambda) & r = R\alpha \end{array}$$

De la primer condición de primer orden obtenemos

$$\alpha = V^{-1}R'\lambda', \tag{17}$$

y premultiplicando en (17) por R y utilizando la segunda condición de primer orden obtenemos:

$$r = RV^{-1}R'\lambda',$$

por lo que obtenemos el valor del multiplicador λ;

$$\lambda' = \left(RV^{-1}R'\right)^{-1} r. \tag{18}$$

Finalmente, remplazando la ecuación (18) en la primera condición de primer orden obtenemos

$$\alpha = V^{-1}R'\left(RV^{-1}R'\right)^{-1} r,$$

con lo que encontramos los pesos optimos que resuelven el problema de optimización con restricciones de cualquier tipo.

3 Análisis de la Frontera con un Activo Libre de Riesgo

A cotinuación derivamos la frontera como un problema de elección de las ponderaciones óptimas de un portafolio (p) que consiste de $n+1$ activos (n activos riesgosos y el activo libre de riesgo). Definimos α_p' como un vector de n componentes que denota el peso de los activos riesgosos dentro del portafolio y r_f al retorno del activo libre de riesgo.

El problema a resolver es

$$\min_{\{\alpha_p\}} \frac{1}{2}\alpha_p' V \alpha_p \qquad \textit{sujeto a} \qquad \alpha_p' e + (1 - \alpha_p' I) r_f = E(r_p),$$

por lo que el Lagrangiano lo podemos escribir como

$$\min_{\{w_p,\lambda\}} L = \frac{1}{2}\alpha_p' V \alpha_p + \lambda(E(r_p) - (\alpha_p' e + (1 - \alpha_p' I) r_f)).$$

Las condiciones de primer orden son

$$L_\alpha = 0 \rightarrow V\alpha_p = \lambda(e - Ir_f), \tag{19}$$

$$L_\lambda = 0 \rightarrow \alpha_p'(e - Ir_f) = E(r_p) - r_f. \tag{20}$$

De la ecuación (19), obtenemos las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \alpha_p &= \lambda V^{-1}(e - Ir_f), \\ \alpha_p' V \alpha_p &= \lambda \alpha_p'(e - Ir_f), \end{aligned}$$

Usando los resultados recién derivados vemos que $\alpha_p' V \alpha_p$ puede ser expresado como

$$\begin{aligned}
\alpha_p' V \overbrace{\alpha_p}^{=\lambda V^{-1}(e-Ir_f)} &= \lambda^2 (e - Ir_f)' V^{-1} V V^{-1} (e - Ir_f), \\
&= \lambda^2 (e - Ir_f)' V^{-1} (e - Ir_f),
\end{aligned}$$

y por otro lado (usando la ecuación (20)) como

$$\begin{aligned}
\alpha_p' V \alpha_p &= \lambda \overbrace{\alpha_p' (e - Ir_f)}^{=E(r_p)-r_f}, \\
&= \lambda (E(r_p) - r_f).
\end{aligned}$$

Igualando las dos expresiones de la varianza del portafolio, $\alpha_p' V \alpha_p$, obtenemos λ,

$$\lambda = \frac{E(r_p) - r_f}{\underbrace{(e - Ir_f)' V^{-1} (e - Ir_f)}_{=H}} = \frac{1}{H}(E(r_p) - r_f).$$

