

# Separación de dos Fondos y Valuación Lineal

En esta sección vamos a establecer una propiedad sobre la estructura de retornos de los activos tal que, combinada con resultados anteriores, nos permite llegar a la conclusión de que el "portafolio de mercado" es de frontera. La propiedad es la siguiente: pedimos una estructura de activos en la cual existan al menos dos activos (llamados "fondos mutuos") tales que cualquier agente averso al riesgo prefiera alguna combinación lineal entre esos dos activos antes que cualquier otro activo en la economía.

Si la economía es tal que existen esos dos fondos mutuos, decimos que existe "separación de dos fondos". En este contexto, nos resultará fácil probar que esos dos fondos mutuos pertenecen a la frontera de portafolios. Aún más, dado que cualquier combinación lineal entre portafolios de frontera pertenece a la frontera (lo hemos probado anteriormente), **se concluirá que el agente estará eligiendo portafolios de frontera**. El contraste con nuestro análisis en capítulos precedentes reside por lo tanto en que, dada la restricción de separación de dos fondos, no necesitamos suponer que las funciones de utilidad son cuadráticas para asegurarnos que los agentes eligen portafolios en la frontera (eventualmente veremos que distribución normal de los retornos es una condición suficiente para que exista separación de dos fondos).

El último paso es notar que el portafolio de mercado (la proporción que en términos agregados se está invirtiendo en cada activo de la economía) es una combinación lineal de los portafolios de todos los agentes de la economía. Dado que bajo separación de dos fondos todos los agentes invierten en portafolios de frontera, el de mercado también será un portafolio de frontera. Sabiendo esto, podremos inferir relaciones lineales entre el exceso de retorno de cualquier activo y el exceso de retorno del portafolio de mercado del mismo modo en que lo hacíamos antes sin observar lo que sucedía en el agregado. A partir de este hecho derivaremos el modelo de pricing de activos llamado CAPM.

Conceptualmente, entonces, lo que hacemos es buscar características objetivas de nuestra economía (es decir: propiedades sobre la estructura de retornos) que nos garantizan que es correcto abstraernos de consideraciones referentes a la relación de preferencia de los agentes para hacer nuestro análisis. Sólo asumimos que son aversos al riesgo, y -dados los supuestos restrictivos que garantizan separación de dos fondos- con eso alcanza para derivar nuestras conclusiones.

## 0.1 Separación de dos Fondos para una Cartera de Activos Riesgosos

Empezamos por definir formalmente la propiedad que hemos mencionado.

**Definition 1** *Un vector de retornos:  $r \equiv \{r_j\}_{j=1}^N$  exhibe separación de dos fondos si existen dos fondos mutuos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  tales que para todo portafolio  $q$  y*

para todo agente averso al riesgo existe alguna combinación lineal entre  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  que es preferida al portafolio  $q$ :

$$E[U(\lambda r_{\alpha_1} + (1 - \lambda)r_{\alpha_2})] \geq E[U(r_q)]$$

donde  $U(\cdot)$  es una función cóncava.

Notemos que esta definición, para todas las funciones de utilidad concavas, es análoga a la dominancia estocástica de segundo orden del portafolio  $\lambda\alpha_1 + (1 - \lambda)\alpha_2$  sobre el portafolio  $q$ :

$$\lambda r_{\alpha_1} + (1 - \lambda)r_{\alpha_2} \underset{SSD}{\geq} r_q,$$

Sabiendo esto, podemos afirmar que

**Proposition 2** *Cuando existe separación de dos fondos, los fondos mutuos (o portafolios de separación) pertenecen a la frontera.*

