DESARROLLO ECONÓMICO

Trabajo práctico N°1

Juan Guillermo Muñoz Delgado

Exercise 1

(a) Si bien los autores recalcan que existen muchas variables que pueden reflejar el bienestar económico de una región, para ellos el PBI per cápita posee una gran capacidad de sintetizar todas ellas en una única variable que, además, puede ser explicada fácilmente dado que está presente en la mayoría de modelos de desarrollo económico.

(b) Para los autores el principal problema de usar el tipo de cambio nominal para computar el PBI es su alta volatilidad y cómo esta puede llevar a conclusiones desacertadas. Las investigaciones que usan esta metodología están atadas a la evolución del mercado de divisas y son altamente sensibles a *shocks* temporales que tienen poco que ver con el crecimiento económico.

(c) Usando la notación y los supuestos propuestos por el libro se llega los siguientes resultados:

Proposición 1.1 — $Y = F(K, L) = K^{\alpha}L^{1-\alpha} \implies y = k^{\alpha}$

Prueba 1.1 — $Y = K^{\alpha}L^{1-\alpha} \implies \dfrac{Y}{L} = \dfrac{K^{\alpha}L^{1-\alpha}}{L} \implies y = \dfrac{K^{\alpha}}{L^{\alpha}} \implies y = k^{\alpha}$

Proposición 1.2 — $\dot{K} = sY - \delta K \implies \dot{k} = sy - (n + \delta)k$

Prueba 1.2 — Sabiendo que si $y(t) = log(x(t))$ se cumple que: $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx}\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\dot{x}}{x}$

$$k = \frac{K}{L} \implies log(k) = log(K) - log(L) \implies \frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L} \implies \frac{\dot{k}}{k} = \frac{sY}{K} - \frac{\delta K}{K} - n \implies$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{sK^{\alpha}L^{1-\alpha}}{K} - \delta - n \implies \frac{\dot{k}}{k} = s\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha-1} - \delta - n \implies \frac{\dot{k}}{k} = sk^{\alpha-1} - \delta - n \implies$$

$$\dot{k} = sk^{\alpha} - \delta k - nk \implies \dot{k} = sy - (n + \delta)k$$

(d) En el largo plazo del modelo de Solow los países llegan a lo que se conoce en la literatura como "estado estacionario". Una vez allí la cantidad de capital por trabajador no cambia a través del tiempo. Algrabraicamente:

$$\dot{k} = 0 \implies sk^{\alpha} = (n + \delta)k$$

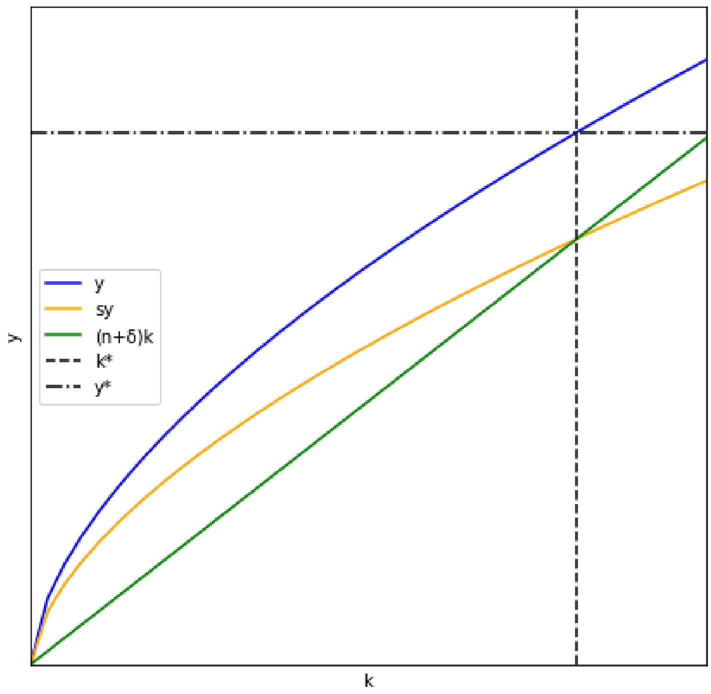
el k que resuelve esta ecuación, k^{*}, es el siguiente:

$$k^* = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{1/(1-\alpha)}$$

Dadas las definiciones y demostraciones del inciso anterior sabemos que el producto por trabajador será igual a:

$$y^* = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\alpha/(1-\alpha)}$$

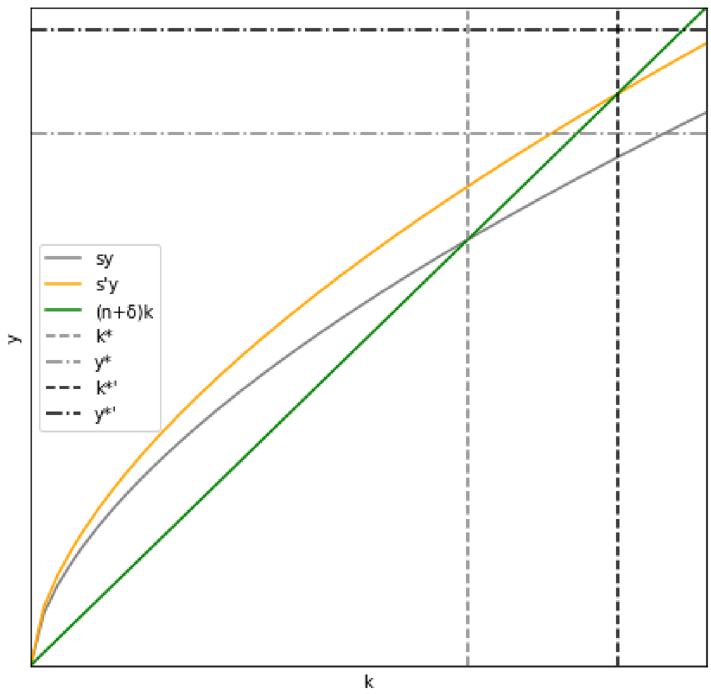
Es decir, una vez la inversión efectiva se iguala a la tasa de depreciación del capital ajustada por el crecimiento de la población el producto por trabajador se va a mantener estático. Graficamente[1]:



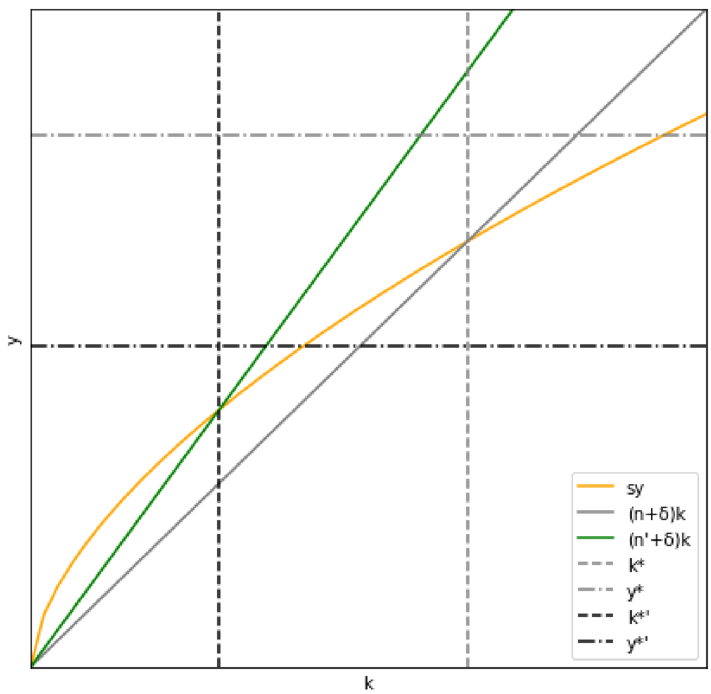
Si bien los países pueden comenzar con un capital menor o mayor al de estado estacionario, las decisiones de inversión eventualmente harán converger a las economía hacía la predicción antes descripta. Teniendo en cuenta la tasa de crecimiento del capital por trabajador se puede notar que cuanto más alejados empiecen los países de su equilibrio más rápido será su crecimiento/decrecimiento en el corto y mediano plazo. La razón principal de este comportamiento es que los agentes no tienen ninguna herramienta con la cual ser cada vez más productivos (lo que después llamaremos tecnología) por lo cual el estancamiento es inevitable.