Finalmente, sustituyendo λ, obtenemos las ponderaciones óptimas

$$\alpha_p = \frac{[E(r_p) - r_f]}{H} V^{-1} (e - Ir_f).$$

3.1 La frontera cuando consideramos los activos riesgosos y el libre de riesgo

Para obtener una representación gráfica de *la frontera* procedemos a calcular la varianza del retorno del portafolio p

$$\begin{aligned}
\sigma^2(r_p) &= \alpha_p' V \alpha_p = \left(\frac{1}{H}(E(r_p) - r_f)(e - Ir_f)' V^{-1} \right) V \left(\frac{1}{H} V^{-1} (e - Ir_f)(E(r_p) - r_f) \right), \\
&= \frac{1}{H^2}(E(r_p) - r_f) \overbrace{(e - Ir_f)' V^{-1} (e - Ir_f)}^{H} (E(r_p) - r_f), \\
&= \frac{1}{H^2}(E(r_p) - r_f) H (E(r_p) - r_f),
\end{aligned}$$

$$\sigma^2(r_p) = \frac{1}{H}(E(r_p) - r_f)^2.$$

Por lo tanto la desviación estándar es

$$\sigma(r_p) = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{H}}(E(r_p) - r_f), & \text{si } E(r_p) - r_f \geq 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{H}}(E(r_p) - r_f), & \text{si } E(r_p) - r_f \leq 0 \end{Bmatrix}. \tag{21}$$

La ecuación (21) representa la frontera cuando incluimos el activo libre de riesgo en las posibilidades de elección del individuo. Esta frontera luce como dos lineas

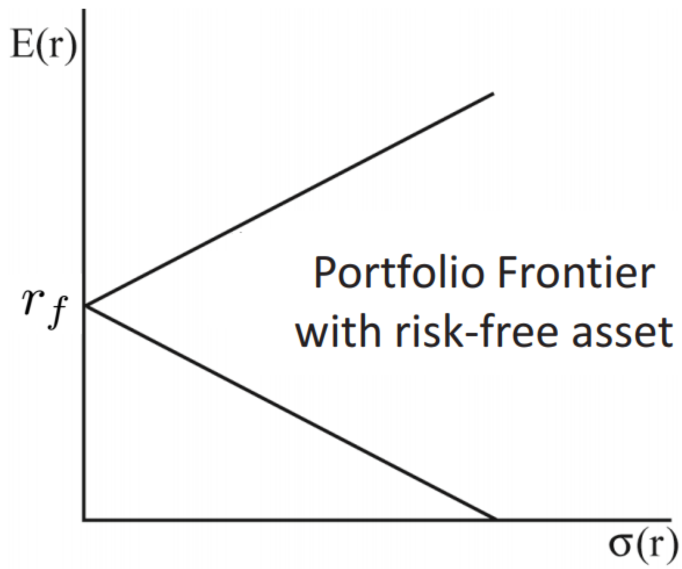

Figure 4: Frontera con activo libre de riesgo a disposición

que parten del punto $(0, r_f)$ con pendientes $\pm H$ (ver Figura 4). Ello se ve claramente si reescribimos la ecuación (21) como

$$E(r_p) = r_f \pm \sqrt{H}\sigma(r_p).$$

4 Relación entre las fronteras con y sin el activo libre de riesgo

En esta sección vamos a analizar la relación entre la frontera que solo considera activos riesgosos y la recientemente derivada que considera también el activo libre de riesgo. Claramente va a existir un punto de la frontera que tambien incluye al activo libre de riesgo, que va a ser común (tangente) a la frontera de los riesgosos. Este punto le asigna peso cero al libre de riesgo y uno al portafolio de los activos riesgosos, por lo tanto, en dicho punto ambas fronteras coinciden (punto **e** en la Figura 5).

Vamos a ver que las decisiones del individuo con respecto a la cartera van a diferir dependiendo de la relación entre el retorno del portafolio de mínima varianza y la tasa libre de riesgo, $(r_f, A/C)$.