**Proof.** Sabemos que dominancia estocástica de segundo orden implica igual media  $E(\lambda r_{\alpha_1} + (1 - \lambda)r_{\alpha_2}) = E(r_q)$  y que la varianza del portafolio separador debe ser menor o igual que la de  $q$ :

$$Var(\lambda r_{\alpha_1} + (1 - \lambda)r_{\alpha_2}) \leq Var(r_q).$$

Si se supone que  $\alpha_2$  no es un portafolio de frontera y  $\alpha_1$  sí lo es (si ninguno lo es es trivial que entonces la combinación lineal seguro que no es un portafolio frontera y por ende hay otro portafolio con menor varianza, pero eso contradice nuestro punto de partida), entonces existiría un portafolio  $\hat{\alpha}$  (para el cual asumimos igual retorno esperado) tal que su varianza sea estrictamente más pequeña que cualquier combinación lineal entre  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  (por ejemplo podría tomar a  $\alpha_1$  y a un portafolio que tenga mínima varianza dada la misma media que tiene  $\alpha_2$ ). Pero esto contradice nuestro punto de partida porque estamos suponiendo que  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son fondos separadores y por ende  $Var(\lambda r_{\alpha_1} + (1 - \lambda)r_{\alpha_2}) \leq Var(r_q)$  para cualquier portafolio  $q$ . ■

Inferimos entonces que si existe separación de dos fondos existe la frontera, ya que  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son frontera y cualquier portafolio dominante formado por una combinación lineal de portafolios de separación también es frontera. En otras palabras, el portafolio formado por 2 portafolios separadores (que domina estocásticamente a  $q$ ) es un portafolio frontera que tiene el mismo retorno esperado que  $q$ . De este modo se puede generar toda la frontera con  $\alpha_1, \alpha_2$ .

Como cualquier portafolio frontera puede ser un portafolio separador, utilizaremos como caso especial de portafolios frontera a un portafolio  $p$  y aquel de cero covarianza con  $p$ . Ya hemos visto que el retorno de cualquier portafolio  $q$  puede ser escrito como el retorno de  $p$ , mas el retorno del de cero covarianza con  $p$ , ponderados por sus respectivos  $\beta$  mas un shock:

$$r_q = \overbrace{\beta_{qp}r_p + (1 - \beta_{qp})r_{zc(p)}}^{=Q} + \varepsilon_{qp}, \quad (1)$$

donde  $Q$  es la tasa de retorno del portafolio que domina estocásticamente a  $q$ .

## 0.2 Condición necesaria y suficiente para que exista separación de dos fondos

Se puede demostrar que una condición necesaria y suficiente para que exista separación de dos fondos es que la esperanza condicional de  $\varepsilon_{qp}$  sea nula, *i.e.*,  $E(\varepsilon_{qp}|Q) = 0$ .

**Demostración (Suficiencia).** Como  $r_q = Q + \varepsilon_{qp}$ , entonces, por expectativas iteradas, se puede escribir la esperanza de la función de utilidad como

$$E(U(r_q)) = E(U(Q + \varepsilon_{qp})) = E\{E(U(\cdot)|Q)\},$$

y, por la desigualdad de Jensen, obtenemos que  $E(U(\cdot)|Q)$  es menor a la utilidad de la esperanza, *i.e.*,

$$E(U(\cdot)|Q) \leq U(E(Q + \varepsilon_{qp}|Q)) = U(Q + E(\varepsilon_{qp}|Q)),$$

y, si se cumple que  $E(\varepsilon_{qp}|Q) = 0$ , entonces,

$$E(U(\cdot)|Q) \leq U(Q).$$

Aplicando el operador esperanza obtenemos

$$E\{E(U(\cdot)|Q)\} \leq E\{U(Q)\},$$

por lo que

$$\overbrace{E\{E(U(\cdot)|Q)\}}^{=E(U(r_q))} \leq E\{U(Q)\} \iff E(U(r_q)) \leq E(U(\beta_{qp}r_p + (1 - \beta_{qp})r_{zc(p)})).$$

