Letras Griegas

1 Introduccion

Las letras griegas pueden ser entendidas como medidas del portafolio que birndan información sobre el mismo. Es decir, nos permite obtener nociones de como reaccionara nuestro partafolio ante distintos escenarios. Por ejemplo, caracterizaremos como cambia el valor de nuestras tenencias ante cambios en el precio de algun stock, o como ira variando este a lo largo del tiempo. Naturalmente, podremos utilizar estas medidas para hacer nuestro portafolio más rentable o menos volatil. Veremos que en este procedimiento nos sera muy útil la expresión para el precio de una opción derivada por Black & Scholes (BS).

2 Delta

La primer letra griega -*delta*- mide como cambia el valor de un portafolio ante cambios en un stock. Pensemos en un portafolio V formado por n_1 unidades V_1 y n_2 unidades de V_2, donde V_1 y V_2 pueden ser opciones o activos. De esta manera, el delta del portafolio es la suma de los delta de los elementos que forman el mismo. En particular, si denominamos S al precio del stock:

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \Delta$$

por lo que

$$\Delta = n_1 \Delta_1 + n_2 \Delta_2$$

donde $\Delta_i = \frac{\partial V_i}{\partial S} \quad \forall i = 1, 2.$

El *delta* de un portafolio ya fue introducido cuando se derivo el pricing de una opción. En el modelo de BS se vio que el precio de una opcion se determina igualando un portafolio libre de riesgo, formado por una posicion en una opcion y una posicion en el stock, a la tasa libre de riesgo. El portafolio quedaba libre de riesgo porque se lo construía de tal manera que cada movimiento en el precio del stock quede perfectamente anulado por otro movimiento en la opcion. Esto se conoce como Delta Hedging, donde las posiciones en cada elemento del portafolio son tales que se elimina todo el riesgo obteniendo una posición *delta neutral*.

2.1 Delta Neutral

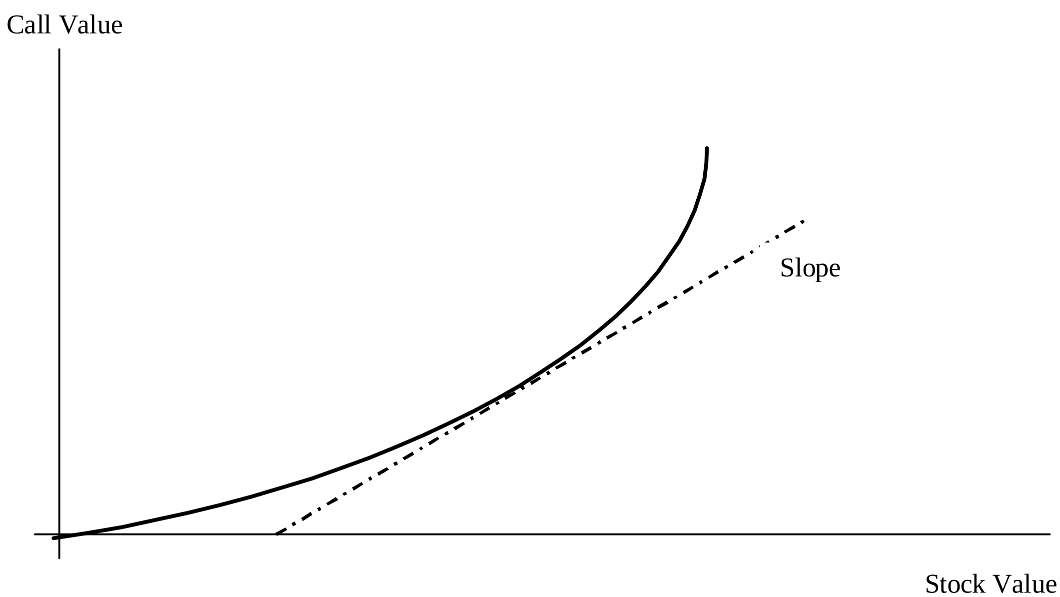
Si se quiere obtener una posición *delta neutral* debe satisfacerse que $\Delta = 0$, esto es:

