CAPM y APT

1 CAPM (Capital Asset Pricing Model)

Cuando incorporamos al análisis previo un activo libre de riesgo, y si mantenemos el supuesto de que existe separación de dos fondos, si $r_f \neq A/C$ y si los activos riesgosos están en oferta neta positiva, entonces se puede derivar como relación de equilibrio lo que se dá en llamar el **CAPM:**

$$E(r_j - r_f) = \beta_{jm} E(r_m - r_f). \tag{1}$$

Notemos que el CAPM a diferencia del Zero Beta-CAPM nos define unívocamente el portafolio de mercado ya que la tasa libre de riesgo esta dada, donde en el Zero-Beta-CAPM existen infinitos portafolios de cero covarianza de los distintos portafolios fronteras, que ulteriormente definirán el portafolio de mercado. La relación (1) especifica cuánto debe ser el exceso de retorno del activo j en equilibrio para que el individuo lo mantenga en el portafolio.

1.1 El Riesgo de Mercado

Theorem 1 *Si los activos están en Oferta Neta Positiva, entonces la prima que se paga por el riesgo de mercado es positivo, i.e.*

$$E(r_m) - r_f > 0.$$

Demostración (por el Absurdo). Se supone que los individuos deciden mantener un portafolio riesgoso cuyo retorno esperado es menor que la tasa libre de riesgo, i.e., $E(r_m) < r_f$. Entonces, por la desigualdad de Jensen

$$E(U(W_o(1 + r_m))) \leq U(E(W_o(1 + r_m))) = U(W_o(1 + E(r_m))),$$

pero dado que la función utilidad es creciente (y como el valor de r_f es el mismo para cualquier estado), entonces se cumple que

$$E(U(W_o(1 + r_m))) \leq U(W_o(1 + E(r_m))) < U(W_o(1 + r_f)). \tag{2}$$

Ahora considere la siguiente expansión de Taylor

$$E(U(W_o(1 + r_m))) = U(W_o(1 + r_f)) + W_o E(U'(W_o(1 + r_f))(r_m - r_f))$$

por lo que la desigualdades anteriores implican que

$$E(U'(W_o(1 + r_f))(r_m - r_f)) < 0$$

Esto contradice la hipotesis de que un individuo averso al riesgo individuo elige tener un portafolio con retorno aleatorio r_m pues cuando evaluamos la condicion de primer orden en el punto en que el individuo elije toda su cartera en los activos libres de riesgo, el preferiria menos de los riesgosos. Por ende bajo los supuestos del modelo, la prima de riesgo de mercado es positiva. ■

Por lo tanto, dado debemos asumir que $E(r_m) > r_f$. Dado dicho supuesto tenemos 3 subcasos.

Caso 1 Si $r_f = A/C$, se ha visto que la frontera se degenera en un punto, por lo que se invierte toda la riqueza en el activo libre de riesgo y se mantiene un portafolio de arbitraje con los activos riesgosos. Pero, *bajo oferta positiva de activos riesgosos*, esto es absurdo.

Caso 2 En el segundo caso $r_f > A/C$, esto implicaría que ningún inversor mantendrá un monto positivo del portafolio de mercado, esto contradice con el supuesto de mercados en equilibrio.

Caso 3 Dado que el equilibrio existe debe ocurrir que $r_f < A/C$. En este caso $E(r_m) - r_f > 0$. Por lo tanto si se grafica la relación (1) en el plano $(E(r), \sigma)$ se obtendría una recta, con pendiente positiva y con una ordenada al origen equivalente a la tasa libre de riesgo. Esta recta es conocida como *Capital Market Line.*

1.2 Derivación del Riesgo de Mercado: El C-CAPM

En esta seccion derivaremos la prima de riesgo de mercado de las decisiones óptimas de los inversores individuales y mostraremos que es proporcional a la varianza del retorno del portafolio de mercado.

En secciones prescedentes encontramos la siguiente condición de primer orden del individuo i

$$E[U'(\widetilde{W}_i)(r_j - r_f)] = 0, \qquad \forall i, j,$$

donde $\widetilde{W}_i = W_o^i(1 + r_f + \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij}(r_j - r_f))$.

Usando la formula para la Covarianza, $Cov(x, y) = E(xy) - E(x)E(y)$, si se define a $x = U'(\widetilde{W}_i)$ y a $y = (r_j - r_f)$, entonces se obtiene la siguiente relación:

$$\begin{aligned} Cov(U'(\widetilde{W}_i), r_j - r_f) &= \overbrace{E[U'(\widetilde{W}_i)(r_j - r_f)]}^{=0} - E(U'(\widetilde{W}_i))E(r_j - r_f), \\ &= -E(U'(\widetilde{W}_i))E(r_j - r_f). \end{aligned} \tag{3}$$

Para llegar al resultado final debemos utilizar el lema de Stein.

Lemma 2 (*Stein*) *Si (x, y) se distribuyen conjuntamente Normal, entonces*

$$Cov(g(x), y) = E(g'(x))Cov(x, y).$$

Usando este lema en la ecuación (3), y tomando a $g(x)$ como $U'(\widetilde{W}_i)$ se obtiene

$$\overbrace{Cov(U'(\widetilde{W}_i), r_j - r_f)}^{=-E(U'(\widetilde{W}_i))E(r_j - r_f)} = E(U''(\widetilde{W}_i))Cov(\widetilde{W}_i, r_j),$$

o

$$-E(U'(\widetilde{W}_i))E(r_j - r_f) = E(U''(\widetilde{W}_i))Cov(\widetilde{W}_i, r_j)$$

(dado que r_f es constante)

Dividiendo a ambos lados por $E(U'(\widetilde{W}_i))$ obtenemos

$$E(r_j - r_f) = \theta_i Cov(\widetilde{W}_i, r_j),$$

donde $\theta_i = -E(U''(\widetilde{W}_i))/E(U'(\widetilde{W}_i))$.