■

La demostración de necesidad es algo más complicada.<sup>1</sup>

**Conclusion 3** Existe separación de dos fondos mutuos si y sólo si se cumple que  $E(\varepsilon_{qp}|Q) = 0$ .

<sup>1</sup>**Demostración (necesidad).** Se denota a  $r^Q$  como el retorno del portafolio dominador, dado que es dominador el siguiente programa encuentra su solución en  $a = 0$

$$\max_{\{a\}} E(U(ar_q + (1 - a)r^Q)).$$

La condición necesaria, es la CPO del mismo programa

$$E(U'(r^Q)\varepsilon_p) = 0. \quad (2)$$

Ahora bien **si** se supone que la expresión  $E(\varepsilon_p|Q) = 0$  no se cumple para cierto portafolio  $q$ . Como  $\varepsilon_p$  es una innovación se cumple que  $E(\varepsilon_p) = 0$ . Dicho esto la siguiente expresión debe valer para al menos un número real  $z$ .

$$\int_{-\infty}^z E(\varepsilon_p|Q_q)dF(r^Q) = - \int_z^{+\infty} E(\varepsilon_p|Q_q)dF(r^Q) \neq 0, \quad (3)$$

si la primer igualdad no valiese entonces  $E(\varepsilon_p) \neq 0$ , que no puede ser. Ahora vamos a proponer una función de utilidad “dummy” que sea

$$u(y) = \begin{cases} Ky & \text{si } y \leq z \\ Kz + M(y - z) & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{con } K > M$$

### 0.3 Condición suficiente sobre las propiedades de los retornos para que exista separación de dos fondos

A continuación demostraremos que si los retornos poseen una distribución Normal, entonces existe separación de dos fondos. Vimos anteriormente que  $E(\varepsilon_{qp}|Q) = 0$  es una condición necesaria y suficiente para que haya separación de 2 fondos. Ahora veremos que si la distribución es Normal, entonces  $E(\varepsilon_{qp}|Q) = 0$ , por lo que normalidad de los retornos, es suficiente para garantizar separación de 2 fondos.

Considere  $r_q = \beta_{qp}r_p + (1 - \beta_{qp})r_{zc(p)} + \varepsilon_{qp}$ , como sabemos que

$$E(r_q) = \beta_{qp}E(r_p) + (1 - \beta_{qp})E(r_{zc(p)}),$$

entonces ello implica que  $E(\varepsilon_{qp}) = 0$ . Ahora si nosotros logramos demostrar que  $\varepsilon_{qp}$  y  $Q$  son independientes, entonces es cierto que  $E(\varepsilon_{qp}|Q) = E(\varepsilon_{qp})$  y, como el valor esperado de  $\varepsilon_{qp}$  es igual a cero, se cumplirá la condición necesaria y suficiente para separación de dos fondos, *i.e.*,  $E(\varepsilon_{qp}|Q) = 0$ .

Note que, dado que asumimos normalidad de los retornos, para asegurarnos que  $\varepsilon_{qp}$  y  $Q$  son independientes, solo debemos demostrar que  $Cov(r_p, \varepsilon_{qp}) = 0$  y  $Cov(r_{zc(p)}, \varepsilon_{qp}) = 0$ . La prueba la haremos para  $Cov(r_p, \varepsilon_{qp}) = 0$  ( la otra es análoga).

Considere la covarianza de  $r_p, \varepsilon_{qp}$ , entonces, usando la ecuación (1), obtenemos

$$\begin{aligned} Cov(r_p, \varepsilon_{qp}) &= Cov(r_p, r_q - [\beta_{qp}r_p + (1 - \beta_{qp})r_{zc(p)}]), \\ Cov(r_p, \varepsilon_{qp}) &= Cov(r_p, r_q) - \beta_{qp}Cov(r_p, r_p) - (1 - \beta_{qp})\underbrace{Cov(r_p, r_{zc(p)})}_{=0}, \\ Cov(r_p, \varepsilon_{qp}) &= Cov(r_p, r_q) - \beta_{qp}Var(r_p) = 0 \end{aligned}$$

ya que

$$\beta_{qp} = \frac{Cov(r_p, r_q)}{Var(r_p)}.$$

Dado que los retornos tienen una distribución Normal, entonces, que  $r_p$  y  $\varepsilon_{qp}$ , y que  $r_{zc(p)}$  y  $\varepsilon_{qp}$  sean incorrelacionados implica que dichas variables aleatorias