$$\Delta = 0 \Longrightarrow n_1 \Delta_1 + n_2 \Delta_2 = 0$$

por lo que el hedge ratio del portafolio *delta neutral* es

$$h = \frac{n_1}{n_2} = -\frac{\Delta_2}{\Delta_1}$$

Dos comentarios resultan pertinentes a esta instancia. Primero, tener una posición *delta neutral* implica una regla muy especifica sobre la relación que debe mantener cada uno de los elementos de mi portafolio, pero no es así para el monto de cada uno de ellos. En otras palabras, si un portafolio con n_1 unidades del primer elemento y n_2 unidades del segundo es *delta neutral*, entonces tambien lo sera uno con $k * n_1$ y $k * n_2$ unidades. Segundo, tener una posición *delta neutral* nos permite evitar cambios en el valor de nuestro portafolio ante cambios en S, pero solo en un pequeño entorno de este. El motivo de esto es que la pendiente del portafolio ante cambios en S $\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)$ no tiene porque ser contstante para todo valor del stock, por lo que el *delta* del portafolio cambia en S y tambien lo hara entonces el hedge ratio que devuelve una posición *delta neutral*. Esto puede verse en el siguiente grafico:



Pasemos a un ejemplo donde el portafolio V esta compuesto por N_S unidades del stock y N_c unidades del call. El valor del portafolio es:

$$V = N_S S + N_c c = N_c(hS + c),$$

donde $h = \dfrac{N_S}{N_c}$, es el hedge ratio. Para eliminar el riesgo del portafolio, debemos hacer su valor independiente a los movimientos de $S, i.e.,$

$$\frac{\partial V}{\partial S} = h + \frac{\partial c}{\partial S} = 0,$$

entonces

$$h = -\frac{\partial c}{\partial S}.$$

Donde $\frac{\partial c}{\partial S}$ se conoce como el *delta* de la opcion. Notemos que dada la close form solution del BS,

$$c(\cdot) = SN(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2),$$

obtenemos que

$$\Delta_C = \frac{\partial c}{\partial S} = N(d_1).$$

Por ejemplo si escribimos el call sobre una accion, entonces para tener un hedge completo el poseedor de la accion debe escribir $\frac{1}{N(d_1)}$ por cada unidad de acciones que posee.

Sobre la base de los conceptos antes enunciados, notamos

Example 1 *Un Delta Neutral Portfolio es uno formado por* -1 (1) *unidad de un Call Option, mas* $\frac{\partial c}{\partial S} = N(d_1)$ $(-N(d_1))$ *unidades del Share. Notar que como* $\frac{\partial c}{\partial S} = N(d_1) \in (0,1)$, *entonces un posicion delta neutral de este portafolio siempre involucra a mas opciones que stocks.*

Como aclaramos antes, para mantener una posicion delta neutral en el tiempo se debe ajustar continuamente el portafolio, ya que el delta de la opcion cambia ante cambios del precio del stock. Esto se conoce como Dynamic Hedging. Sin embargo, dado que en la practica no se hace un hedging continuo, pasaremos a calcular otras medidas del portafolio, tales como *gamma* y *vega*.

Un ultimo comentaro resulta interesante antes de concluir con la primer letra. El motivo por el cual construimos una posición *delta neutral* fue porque queríamos evitar potenciales perdidas antes cambios en el stock, pero este no tiene por que ser siempre el caso. Por ejemplo, si por algun motivo creemos que el precio de la acción va a subir lo que desearíamos es tener un *delta* positivo; analogamente, desearíamos uno negativo si creemos que el precio ira a bajar. Si llamamo *Bull* a aquella estrategia que gana cuando los precios suben y *Bear* a aquella que gana en caso contrario, podemos identificarlas en terminos del *delta* del portafolio de la siguiente manera

$$\begin{array}{rcc} \Delta > 0 & \Longrightarrow & Bull \\ \Delta = 0 & \Longrightarrow & Neutral \\ \Delta < 0 & \Longrightarrow & Bear \end{array}$$

3 Gamma

Como una posicion *delta* no brinda proteccion ante grandes cambios en el stock price, entonces incorporamos la letra **gamma**, que representa **la sensibilidad**

del delta al underlying. Como en la practica es imposible realizar un delta hedging continuo, *gamma* indica cuanto o qué tan a menudo (up date) se debe "rehacer" el hedging de manera tal de seguir en una posición *delta neutral*. En definitiva en una posición *delta neutral*, la posición *gamma* es una de las responsables para que el retorno del portafolio sea igual a la tasa libre de riesgo.