Note que θ_i puede ser visto como la aversión absoluta al riesgo del individuo i-ésimo (para algunas funciones de utilidad lo es).

Si se agrega con respecto *a los individuos i*, se obtiene

$$\begin{aligned} E(r_j - r_f) \sum_i \frac{1}{\theta_i} &= \sum_i Cov(\widetilde{W}_i, r_j), \\ &= Cov(\sum_i \widetilde{W}_i, r_j), \\ &= Cov(\widetilde{W}_m, r_j), \\ &= Cov(W_o^m(1 + r_m), r_j), \end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$E(r_j - r_f) \sum_i \frac{1}{\theta_i} = W_o^m Cov(r_m, r_j). \tag{4}$$

O

$$E(r_j - r_f) = [\sum_i \frac{1}{\theta_i}]^{-1} W_o^m Cov(r_m, r_j). \tag{5}$$

Multiplicando la expresión (4) por α_{mj} y luego agregando para todos los activos j,

$$E(\overbrace{\sum_j \alpha_{mj} r_j}^{=r_m} - \overbrace{\sum_j \alpha_{mj} r_f}^{=1}) = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{\theta_i}} W_o^m Cov(r_m, \sum_j \alpha_{mj} r_j).$$

Finalmente

$$E(r_m - r_f) = \Phi Cov(r_m, r_m),$$
$$E(r_m - r_f) = \Phi Var(r_m). \tag{6}$$

Donde $\Phi = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{\theta_i}} W_o^m$ que se puede interpretar como un proxy de la aversión agregada relativa al riesgo en equilibrio.
Utilizando (6) en (5) llegamos a

$$E(r_j - r_f) = \beta_{jm} E(r_m - r_f) \tag{7}$$

Con $\beta_{jm} = \dfrac{Cov(r_j, r_m)}{Var(r_m)}$, que es la ecuación que derivamos antes.

Hay varios conceptos muy imporantes en estas ecuaciones:

- La ecuación (6) dice que el riesgo de mercado es el producto de la varianza el retorno del portafolio de mercado, por el coeficiente (agregado) de la aversión de los individuos (note la similitud de esta expresión con el exceso de retorno requerido para invertir toda la riqueza inicial en el activo riesgoso). Este riesgo claramente es positivo. Por lo tanto, intuitivamente podemos pensar que el exceso de retorno de mercado depende de dos cosas: por un lado, **de la "cantidad"** de riesgo de mercado. Esto viene dado por $Var(r_m)$. A mayor varianza del portafolio de mercado, podemos pensar que hay mas riesgo en la economa. Por otro lado, vemos que el exceso de retorno depende de Φ, que dijimos que tiene que ver con la aversión al riesgo agregada. Podemos pensar intuitivamente que esto nos dice **cuanto les importa a los agentes el riesgo**. Si Φ es alto, podemos pensar como que los agentes son "mas aversos" al riesgo. En este caso, en equilibrio se necesitaría un exceso de retorno mayor para que deseen tener estos activos.

- De la ecuación (7), vemos que el exceso de retorno de cualquier activo depende de forma lineal, con coeficiente $\beta_{jm} = \dfrac{Cov(r_j, r_m)}{Var(r_m)}$, del exceso de retorno del portafolio de mercado. Con esto, vemos que cuanto mayor es la covarianza entre los retornos del activo j y el portafolio de mercado, **mayor es el exceso de retorno de equilibrio de dicho activo**.
  La intuición de esto es la siguiente: imaginemos que tenemos dos activos, A y B, con los mismos pay-off esperados. **Importante: no confundir esto con los retornos.** [1]. Sin embargo, los pay-off del activo A covarian positivamente con los del portafolio de mercado, mientras que los del activo B covarian negativamente. Por lo tanto, el activo A tiene pagos altos cuando la economía anda bien (es decir, cuando el portafolio de mercado tiene pagos altos, recuerde la covarianza positiva) mientras que el activo B tiene pagos altos cuando a la economía le va mal (recuerde la covarianza negativa).
  Ahora, por la concavidad de la función de utilidad, una unidad de pay-off es mas valiosa para el agente cuando a la economía le va mal (porque hay menos en el agregado, y la utilidad marginal es decreciente) que cuando a la economía le va bien. Por lo tanto, **el activo A tiene pay-off altos cuando el pay-off no es tan valorado, mientras que el activo B tiene pagos altos cuando el pay-off es muy valorado**. Matematicamente, viendo la formula, la covarianza de los retornos del activo A con el portafolio de mercado serán mayores que las de B. **Por ende, el activo A tendrá un exceso de retorno mayor, ya que el β es mas grande**. Pero como los pay-off son los mismos, para que haya un mayor retorno esperado **el precio de A será menor al de B**. La idea es que B paga mucho justamente cuando el agente mas lo valora, por lo que es mas atractivo que A. Entonces, para que en equilibrio los agentes quieran tener un poco del activo A, su precio debe ser menor, y por lo tanto su retorno esperado mayor.

[1] Los pay-off son el monto de plata que se obtiene por invertir en el activo. Así, podemos pensar al pay-off como una variable aleatoria h_j, que tiene cierta distribución. Por otro lado, los retornos tienen que ver con el porcentaje de ganancia que se obtiene por invertir en dicho activo. Así, si se pago un precio P_j por comprar el activo hoy, el retorno neto obtenido es de $r_j = \dfrac{h_j - P_j}{P_j}$.