---

Dada esta función se obtiene que la expresión (2) pasa a ser, en esta caso particular

$$\begin{aligned} E(U'(r^Q)\varepsilon_p) &= E(E(U'(r^Q)\varepsilon_p|r^Q)) \Rightarrow E(U'(r^Q)E(\varepsilon_p|r^Q)) \Rightarrow \\ &E(KE(\varepsilon_p|r^Q))_{y < z} + E(ME(\varepsilon_p|r^Q))_{y > z}, \end{aligned}$$

que por la ecuación obtenida en (3) vale

$$K \int_{-\infty}^z E(\varepsilon_p|Q_q)dF(\cdot) + M \int_z^{\infty} E(\varepsilon_p|Q_q)dF(\cdot) = (K - M) \int_{-\infty}^z E(\varepsilon_p|Q_q)dF(r^Q) \neq 0.$$

Esto contradice la CPO,  $E(U'(r^Q)\varepsilon_p) = 0$ , haciendo absurda la suposición. Por lo tanto  $E(\varepsilon_p|Q) = 0$  para todo  $q$ . ■

son independientes, por lo tanto

$$E(\varepsilon_{qp}|Q_{qp}) \overset{\text{por independencia}}{\underset{=}{\rightleftharpoons}} E(\varepsilon_{qp}) \overset{\text{por construcción}}{\underset{=}{\rightleftharpoons}} 0.$$

Resumiendo, si los retornos tienen distribución Normal entonces dichos retornos exhiben separación de dos fondos.

## 1 Separación de un fondo

Se da separación de un fondo, si existe un portafolio factible  $\alpha$  tal que todo individuo averso al riesgo lo prefiera a cualquier otro, i.e.,

$$E(U(r_\alpha)) \geq E(U(r_q)).$$

Esto implica que

$$E(r_\alpha) = E(r_q)$$

y que

$$Var(r_\alpha) \leq Var(r_q).$$

De estas expresiones se concluye que el portafolio  $\alpha$  debe ser el de mínima varianza, ya que de no ser así, existiría otro portafolio con menor varianza e igual retorno, lo cual es absurdo. De hecho, cuando hay separación de un fondo la frontera degenera en un punto, ya que todos los portafolios deben tener la misma media que el portafolio alfa, y como este es el portafolio de mínima varianza, se dice que la frontera degenera en el portafolio de mínima varianza.

Si existe separación de un fondo podemos escribir al retorno de cualquier portafolio  $q$  como el retorno del de mínima varianza más una innovación, ie

$$r_q = r_{mv} + \varepsilon_{qmv},$$

con  $E(\varepsilon_{qmv}) = 0$ .

### 1.1 Condición necesaria y suficiente para que exista separación de un fondo

Una condición necesaria y suficiente para que exista separación de un fondo es que  $E(\varepsilon_{qp}|r_{mv}) = 0$  (la prueba de suficiencia es igual a la de dos fondos por lo que se omite).

**Lemma 4** Si los retornos son normales se cumple que  $E(\varepsilon_{qp}|r_{mv}) = 0$ .

Note que

$$\begin{aligned} Cov(r_q, r_{mv}) &= Cov(r_{mv} + \varepsilon_{qp}, r_{mv}) \\ &= Cov(r_{mv}, r_{mv}) + Cov(\varepsilon_{qp}, r_{mv}) \\ &\overset{\text{por definición}}{\underset{=}{\rightleftharpoons}} Var(r_{mv}), \end{aligned}$$

por lo que se cumple que  $Cov(\varepsilon_{qp}, r_{mv}) = 0$ . Si le agregamos el supuesto de Normalidad, el hecho de que los retornos esten incorrelacionados implica que  $\varepsilon_{qp}, r_{mv}$  son independientes y, por lo tanto

$$E(\varepsilon_{qp}|r_{mv}) \underbrace{=}_{\text{por independencia}} E(\varepsilon_{qp}) \underbrace{=}_{\text{por construcción}} 0.$$

## 2 Equilibrio de Mercado

En esta sección se mostrará que cuando se cumple separación de dos fondos y los activos riesgosos están en equilibrio, existe una restricción lineal entre los retornos de los activos riesgosos y el portafolio de mercado.

