

Inversión bajo Incertidumbre

1 Procesos Estocásticos

Un proceso estocástico es una variable que evoluciona en el tiempo de manera aleatoria. Estos procesos pueden ser continuos o discretos.

Uno de los procesos estocásticos discretos mas usados en finanzas es el denominado Random Walk o camino aleatorio. Considere una variable aleatoria z_t que tiene una posición inicial conocida, digamos z_0 , y que z_t , puede aumentar o disminuir su valor en el período siguiente con cierta probabilidad. Al ser incierto que valor que la variable va a tomar en el periodo siguiente, al cambio de la variable (de período a período) se le asigna una distribución de probabilidad (por ejemplo la distribución Normal). Se supone que estos cambios (variables aleatorias) son independientes y se puede modelar la dinámica con la siguiente ecuación

$$z_t = z_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (1)$$

con $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$. Este proceso es un AR(1) donde el coeficiente de z_{t-1} es unitario.

1.1 Propiedades del Random Walk

Si se toma la esperanza condicional a tiempo $t - 1$ se cumple que $E[z_t | z_{t-1}] = z_{t-1}$. Esto se define como **propiedad de Martingala**: la mejor predicción que se puede hacer del valor futuro con la información disponible hasta t es el valor actual. Por otro lado, como los cambios son independientes en el tiempo, la distribución de probabilidad de z_t depende solamente de z_{t-1} y no de información pasada. Esto se conoce como la **propiedad de Markov**. Es común pensar que los activos financieros (cuando los mercados son eficientes) siguen este proceso estocástico ya que toda la información está contenida en el precio actual y su evolución no es predecible.

1.2 Procesos de Wiener & Brownian Motion

Hasta aquí se presentó un proceso estocástico discreto, el Random Walk. Un proceso análogo en tiempo continuo es el que se conoce como Proceso de Wiener o, una vez generalizado, Brownian Motion. Hay varias formas de desarrollar este proceso, que por simplicidad, se presentará sobre la base del *Random Walk con varianza unitaria*. La idea es dividir repetidas veces el intervalo unitario característico de los procesos discretos, hasta hacer la unidad de tiempo tan pequeña como se quiera.

Por ejemplo, tomando la ecuación (1) vemos que el término error puede expresarse $\varepsilon_t = z_t - z_{t-1} \sim N(0, 1)$. Al considerar intervalos de tiempo que son la mitad de los intervalos originales, y considerando que los errores se distribuyen normales e independientes, tenemos que

$$z_t - z_{t-1} = \varepsilon_t = e_{1t} + e_{2t}$$

con $e_{it} \sim N(0, 1/2)$, donde $i = 1, 2$.

Si se repite el procedimiento n veces, entonces se puede obtener

$$z_t - z_{t-1} = e_{1t} + e_{2t} + \dots + e_{Nt}$$

en particular

$$z_t - z_{t-\frac{1}{N}} = e_{it}$$

con $e_{it} \sim N(0, 1/N)$.

Para llevarlo a tiempo continuo redefinimos los intervalos, $1/N = \Delta t$ (para luego tomar el limite cuando N tiende a infinito) donde

$$\Delta z = z_t - z_{t-\Delta t} = e_t$$

con $e_t \sim N(0, \Delta t)$.

Por construcción, al haber dividido el intervalo unitario N veces (de dimension 1 a dimensión Δt), e_t tiene varianza Δt . Por lo tanto, tomando ε_t como un error gaussiano con una distribución Normal estándar, se cumple que

$$e_t = \sqrt{\Delta t} \varepsilon_t \sim N(0, \Delta t)$$

por lo tanto haciendo el intervalo tan pequeño como se quiera (haciendo N tender a infinito) se puede expresar a la diferencia de z_t (dz) como

$$dz = \sqrt{dt} \varepsilon_t \quad (2)$$

La ecuación (2) es conocida como un Proceso de Wiener o un Brownian Motion Standard. Este proceso (al igual que el Random Walk) posee importantes propiedades:

1. Los incrementos de la variable aleatoria z_t son independientes.
2. z_t sigue un proceso de Markov.
3. z_t es una Martingala ($E(dz_t) = 0$).
4. La varianza de z_t no depende del tiempo sino del intervalo de tiempo ($E(dz_t^2) = dt$).
5. La función $t \rightarrow z_t$ es una función continua en todo su dominio.
6. Los incrementos están distribuidos Normalmente.