Considere los siguientes casos:

(i) Cuando $r_f = A/C$, el individuo invierte toda su riqueza inicial en el activo libre de riesgo. En ese caso, el portafolio p es un portafolio de arbitraje

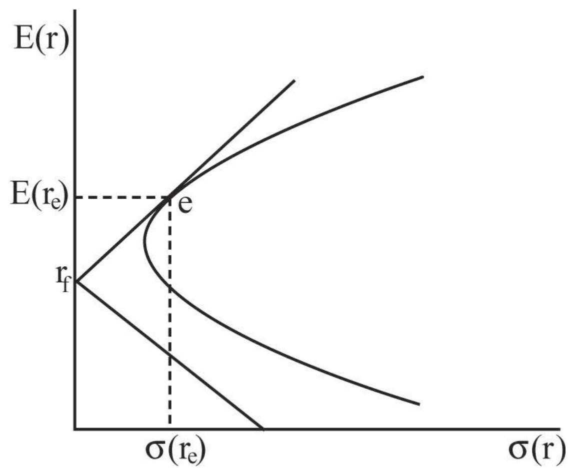

Figure 5: En el punto **e** ambas fronteras son tangentes

(portafolio en el que no se invierte riqueza inicial). Esto se ve claramente en la ecuación (22)[3]

$$
\begin{aligned}
E(r_p) &= r_f \pm \sqrt{H}\sigma(r_p) \\
&= A/C \pm \sqrt{\frac{CB - A^2}{C}}\sigma(r_p) \\
&= A/C \pm \sqrt{\frac{D}{C}}\sigma(r_p),
\end{aligned} \tag{22}
$$

ya que dicha expresión es la fórmula de la asíntotas de la frontera (del portafolio que solo incluye activos riesgosos), por lo que no existe ningún portafolio de tangencia con la frontera de los riesgosos que sea optimo combinar linealmente

[3]Dado que H puede ser escrito como

$$H = B - 2Ar_f + Cr_f^2$$

cuando $r_f = \frac{A}{C}$, la ecuación anterior se reduce a

$$
\begin{aligned}
H &= B - 2A\frac{A}{C} + C(\frac{A}{C})^2 \\
&= \frac{CB - A^2}{C} \\
&= \frac{D}{C}.
\end{aligned}
$$

con el libre de riesgo. Por lo tanto el individuo destina el 100% de la riqueza al activo libre de riesgo y mantiene un portafolio de arbitraje de activos riesgosos.[4]

(ii) Cuando $r_f < A/C$, la frontera (del portafolio que incluye los activos riesgosos y la tasa libre de riesgo) es tangente a la parte eficiente de la frontera del portafolio que solo incluye los activos riesgosos. Esta toca a la frontera de los activos riesgosos en un punto determinado que denominamos el portafolio e (ver Figura 3.4). Para demostrar esto se debe probar que

(a) $\sqrt{H} = \frac{d\mu}{d\sigma}|_e$ (para la frontera de los riesgosos),

(b) $r_f = E(r_{zc}(e))$.

(Ver Huang & Litzemberger, pag 78)

Notar que, dado que para $r_f < A/C$, el portafolio e es eficiente y entonces todos los portafolios frontera (de la frontera que incluye el activo libre de riesgo) pueden ser generados como combinaciones lineales del activo libre de riesgo y el portafolio de tangencia, e. Si el portafolio pertenece al segmento $\overline{r_f e}$, dicho portafolio es una combinación convexa de ambos activos. En cambio si el portafolio pertence a la semi-recta $\vec{e}$, entonces hay short-selling en el libre de riesgo para ir long en el portafolio e.

(iii) Cuando $r_f > A/C$, el portafolio de tangencia e es ineficiente. El argumento es semejante al presentado en el *caso*(ii), pero en este caso, dado que e es ineficiente, el individuo debería short-sell el portafolio e y e ir long en el libre de riesgo.