(e) Un *shock* exógeno en la tasa de ahorro permitirá alcanzar un estado estacionario con un mayor capital (pues el ahorro se destina a la inversión) y por ende un mayor producto por trabajador. Analíticamente el resultado es inmediato viendo las expresiones de y^* y k^*. En el diagrama de Solow la curva de ahorro sy se expande hacía arriba intersectando a la del capital por trabajador en un punto más alto:

[1]Para consultar el código de todos los gráficos del trabajo práctico se puede consultar el siguiente repositorio: `https://github.com/CreamBBQ/Solow_model`



Por el contrario, un aumento en la tasa de crecimiento en la población contraerá la solución estacionaria dejando un capital y producto por trabajador inferior. La intuición detrás de este resultado es que este tipo de economías tienen que dedicar una más recursos para mantener la razón de capital-trabajo, dificultando la acumulación de capital. Gráficamente:

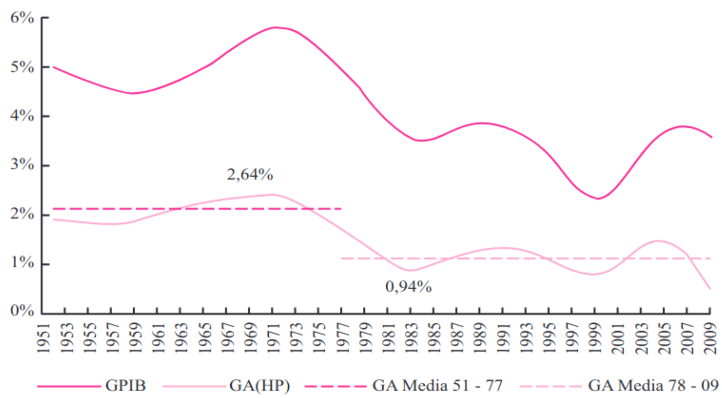


(f) Anteriormente se llegó a la conclusión de que el producto per cápita se mantenía estático en la solución estacionaria dado que los trabajadores no tenían un medio con el cual ser cada vez más productivos. Una vez se agrega la variable tecnológica se llega a uno de los principales resultados del modelo de Solow: los países crecen a la misma tasa en la que avanza su capacidad de ser más productivos. Algebraicamente la solución del modelo en términos de la producción y el capital por unidad de trabajo efectiva tiene la siguiente forma:

$$\tilde{k}^* = \left(\frac{s}{n+g+d}\right)^{1/(1-\alpha)}$$
$$\tilde{y}^* = \left(\frac{s}{n+g+d}\right)^{\alpha/(1-\alpha)} \implies \left(\frac{Y}{AL}\right) = \left(\frac{s}{n+g+d}\right)^{\alpha/(1-\alpha)} \implies y^*(t) = A(t)\left(\frac{s}{n+g+d}\right)^{\alpha/(1-\alpha)}$$

Como se puede ver, el producto por trabajador de equilibrio dejó de ser un número para pasar a ser una función dependiente del desarrollo tecnológico. Si bien puede parecer un resultado sencillo, este tiene un gran poder predictivo para las economías mundiales. En el caso de Colombia los investigadores Carlos Ortiz, José Uribe y Harvy Vivas realizaron una comparación entre el PBI ($GPBI$) y la productividad (GA_{HP}) donde se aprecia este resultado[2]:

TENDENCIAS DEL CRECIMIENTO ECONÓMICO Y DEL CRECIMIENTO DE LA PRODUCTIVIDAD



Fuente: Ortiz, C.H., Uribe, J.I. y Vivas, H. (2013).