Demostración de (4). Definiendo un intervalo de tiempo $t \in [0, T]$, se quiere hallar la varianza de x (en el intervalo $[0, T]$) Dada la ecuación (2)

$$var(z_T) = \sum_{i=0}^T Var(\epsilon_{T-i}) = T,$$

como $T = T - 0$, la varianza depende del largo del intervalo. ■

La primera y segunda propiedad son de particular importancia. Los precios de los Stock son modelados por estos procesos, porque como la información pública es inmediatamente incorporada al precio, valores pasados no tienen poder de pronóstico (esto sucede dado que ya están incorporados en el valor actual del precio). Por lo tanto los precios de los Stock cumplen con las dos primeras propiedades; esto se conoce como *Eficiencia a la Fama*. En caso de que esto no ocurra los inversores pueden “ganarle al mercado” y así poder predecir los precios.

Un problema que se presenta al intentar caracterizar precios con este proceso estocástico es que los precios no pueden ser negativos. Para superar este problema generalmente se utiliza para los incrementos la distribución log-Normal.

1.2.1 Brownian Motion con drift μ y desviación instantanea σ .

Caracterizar variables financieras -po ejemplo los retornos aleatorios- como una Brownian motion con varianza dt y valor esperado 0 es innecesariamente restrictivo. Alternativamente podemos considerar un proceso que generaliza la ecuación (2), por ejemplo con una varianza igual a σ^2 y con una tendencia μ . Considere la variable

$$\Delta x = x_t - x_{t-1} \sim N(\mu, \sigma^2),$$

por lo que la variable estandarizada sería

$$\frac{(x_t - x_{t-1} - \mu)}{\sigma} = \varepsilon_t,$$

con $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$.

Reordenando los términos de la ecuación

$$x_t - x_{t-1} = \mu + \sigma \varepsilon_t.$$

Ahora si consideramos en vez de cambios infinitesimales en vez de unitarios, la ecuación puede escribirse como

$$dx_t = \mu dt + \sigma \sqrt{dt} \varepsilon_t.$$

Recordando que $dz_t = \sqrt{dt} \varepsilon_t$ (un proceso de Wiener), definimos un **Brownian Motion con drift**

$$dx_t = \mu dt + \sigma dz. \quad (3)$$

Por su parte x_t satisface que

$$\begin{aligned} E(dx_t) &= \mu dt, \\ Var(dx_t) &= \sigma^2 dt. \end{aligned}$$

2 Lema de Ito

Muchas veces vamos a trabajar con funciones de procesos estocásticos y será necesario tomar el diferencial de dicha función. Un ejemplo natural surge cuando debemos encontrar el precio de una opción que es una función del retorno de algún stock. La noción de derivada que se usa en cálculo aquí no sirve, pues la noción determinística de límite no se puede aplicar directamente a una variable aleatoria (donde uno debe considerar aspectos como el orden de convergencia de esas variables). Nosotros, para diferenciar (en forma bastante mecánica) un proceso estocástico vamos a utilizar una versión muy simplificada del Lema de Ito, también conocido como Teorema Fundamental del Cálculo Estocástico.

En primer lugar definimos, $y = F(x_t, t)$ donde x_t es un proceso estocástico. Queremos encontrar una expresión para dy . Si bien la demostración de dicho teorema es complicada, vamos a ver una versión intuitiva que encuentra esta derivada como una expansión de Taylor. Escribiendo a $dF(\cdot)$ como una serie de Taylor (una expansión de $F(\cdot)_{t+dt}$ alrededor del (x_t, t)), se obtiene

$$dF = F_x dx_t + F_t dt + \frac{1}{2} F_{xx} (dx_t)^2 + \frac{1}{2} F_{tt} (dt)^2 + F_{xt} (dx_t dt) + \dots$$

donde $dF = F(\cdot)_{t+dt} - F(\cdot)_t$, y $dx_t = x_{t+dt} - x_t$.

Dado que $dx_t = \mu dt + \sigma dz$, reemplazamos dx_t en la ecuación anterior y obtenemos la siguiente expresión

$$dF = F_x(\mu dt + \sigma dz) + F_t dt + \frac{1}{2} F_{xx}(\mu dt + \sigma dz)^2 + \frac{1}{2} F_{tt}(dt)^2 + F_{xt}((\mu dt + \sigma dz)dt) + \dots$$