### 2.1 El Portafolio de Mercado

Sea  $W_o^i > 0$  la riqueza inicial del individuo  $i$ ,  $\alpha_{ij}$  la proporción de la riqueza del individuo  $i$  invertida en el activo  $j$  ( $i = 1, 2, \dots, I$  y  $j = 1, 2, \dots, N$ ),  $W_o^m$ , la riqueza total de la economía definida como  $W_o^m \equiv \sum_{i=1}^I W_o^i$ , y  $\alpha_{mj}$  la proporción de la riqueza total de la economía destinada al activo  $j$ -ésimo. Por lo tanto,  $\alpha_{mj}$  puede ser interpretado como el peso del activo  $j$ -ésimo en el portafolio de mercado.

Para que los mercados estén en equilibrio se debe cumplir

$$\alpha_{mj} W_o^m \equiv \sum_{i=1}^I \alpha_{ij} W_o^i \quad \forall j$$

donde  $\alpha_{mj} W_o^m$  es la riqueza total destinada al activo  $j$  y,  $\sum_{i=1}^I \alpha_{ij} W_o^i$  es la suma de todos los individuos que tienen una proporción de su riqueza inicial en el activo  $j$ . Dividiendo por  $W_o^m$  se obtiene que los pesos del portafolio de mercado son una combinación convexa de los pesos de los portafolios individuales,

$$\alpha_{mj} \equiv \sum_{i=1}^I \alpha_{ij} \frac{W_o^i}{W_o^m}, \quad \text{con } \frac{W_o^i}{W_o^m} \in [0, 1]$$

**Theorem 5** *Si los retornos exhiben separación de 2 fondos entonces el portafolio de mercado es frontera.*

Vimos que cuando hay separación de dos fondos, los portafolios de separación son frontera y cualesquiera 2 portafolios frontera son portafolios de separación. Entonces los individuos van a tener una cartera de combinaciones lineales de 2 portafolios de separación que son frontera. Por lo tanto el portafolio de mercado también pertenece a la frontera, ya que es una combinación convexa de portafolios de distintos individuos.

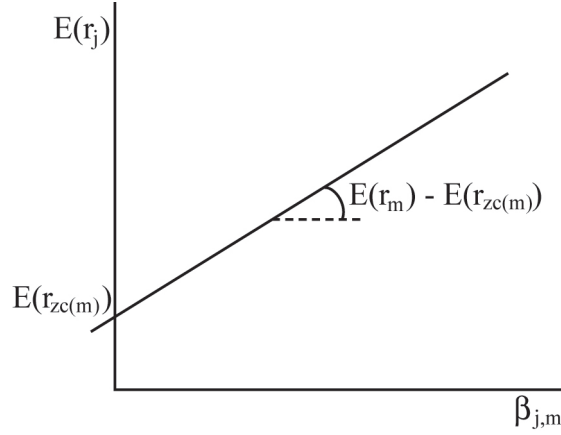


Figure 1: Security Market Line

## 2.2 EL Zero Beta CAPM

Demostramos anteriormente que un portafolio  $q$  distinto del de mínima varianza satisface la siguiente relación

$$E(r_q - r_{zc(p)}) = \beta_{qp} E(r_p - r_{zc(p)})$$

donde  $p$  es un portafolio frontera. Como el portafolio de mercado es frontera, se tiene que

$$E(r_j - r_{zc(m)}) = \beta_{jm} E(r_m - r_{zc(m)}) \quad (4)$$

donde  $r_m = \sum_{j=1}^N \alpha_{mj} r_j$  y  $r_j$  es el retorno del activo  $j$  (que es un portafolio  $q$ , con peso igual a 1 en el activo  $j$ ).

La relación descrita en (4) es la restricción lineal que tiene que cumplir cualquier retorno esperado en equilibrio. Esta regla es conocida como **Zero Beta CAPM (Zero Beta Capital Asset Pricing Model)**. Esta relación indica cuánto se requiere de prima para tener al activo  $j$  en el portafolio.