4.1 Relación entre el exceso de retorno de cualquier portafolio y el exceso de retorno de un portafolio frontera

Usando las ponderaciones óptimas del portafolio α_p y un portafolio α_q cualesquiera de activos riesgosos podemos ver que la covarianza entre dichos portafolios es

$$Cov(r_q, r_p) = \alpha_q' V \alpha_p = \frac{(E(r_q) - r_f)(E(r_p - r_f))}{H}.$$

[4]Una forma alternativa de ver esto es simplemente usando las ponderaciones óptimas.

$$\alpha_p = V^{-1}(e - Ir_f)\frac{1}{H}\left[E(r_p) - r_f\right].$$

Premultipicando por I'obtenemos el peso de lo invertido en activos riesgosos,

$$\begin{aligned} I'\alpha_p &= I'V^{-1}(e - Ir_f)\frac{1}{H}\left[E(r_p) - r_f\right] \\ &= (I'V^{-1}e - (I'V^{-1}I)\frac{A}{C})\frac{1}{H}\left[E(r_p) - \frac{A}{C}\right], \quad con\ r_f = \frac{A}{C}; \\ &= (A - C\frac{A}{C})\frac{1}{H}\left[E(r_p) - \frac{A}{C}\right] = 0. \end{aligned}$$

Esto se cumple pues

$$\begin{aligned}
\alpha_q' V \alpha_p &= \alpha_q' V \left(V^{-1}(e - r_f I) \frac{1}{H} \left[E(r_p) - r_f \right] \right) \\
&= \left(\alpha_q' e - r_f \overbrace{\alpha_q' I}^{=1} \right) \frac{1}{H} \left[E(r_p) - r_f \right], \\
&= \frac{1}{H} \left[E(r_q) - r_f \right] \left[E(r_p) - r_f \right].
\end{aligned}$$

Despejando el exceso de retorno esperado del portafolio q (no necesariamente frontera), se obtiene

$$E(r_q) - r_f = \frac{Cov(r_q, r_p)}{\underbrace{(E(r_p - r_f))^2 / H}_{\sigma_p^2}} E(r_p - r_f),$$

y dado que $\sigma_p^2 = (E(r_p - r_f))^2 / H$, obtenemos

$$E(r_q) - r_f = \beta_{qp} E(r_p - r_f).$$

Esta expresión nos dice que el retorno de cualquier portafolio (o activo) puede expresarse como una combinación lineal de la tasa libre de riesgo y un portafolio frontera. Vamos a ver más adelante que esta relación va a ser la base del modelo de pricing más usado en finanzas.

4.2 Anexo

En este apartado nos proponemos encontrar el portafolio optimo usando el modelo de media-varianza sujeto a una paticularidad: no hay inversión inicial. Esto implica que el agente financia su posición en algunos activos de su portafolio con a contrapartida de otros (financia las posiciones long con otras short tal que no es necesario una inversión inicial).

Consideremos primero el caso donde solo existen N activos riesgosos. La restriccioón de no inversión inicial la podemos escribir como

$$\alpha' I = 0$$

por lo que el problema del agente es:

$$\left\{ \begin{array}{cc} \min & \frac{1}{2} \alpha' V \alpha \\ \textit{sujeto a} & E(r_p) = \alpha' e \\ & \alpha' I = 0 \end{array} \right.$$

escribimos el lagrangeano asociado al problema:

$$\mathcal{L} : \frac{1}{2} \alpha' V \alpha + \lambda \left[E(r_p) - \alpha' e \right] - \gamma \left[\alpha' I - 0 \right]$$

donde los multiplicadores λ y γ son escalares. Las condiciones de primer orden son:

$$(\alpha) \quad V\alpha = \lambda e + \gamma I \tag{23}$$
$$(\lambda) \quad E(r_p) = \alpha' e \tag{24}$$
$$(\gamma) \quad \alpha' I = 0 \tag{25}$$

Notar que (24) y (25) los podemos escrbir como:

$$(\lambda) \quad E(r_p) = e'\alpha \tag{26}$$

y

$$(\gamma) \quad I'\alpha = 0 \tag{27}$$

De (23) obtenemos:

$$\alpha = \lambda V^{-1} e + \gamma V^{-1} I \tag{28}$$

Premultiplicando en (28) por e' y utilizando (26) obtenemos

$$E(r_p) = \lambda \underbrace{e'V^{-1}e}_{B} + \gamma \underbrace{e'V^{-1}I}_{A} \tag{29}$$
$$E(r_p) = \lambda B + \gamma A \tag{30}$$