- Recordemos que vimos que, si vale separación de dos fondos, entonces los retornos de un portafolio cualquiera q con un portafolio frontera p cumplen que:

$$r_q = \beta_{qp} r_p + (1 - \beta_{qp}) r_f + \varepsilon_{qp},$$

  Con $Q = \beta_{qp} r_p + (1 - \beta_{qp}) r_{zc(p)}$ y $E[\varepsilon_{qp}|Q] = 0$. Por otro lado, argumentamos que el portafolio de mercado es un portafolio de frontera. Por lo tanto, tenemos que para cualquier portafolio q:

$$r_q = \beta_{qm} r_m + (1 - \beta_{qm}) r_f + \varepsilon_{qp},$$

  Es decir, el retorno de cualquier activo puede generarse como una combinación lineal entre el retorno del portafolio de mercado y la tasa libre de riesgo, mas un shock. Por esto, podemos pensar que tenemos un modelo donde hay "un solo factor" (r_m) que explica los retornos de todos los activos. Es decir, según este modelo, hay una sola variable que explica todos los retornos.

  Sin embargo, aquellos activos en donde la varianza del shock sea positiva **estarán dominados estocásticamente de segundo orden por aquellos activos que no lo tengan**. Y cuales son los activos en los cuales la varianza del shock es cero? Mirando la formula, serían aquellos cuyo retorno exactamente es una combinacin lineal entre r_f y r_m. Pero como el portafolio de mercado y el portafolio que tiene todo invertido en libre de riesgo son portafolios de frontera, **entonces aquellos activos en donde el termino del shock no aparece son justamente los de la frontera!**. Es decir, toda la frontera puede ser generada con solo dos portafolios.
  Por otro lado, si los agentes solo eligen portafolios en la frontera, **vemos que la fuente de riesgo a la que estan expuestos es solo una: el riesgo proveniente del portafolio de mercado**. Todo otro riesgo que no este relacionado con este no afecta a los agentes.

1.3 Validez Empírica del CAPM

El CAPM ofrece una predicción precisa respecto a cuál debe ser la relación entre exceso de retorno de cualquier activo y el portafolio de mercado en equilibrio. Para contrastarla empíricamente debemos apuntar a sus implicancias. Primero reescribimos la ecuación (1) como un modelo de regresión:

$$\begin{aligned} r_t^j - r_{t-1}^f &= \beta_{jm}(r_t^m - r_{t-1}^f) + \varepsilon_t, \\ \widehat{r_t^j} &= \beta_{jm}(\widehat{r_t^m}) + \varepsilon_t, \end{aligned}$$

donde ε_t es una innovación. En el cross section debería valer que el parámetro β captura completamente la variación de los excesos de retorno de los activos. Alternativamente podría formularse el siguiente modelo lineal

$$\widehat{r_t^j} = \alpha + \beta_{jm}(\widehat{r_t^m}) + \varepsilon_t,$$

y luego evaluar la hipótesis nula $\alpha = 0$. En caso de que α sea significativa, entonces el CAPM no es sustentado por los datos para la muestra tomada, pues existiría una parte del exceso de retorno del portafolio j que no es explicado por el riesgo de mercado. Es decir: **existirían otros factores, distintos del riesgo de mercado, que explican la variación conjunta de los retornos.**

2 APT (Arbitrage Pricing Theory)

El modelo APT ofrece una alternativa testeable al CAPM. Mientras que el CAPM predice que los retornos de los activos riesgosos están relacionados linealmente con el retorno del portafolio de mercado (es decir: un sólo factor explica el comportamiento de los retornos de los activos riesgosos), el APT asume que el retorno de un activo se relaciona linealmente con k factores:

$$r_i = E(r_i) + b_{i1}F_1 + b_{i2}F_2 + ... + b_{ik}F_k + \varepsilon_i \tag{8}$$

donde r_i es el retorno aleatorio del activo i-ésimo, b_{ik} es la sensibilidad de este activo para con el k-ésimo factor y F_k es el k-ésimo factor con media nula y común a todos los retornos (por ejemplo, el crecimiento de la economía ajustado por su tendencia). Se asume que ε_i es un riesgo idiosincrático de los diferentes activos. El APT supone que el número de activos es mayor al número de factores, k. Además, asume competencia perfecta y ausencia de fricciones en los mercados de capitales.

La característica más importante del APT es que todos los portafolios que son elegidos sin invertir riqueza inicial, y que además no son riesgosos, deben tener retorno nulo en promedio. Estos portafolios se conocen como **portafolios de arbitraje**. Para mostrar esto se define a w_i como el monto invertido en el activo i-ésimo (sobre la riqueza total). Entonces el portafolio de arbitraje requiere que la riqueza inicial sea nula

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0. \tag{9}$$

Suponiendo que el portafolio en cuestión tiene n activos, entonces usando la ecuación (8) obtenemos,

$$r_p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i r_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E(r_i) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_{i1} F_1 + ... + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_{ik} F_k + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_i.$$

Para que el portafoilo de arbitraje sea libre de riesgo, debemos eliminar tanto el riesgo idiosincrático (representado por ε_i) como el riesgo sistematico (representado por los diferentes factores). Esto se puede conseguir cumpliendo con tres condiciónes:

1. $\alpha_i \approx 1/n$, muy pequeño.
2. n sea un número muy grande, de manera de poder diversificar sobre un gran número de activos.
3. $$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_{ik} = 0. \tag{10}$$

Para eliminar totalmente el riesgo de este portafolio notemos que, como el riesgo idiosincrático ε_i es una variable aleatoria independiente, debe cumplirse (por la Ley de los Grandes Números) que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_i \approx E(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E(\varepsilon_i) = 0,$$

y dado que se elijen los pesos α_i tal que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_{ik} = 0$, tambien se logra eliminar el riesgo sistemático.

Bajo estos supuestos (y dado que elegimos α_i para eliminar el riesgo sistematico) el retorno del portafolio de arbitraje deja de ser una variable aleatoria para pasar a ser determinístico. Por lo tanto el retorno es igual a

$$r_p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i r_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E(r_i).$$

Debido a que el portafolio de arbitraje no tiene riqueza inicial y que le eliminamos el riesgo, entonces, dicho portafolio debe tener retorno nulo.