Ahora se considera cuán pequeño es un intervalo para que pueda considerarse que los términos que multiplican dicho intervalo puedan ignorarse en la expansión de Taylor. Se dice que los $(dt)^m$ con $m > 1$ converge muy rápidamente a cero y por lo tanto todos los términos de la expansión de Taylor que estén multiplicados por términos $(dt)^m$ con $m > 1$ se consideran despreciables. Luego, la expresión anterior se simplifica a

$$\begin{aligned} dF &= F_x(\mu dt + \sigma dz) + F_t dt + \frac{1}{2} F_{xx} \sigma^2 (dz)^2 \\ &= F_x(\mu dt + \sigma dz) + F_t dt + \frac{1}{2} F_{xx} \sigma^2 dt \end{aligned}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{aligned} dF &= (F_t + F_x \mu + \frac{1}{2} F_{xx} \sigma^2) dt + F_x \sigma dz \\ dF &= \mu_F dt + \sigma_F dz. \end{aligned} \tag{4}$$

Donde $\mu_F = (F_x \mu + F_t + \frac{1}{2} F_{xx} \sigma^2)$ y $\sigma_F = F_x \sigma$. Por lo tanto, si x sigue una Brownian motion, entonces F también sigue una Brownian motion.

Notar que $(dz)^2 = dt$ se cumple (nosotros sabemos que $E(dz)^2 = dt$) pues $(dz)^2$ tiene una *distribución degenerada* donde su media es igual a todos los

valores de la distribución.¹ La ecuación (4) nos indica cómo diferenciar funciones de procesos aleatorios.

3 Inversión bajo Incertidumbre

Consideramos una decisión de inversión donde I es el costo hundido, r la tasa de interés y P_o al precio en el periodo cero (que es conocido por los inversores). Para el periodo siguiente el precio puede subir a $(1+u)P_o$ con probabilidad q o bajar en $(1-d)P_o$ con probabilidad $1-q$. Luego, el precio se queda allí para siempre. Si definimos el valor presente esperado de la firma si invierte como V_0 , entonces:

$$\begin{aligned} V_0 &= P_0 + q \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(1+u)^i P_o}{(1+r)^i} + (1-q) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(1-d)^i P_o}{(1+r)^i} \\ &= P_0 \left\{ 1 + \frac{1}{r} [q(1+u) + (1-q)(1-d)] \right\} \end{aligned}$$

Tradicionalmente, se solía comparar el valor presente con el costo de inversión, y se concluía que si $V_o > I$ la inversión se realiza (la firma obtiene $V_o - I$), y si $V_o < I$, la inversión no se realiza y la firma obtiene cero. Sin embargo, este enfoque es correcto sólo si la decisión de invertir es del tipo ahora o nunca; es decir, no hay opción de esperar. ¿Qué sucede si levantamos dicho supuesto? En ese caso el inversor enfrenta el trade-off de invertir hoy (y comenzar a cobrar el cash-flow) o esperar (considerando que puede subir el valor del proyecto). La decisión de esperar o no dependerá naturalmente de la apreciación esperada del proyecto y del costo de oportunidad de esperar.

¿Cuál es el valor del proyecto si el mismo se realiza mañana al precio P_1 ? Naturalmente, será

$$\begin{aligned} V_1(P_1) &= P_1 + P_1 \frac{1}{(1+r)} + P_1 \frac{1}{(1+r)^2} + \dots \\ V_1(P_1) &= P_1 \frac{1+r}{r} \end{aligned}$$

¹**Demostración.** Siempre puedo escribir a dz^2 como

$$dz^2 = E(dz^2) + \eta,$$

donde η es una innovación con variancia nula ya que

$$\begin{aligned} Var(\eta) &= E(dz^2 - E(dz^2))^2 - \overbrace{\{E[\eta]\}^2}^{=0}, \\ &= E(dt\varepsilon^2 - dt)^2, \\ &= dt^2 E[(\varepsilon^2 - 1)^2], \end{aligned}$$

como $dt^2 = 0 \implies$

$$Var(\eta) = 0.$$

Entonces se cumple

$$dz^2 = E(dz^2) = dt.$$

■

Dado que a partir del período 1 todo permanece invariante, la decisión de inversión se tomará, ahora sí, sólo si $V_1 > I$. En otras palabras, esperar no tendrá valor: o se invierte ahora o no se invierte nunca. Luego, escribimos el pago neto de la firma en el período 1 como

$$F_1 = \max[V_1 - I, 0]$$

F_1 también se conoce como "valor de continuación en el período 0", pues es el valor que obtiene la firma si elige esperar. A su vez, el lado izquierdo de esta última ecuación es el valor de terminación en el período 1, pues es el valor que obtiene la firma si elige invertir en ese período (el valor de continuación aquí sería cero, porque sabemos que si no invierte en $t=1$ no invierte nunca).