Premultiplicando en (28) por I' y utilizando (27) obtenemos

$$0 = \lambda \underbrace{I'V^{-1}e}_{A} + \gamma \underbrace{I'V^{-1}I}_{C} \tag{31}$$
$$0 = \lambda A + \gamma C \tag{32}$$

Resolviendo el sistema en (30) y (32) para λ y γ obtenemos:

$$\lambda = E(r_p)\frac{C}{D} \tag{33}$$

y

$$\gamma = -E(r_p)\frac{A}{D} \tag{34}$$

Finalmente, introduciendo (33) y (34) en (28) obtenemos

$$\alpha = \frac{E(r_p)}{D}\left[CV^{-1}e - AV^{-1}I\right]$$

Computemos ahora la varianza del portafolio:

$$\begin{aligned} \sigma^2(r_p) &= \alpha' V \alpha \\ &= \left(\frac{E(r_p)}{D}\right)^2 \left[Ce'V^{-1} - AI'V^{-1}\right] V \left[CV^{-1}e - AV^{-1}I\right] \end{aligned}$$

y con un poco de algebra

$$\sigma^2(r_p) = E(r_p)^2 \frac{C}{D}$$

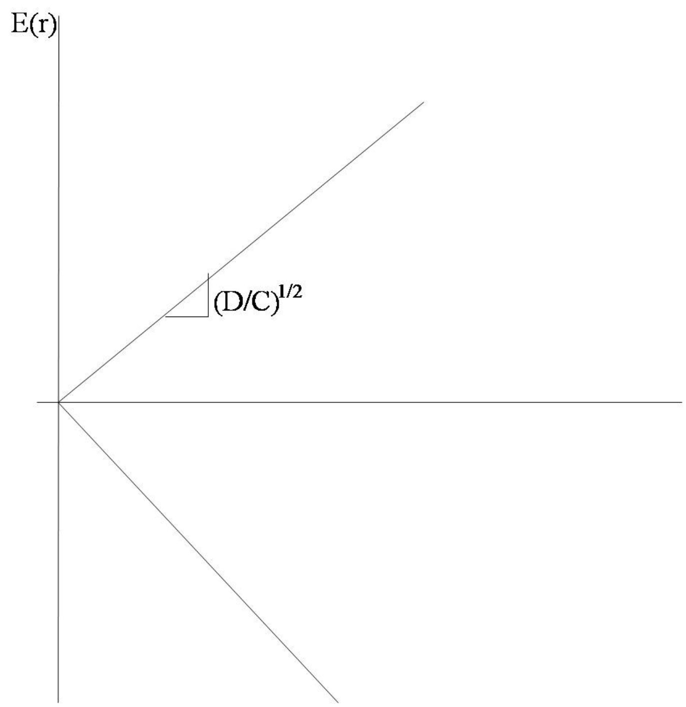

Figure 6: Frontera de portafolios cuando solo hay a disposición activos riesgosos y no se realiza inversión inicial

luego,

$$E\left(r_p\right) =^{+}_{-} \sqrt{\frac{D}{C}}\sigma\left(r_p\right)$$

Notar que, dado que no hay inversión inicial, se necesta tomar riesgo para obtener un retorno esperado positivo.

Pensemos ahora que, ademas de los N activos riesgosos disponibles en el ejercicio anterior, contamos con un activo libre de riesgo. En este caso la restricción sobre el retorno esperado puede ser escrita como:

$$E\left(r_p\right) = \alpha' e + \left(0 - \alpha' I\right) r_f$$

luego el problema del individuo es:

$$\left\{ \begin{array}{cc} \min & \frac{1}{2}\alpha' V \alpha \\ \textit{sujeto a} & E\left(r_p\right) = \alpha'\left(e - I r_f\right) \end{array} \right.$$