Matemáticamente es la derivada segunda del portafolio con respecto al underlying

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}.$$

para el caso del portafolio formado por N_c unidades del call y N_S unidades del stock es

$$\Gamma = \frac{\partial^2 c}{\partial S^2}$$

3.1 Gamma Neutral

Para lograr una posición *gamma neutral* se debe comprar-vender, no sólo el underlying sino opciones. Dado que la derivada segunda del stock con respecto al underlying es nula, no se logra nada añadiendo más activos sino que debe elegirse cantidades de opciones tal que se tenga una posición *delta* y *gamma* neutrales. Obviamente la posición *gamma neutral* no se obtiene muy a menudo, porque si en la práctica el comercio de underlying es costoso, el comercio de opciones lo es más aún.

Supongamos que uno ya tiene un portafolio con una posicion *delta neutral* y con un *gamma* de Γ_A. Para corregir la posicion *gamma* se añaden N_T opciones tal que

$$\Gamma_{port} = N_T \Gamma_T + \Gamma_A,$$

donde Γ_T es el *gamma* de la opción que se esta agergando y Γ_{port} es el *gamma* del nuevo portafolio obtenido. El mismo sera *gamma neutral* si

$$N_T = -\frac{\Gamma_A}{\Gamma_T}.$$

Pero como la inclusion de la opcion cambiara el *delta* del portafolio se debe cambiar la posicion en los stocks para mantener la *delta neutral*. Notar que el cambio en la posición del stock no modificara Γ_{port}, puesto que el *gama* del activo es nulo.

La posición *delta neutral* provee una protección contra pequeños moviminetos en S, mientras que la posición *gamma neutral* provee protección ante grandes movimientos de S entre cada rebalanceo del portafolio.

Si se tiene una posición long en gamma ($\Gamma > 0$) se gana plata con grandes movimientos del underlying y se pierde plata con pequeños movimientos.

Tomando la ecuacion de BS, derivamos que

$$\begin{aligned} \Gamma^{CALL} &= \frac{N'(d_1)}{\sigma S \sqrt{T-t}}, \\ \Gamma^{PUT} &= \frac{N'(d_1)}{\sigma S \sqrt{T-t}}. \end{aligned}$$

4 Theta

Esta letra muestra como cambia el valor de la opción a medida que se acerca el expiration date; puede ser visto como una medida de decaimiento de la opción. Matemáticamente, representa el cambio del precio de la opción con respecto al tiempo; dado que cuando se acerca el expiration date decrece $(T-t)$ definiremos esta letra como el negativo de la tasa de crecimiento del call con respecto al lapso hasta el expiration date:

$$\Theta = -\frac{\partial c}{\partial (T-t)}$$

si un individuo tiene una posición neutral en delta, el theta es lo que le asegura recibir un retorno igual a la tasa libre de riesgo, intertemporalmente.

Notemos que el theta, al igual que gamma, estan relacionados con el valor de la opción a traves de la close form solution del BS.

Para un Call es igual a

$$\Theta^{CALL} = -\frac{\sigma S N'(d_1)}{2\sqrt{T-t}} - rXe^{-r(T-t)}N(d_2).$$

Para un Put

$$\Theta^{PUT} = -\frac{\sigma S N'(d_1)}{2\sqrt{T-t}} + rEe^{-r(T-t)}N(-d_2).$$

Generalmente, el tiempo juega a favor de la persona que escribe la opción. Esto se debe a que, salvo que el underlying cambie bruscamente, la opción va perdiendo valor. Por ejemplo, si el stock no cambia de valor desde la fecha de emisión de un call, mientras se va acercando el expiration date la opción tiene un valor más proximo a su payoff el día en que se ejecuta, que es menor inclusive si esta at-the-money. Acontinuación desarrollaremos un ejemplo que evidencia el punto.

5 Ejemplo

A continuación desarrollaremos un ejemplo que nos permitira evidenciar los cometarios hechos recientemente. El mismo fue obtenido de Cox & Rubinstein.