Ahora, sabiendo que en el período 1 va a comportarse óptimamente, ¿cuál será el problema de la firma en el período 0? Es importante notar que desde la perspectiva de $t = 0$, el estado en el siguiente período es incierto. Por lo tanto el valor de la firma (es decir: el valor de la opción de invertir o esperar) debe ser

$$F_0 = \max \left\{ V_0 - I, \frac{1}{(1+r)} E_0[F_1] \right\}$$

Es decir: hoy la firma puede elegir entre invertir (lado izquierdo) o esperar, donde obtiene el valor descontado de la inversión futura. Naturalmente, $E_0[F_1]$ es

$$E_0(F_1) = q \max \{ V_1(P_0(1+u)) - I, 0 \} + (1-q) \max \{ V_1(P_0(1-d)) - I, 0 \}.$$

Lo que se analiza cuando uno considera inversión bajo incertidumbre es una extensión a infinitos períodos del razonamiento que recién hicimos para dos periodos, donde en cada momento del tiempo nos preguntamos si conviene esperar o invertir (y esto lo hacemos hasta que convenga invertir). En otras palabras: resolver ese problema es darle respuesta a la pregunta de cuándo es óptimo pagar un sunk cost I a cambio de obtener un proyecto cuyo valor es V y evoluciona estocásticamente.

Algebraicamente la forma mas simple de responder a esa pregunta es utilizando un modelo que fue desarrollado por Siegel (1986). Suponemos que V evoluciona como una Brownian Motion geométrica

$$dV = \alpha V dt + \sigma V dz. \quad (5)$$

La posibilidad en este proyecto cuyo valor evoluciona estocásticamente es lo que se conoce en finanzas como una opción (en este caso, una especie de call). La firma tiene la opción (no la obligación) de "comprar" el proyecto al precio I en cada periodo. Veremos que la pregunta que queremos responder (¿cuándo invertir?) es en un sentido análoga a responder cuál es el precio, en cada momento de esta opción (¿cuánto debería valer, si no hay arbitraje, el derecho a comprar este proyecto si su valor actual es V ?).

Consideremos, entonces, que el valor actual es V y que aun no se ha ejercitado la opción. Entonces, el valor de la opción debe ser

$$F(V) = \max_T E[(V_T - I)e^{-\rho T} | V]. \quad (6)$$

Donde T es el momento en el que se realiza la inversión y ρ es un factor de descuento (para que este problema tenga sentido debemos suponer que $\alpha < \rho$, de otra forma el proyecto nunca se realizaría pues el proyecto se apreciaría más rápido que el costo de oportunidad y siempre convendría esperar).

3.1 Caso Determinístico

Para presentar la mecánica del problema primero resolvemos el problema determinístico; es decir, cuando $\sigma = 0$. Ahora la ecuación (6) se simplifica a

$$F(V_0) = \max_T [V_T(V_0) - I]e^{-\rho T} \quad (7)$$

Debemos encontrar el valor de V_T , lo cual implica resolver la ecuación diferencial $V'(t) = \alpha V(t)$ con condición inicial V_0 . La solución de esta ecuación es $V_t = V_0 e^{\alpha t}$. Por lo tanto, el problema queda

$$F(V; T) = \max_T [(V e^{\alpha T} - I) e^{-\rho T}]$$

De esta ecuación se desprende si $\alpha < 0$ lo óptimo sería invertir inmediatamente si $V > I$, o nunca realizar la inversión. Por lo tanto la pregunta de interés en esta sección ocurre si $\alpha \in (0, \rho)$. En dicho caso para obtener el máximo, derivamos con respecto a T :

$$\frac{dF(V; T)}{dT} = ((\alpha - \rho)V e^{\alpha T} + \rho I) e^{-\rho T} = 0,$$

que implica que el tiempo óptimo es igual a

$$T^* = \max \left\{ \frac{1}{\alpha} \log \left(\frac{\rho I}{(\rho - \alpha)V} \right), 0 \right\}.$$

Esta ecuación nos dice cuándo es óptimo invertir. También podemos ver que al haber respondido a esta pregunta también hemos respondido a la pregunta del valor de la inversión. En particular, podemos ver que el tiempo óptimo ("tiempo de detención") es una función de la condición inicial V . Luego, nuestra función de valor inicial puede expresarse como

$$F(V) = (V e^{\alpha T^*} - I) e^{-\rho T^*}$$

Que sólo depende del valor del proyecto V . Sabiendo esto podemos revertir la pregunta: ¿Cuáles son los valores de V tales que deseamos invertir ahora? O en otras palabras, cuáles son los valores de V tales que $T^* = 0$? De la forma hallada para T^* , podemos ver que el proyecto se ejecutará inmediatamente siempre que el valor del proyecto sea mayor que un valor crítico V^* :