2.0.1 Consecuencias algebraicas cuando existe un solo factor

Considere la siguiente relacion exacta (asumimos que el shock es igual a cero),

$$r_i = E(r_i) + b_i F_1.$$

Asumimos que existen dos activos i y j tal que $b_i \neq b_j \neq 0$, con los que formamos un portafolio con retorno r_p, definido como,

$$r_p = \alpha(E(r_i) + b_i F_1) + (1 - \alpha)(E(r_j) + b_j F_1). \tag{11}$$

Si elejimos α de modo de eliminar el riesgo de dicho portafolio, entonces, para ese valor, dicho portafolio debe pagar la tasa libre de riesgo, r_f. Por lo tanto, si $\alpha = \dfrac{b_j}{b_j - b_i}$, y sustituimos dicha expresion en la ecuacion (11), obtenemos la siguiente ecuación (deterministica)

$$r_p^* = \frac{b_j}{b_j - b_i}(E(r_i) - E(r_j)) + E(r_j),$$

donde r_p^* representa el retorno del portafolio p, para las proporciones que eliminan el riesgo. Si igualamos dicho portafolio a la tasa libre de riesgo obtenemos

$$\frac{E(r_i) - r_f}{b_i} = \frac{E(r_j) - r_f}{bj}.$$

Dicha expresion es valida para cualquier activo y, dado que es una constante, la denominamos λ, donde λ representa el precio del riesgo de ese factor. Usando esa definicion podemos escribir para cualquier activo que

$$E(r_i) = r_f + \lambda b_i,$$

donde λ representaria el exceso de retorno esperado de cualquier factor con $b_i = 1$.

2.0.2 Consecuencias algebraicas cuando existen dos factores

Considere la siguiente relacion exacta donde asumimos que el shock es igual a cero,

$$r_i = E(r_i) + b_{i1}F_1 + b_{i2}F_2,$$

donde los vectores $\widetilde{b_1}, \widetilde{b_2}$ y $\widetilde{1}$ son linealmente independientes.

Formamos un portafolio con retorno r_p definido como,

$$r_p = \alpha' r_i = \sum \alpha_i E(r_i) + \sum \alpha_i b_{i1} F_1 + \sum \alpha_i b_{i2} F_2.$$

Para eliminarle el riesgo a dicho portafolio elegimos: $\sum \alpha_i b_{i1} = 0$, y $\sum \alpha_i b_{i2} = 0$ (donde $\sum \alpha_i = 1$). Dicho portafolio debe tener como retorno la tasa libre de riesgo por lo que $\sum \alpha_i E(r_i) = r_f$. Escribiendo estas expresiones en forma matricial, obtenemos,

$$\begin{bmatrix} E(r_1) - r_f & E(r_2) - r_f & E(r_3) - r_f \\ b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

por lo que la primera fila puede hacerse igual a cero, eligiendo combinaciones de los otros dos vectores (que son linealmente independientes), *i.e.*,

$$E(r_i) - r_f = \lambda_1 b_{i1} + \lambda_2 b_{i2}.$$

2.0.3 Consecuencias algebraicas cuando existen k factores

Theorem 3 *Si existe un vector $\overline{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, ...\}$ tal que cumple con las proposiciones (9), (10) y (**??**), i.e.,*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0 \Rightarrow \lambda_o \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_{ik} = 0, \forall k,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i E(r_i) = 0;$$

entonces deben existir $k+1$ coeficientes, λ_i tal que

$$E(r_i) = \lambda_o + \lambda_1 b_{i1} + ... + \lambda_k b_{ik} \tag{12}$$

2.0.4 Interprestacion de los λ

Si recordamos que b_{ik} es la sensibilidad del i-ésimo retorno con respecto al k-ésimo factor y si se supone la existencia de un activo libre de riesgo, debe cumplirse que para este activo, $b_{ik} = 0$ $(\forall k)$ entonces

$$E(r_0^*) = r_f = \lambda_o.$$

Por lo tanto se puede reescribir a la ecuación (12) como el exceso de retorno del activo i, igualado a una combinación lineal de las sensibilidades del activo i a los k factores

$$E(r_i) - r_f = \lambda_1 b_{i1} + ... + \lambda_k b_{ik}. \tag{13}$$

En equilibrio todos los activos deben cumplir (13), que es conocida como *Arbitrage Pricing Line.* Y los λ_k son el precio del riesgo de los k-ésimo factores (en equilibrio).

Ahora bien si se toma un portafolio que tenga una respuesta unitaria al factor k, y nula para todo el resto, es decir un portafolio con $b_{ik} = 1$ y $b_{ij} = 0, \forall j \neq k$, se obtiene

$$E(r_k^*) - r_f = \lambda_k.$$

En esta expresión se puede distinguir porque se dice que λ_k es una prima de riesgo del factor k-ésimo. Si se repite la operación con todos los factores se podría reescribir la ecuación (13) como

$$E(r_i) - r_f = b_1(E(r_1^*) - r_f) + ... + b_k(E(r_k^*) - r_f).$$

La interpretación del APT es que el exceso de retorno del activo i es explicado por una combinación lineal de diferentes excesos de retornos de activos. Dichos activos tienen una correspondencia uno-a-uno con su respectivo factor exógeno. Finalmente estos excesos están ajustados por la elasticidad que tiene el activo i con respecto a ellos (es decir por b).