Exercise 2

(a) Quitando los subíndices de tiempo por simplicidad a la vez que se usan los supuestos y notación del libro se tiene que:

Proposición 2.1 — $Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} \implies \dfrac{Y}{N} = A^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\dfrac{K}{Y}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\dfrac{L}{N}$

Prueba 2.1 — Sabiendo que $L^{\alpha} = \left(\dfrac{Y}{AK^{\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$

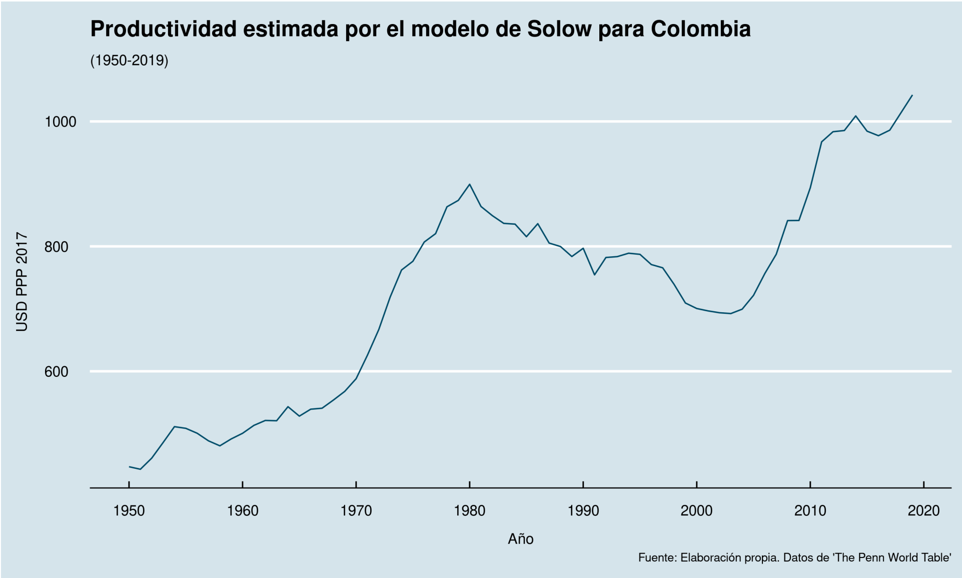
$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} = \frac{AK^{\alpha}L}{L^{\alpha}} \implies Y = AK^{\alpha}LA^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}K^{\frac{\alpha^2}{1-\alpha}}\frac{1}{Y^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} = A^{\frac{1}{1-\alpha}}K^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\frac{L}{Y^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \implies$$
$$Y = A^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}L \implies \frac{Y}{N} = A^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\frac{L}{N}$$

[2]Las estimaciones de productividad son propias de los autores y las tendencias se obtuvieron a través del filtro de Hodrick y Prescott

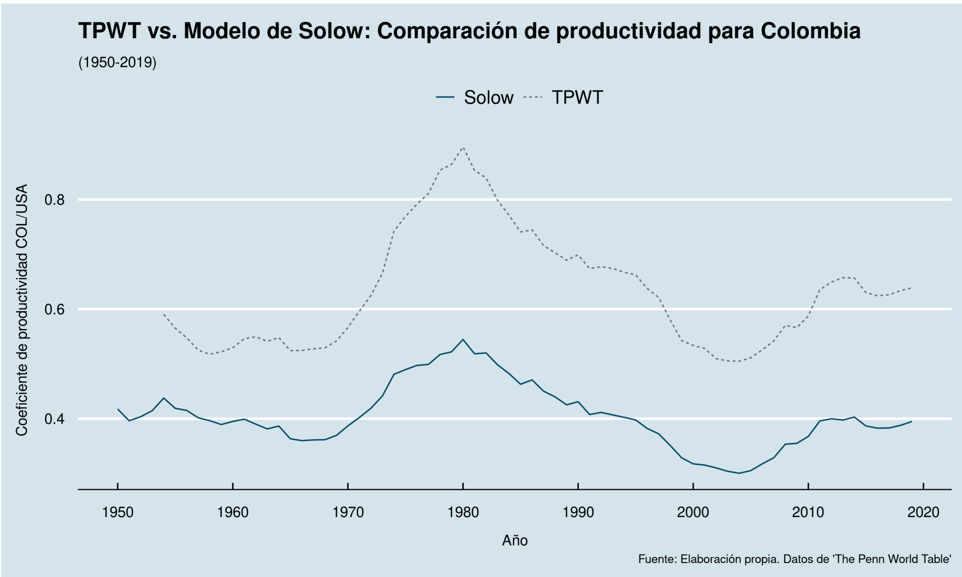
(b) Despejando de las ecuaciones propuestas por el ejercicio se llega a la siguiente expresión para el factor tecnológico:

$$\frac{Y}{N} = A^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \frac{L}{N} \implies A = \left(\frac{YL^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{LK^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\right)^{1-\alpha} = \left(\frac{Y^{1-\alpha}Y^{\alpha}}{L^{1-\alpha}K^{\alpha}}\right) \implies A = \frac{Y}{K^{\alpha}L^{1-\alpha}}$$