$$V \geq V^* = \frac{\rho}{\rho - \alpha} I > I. \quad (8)$$

Este valor crítico nos permite repensar el problema de la firma: en lugar de plantearlo como "dentro de cuanto tiempo invertir dado que hoy el valor del

proyecto es V ", lo podemos pensar como un problema idéntico todo el tiempo (es decir, un problema *estacionario*), en el cual en cada momento la firma se pregunta: ¿es suficientemente alto el valor del proyecto? Si lo es, decide invertir; si no lo es, decide esperar. Este razonamiento conlleva a que encontremos un valor crítico $V^* > I$, lo cual nos permite ver lo que argumentamos al inicio de esta sección: invertimos cuando el valor presente del proyecto es estrictamente mayor al costo de invertir I , ya que se contempla el costo de oportunidad. Finalmente, reemplazando T^* en la ecuación (??) obtenemos el valor de la opción:

$$F(V) = \begin{cases} \left[\frac{\alpha I}{(\rho - \alpha)} \right] \left[\frac{(\rho - \alpha)}{\rho I} V \right]^{\rho/\alpha} & \text{si } V \leq V^* \\ V - I & \text{si } V \geq V^* \end{cases}$$

3.2 Caso Estocástico

A continuación resolveremos el caso estocástico; es decir, cuando $\sigma > 0$. Aquí no podremos derivar contra el tiempo óptimo de inversión como antes. Pero dadas las propiedades del problema, sabemos que este "tiempo óptimo de parada" tendrá la forma "invertir siempre que el valor del proyecto pertenezca en a una determinada región (en particular, que sea mayor a cierto valor crítico)".

Comenzamos entonces definiendo a π_t como el flujo de beneficios. Todavía no asumimos nada sobre las propiedades del proceso estocástico que genera a este flujo de beneficios. Luego, en todo momento, la firma enfrenta una decisión: entrar (detenerse, o invertir) o no entrar (continuar, o no invertir). Si entra, obtiene un valor de terminación $V(\pi) - I$; es decir: el valor presente de los flujos de beneficios futuros dado que los beneficios corrientes son π , menos el costo de la inversión. Por otro lado, si no entra (y este es el elemento fundamental de nuestro enfoque), no obtiene cero; lo que obtiene es el valor de esperar. El mismo será representado por el valor presente descontado del valor esperado de la opción en el siguiente período. Entonces, dado que el valor de la opción $F(V)$ (no escribimos subíndice tiempo porque el problema es estacionario) incorpora el hecho de que la firma toma la decisión óptima, dicho valor puede escribirse así:

$$F(V) = \max \left[V - I, \frac{1}{1 + \rho \Delta t} E[F(V + \Delta V)] \right]$$

(notar que escribimos el valor de la opción en función del valor del proyecto V , que depende de π ; alternatively podríamos haber expresado todo en términos de π). Nuestro objetivo es hallar el valor crítico V^* tal que para valores superiores se invierte inmediatamente, y para valores inferiores se espera. Esto implica que en la región de continuación (cuando $V > V^*$), tenemos que

$$F(V) = \frac{1}{1 + \rho \Delta t} E[F(V + \Delta V)]$$

Esto es una ecuación en diferencias, expresada de manera un poco confusa. Nuestro objetivo ahora es reescribirla de modo tal que podamos resolverla,

agregando las condiciones terminales adecuadas. Entonces, multiplicando por $(1 + \rho\Delta t)$ de ambos lados y reagrupando términos, tenemos

$$\rho F(V)\Delta t = E[F(V + \Delta V) - F(V)] = E[\Delta F]$$

En tiempo continuo, esto se expresa:

$$\rho F(V)dt = E[dF] \quad (*)$$

Esta igualdad puede entenderse como una ecuación de equilibrio o no arbitraje, que se tiene que cumplir para que los inversores decidan adquirir un activo. El término de la izquierda es el retorno por unidad de tiempo que el inversor requiere para conservar el activo (usando ρ como una tasa de descuento); es decir: el costo de oportunidad de mantener el proyecto en cartera. A la derecha tenemos la capitalización apreciación esperada del proyecto.