2.0.5 Comparación entre CAPM y APT

El APT es considerado como un modelo de factores múltiples que puede discriminar el efecto de cada factor k sobre el activo en cuestión a traves de un activo con sensibilidad unitaria respecto de k. En cambio el CAPM es considerado como un modelo de un sólo factor, y por lo tanto es un caso particular del APT. Para demostrar esto se supone un APT de dos factores

$$E(r_i) - r_f = \lambda_1 b_{i1} + \lambda_2 b_{i2}. \tag{14}$$

Si el CAPM es cierto, como λ representa un exceso de retorno debe valer que Lambda es igual al exceso de retorno del portafolio de mercado ajustado por una medida de riesgo

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \beta_1(E(r_m) - r_f), \\ \lambda_2 &= \beta_2(E(r_m) - r_f). \end{aligned}$$

Reemplazando (14) por λ y se obtiene una expresión análoga al CAPM, donde el β^* es una combinación lineal de los Beta's de los activos r_1 y r_2.

$$E(r_i) - r_f = \beta_i^*(E(r_m) - r_f), \qquad con \quad \beta_i^* = (\beta_1 b_{i1} + \beta_2 b_{i2}).$$

Por lo tanto el CAPM es un caso especial del APT. En particular:

1. El APT no hace supuestos acerca la distribución empírica de los retornos.
2. El APT no hace supuestos fuertes acerca las funciones de utilidad de los individuos.
3. El APT nos da una relacion sobre el precio relativo de cualquier subset de activos y no requiere el conocimeiento del universo de los activos como el CAPM.

2.1 Conclusión

En estas últimas secciones, en base a varios teoremas, se logró describir restricciones que los activos cumplen necesariamente en equilibrio; estas describen que el exceso de retorno de un activo es igual al exceso de retorno de otros portafolios descontado por una prima de riesgo. En el caso del CAPM el exceso de retorno es igual al exceso de retorno del portafolio de mercado, ajustado por una medida de riesgo dada por la covariabilidad y la varianza de los portafolios en cuestion.

En cambio el APT plantea que el exceso de retorno depende de excesos de retornos de otros portafolios, que representan factores macroeconómicos, por ejemplo el crecimiento de la economía. El último modelo presenta una ventaja ya que es difícil pensar que un portafolio (de mercado) sea capaz de captar todo el comportamiento de la economía, en cambio muchos factores lo pueden hacer mejor. Además es posible descriminar la influencia de cada factor.

Ambos modelos son impresindibles para la valuación de activos y todos los teoremas que se trataron hasta ahora conforman la base de estos modelos -sobre todo el CAPM-.

3 Apendice: Breve Reseña del APT

De acuerdo en el APT (Arbitrage Pricing Theory) los retornos de los activos están determinados mediante el siguiente proceso

$$R_t = a + Bf_t + \varepsilon_t, \tag{15}$$

donde R_t un vector de $n \times 1$ de retornos de activos, a es un vector de $n \times 1$ de constantes, B es un matriz de $n \times k$ de "coeficientes de factores ", f_t es un vector de $k \times 1$ que contiene las realizaciones de los factores y ε_t es un vector de $n \times 1$ de shocks. La ecuación 15 implica que existen un número finito de factores que pueden explicar una parte de la varianza de los retornos. Generalmente estos factores son retornos de ciertos portafolios o variables macroeconómicas. De la ecuación anterior también podemos inferir que el retorno del activo i, $R_{i,t}$ se puede escribir como

$$R_{i,t} = a_i + b' f_t + \varepsilon_{i,t}, \tag{16}$$

donde b' es la i-esima fila de la matriz B y representa la sensitividad del activo i ante los factores. Se puede demostrar que la condición de no-arbitraje implica la siguiente condición

$$E(R_t) = \iota\lambda_0 + B\lambda_K, \tag{17}$$

donde λ_0 es el retorno de un activo que no tiene sensitividad alguna con los factores, i.e., su correspondiente matriz B es la matriz nula (Si existiese un activo libre de riesgo, λ_0 seria su retorno, R_f), ι es un vector unitario de $n \times 1$ y λ_K es un vector de $k \times 1$ que contiene las prima por riesgo de los factores. Por la tanto inferimos que el retorno esperado de cada activo depende de un termino común mas una prima ajustada por la sensitividad a los factores (i.e., B).

En esta sección primero asumiremos que se conocen los factores y derivaremos test estadísticos para chequear la validez del modelo APT. Luego estudiaremos como estimar la matriz B y la prima por riesgo, y por ultimo examinaremos como encontrar el vector de factores cuando estos no se conocen a priori.

3.1 Testeando la Validez del Modelo

Para testear la validez del modelo consideramos 4 casos: (1) Los factores son retornos de portafolios y existe un activo libre de riesgo, (2) Los factores son retornos de portafolios pero no existe un activo libre de riesgo, (3) Los factores son variables macroeconómicas y (4) Los factores son retornos de portafolios tales que la frontera de media-varianza para el conjunto de todos los activos puede ser obtenida tomando combinaciones lineales de estos portafolios (i.e., el set de factores es una base lineal para la frontera de media-varianza).

3.1.1 Los factores son retornos de portafolios y existe un activo libre de riesgo

Si existe un activo libre de riesgo podemos definir el exceso de retorno Z_t como

$$Z_t = R_t - \iota R_f. \tag{18}$$

Podemos rescribir la ecuación 15 en termino de excesos de retornos, i.e.,

$$Z_t = a + BZ_{K,t} + \varepsilon_t, \tag{19}$$

donde $Z_{K,t} \triangleq f_t - R_f$ (notar que esta expresión tiene sentido ya que en este caso f_t es un retorno de algún portafolio). Ahora bien, como el activo libre de riesgo tiene exceso de retorno nulo, si el modelo APT es valido obtenemos que $a = 0$. Usaremos este resultado para testear la validez del modelo, para esto vamos a estimar la versión restricta ($a = 0$) e irrestricta del modelo y las compararemos usando el test de cocientes de máxima verosimilitud.