Escribimos el lagrangeano asociado al problema:

$$\mathcal{L} : \frac{1}{2}\alpha' V\alpha + \xi \left[E\left(r_p\right) - \alpha'\left(e - Ir_f\right)\right]$$

donde el multiplicador ξ es un escalar. Las condiciones de primer orden son:

$$(\alpha) \quad V\alpha = \xi\left(e - Ir_f\right) \tag{35}$$

$$(\xi) \quad E\left(r_p\right) = \alpha'\left(e - Ir_f\right) \tag{36}$$

donde la ultima ecuación podemos escribirla como

$$(\xi) \quad E\left(r_p\right) = \left(e - Ir_f\right)' \alpha \tag{37}$$

De (35) obtenemos

$$\alpha = \xi V^{-1}\left(e - Ir_f\right) \tag{38}$$

Premultiplicando en (38) por $\left(e - Ir_f\right)'$ y utilizando (37) obtenemos:

$$E\left(r_p\right) = \xi \underbrace{\left(e - Ir_f\right)' V^{-1}\left(e - Ir_f\right)}_{H}$$

luego,

$$\xi = \frac{E\left(r_p\right)}{H} \tag{39}$$

Finalmente, introduciendo (39) en (38)

$$\alpha = \frac{E\left(r_p\right)}{H} V^{-1}\left(e - Ir_f\right)$$

Computemos entonces la varianza de este portafolio:

$$\begin{aligned}
\sigma^2\left(r_p\right) &= \alpha' V\alpha \\
&= \left(\frac{E\left(r_p\right)}{H}\right)^2 \left(e - Ir_f\right)' V^{-1} V V^{-1}\left(e - Ir_f\right)
\end{aligned}$$

con un poco de algebra

$$\sigma^2\left(r_p\right) = E\left(r_p\right)^2 \frac{1}{H}$$

luego,

$$E\left(r_p\right) =^{+}_{-} \sqrt{H}\sigma\left(r_p\right)$$

Podríamos ahora comparar las dos fronteras obtenidas, lo que implica comparar los terminos H y D/C. Notar primero que cuando $r_f = \frac{A}{C}$ el valor de H es

$$\begin{aligned}
H &= \left(e - Ir_f\right)' V^{-1}\left(e - Ir_f\right) \\
&= B - 2Ar_f + Cr_f^2
\end{aligned}$$

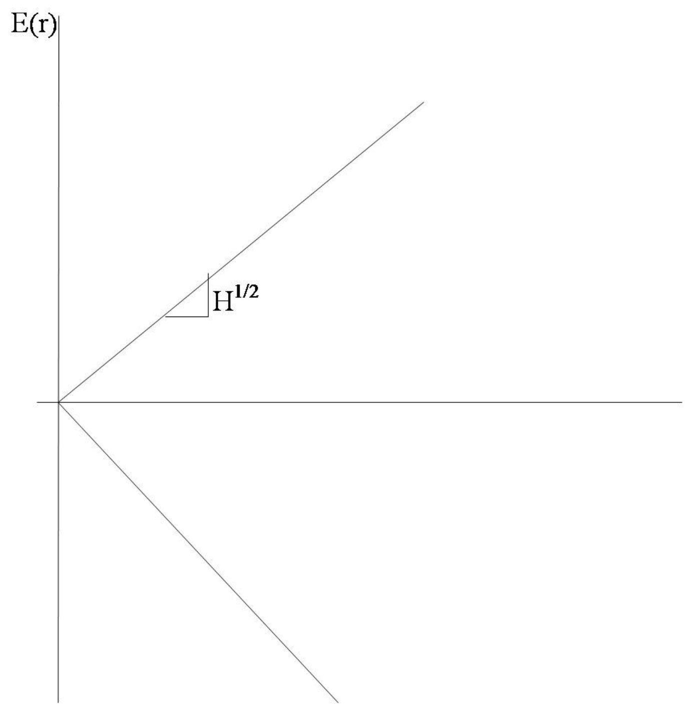

Figure 7: Frontera de portafolio cuando hay a disposición activos riesgosos y libre de riesgo, y no se realiza inversión inicial

usando que $r_f = \frac{A}{C}$ obtenemos

$$\begin{aligned} H &= B - \frac{A^2}{C} \\ &= \frac{D}{C} \end{aligned}$$

por lo que para este caso en particular ambas fronteras son identicas.