Ahora, para continuar, debemos asumir algo sobre el comportamiento de V . Si consideramos que se rige por una Brownian Motion Geometrica, aplicando el lema de Ito teníamos

$$dF = (F_V\mu + \frac{1}{2}F_{VV}\sigma^2)dt + F_V\sigma dz$$

Donde μ y σ son la media y el desvío del proceso browniano de V . Luego, tomando esperanza y considerando que $E_t(dz) = 0$, obtenemos

$$E_t(dF) = (\alpha F_V V + \frac{1}{2}\sigma^2 F_{VV} V^2)dt$$

Reemplazamos en la ecuación (*) y obtenemos

$$\rho F(V) = (F_V V \alpha + \frac{1}{2} F_{VV} V^2 \sigma^2)$$

Llegando así a una ecuación diferencial homogénea de 2do orden.

$$\frac{1}{2}\sigma^2 F_{VV} V^2 + \alpha F_V V - \rho F = 0 \quad (9)$$

En general, la solución $F(V)$ para la ecuación (9) es de la forma

$$F(V) = A_1 V^{\beta_1} + A_2 V^{\beta_2},$$

donde $\beta_1 > 1$ y $\beta_2 < 0$.²

²**Demostración.** Elegimos la solución particular talque

$$F = AV^\beta,$$

donde

$$\begin{aligned} F' &= A\beta V^{\beta-1}, \\ F'' &= A\beta(\beta-1)V^{\beta-2}. \end{aligned}$$

3.2.1 Condiciones Terminales

El problema de inversión óptima se resuelve encontrando las condiciones terminales, o condiciones que se deben cumplir en el momento de la inversión.

Estas condiciones son:

1. $F(0) = 0$
2. $F(V^*) = V^* - I$
3. $F'(V^*) = 1$

La primera condición es muy intuitiva: cuando el valor del proyecto es nulo, la opción a esperar tampoco tiene valor. La segunda condición (si la reordenamos), es $V^* = I + F(V^*)$, simplemente nos dice que el valor del proyecto al momento en que se invierte, V^* , tiene que ser igual al costo total del proyecto; el sunk cost más el costo de oportunidad. Esta condición es conocida como *value matching condition*. La última condición es conocida como *smooth-pasting condition*. Esta condición nos dice que en el momento de invertir, una suba en V le agrega marginalmente tanto al valor del proyecto como al valor de la opción de esperar.

La condición (1) nos permite determinar que $A_2 = 0$, ya que

$$F(0) = A_1 V^{\beta_1} + A_2 V^{\beta_2} = 0,$$

y solo se cumple si $A_2 = 0$ (ya que $\lim_{V \rightarrow 0} V^{\beta_2} = \infty$). Por lo tanto obtenemos la siguiente expresión para el valor de la opción:

$$F(V) = A_1 V^{\beta_1}.$$

El resto de las condiciones nos permite determinar que

$$\begin{aligned} V^* &= \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} I, \\ A &= \frac{(V^* - I)}{(V^*)^{\beta_1}}. \end{aligned} \tag{10}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (9) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sigma^2 V^2 \beta(\beta - 1) V^{\beta-2} + (\alpha) V A \beta V^{\beta-1} - \rho A V^\beta &= 0, \\ \frac{1}{2} \sigma^2 \beta(\beta - 1) + (\alpha) A \beta - \rho A &= 0. \end{aligned}$$

Esta última ecuación es una función cuadrática en β , con raíces

$$\begin{aligned} \beta_1 &> 1, \\ \beta_2 &< 0. \end{aligned}$$

■

En la ecuación (10) podemos ver que tanto la incertidumbre como la irreversibilidad de la decisión de invertir abren una brecha entre el valor óptimo de invertir y su costo, $V^* - I > 0$, demostrando que la visión “clásica” es incompleta y propone una regla de inversión que no es correcta.

3.2.2 Decisión óptima de cuándo comenzar y cuándo abandonar un proyecto

Hasta ahora hemos analizado cómo se tomaba la decisión de invertir en un proyecto donde asumíamos que no existía la posibilidad de abandonar el proyecto. A continuación estudiaremos la decisión no solo de entrar sino también cuándo es óptimo abandonar un proyecto. Para muchos proyectos la noción de suspensión no costosa o re-inicio es inverosímil; de hecho, la mayoría de las veces se debe incurrir en costos de liquidación altos por lo que el inversionista no está dispuesto a abandonar el proyecto la primera vez que realiza flujos de beneficios negativos. La pregunta es qué tan negativos deben ser el flujo de beneficios para que resulte óptimo abandonar el proyecto.

4 Optimal Exit

En la sección anterior, estudiamos el caso de un inversor que tenía que decidir el momento óptimo de invertir en un proyecto dado, para posteriormente quedarse en ese proyecto para siempre. Supongamos ahora que, una vez que estamos adentro, tenemos la opción de salir. Para ver como se modifica el problema, pensemos en el problema que tendría la firma una vez que esté operativa: la misma enfrentaría la decisión de salir o quedarse.