Asumiendo que $\varepsilon \sim i.i.N(0, \Sigma)$, la función de Log-verosimilitud esta dada por:

$$L(a, B, \Sigma) = -\frac{NT}{2}\log(2\pi) - \frac{T}{2}\log(|\Sigma|) - \frac{1}{2}\sum_{T=1}^{T}(Z_t - a - BZ_{K,t})'\Sigma^{-1}(Z_t - a - BZ_{K,t}). \tag{20}$$

Los parámetros del modelo son elegidos como los argumentos que maximizan $L(a, B, \Sigma)$ en el caso irrestricto, y $L(0, B, \Sigma)$ en el restricto. Se puede demostrar que bajo la hipótesis nula, $H_0 : a = 0$ el estadístico del test de cocientes de máxima verosimilitud,

$$J = -(T - \frac{N}{2} - K - 1)[log|\hat{\Sigma}| - log|\hat{\Sigma}^*|], \tag{21}$$

se distribuye (asimpotitcamente) como χ^2_N. Donde $\hat{\Sigma}$ y $\hat{\Sigma}^*$ son los estimadores de las matrices de varianza-covarianza del caso restricto e irrestricto, respectivamente.

3.1.2 Los factores son retornos de portafolios pero no existe un activo libre de riesgo

En el caso que no exista el activo libre de riesgo, podríamos aun así definir un portafolio con $B = 0$, i.e., sensitividad nula con respecto a los factores. Si el denotamos el retorno del portafolio como λ_0 y escribiendo los factores como excesos de retornos con respecto a λ_0, obtenemos que

$$R_t = \iota\lambda_0 + B(R_{K,t} - \iota\lambda_0) + \varepsilon_t. \tag{22}$$

De la ecuación anterior podemos derivar la hipótesis nula para testear la validez del modelo, $H_0 : a = (\iota - B\iota)\lambda_0$. Para estimar los parámetros el procedimiento es análogo al de la sección anterior, obteniendo los estimadores restrictos $(\hat{B}^*, \hat{\lambda_0}^*, \hat{\Sigma}^*)$ con $\hat{a}^* = (\iota - \hat{B}^*\iota)\hat{\lambda_0}^*$ y los irrestrictos $(\hat{a}, \hat{B}, \hat{\lambda_0}, \hat{\Sigma})$. Bajo la hipótesis nula se puede demostrar que el estadístico

$$J = -(T - \frac{N}{2} - K - 1)[log|\hat{\Sigma}| - log|\hat{\Sigma}^*|], \tag{23}$$

se distribuye (asimptoticamente) como χ^2_{N-1}.

3.1.3 Los factores son variables macroeconómicas

Una manera de especificar los factores es seleccionando variables macroeconómicas, por ejemplo inflación. Notar que estas variables pueden, pero no necesariamente deben, ser retornos de portafolios.

En este caso tomando el operador esperanza en la ecuación 15 obtenemos

$$E(R_t) = a + BE(f_t), \tag{24}$$

y tomando la ecuación 17 obtenemos que

$$\begin{aligned} \iota\lambda_0 + B\lambda_K &= a + BE(f_t), \\ a &= \iota\lambda_0 + B[\lambda_K - E(f_t)]. \end{aligned}$$

Si definimos $\gamma = \lambda_K - E(f_t)$ obtenemos la siguiente hipótesis nula

$$H_0 : a = \iota\lambda_0 + B\gamma. \tag{25}$$

La estimación de los parámetros es análoga a la de las secciones anteriores, aquí denotaremos $(\hat{B}^*, \hat{\lambda_0}^*, \hat{\gamma}^*, \hat{\Sigma}^*)$ como los estimadores del modelo restricto y a $(\hat{a}, \hat{B}, \hat{\lambda_0}, \hat{\gamma}, \hat{\Sigma})$ como los del irrestricto. El estadístico del test – que esta dado por la ecuación 21 – se distribuye como χ^2_{N-K-1}, bajo la hipótesis nula.

3.1.4 Los factores son portafolios que expanden la frontera de Media-Varianza

Por ultimo consideraremos el caso en que los factores son retornos de portafolios que expanden la frontera de media-varianza para el set de todos los activos. Para comprender mejor las implicancias de esto, es conveniente comparar el modelo con el cero-beta CAPM. Recordar que en el cero-beta CAPM uno podía construir la frontera de media-varianza a través de combinaciones lineales entre el portafolio de mercado y el portafolio de cero-covarianza, esto implica que el retorno esperado de un activo viene dado por,

$$\begin{aligned} E(R_i) &= E(R_o) + \beta_{im}[E(R_m) - E(R_o)], \\ &= \beta_{im}E(R_m) + (1 - \beta_{im})E(R_o). \end{aligned}$$

En este caso el modelo APT es una extensión de esta última ecuación, en vez de tener un solo portafolio de mercado y su portafolio de cero-covarianza, uno posee K factores, obteniendo una ecuación análoga a la ecuación anterior:

$$E(R_i) = a + \sum_{j=1}^{K} B_{i,j}E(f_{j,t}), \tag{26}$$

tal que $\sum_{j=1}^{K} B_{i,j} = 1$. Para n activos escribimos

$$E(R) = a + BE(f_t), \tag{27}$$

donde $B\iota = \iota$. Ahora bien, trazando nuevamente la analogía entre los dos modelos se puede demostrar que a debe ser igual a 0. Ergo la hipótesis nula para testear la validez del modelo viene dada por

$$H_0 : a = 0 \quad \text{y} \quad B\iota = \iota, \tag{28}$$

y el estadístico J (ecuación 21) tiene una distribución asimptotica χ^2_{2N}.

4 Estimando la Prima de Riesgo, Sensitividad de Factores y Retornos Esperados

De la ecuación 17 sabemos que para estimar el retorno esperado de una activo debemos estimar:

1. El retorno del activo libre de riesgo o de cero-sensitividad.
2. B.
3. La prima de riesgo de los factores, λ_K.

Para esto hay dos caminos: (1) Estimar los a través de máxima verosimilitud, o (2) a través de una regresión en dos etapas.

En el primer caso los estimadores de B y λ_0 (en el caso de ser necesario) son los estimadores del caso *restricto*. Si existe un activo libre de riesgo, el retorno es el observado en la data. Con respecto a la estimación de λ_K depende del modelo bajo consideración.