¿Que pasa cuando $r_f \neq \frac{A}{C}$? Tomemos una función $g(r_f)$ definida como

$$g(r_f) = H - \frac{D}{C}$$

Si logramos ver que $g(r_f) > 0 \; \forall r_f$ podemos concluir que la fronterea con menos activos esta por dentro de la otra. Introduciendo la expresion de H obtenemos

$$\begin{aligned} g\left(r_f\right) &= B - 2Ar_f + Cr_f^2 - \frac{D}{C} \\ &= \frac{BC - D}{C} - 2Ar_f + Cr_f^2 \\ &= \frac{A^2}{C} - 2Ar_f + Cr_f^2 \end{aligned}$$

Luego, las raices de $g\left(r_f\right)$ son:

$$\frac{2A_{-}^{+}\sqrt{4A^2 - 4C\frac{A^2}{C}}}{2C} = \frac{A}{C}$$

lo que implica que el polinomio tiene unica raíz (doble) y ademas sabemos que es una función convexa.

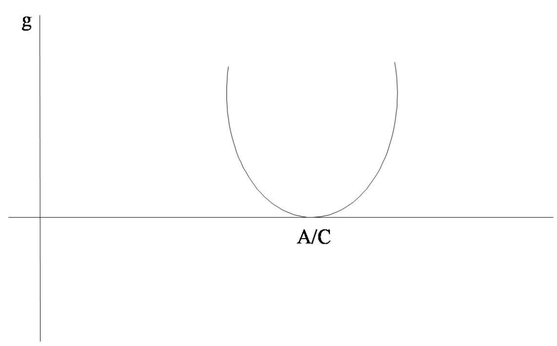

Figure 8: Funcion $g(r_f)$

Esto implica que la frontera con $N+1$ activos esta siempre por fuera de la otra (ver graficos en la pagina siguiente).

Notar que el resultado era bastante anticipable, sería absurdo que al inversor le aumente la cantidad de activos disponibles y que sin embargo tenga que enfrentar un riesgo mayor para obtener el mismo retorno esperado puesto que siempre se puede optar por elegir un peso de cero al nuevo activo.

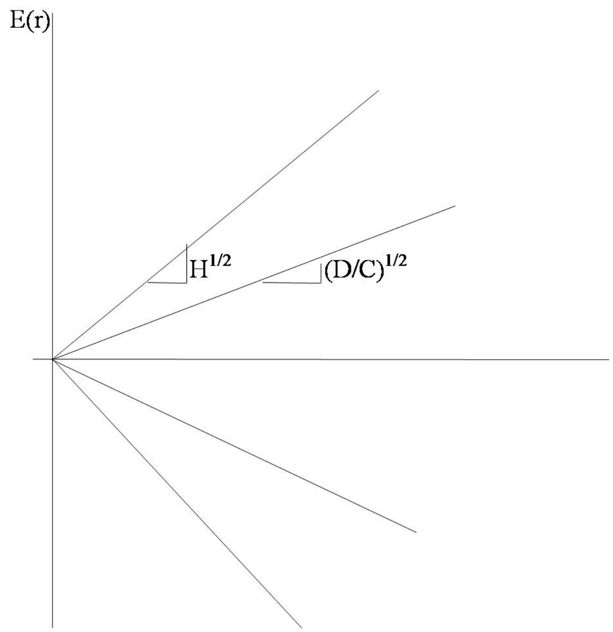

Figure 9: Comparacion entre las fronteras: la correspondiente al problema con libre de riesgo esta por afuera de la otra