Table 6-13
TRADING SHEET FOR XYZ ON DECEMBER 21, 1977

XYZ XYZ
77/12/21 77/12/21

EXPIRATION	ANN INT	ANN VOL	EX-DIV DATE	DIVIDEND
78/01/20	.050	.300	78/01/05	.50
78/04/21	.050	.300	78/04/05	.50
78/07/21	.050	.300	70/07/05	.50

	******** 390 *******				******** 391 *******				******** 392 *******				******** 393 *******				******** 394 *******				
	CV	CΔ	PV	PΔ	CV	CΔ	PV	PΔ	CV	CΔ	PV	PΔ	CV	CΔ	PV	PΔ	CV	CΔ	PV	PΔ	
JAN35	3.83	.87	.19	-.11	3.94	.88	.18	-.11	4.06	.89	.17	-.10	4.17	.89	.15	-.09	4.28	.90	.14	-.09	JAN35
JAN40	.78	.36	2.12	-.63	.82	.37	2.04	-.62	.87	.38	1.96	-.60	.92	.40	1.89	-.59	.97	.41	1.81	-.57	JAN40
JAN45	.06	.04	6.38	-.95	.06	.05	6.26	-.94	.07	.05	6.14	-.94	.07	.05	6.02	-.93	.08	.06	5.90	-.93	JAN45
APR35	4.67	.73	1.10	-.25	4.76	.73	1.07	-.24	4.86	.74	1.04	-.24	4.95	.74	1.01	-.23	5.05	.75	.98	-.23	APR35
APR40	2.04	.44	3.39	-.53	2.10	.45	3.32	-.52	2.16	.46	3.26	-.52	2.21	.46	3.19	-.51	2.27	.47	3.13	-.50	APR40
JUL40	2.84	.46	4.20	-.50	2.90	.47	4.14	-.49	2.96	.48	4.07	-.49	3.02	.48	4.01	-.48	3.08	.49	3.95	-.48	JUL40

	******** 394 *******				******** 395 *******				******** 396 *******				******** 397 *******				******** 400 *******				
	CV	CΔ	PV	PΔ	CV	CΔ	PV	PΔ	CV	CΔ	PV	PΔ	CV	CΔ	PV	PΔ	CV	CΔ	PV	PΔ	
JAN35	4.28	.90	.14	-.09	4.40	.91	.13	-.08	4.51	.91	.12	-.08	4.63	.92	.11	-.07	4.74	.92	.10	-.07	JAN35
JAN40	.97	.41	1.81	-.57	1.03	.43	1.74	-.56	1.08	.44	1.67	-.54	1.14	.46	1.60	-.53	1.20	.47	1.54	-.52	JAN40
JAN45	.08	.06	5.90	-.93	.09	.06	5.78	-.93	.10	.07	5.67	-.92	.10	.07	5.55	-.92	.11	.08	5.43	-.91	JAN45
APR35	5.05	.75	.98	-.23	5.15	.75	.95	-.22	5.24	.76	.92	-.22	5.34	.77	.90	-.21	5.44	.77	.87	-.20	APR35
APR40	2.27	.47	3.13	-.50	2.34	.48	3.06	-.50	2.40	.49	3.00	-.49	2.46	.49	2.94	-.48	2.52	.50	2.88	-.47	APR40
JUL40	3.08	.49	3.95	-.48	3.15	.49	3.89	-.47	3.21	.50	3.83	-.46	3.28	.50	3.77	-.46	3.34	.51	3.71	-.45	JUL40

	******** 400 *******				******** 401 *******				******** 402 *******				******** 403 *******				******** 404 *******				
	CV	CΔ	PV	PΔ	CV	CΔ	PV	PΔ	CV	CΔ	PV	PΔ	CV	CΔ	PV	PΔ	CV	CΔ	PV	PΔ	
JAN35	4.74	.92	.10	-.07	4.86	.93	.10	-.06	4.98	.93	.09	-.06	5.10	.93	.08	-.05	5.21	.94	.07	-.05	JAN35
JAN40	1.20	.47	1.54	-.52	1.26	.49	1.47	-.50	1.32	.50	1.41	-.49	1.38	.51	1.35	-.47	1.45	.53	1.29	-.46	JAN40
JAN45	.11	.08	5.43	-.91	.12	.08	5.32	-.91	.13	.09	5.20	-.90	.15	.09	5.09	-.89	.16	.10	4.98	-.89	JAN45
APR35	5.44	.77	.87	-.20	5.54	.78	.84	-.20	5.64	.78	.82	-.19	5.74	.79	.80	-.19	5.84	.79	.77	-.18	APR35
APR40	2.52	.50	2.88	-.47	2.59	.51	2.82	-.47	2.65	.52	2.76	-.46	2.72	.52	2.70	-.45	2.79	.53	2.64	-.45	APR40
JUL40	3.34	.51	3.71	-.45	3.41	.52	3.65	-.45	3.48	.52	3.59	-.44	3.54	.53	3.53	-.44	3.61	.53	3.48	-.43	JUL40

