Riesgo, Incertidumbre y Finanzas

Bonos corporativos

Francisco Terfi

09/11/2022

Outline

Outline

Introducción

- Hasta ahora trabajamos con bonos para los cuales no existía riesgo de default.
- Cuando el bono es emitido por una firma este supuesto no es razonable ya que el bono solo se cobra si la empresa no quiebra.
- Para concentrarnos en el riesgo de default y su relación con el precio de un bono corporativo, eliminamos el riesgo de tasa de interés (asumimos que la misma es constante).
- El primer modelo que analizaremos asume que el tiempo de quiebra está fijado (similar a la fecha de expiración de una opción europea).
- Luego, examinaremos un modelo en el cual el momento del default es endógeno.

Outline

- Supongamos que el valor de mercado de una firma a tiempo t está dado por V que evoluciona según el siguiente proceso estocástico

$$dV = \mu V dt + \sigma V dz$$

- La firma emite acciones y un bono que no paga cupones y que paga un monto D a tiempo $T < \infty$. Podemos pensar a T como el momento de quiebra.
- Hay dos jugadores en este modelo: los poseedores del bono y los accionistas de la firma.
- Para determinar el payoff de los tenedores de bonos hay que notar que el valor de la firma puede ser mayor o menor a D en el momento T. Luego, el payoff viene dado por

$$BP = \min\{D, V\} = D - \max\{D - V, 0\}$$

  Podemos interpretar el valor del bono como el valor principal D menos un *put* sobre el valor de la firma con strike price D.
- El payoff de los tenedores de acciones es el valor residual de la firma luego de pagar a los bonistas (y si este valor es negativo, el pago es nulo)

$$EP = V - BP = V - \min\{D, V\} = \max\{V - D, 0\}$$

  Este valor puede interpretarse como un call sobre el valor de la empresa con strike price D.
- Dado el proceso asumido para V podemos computar el valor del bono y del equity usando las fórmulas de valuación de un call y un put.

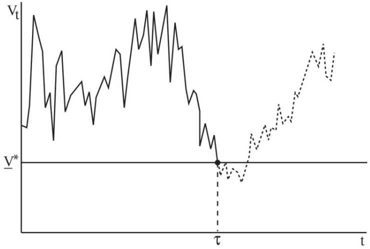
Outline

- Continuamos asumiendo el siguiente proceso para el valor de mercado de la firma

$$dV = rVdt + \sigma V dz$$

- A diferencia del modelo anterior, asumimos ahora que el momento de default τ es endógeno. En particular decimos que la firma quiebra cuando el valor de mercado alcanza un umbral $\underline{V}$ (inicialmente exógeno); esto es

$$\tau = \inf\{t \in [0, \infty) : V = \underline{V}\}$$



- Esta empresa emite un bono que paga cupones fijos de monto b de forma continua.
- Denotamos como $L_t(V)$ al precio de este bono. Si los agentes son neutrales al riesgo el precio del bono a tiempo $t < \tau$ viene dado por

$$L_t = E_t \left[\int_t^{\tau} (e^{-r(s-t)} b) ds + e^{-r(\tau - t)} (\underline{V} - \delta) \right]$$

  donde r es la tasa libre de riesgo y δ es el costo de default.
- Notemos que podemos reescribir la parte de la ecuación anterior asociada al pago de cupones de la siguiente forma

$$\int_t^{\tau} (e^{-r(s-t)} b) ds = \frac{b}{r} \left(1 - e^{-r(\tau - t)} \right)$$

- Luego, podemos expresar el precio como

$$L_t = \frac{b}{r} + E_t \left[e^{-r(\tau - t)} \right] \left(\underline{V} - \delta - \frac{b}{r} \right) \qquad (1)$$

- La expresión anterior indica que el precio del bono es el valor de un consol más la diferencia actualizada del valor de la firma cuando quiebra neto del costo (efectivo y de oportunidad).