### 2.2.1 La Security Market Line

Si el portafolio de mercado es eficiente, entonces  $E(r_m - r_{zc(m)}) \geq 0$ . Por lo tanto, cuanto más alto es  $\beta_{jm}$ , mayor tiene que ser el exceso de retorno del activo  $j$  en equilibrio. Dado que el retorno del activo  $j$ , depende de la covariabilidad de éste con el portafolio de mercado, ajustado por la varianza de este último, entonces  $\beta_{jm}$  es una medida de riesgo.

La ecuación (4) puede ser graficada (ver en la Figura 4.1) en el plano  $(E(r_j), \beta_{jm})$  como una recta con pendiente igual a  $E(r_m - r_{zc(m)})$  y con ordenada al origen  $E(r_{zc(m)})$ . Esta recta es conocida como *Security Market Line*.

### 2.3 Eficiencia del Portafolio de Mercado

Aquí mostraremos que el portafolio de mercado es eficiente. Como éste es una combinación convexa de portafolios individuales, si los portafolios que eligen los individuos son eficientes entonces el portafolio de mercado también lo es. Si se asume que las funciones de utilidad son monotónicas y estrictamente cóncavas, y que los retornos tienen distribución Normal multivariada, entonces se puede decir que los individuos elegirán portafolios eficientes, y por ende el portafolio de mercado será eficiente. Entonces se puede inferir que además de la restricción lineal

$$E(r_j - r_{zc(m)}) = \beta_{jm} E(r_m - r_{zc(m)}), \quad (5)$$

también debe cumplirse que  $E(r_m - r_{zc(m)}) \geq 0$ .

De la misma forma que con los portafolios que incluían solo activos riesgosos, podemos definir una condición necesaria y suficiente para que se cumpla separación de dos fondos y también ver que si los retornos son normales esta condición se cumple.

## 3 Separación de dos Fondos para una Cartera de Activos Riesgosos y la libre de riesgo

### 3.1 Condición suficiente sobre las propiedades de los retornos para que exista separación de 2 fondos

Si expresamos el retorno de un portafolio  $q$  cualquiera como

$$r_q = \overbrace{\beta_{qe} r_e + (1 - \beta_{qe}) r_f}^Q + \varepsilon_{qe},$$

donde  $e$  es un portafolio de activos riesgosos (en particular, pensemos que es **el portafolio de tangencia entre las dos fronteras que vimos antes**),  $\varepsilon_{qe}$  es un ruido blanco y  $r_f$  es la tasa libre de riesgo, entonces se puede demostrar que  $E(\varepsilon_{qe}|Q) = 0$  es una condición necesaria y suficiente para que haya separación de 2 fondos.

Para probar suficiencia, note que  $E(\varepsilon_{qe}|Q) = 0$  implica que  $E(\varepsilon_{qe}|r_e) = 0$ . Luego es preciso probar que si  $E(\varepsilon_{qe}|r_e) = 0$ , entonces,

$$E(U(\beta_{qe} r_e + (1 - \beta_{qe}) r_f)) \geq E(U(r_q)).$$

( la prueba es igual a la realizada solo con activos riesgosos y por lo tanto la omitimos).

### 3.2 Si los retornos son normales se cumple que $E(\varepsilon_{qe}|r_e) = 0$ .

Si los retornos poseen una distribución Normal, entonces existe separación de dos fondos ya que se cumple que  $E(\varepsilon_{qe}|Q) = 0$ .



La demostracion es similar a la realizada para el portafolio que solo incluye activos riesgosos y por lo tanto se omite.

Note que la existencia de un activo libre de riesgo y separacion de dos fondos implica separacion monetaria de dos fondos. Usando los mismos argumentos que cuando solo existian activos riesgosos, podemos concluir que cuando hay separacion de dos fondos, la relacion que cualquier activo riesgoso tiene que satisfacer, con respecto a la tasa libre y a el portafolio de mercado puede ser derivado como un teoria de equilibrio.