	******** 404 *******				******** 405 *******				******** 406 *******				******** 407 *******				******** 410 *******				
	CV	CΔ	PV	PΔ	CV	CΔ	PV	PΔ	CV	CΔ	PV	PΔ	CV	CΔ	PV	PΔ	CV	CΔ	PV	PΔ	
JAN35	5.21	.94	.07	-.05	5.33	.94	.07	-.05	5.45	.95	.06	-.04	5.57	.95	.06	-.04	5.69	.95	.05	-.04	JAN35
JAN40	1.45	.53	1.29	-.46	1.52	.54	1.23	-.44	1.59	.56	1.18	-.43	1.66	.57	1.12	-.42	1.73	.59	1.07	-.40	JAN40
JAN45	.16	.10	4.98	-.89	.17	.11	4.87	-.88	.18	.11	4.75	-.88	.20	.12	4.64	-.87	.21	.13	4.53	-.86	JAN45
APR35	5.64	.79	.77	-.18	5.94	.80	.75	-.18	6.04	.80	.73	-.18	6.15	.81	.70	-.17	6.25	.81	.68	-.17	APR35
APR40	2.79	.53	2.64	-.45	2.86	.54	2.58	-.44	2.93	.54	2.53	-.43	3.00	.55	2.47	-.42	3.07	.56	2.42	-.42	APR40
JUL40	3.61	.53	3.48	-.43	3.68	.54	3.42	-.43	3.75	.54	3.37	-.42	3.82	.55	3.31	-.42	3.89	.55	3.26	-.41	JUL40

Table 6-14
TRADING SHEET FOR XYZ ON DECEMBER 28, 1977

XYZ XYZ
77/12/28 77/12/28

EXPIRATION	ANN INT	ANN VOL	EX-DIV DATE	DIVIDEND
78/01/20	.050	.300	78/01/05	.50
78/04/21	.050	.300	78/04/05	.50
78/07/21	.050	.300	78/07/05	.50

	******** 390 *******				******** 391 *******				******** 392 *******				******** 393 *******				******** 394 *******				
	CV	CΔ	PV	PΔ	CV	CΔ	PV	PΔ	CV	CΔ	PV	PΔ	CV	CΔ	PV	PΔ	CV	CΔ	PV	PΔ	
JAN35	3.73	.90	.12	-.09	3.85	.91	.11	-.08	3.96	.91	.10	-.08	4.08	.92	.09	-.07	4.19	.92	.09	-.06	JAN35
JAN40	.61	.33	1.99	-.66	.66	.35	1.91	-.64	.70	.36	1.83	-.63	.75	.38	1.75	-.61	.80	.39	1.67	-.59	JAN40
JAN45	.02	.02	6.39	-.96	.03	.03	6.26	-.96	.03	.03	6.14	-.96	.03	.03	6.02	-.96	.04	.03	5.90	-.95	JAN45
APR35	4.59	.73	1.05	-.25	4.68	.73	1.02	-.24	4.78	.74	.99	-.23	4.87	.75	.96	-.23	4.97	.75	.93	-.22	APR35
APR40	1.95	.44	3.34	-.54	2.01	.44	3.27	-.53	2.06	.45	3.20	-.52	2.12	.46	3.14	-.52	2.18	.47	3.07	-.51	APR40
JUL40	2.77	.46	4.17	-.50	2.83	.47	4.10	-.49	2.89	.47	4.04	-.49	2.95	.48	3.97	-.48	3.01	.48	3.91	-.48	JUL40