Para estudiar este problema, supongamos que los beneficios siguen un proceso browniano

$$d\pi = \pi\mu dt + \pi\sigma dz.$$

Para evaluar el valor del proyecto utilizamos la ecuación³

$$\rho V dt = \pi + E_t[dV] \quad (11)$$

³Considere el valor del proyecto calculado como el valor esperado descontado de las ganancias futuras. Sea π el flujo de beneficios; entonces el valor del proyecto es:

$$V_t = E_t \left\{ \sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{(1+\rho)} \right)^i \pi_{t+i} \right\}.$$

Note que podemos describir la ecuación como:

$$V_t = \pi_t + \frac{1}{(1+\rho)} E_t[V_{t+1}].$$

Ahora queremos llevar esta ecuación a tiempo continuo. Para llevar a tiempo continuo, debemos llevar el intervalo de tiempo: $1 \rightarrow dt$.

$$V = \pi dt + \frac{1}{(1+\rho dt)} E_t[V_{t+dt}].$$

Multiplicando por $(1 + \rho dt)$ y reagrupando términos, tenemos

que, como antes, puede interpretarse como una condición de no arbitraje.

Como sabemos que el valor del proyecto es una función de los beneficios, $V(\pi)$, y dado que los beneficios siguen una brownian motion geometrica podemos obtener el cambio en el valor del proyecto simplemente aplicando el lema de Ito:

$$dV = V_\pi d\pi + \frac{1}{2} V_{\pi\pi} (d\pi)^2.$$

Dado que π sigue una geometric Brownian motion, $d\pi = \pi\mu dt + \pi\sigma dz$, obtenemos, otra vez, que

$$dV = V_\pi(\pi\mu dt + \pi\sigma dz) + \frac{1}{2} V_{\pi\pi}(\pi\mu dt + \pi\sigma dz)^2,$$

donde eliminando los terminos que convergen rapidamente a cero ($dt^n \rightarrow 0, \forall n > 1$) y usando que $(dz)^2 = dt$, obtenemos

$$dV = V_\pi(\pi\mu dt + \pi\sigma dz) + \frac{1}{2} V_{\pi\pi}(\sigma\pi)^2 dt.$$

Si tomamos la esperanza condicional y reemplazamos en la ecuación (11), obtenemos la ecuacion diferencial que describe la evolucion del valor del proyecto,

$$\begin{aligned} \rho V dt &= \{ \pi + V_\pi \pi \mu + \frac{1}{2} V_{\pi\pi} (\sigma\pi)^2 \} dt, \\ \rho V &= \pi + V_\pi \pi \mu + \frac{1}{2} V_{\pi\pi} (\sigma\pi)^2. \end{aligned}$$

Esta es una ecuación diferencial de segundo orden **no homogénea** que puede expresarse de la siguiente manera

$$\rho V - V_\pi(\pi\mu) - \frac{1}{2} V_{\pi\pi}(\frac{1}{2}(\sigma\pi)^2) = \pi. \quad (12)$$

La solución general de dicha ecuacion la podemos escribir como la suma de la solucion general de la homogénea mas la solucion particular de la no homogénea. La solución general de la parte homogénea es de la forma $V = B_1 \pi^{\beta_1} + B_2 \pi^{\beta_2}$ y la solución particular de la no homogénea es de la forma $V = K\pi$. Sustituyendo nuestra “guess” en la ecuación (12) obtenemos que $K = 1/(\rho - \mu)$. Por lo tanto la solución general es

$$V(\pi) = \frac{1}{(\rho - \mu)} \pi + B_1 \pi^{\beta_1} + B_2 \pi^{\beta_2},$$

con $\beta_1 > 1$ y $\beta_2 < 0$.

$$V(1 + \rho dt) = \pi dt(1 + \rho dt) + E_t[V_{t+dt}].$$

Obteniendo asi una expresión en tiempo continuo

$$\rho V dt = \pi dt + E_t[dV].$$

donde $dV = V_{t+dt} - V_t$.

El primer sumando de la derecha es el valor del proyecto actual de la firma si la firma se viese obligada a operar hasta el infinito (a pesar de cualquier pérdida). Los otros dos términos son los que utilizo para caracterizar la opción de abandonar el proyecto. Note que si los beneficios son extremadamente grandes, también lo sería el valor del proyecto, por lo que bajo dicho escenario, la opción de abandonar el proyecto debería (tender a) ser nula ($F^{exit}(\infty) = 0$; *i.e.*, el valor de la opción de abandonar el proyecto tiende a cero cuando los beneficios tienden a infinito), lo que se cumple si $B_1 = 0$. Por lo tanto el valor del del proyecto lo podemos expresar como

$$V = \frac{1}{(\rho - \mu)}\pi + B_2\pi^{\beta_2}, \quad (13)$$

donde el primer término es el valor del proyecto asumiendo que la firma va a operar para siempre a pesar de poder dar ganancias mas chicas que la tasa libre de riesgo (no puede dar pérdidas pues no asumimos costos variables) y el segundo termino representa la opción de abandonar el proyecto para obtener cierto dinero (una suma fija) y poner ese importe a la tasa libre de riesgo o eventualmente entrar a otro proyecto.