- Buscamos ahora resolver para la función $L(V)$. Partimos de la siguiente condición de no arbitraje
$$Lrdt = bdt + E_t[dL]$$
- Usando el lema de Ito podemos caracterizar dL
$$\begin{aligned} dL &= L_V dV + \frac{1}{2} L_{VV} (dV)^2 \\ &= L_v (rVdt + \sigma V dz) + \frac{1}{2} L_{VV} (\sigma V)^2 dt \\ &= \left(rL_V V + \frac{\sigma^2}{2} L_{VV} V^2 \right) dt + \sigma L_V V dz \end{aligned}$$
- Sustituyendo en la condición de no arbitraje obtenemos la siguiente ecuación diferencial de segundo orden no homogénea que caracteriza el precio del bono
$$rL - rVL_V - \frac{\sigma^2}{2} V^2 L_{VV} = b$$
- Para esta ecuación diferencial se sigue que $L(V)^{SPNH} = \frac{b}{r}$ y $L(V)^{SGH} = C_1 V^{\lambda_1} + C_2 V^{\lambda_2}$ con $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 > 0$ y C_1 y C_2 a determinar.

- Entonces el precio viene caracterizado por

$$L(V) = \frac{b}{r} + C_1 V^{\lambda_1} + C_2 V^{\lambda_2}$$

- Para determinar las constantes C_1 y C_2 utilizamos las siguientes condiciones de borde:
  - Si $V \to \infty$ la probabilidad de default es nula y el precio del bono debe igualarse a $\frac{b}{r}$ (consol libre de riesgo); luego
  $$C_2 = 0$$
  - En el momento de la quiebra (cuando $V = \underline{V}$) el valor del bono debe ser $L(\underline{V}) = \underline{V} - \delta$; luego
  $$C_1 = \frac{\underline{V} - \delta - \frac{b}{r}}{\underline{V}^{\lambda_1}}$$

- Entonces la solución es

$$\begin{aligned} L(V) &= \frac{b}{r} + \left(\frac{\underline{V} - \delta - \frac{b}{r}}{\underline{V}^{\lambda_1}} \right) V^{\lambda_1} \\ &= \frac{b}{r} + \left(\frac{V}{\underline{V}} \right)^{\lambda_1} \left(\underline{V} - \delta - \frac{b}{r} \right) \end{aligned}$$

- Comparando esta expresión con (1) se concluye que el factor de descuento es

$$E_t \left[e^{-r(\tau - t)} \right] = \left(\frac{V}{\underline{V}} \right)^{\lambda_1}$$

$\underline{V}$ endógeno

- Hasta ahora tomamos la cota $\underline{V}$ como variable exógena; sin embargo podemos pensar que los accionistas pueden forzar la quiebra y dejan de pagar cupones.
- Es razonable asumir que los accionistas elegirán el valor $\underline{V}$ que maximiza el equity (su pago). El valor del equity viene dado por

$$
\begin{aligned}
EP &= V - \delta \left(\frac{V}{\underline{V}}\right)^{\lambda_1} - L(V) \\
&= V - \delta \left(\frac{V}{\underline{V}}\right)^{\lambda_1} - \frac{b}{r} - \left(\frac{V}{\underline{V}}\right)^{\lambda_1} \left(\underline{V} - \delta - \frac{b}{r}\right) \\
&= \left(V - \frac{b}{r}\right) - \left(\underline{V} - \frac{b}{r}\right) \left(\frac{V}{\underline{V}}\right)^{\lambda_1}
\end{aligned}
$$

  - Notar que en el momento de default ($V = \underline{V}$) el equity tiene valor nulo.

- El problema de los accionistas es

$$\max_{\underline{V}} \quad \left(V - \frac{b}{r}\right) - \left(\underline{V} - \frac{b}{r}\right)\left(\frac{V}{\underline{V}}\right)^{\lambda_1}$$

CPO

$$\left(\frac{V}{\underline{V}}\right)^{\lambda_1} - \lambda_1\left(\underline{V} - \frac{b}{r}\right)\left(\frac{V}{\underline{V}}\right)^{\lambda_1 - 1}\frac{1}{\underline{V}^2} = 0$$

- Podemos despejar el valor $\underline{V}$ que resuelve para la condición de primer orden

$$\underline{V}^* = -\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_1}\right)\frac{b}{r}$$