	******** 394 *******				******** 395 *******				******** 396 *******				******** 397 *******				******** 400 *******				
	CV	CΔ	PV	PΔ	CV	CΔ	PV	PΔ	CV	CΔ	PV	PΔ	CV	CΔ	PV	PΔ	CV	CΔ	PV	PΔ	
JAN35	4.19	.92	.09	-.06	4.31	.93	.08	-.06	4.43	.93	.07	-.05	4.55	.94	.06	-.05	4.67	.94	.06	-.05	JAN35
JAN40	.80	.39	1.67	-.59	.85	.41	1.60	-.58	.90	.43	1.53	-.56	.96	.44	1.46	-.55	1.01	.46	1.39	-.53	JAN40
JAN45	.04	.03	5.90	-.95	.04	.04	5.78	-.95	.05	.04	5.66	-.95	.05	.04	5.54	-.94	.06	.05	5.42	-.94	JAN45
APR35	4.97	.75	.93	-.22	5.06	.76	.90	-.22	5.16	.76	.88	-.21	5.26	.77	.85	-.21	5.36	.77	.82	-.20	APR35
APR40	2.18	.47	3.07	-.51	2.24	.47	3.01	-.50	2.30	.48	2.94	-.49	2.37	.49	2.88	-.49	2.43	.50	2.82	-.48	APR40
JUL40	3.01	.48	3.91	-.48	3.08	.49	3.85	-.47	3.14	.50	3.79	-.47	3.20	.50	3.73	-.46	3.27	.51	3.67	-.46	JUL40

	******** 400 *******				******** 401 *******				******** 402 *******				******** 403 *******				******** 404 *******				
	CV	CΔ	PV	PΔ	CV	CΔ	PV	PΔ	CV	CΔ	PV	PΔ	CV	CΔ	PV	PΔ	CV	CΔ	PV	PΔ	
JAN35	4.67	.94	.06	-.05	4.79	.95	.05	-.04	4.90	.95	.05	-.04	5.03	.95	.04	-.03	5.15	.96	.04	-.03	JAN35
JAN40	1.01	.46	1.39	-.53	1.07	.48	1.32	-.51	1.13	.49	1.26	-.50	1.20	.51	1.20	-.48	1.26	.52	1.14	-.46	JAN40
JAN45	.06	.05	5.42	-.94	.07	.05	5.30	-.93	.07	.06	5.18	-.93	.08	.06	5.07	-.93	.09	.07	4.95	-.92	JAN45
APR35	5.36	.77	.82	-.20	5.46	.78	.80	-.20	5.56	.79	.77	-.19	5.66	.79	.75	-.19	5.76	.80	.73	-.18	APR35
APR40	2.43	.50	2.82	-.48	2.49	.50	2.76	-.47	2.56	.51	2.70	-.46	2.62	.52	2.64	-.46	2.69	.53	2.58	-.45	APR40
JUL40	3.27	.51	3.67	-.46	3.34	.51	3.61	-.45	3.40	.52	3.55	-.45	3.47	.52	3.49	-.44	3.54	.53	3.44	-.43	JUL40

	******** 404 *******				******** 405 *******				******** 406 *******				******** 407 *******				******** 410 *******				
	CV	CΔ	PV	PΔ	CV	CΔ	PV	PΔ	CV	CΔ	PV	PΔ	CV	CΔ	PV	PΔ	CV	CΔ	PV	PΔ	
JAN35	5.15	.96	.04	-.03	5.27	.96	.03	-.03	5.39	.96	.03	-.03	5.51	.96	.03	-.02	5.63	.97	.03	-.02	JAN35
JAN40	1.26	.52	1.14	-.46	1.33	.54	1.08	-.45	1.40	.56	1.03	-.43	1.47	.57	.97	-.41	1.54	.59	.92	-.40	JAN40
JAN45	.09	.07	4.95	-.92	.10	.07	4.83	-.91	.11	.08	4.72	-.91	.12	.09	4.60	-.90	.13	.09	4.49	-.90	JAN45
APR35	5.76	.80	.73	-.18	5.86	.80	.70	-.18	5.97	.80	.68	-.17	6.07	.81	.66	-.17	6.17	.81	.64	-.16	APR35
APR40	2.69	.53	2.50	-.45	2.76	.53	2.52	-.44	2.83	.54	2.47	-.43	2.90	.55	2.41	-.43	2.97	.56	2.36	-.42	APR40
JUL40	3.54	.53	3.44	-.43	3.61	.53	3.38	-.43	3.68	.54	3.33	-.42	3.75	.55	3.27	-.42	3.82	.55	3.22	-.41	JUL40

Las tablas muestran el valor del stock en "eigth notation", por lo que donde aparece 395 se lee un stock price de $39\frac{5}{8}$. A la vez, para cada stock price, aparece una valuación del call con distintas expiration dates (CV) -cada fila es una fecha distinta- y una fila con el *delta* de la opción (ΔC). Las ultimas dos filas son analogas para un put.