A continuación estudiaremos la condiciones terminales. La intuición sugiere que la firma abandonará el proyecto cuando las condiciones de demanda sean suficientemente bajas y entrará al proyecto cuando las condiciones de demanda sean suficientemente altas. Por lo tanto, podemos tomar dos valores críticos: $\bar{\pi}, \underline{\pi}$ que son los valores de entrada y salida de la firma respectivamente. Las condiciones terminales son las condiciones de value matching y smooth pasting, de entrada y salida correspondientemente. Consecuentemente tenemos 4 condiciones terminales:

1. $V(\bar{\pi}) - I = F^{ent}(\bar{\pi}), \longrightarrow$ Value matching entrada
2. $V_{\pi}(\bar{\pi}) = F_{\pi}^{ent}(\bar{\pi}), \longrightarrow$ Smooth pasting entrada
3. $V(\underline{\pi}) - E = F^{ent}(\underline{\pi}), \longrightarrow$ Value matching salida
4. $V_{\pi}(\underline{\pi}) = F_{\pi}^{ent}(\underline{\pi}), \longrightarrow$ Smooth pasting salida

Estas cuatro ecuaciones determinan las cuatro incognitas: $\bar{\pi}, \underline{\pi}, B_2, \tilde{A}_1$.

Las value matching condition en 3 tiene la interpretación de que el valor del proyecto cuando salgo es igual a lo que obtengo (si me pagan E al irme) mas la opción de entrar en un *nuevo* proyecto.

NOTA: cuando hablamos de $F^{ent}(\pi)$, a priori no nos referimos exáctamente a la misma función que fue derivada en la sección 3, ya que la anterior era función del valor total del proyecto y no de los beneficios, y además en aquel caso no se

estaba teniendo en cuenta que se podía salir. Para obtener la función $F^{ent}(\pi)$, utilizamos la siguiente ecuación:

$$\rho F^{ent}(\pi) = E(dF^{ent}(\pi))$$

Pero como sabemos que $d\pi = \pi\mu dt + \pi\sigma dz$, podemos, como antes usar Lema de Ito para obtener la ecuación diferencial que resuelve la función. Matemáticamente, esto es identico a lo hecho en la sección 3, solo que con el proceso estocástico de los beneficios en vez de con el proceso de la valuación. Con eso en mente, sabemos que la ecuación diferencial que resuelve $F^{ent}(\pi)$ viene dada por:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 F_{\pi\pi}^{ent} \pi^2 + \mu F_{\pi}^{ent} \pi - \rho F^{ent} = 0$$

Por la misma razón que antes, la solución tiene forma general:

$$F^{ent}(\pi) = \tilde{A}_1 \pi^{\beta_1} + \tilde{A}_2 \pi^{\beta_2}$$

Con $\beta_1 > 1$ y $\beta_2 < 0$.⁴ Por el mismo argumento que antes, en el limite cuando $\pi \rightarrow 0$, la opción de entrar no tiene valor, por lo que $\tilde{A}_2 = 0$. Con ello, obtenemos que: $F^{ent}(\pi) = \tilde{A}_1 \pi^{\beta_1}$, con un \tilde{A}_1 a determinar, que sale del sistema de 4 ecuaciones y 4 incógnitas previamente descripto, y que es potencialmente disinto al A_1 del caso anterior.

⁴No es caprichoso que no hayamos distinguido los β de esta ecuación con los de la otra: en el caso en el que no hay opción de salir, se puede demostrar que $V(\pi) = \frac{\pi}{\rho - \mu}$, por lo que $dV = \frac{d\pi}{\rho - \mu}$ (usamos Ito, pero la derivada segunda es cero). Pero usando la fórmula de $d\pi$ obtenemos:

$$dV = \frac{\mu\pi}{\rho - \mu} dt + \frac{\sigma\pi}{\rho - \mu} dz$$

Reemplazando que $\frac{\pi}{\rho - \mu} = V$, obtenemos que:

$$dV = V\mu dt + V\sigma dz$$

Es decir, V es Brownian Motion Geométrica con el mismo drift y la misma volatilidad que π . Por lo tanto, como $\mu = \alpha$, en ese caso los β_i de la ecuación diferencial son los mismos.