Los factores son retornos de portafolios. En este caso le prima de riesgo del factor j-esimo es simplemente el exceso de retorno de este factor con respecto al retorno del activo libre de riesgo (si existe) y se puede estimar mediante la media muestral, i.e.,

$$\hat{\lambda}_K = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Z_{K,t}.$$

Ahora bien, si no existe el activo libre de riesgo, la ecuación anterior se reemplaza con

$$\hat{\lambda}_K = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(R_{K,t} - \iota\hat{\lambda}_0).$$

Los factores son variables macroeconómicas. En este caso recordemos que definimos a γ como $\lambda_K - E(f_t)$, ergo podemos estimar λ_K como

$$\hat{\lambda}_K = \hat{\gamma}^* + \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} f_t,$$

donde $\hat{\gamma}^*$ es el estimador restricto de máxima verosimilitud de γ.

Los factores expanden la frontera de media-varianza. En este caso podemos usar la misma lógica que en el primer caso, obteniendo

$$\hat{\lambda}_K = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_{K,t}.$$

En el segundo caso – regresión en dos etapas – podemos estimar B regresando Z_t sobre una constante a y f_t, i.e., $\hat{B}$ es el estimador de mínimos cuadrados de la regresión $Z_t = a + Bf_t + \varepsilon_t$. Con $\hat{B}$ en mano, podemos escribir la siguiente regresión "cross-section":

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Z_{i,t} = a + \hat{B}\lambda_K + \varepsilon_i, \tag{29}$$

de la cual obtenemos $\hat{\lambda}_K$. Es importante notar que en esta ultima regresión se utilizaron como inputs los resultados obtenidos en la primer regresión, ergo se tendera a subestimar los errores estándar de los estimadores, ya que no se esta teniendo en cuenta el error de estimación en $\hat{B}$. [2]

5 Selección de los Factores

5.1 Variables macroeconómicas

Un enfoque posible para elegir los factores es el de tomar variables macroeconómicas. Las variables se incluyen típicamente por una mezcla de razones teóricas y empíricas, aunque en general las últimas dominan a las primeras. Variables que probaron ser factores son: spread entre tasas de corto y largo plazo, inflación esperada, inflación no esperada, índices de consumo o de producción industrial, entre otras. Con el fin de determinar la significatividad estadísticas de los factores se pueden llevar a cabo distintos test estadísticos. Estos estudios empíricos indican que, típicamente, no más de 3 a 5 factores resultan significativos.

Una clara debilidad que presenta este enfoque es que dado que no existe una teoría unificada que determina los factores "verdaderos", ciertas elecciones de estos factores pueden llevar a tener una estimación buena en la muestra, pero una pobre capacidad de pronostico.

5.2 Selección Estadística

Otro enfoque es el de seleccionar factores por sus significan cías estadísticas. Existen dos grandes formas para llevar a cabo este enfoque: (1) Análisis de Factores, y (2) Componentes Principales. Ambos enfoques, además de las desventaja mencionada previamente, sufren de otra adicional: los factores resultantes no tienen porque tener una interpretación económica aceptable.

5.2.1 Análisis de Factores

Definamos Ω como la matriz de varianza-covarianza de los retornos de los activos. Ergo de la ecuación 15 obtenemos la siguiente relación:

$$\Omega = B\Omega_K B' + \Sigma, \tag{30}$$

donde Ω_K es la matriz de varianza-covarianza de los factores. La ecuación anterior nos muestra como podemos descomponer la matriz de varianza-covarianza de los retornos de los activos en una matriz "residual", Σ y la matriz de varianza-covarianza de los factores, ajustada por la matriz de sensitividad, B. Asumamos que $\Omega_K = I$, es decir que los factores son ortonormales entre si, tienen varianza igual a 1 y covarianzas nulas. también asumiremos que Σ es una matriz diagonal. Notar que en este caso la ecuación anterior es igual a

$$\Omega = BB' + \Sigma, \tag{31}$$

es decir que los factores son los únicos que explican la covarianza de los retornos de los activos. De la ecuación anterior, mas el hecho que los residuos se distribuyen de forma normal, podemos estimar B y Σ a través de máxima verosimilitud. Una vez hecho esto, denotando $\hat{B}$,$\hat{\Sigma}$ como los estimadores, podemos estimar los factores de la siguiente manera. De la ecuación 15 obtenemos que

$$R_t - \mu = Bf_t + \varepsilon_t, \tag{32}$$

[2] Este inconveniente se puede solucionar haciendo mínimos cuadrados generalizados en la segunda etapa, para incorporar el error de estimación de $\hat{B}$, ver Newey and McFadden (1994) para mas detalles.

donde μ es el vector de medias de los retornos (aquí asumimos sin perdida de generalidad que la media de los factores es nula). Por ende para cada t podemos obtener f_t regresando $R_t - \mu$ contra $\hat{B}$, es decir $\hat{f}_t$ es el estimador de f_t de la siguiente regresión:

$$R_{i,t} - \mu = \sum_{j=1}^{K} f_{j,t}\hat{b}_{i,j} + \varepsilon_{i,t}, \ \forall i = 1, ..., n \ . \tag{33}$$

Notar que los estimadores $\hat{f}_t$ seran combinaciones lineales de los retornos de los activos.

5.2.2 Componentes Principales

La técnica de componentes principales es una técnica estadística que logra resumir la mayoría de la información en la matriz de varianza-covarianzas en variables llamadas componentes principales. El primero de estos componentes, $(x_1^*)'R_t$ es la combinación lineal normalizada a 1 de los retornos de los activos que tienen la máxima varianza, i.e.,

$$\begin{gathered} x_1^* = \arg\max_{x_1} x_1\hat{\Omega}x_1' \\ \text{sujeto a: } x_1x_1' = 1. \end{gathered}$$

El segundo de estos componentes es la combinación lineal normalizada a 1 de los retornos de los activos que tienen varianza máxima **y** es ortogonal al primer componente, es decir, x_2^* soluciona el siguiente problema

$$\begin{gathered} x_2^* = \arg\max_{x_2} x_2\hat{\Omega}x_2' \\ \text{sujeto a: } x_2x_2' = 1 \text{ y } x_1^*x_2' = 0. \end{gathered}$$

El tercer componente se construye análogamente, pero imponiendo ortogonalidad con x_1^* y x_2^*, y así sucesivamente. Notar que por construcción los factores, $f_{i,t} = (x_i^*)'R_t, \forall i = 1, ..., K$, son también combinaciones lineales de los retornos de los activos.