Supongamos que iniciamos el 21 de Diciembre con un stock price de 400 y queremos tener una posición *delta neutral*, de este modo por cada unidad de stock que compramos deseamos escribir dos calls -puesto que a este valor de la acción $\Delta C = 0.5$. Imaginemos que en el mismo día la acción subio una unidad, situandose en 410. En este caso nuestras ganancias son

$$\underbrace{(41-40)}_{\textit{cambio en el stocks}} \quad -2 \quad \underbrace{(3.07-2.52)}_{\textit{cambio en los calls}} \quad = -0.1$$

Si por el contrario el activo hubiera bajado una unidad, las ganacias serían

$$(39-40)-2\,(2.04-2.52) = -0.4$$

Dos comentarios surgen inmediatamente. El primero es respecto a la variación del stock. Cuando introducimos la posición *delta neutral* sabíamos que nos cubríamos ante cambios en el stock pero solo para pequeños movimientos de este. Evidentemente, en nuestro ejemplo una suba/baja del stock price en una unidad es suficientemente grande. El otro comentario es aún más evidente: sin importar que el precio suba o baje, nuestra portafolio da perdidas para cualquier caso. Sin embargo, como habíamos anticipado, el tiempo en este caso debería jugar a nuestr favor puesto que hemos escrito la opción. Veamos como resulta nuestro portafolio si mantenemos la posición una semana, tanto para el caso en el que el stock p'rice no cambia como para aquel en el que sube o baja una unidad.

Si el stock baja a 390 para el 28 de Diciembre, las ganancias son

$$(39-40)-2\,(1.95-2.52) = 0.14$$

Si el stock permanece en 400 para el 28 de Diciembre, las ganancias son

$$(40-40)-2\,(2.43-2.52) = 0.18$$

notar de este caso que el valor del call bajo a pesar de haberse mantenido el precio del underlying.

Si el stock permanece en 410 para el 28 de Diciembre, las ganancias son

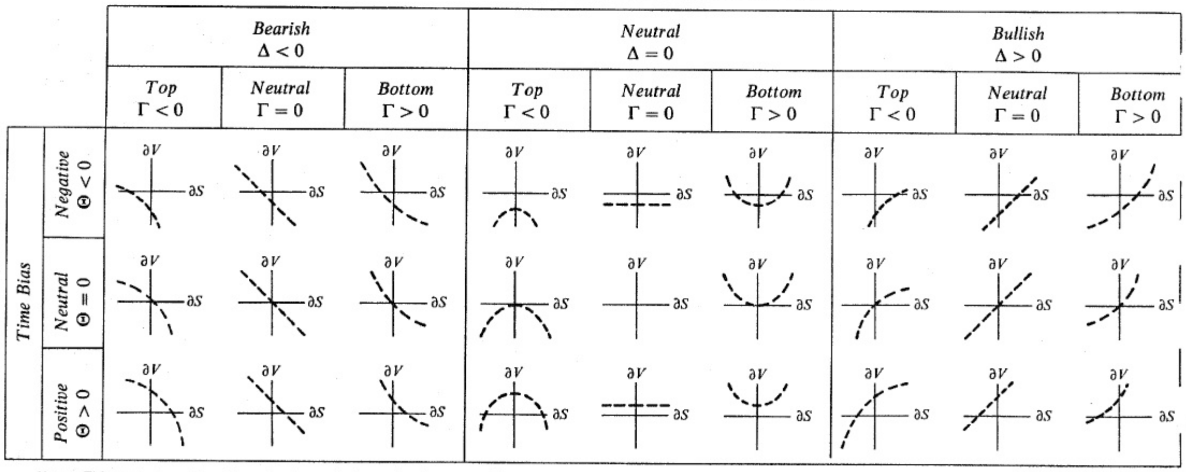
$$(41-40)-2\,(2.97-2.52) = 0.1$$

por lo que, si mantenemos la posición una semana, el portafolio teine un retorno positivo sin importar la dirección en que vaya el precio.

