Universidad Torcuato Di Tella
Licenciatura en Economía

PRIMER PARCIAL de RIF

NÚMERO DE REGISTRO:..................

1. **(40% de la nota del parcial)**

a) Considere los activos 1 y 2 que satisfacen las siguientes relaciones con el portafolio de mercado.

$$r_1 = (1 - \beta_{1m})r_f + \beta_{1m} r_m + u_1$$

$$r_2 = (1 - \beta_{2m})r_f + \beta_{2m} r_m + u_2$$

donde r_f es la tasa libre de riesgo, r_m es la tasa de mercado, $E(u_1) = 0$, $E(u_2) = 0, \sigma_1^2 = V(u_1)$, $\sigma_2^2 = V(u_2)$, $cov(r_m, u_1) = 0$ y $cov(r_m, u_2) = 0$.

Explique qué condiciones sobre β_{1m}, β_{2m}, σ_1^2 y σ_2^2 deben cumplirse si

(i) r_2 domina estocásticamente de primer orden a r_1.

(ii) r_2 domina estocásticamente de segundo orden a r_1

Explique si las condiciones derivadas en (i) y (ii) son consecuencia de la existencia de dominancia estocástica o son condiciones suficientes para que ella exista.

(iii) ¿Cómo interpretaría la condición $cov(r_m, u_1) \neq 0$ y $cov(r_m, u_2) \neq 0$?

b) Explique para una economía en que hay 2 activos, uno riesgoso y otro libre de riesgo, y en la que los agentes tienen aversión absoluta al riego decreciente, cómo obtener la minima prima de riesgo necesaria para inducir a un individuo a invertir **la mitad** de su riqueza en el activo riesgoso.

(HINT: use la condicion de primer orden

$$E\left(u'(W_0((1 + r_f) + \alpha(r - r_f)))(r - r_f)\right) = 0,$$

donde W_0 es la riqueza inicial, r es el retorno de el activo riesgoso, r_f es la tasa libre de riesgo.)

c) Los pesos óptimos de los activos riesgosos (considere que existen n activos riesgosos) de un portafolio que también incluye la tasa libre de riesgo son:

$$\alpha_p = V^{-1}(e - r_f\widetilde{1})\frac{E(r_p) - r_f}{H}$$

donde V es la matrix de varianza-covarianza de los activos riesgosos, $\widetilde{1}$ es un vector de unos y H es un escalar que denota el cuadrado de los excesos de retornos estandarizado.

(i) Derive la expresión de la covarianza entre cualquier portafolio q, no necesariamente frontera, y el portafolio p:

$$cov(r_q, r_p) = \alpha_q' V \alpha_p$$

(ii) Use la expresión derivada en el punto (i) para mostrar que el retorno esperado de cualquier activo se puede escribir como una combinacion lineal de la tasa libre de riesgo y el retorno esperado de un portafolio frontera.

d) Las ponderaciones óptimas del portafolio cuando solo se invierte en los activos riesgosos son $\alpha_e = \frac{V^{-1}(e-r_f\widetilde{1})}{\widetilde{1}'V^{-1}(e-r_f\widetilde{1})}$. Explique como deberia combinar dicho portafolio de los activos riesgosos y el portafolio en que solo se invierte en el activo libre de riesgo para generar las ponderacions α_p (ver punto c) que generan los distintos puntos de la frontera.

e) Explique bajo qué condiciones podemos asegurar que el portafolio de mercado es frontera.

2. **(30% de la nota del parcial)**

Considere la siguiente economía donde los agentes maximizan la utilidad de la riqueza eligiendo para ello el portafolio óptimo. El agente i, tiene función de utilidad cuadrática.

$$U(W^i) = \alpha W^i - \beta (W^i)^2,$$

Los individuos maximizan el valor esperado de dicha utilidad sujeto a la siguiente restricción presupuestal.

$$\widetilde{W^i} = W_o^i(1 + r_f + \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij}(r_j - r_f)),$$

donde $\widetilde{W^i}$ y W_o^i son la riqueza final e inicial respectivamente del individuo i, r_f es la tasa libre de riesgo, α_{ij} la proporción de la riqueza que el individuo i tiene en el activo j y r_j es el retorno del activo riesgoso.

a) Interprete las condiciones de primer orden.

b) Muestre que el exceso de retorno del activo j con respecto a la tasa de interés libre de riesgo puede escribirse como una función de la covarianza de riqueza final agregada y el retorno de dicho activo. Interprete dicho resultado.

c) Muestre que el exceso de retorno del activo j con respecto a la tasa de interés libre de riesgo puede escribirse como una función de la covarianza del retorno del portafolio de mercado y el retorno de dicho activo. Interprete dicho resultado. Explique si necesita para su prueba la condicion de que los retornos sean conjuntamente normales.

d) Muestre que el exceso de retorno del portafolio de mercado puede escribirse como una función de la varianza de la tasa de retorno de mercado. Comente sobre la implicancia que dicho resultado tiene para la clasificación de riesgo en diversificable y no diversificable.

3. **(30% de la nota del parcial)**

a) Explique en que consiste el APT y que posibles interpretaciones pueden tener los factores.

b) Considere la siguiente expresion para los retornos

$$r_j = E(r_j) + b_{j1} f_1 + b_{j2} f_2$$

(i) Muestre que puede expresar los retornos esperados de los activos j como

$$E(r_j) = r_f + b_{j1}\lambda_1 + b_{j2}\lambda_2$$

(ii)Encuentre el valor de θ para el cual se cumple que $E(r_1) - r_f = \theta(E(r_2) - r_f)$. Interprete el resultado. Comente si dicha formula puede ser usada para comparar los portafolios 1 y 2 y en caso de que su respuesta fuese afirmativa, como la utilizaría.