Apndice de Componentes principales

La ecuación

$$AA' = \Sigma$$

se puede resolver diagonalizando Σ. Como esta matriz es simétrica de dimensión $d \times d$, tiene d autovalores $\lambda_1, ..., \lambda_d$, y al ser definida (o semidefinida) positiva, los λ_i son no-negativos. Además, Σ tiene un set de autovectores ortonormales $\{v_1, ..., v_d\}$ asociado; i.e., vectores que satisfacen:

$$v_i'v_i = 1, \quad v_i'v_j = 0, \quad j \neq i \quad i, j = 1, ..., d$$

y

$$\Sigma v_i = \lambda_i v_i$$

De aquí se sigue que $\Sigma = V\Lambda V'$, donde V es la matriz ortogonal ($VV' = I$) con columnas $v_1, ..., v_d$ y Λ es la matriz diagonal cuyos elementos diagonales son $\lambda_1, ..., \lambda_d$. Por lo tanto, si elegimos

$$A = V\Lambda^{1/2} = V \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_d} \end{pmatrix} \tag{34}$$

entonces

$$AA' = V\Lambda V' = \Sigma$$

Si $X \sim N(0, \Sigma)$ y $Z \sim N(0, I)$, entonces generar X como AZ para cualquier elección de A significa

$$X = a_1Z_1 + a_2Z_2 + ... + a_dZ_d$$

donde a_j es la columna j-ésima de A. Podemos interpretar a los Z_j como factores independientes **DRIVING** los componentes de X, con A_{ij} el **"FACTOR LOADING"** de Z_j sobre X_i. Si Σ tiene rango 1, entonces X se puede representar como $a_1 Z_1$ para algún vector a_1, y en este caso un único factor alcanza para representar X. Si Σ tiene rango k, entonces k factores $Z_1, ..., Z_k$ son suficientes.

Si Σ tiene rango completo y $AA' = \Sigma$, entonces A tiene que tener rango completo y $X = AZ$ implica $Z = BX$ con $B = A^{-1}$. Por lo tanto, los factores Z_j son combnaciones lineales de los X_i. En el caso especial de A definida como en 34, tenemos

$$A^{-1} = \Lambda^{-1/2} V' \tag{35}$$

porque $V'V = I$ (V es ortogonal). Entonces Z_j es proporcional a $v_j' X$, donde v_j es la colmna j-ésima de V y, por lo tanto, un autovector de Σ.

Los factores Z_j contruídos proporcionales a $v_j' X$ son óptimos en un sentido preciso. Supongamos que queremos encontrar la mejor aproximación de X a través de un único factor; i.e., la combinación lineal $\omega' X$ que mejor captura la variabilidad de los componentes de X. Una noción estándar de optimalidad elige ω para maximizar la varianza de $\omega' X$, la cual está dada por $\omega' \Sigma \omega$. Como esta varianza se puede hacer arbitrariamente grande multiplicando a ω por una constante, tiene sentido imponer una normalización a través de una restricción del tipo $\omega' \omega = 1$. Por lo tanto tenemos el siguiente problema

$$\max_{\omega : \omega' \omega = 1} \omega' \Sigma \omega$$

Si los autovalores de Σ se ordenan para que

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_d$$

entonces v_1 resuelve este problema de optimización, lo cual se verifica fácilmente resolviendo un lagrangeano con la restricción impuesta (esta propiedad de optimalidad de los autovectores a veces se la denomina *el principio de Rayleigh's*).

El problema de encontrar el siguiente mejor factor ortogonal al primero se reduce a resolver

$$\max_{\omega : \omega' \omega = 1, \omega' v_1 = 0} \omega' \Sigma \omega$$

El autovector v_2 resuelve este problema de optimización. En general, la mejor aproximación a través de k factores elige factores proporcionales a $v_1' X$, $v_2' X, ...,$ $v_k' X$. Como

$$v_j' \Sigma v_j = \lambda_j$$

normalizando los $v_j' X$ para construir factores de varianza unitaria lleva a

$$Z_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} v_j' X$$

que coincide con 35. La transformación $X = AZ$ recuperando X de Z_j es precisamente la matriz A en 34.

La optimalidad de esta representación puede ser redefinir de la siguiente forma. Supongamos que nos dan X y que queremos encontrar vectores $a_1, ..., a_k$ en $\mathbb{R}^d$ y variables aleatorias $Z_1, ..., Z_k$ de varianza unitaria para aproximar X a través de $a_1 Z_1 + ... + a_k Z_k$. Para cualquier $k = 1, ..., d$, el error medio cuadrático de la aproximación

$$E\left[\left\| X - \sum_{i=1}^{k} a_i Z_i \right\|^2\right], \quad \left(\|x\|^2 = x'x\right)$$

se minimiza tomando los a_i como las columnaso de A en 34 y estableciendo $Z_i = v_i' X / \sqrt{\lambda_i}$.

En la literatura estadística, las combinaciones lineales $v_j' X$ se denominan los *componentes principales* de X. Podemos decir que los componentes principales proveen aproximación óptima de dimensión inferior de un vector aleatorio. La varianza *explicada* por los primeros k componentes principales es le ratio

$$\frac{\lambda_1 + ... + \lambda_k}{\lambda_1 + ... + \lambda_k + ... + \lambda_d}$$

en particular, el primer componente principal es elegido para explicar tanta varianza como sea posible.