Resumimos los resultados encontrados con las tres primeras letras en el siguiente grafico

306

Table 6-15
DELTA-GAMMA-THETA TRADING STRATEGIES



NOTE: This table shows the effect of a change in the stock price on position values for a fixed reduction in the time to expiration. There is an interval around the current stock price S and a reduction in time to expiration for which these descriptions are accurate. *Caution:* They may not apply to sufficiently large movements of the stock price away from its current value, or to sufficiently large reductions in the time to expiration.

6 Vega

La cuarta letra es **Vega,** aunque no es griega propiamente dicha. Mide la sensitividad del portafolio con respecto a la volatilidad, matemáticamente

$$\Lambda = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$$

para el caso de un call

$$\Lambda = \frac{\partial c}{\partial \sigma}$$

expresión que podemos computar de la formula de BS.

Con vega hedging se reduce la sensibilidad a la volatilidad, esto es muy importante para eliminar el riesgo del modelo; aunque no es muy precisa.

6.1 Vega Neutral

Si el *vega* de una opcion es alta, entonces el valor de la opcion es muy sensible a cambios en la volatilidad, σ. Para una opcion europea el *vega* es mayor cuando la opcion esta at-the-money, y es nula cuando esta in-the-money o out-of-the-money.

Como el *vega* del underlying asset es nulo, para cambiar la posicion *vega* del portafolio se deben añadir opciones nuevas. Siguiendo un razonamiento analogo al anterior, sabemos que necesitamos incluir

$$N_T = -\frac{\Lambda}{\Lambda_T},$$

opciones, con un *vega* de Λ_T para cada una, para mantener una posicion *vega neutral*.

Dado que se incluyen mas opciones, la posicion *gamma neutral* al igual que la *delta neutral* no se mantienen, por lo que es necesario rebalancear con nuevas acciones.

La fórmula del Call y del Put son iguales entre si

$$\begin{aligned} \Lambda^{CALL} &= SN'(d_1)\sqrt{T-t}, \\ \Lambda^{PUT} &= SN'(d_1)\sqrt{T-t}, \end{aligned}$$

Notar que la información que nos brinda *vega* es en algun sentido similar al que nos brida *gamma*. Una posición *gamma neutral* nos protege ante cambios grandes del activo entre los momentos de rebalanceo del portafolio. Una posición *vega neutral* nos protege ante cambios en σ. Si sera mejor tomar una posición *gamma neutral* que una *vega neutral* dependera del tiempo que haya entre cada rebalanceo del portafolio y de la volatilidad de σ.

7 Rho

Esta letra mide la sensibilidad del precio de la Opción con respecto a la tasa libre de riesgo, y se denota como

$$\rho = \frac{\partial c}{\partial r}$$

Las formulas para un Call y para un Put

$$\begin{aligned} \rho^{CALL} &= X(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2), \\ \rho^{PUT} &= -X(T-t)e^{-r(T-t)}N(-d_2). \end{aligned}$$

8 Omega

La letra Omega mide la elasticidad de la opcion con respecto al underlying, matemáticamente,

$$\Omega = \frac{S}{c}\frac{\partial c}{\partial S} = \Delta\frac{S}{c} = \frac{S}{c}N(d1).$$

Con anterioridad se derivo que esta letra relaciona a la volatilidad del underlying con la volatilidad de la opcion de forma lineal.

9 Relacion entre el Black & Scholes y las "Greeks"

Sabemos por secciones anteriores, que el cambio en el premium de una opcion viene dado por

$$dc(S,t) = c_t dt + c_S dS + \frac{1}{2} c_{SS} (dS)^2.$$

Con los conceptos antedichos, podemos rescribir esta ecuacion como

$$dc(S,t) \approx \Theta dt + \frac{1}{2}\Gamma (dS)^2 + \Delta dS.$$

Asimismo la ecuacion diferencial que caracteriza el pricing de una opcion

$$c_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 c_{SS} + rSc_S - rc = 0,$$

nos brinda una relacion entre Δ, Θ, Λ. Si reemplazando por las definiciones de las letras griegas, obtenemos

$$\Theta + \frac{1}{2}(\sigma S)^2 \Gamma + rS\Delta - rc = 0,$$

para una posicion Delta Neutral, rescribimos esta ecuacion como

$$\Theta + \frac{1}{2}(\sigma S)^2 \Gamma = rc,$$

esta ultima ecuacion nos permite inferir la relacion entre Γ y Θ dada una posicion delta neutral, cuando Θ es alta, Γ es baja (y viceversa).