Usando los datos de 'the penn world tables' gráfico la predicción del modelo de Solow para la tecnología en Colombia:



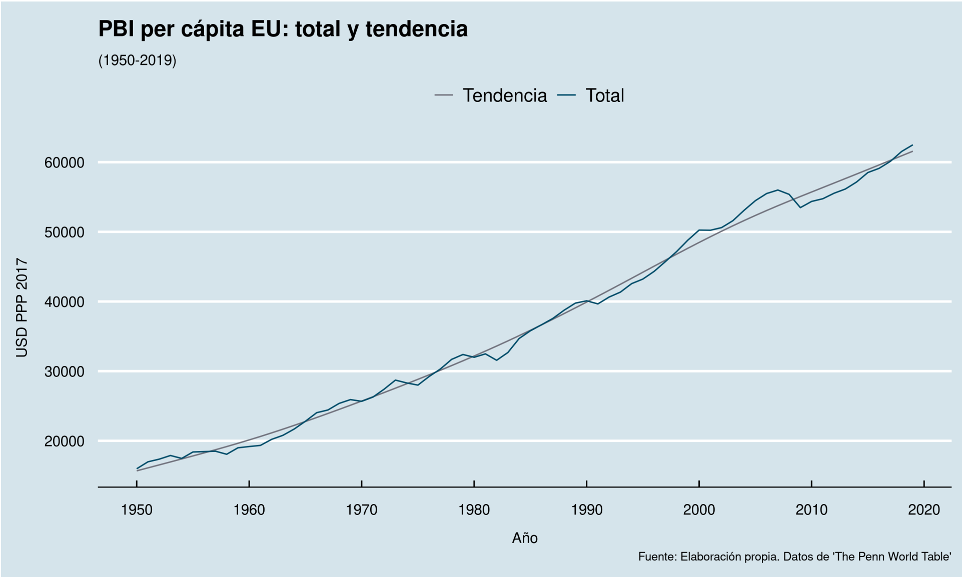
(c) En la siguiente figura se puede apreciar como los datos de TPWT y el modelo de Solow siguen tendencias muy similares, sin embargo, están considerablemente desfasadas en nivel.



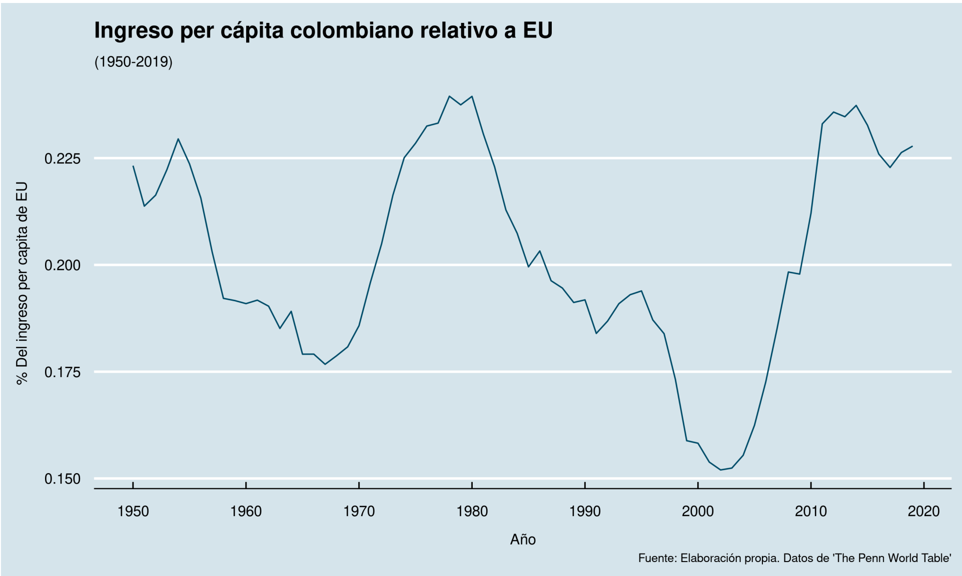
Definiendo ε como la diferencia entre la curva gris y la curva azul reporto algunas medidas estadísticas de interés con el fin de entender mejor la disparidad:

	Media	Varianza	Desvió Estándar
ε	0.2279	0.0033	0.05752008

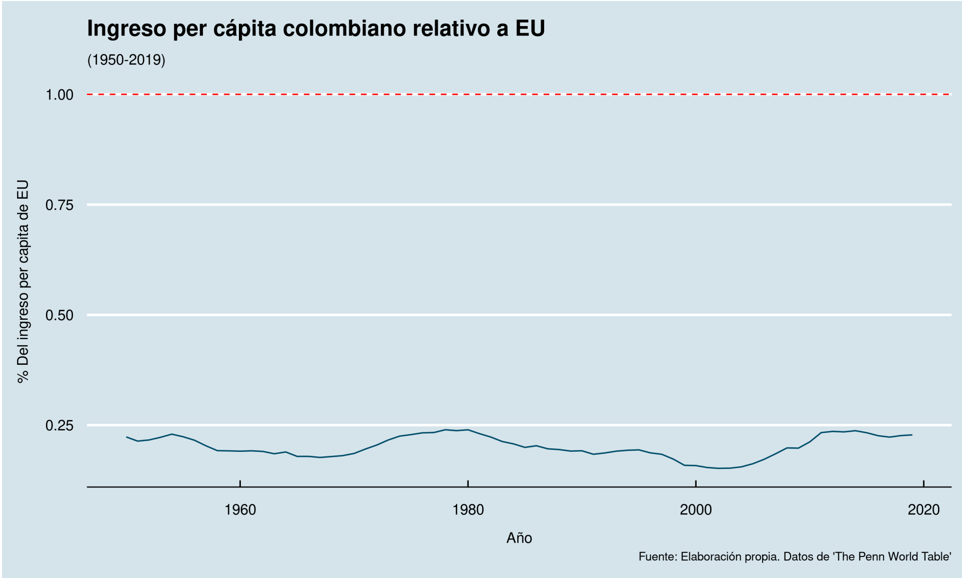
(d) Para obtener la tendencia lineal de la serie del producto per cápita de estados unidos utilizo el filtro de Hodrick y Prescott con un nivel de suavizamiento $\lambda = 1600$. La comparación entre la serie original y la suavizada se puede apreciar en el siguiente gráfico:



(e) El ingreso per cápita de Colombia relativo a Estados Unidos da como resultado:



Sin embargo, el gráfico toma verdadera dimensión cuando se tiene en cuenta la escala de comparación:



(f) La recuperación económica de Colombia que me lleva a encasillarlo como un milagro económico a partir del año 2002 tiene que ver, sobre todo, con el aumento de la productividad en el país. Si bien la decadencia entre los 1980-2002 tiene que ver, sobre todo, con factores institucionales que exceden al trabajo práctico, el aumento en A, siguiendo la notación de Solow, parece ser el componente principal del crecimiento del país. Como se pudo ver el inciso (c) la productividad empieza a crecer en el año 2002 potenciando el producto per cápita.

No es coincidencia que las fechas coincidan con un cambio radical de gobierno que impulsó medidas para facilitar la contratación de empleo y el aumento de la inversión que también son variables esenciales para explicar los niveles que el país está experimentando actualmente. Si bien excede a los términos del modelo que estamos analizando, mucho del acercamiento de Colombia a Estados Unidos en los últimos años tiene que ver con medidas pro mercado de parte del gobierno y la estabilidad de la guerra de guerrillas luego del proceso de paz impulsado por Juan Manual Santos, todo esto sin perder de mente que el modelo de Solow predice un crecimiento acelerado de las economías que empiezan con un capital inferior al de estado estacionario, como es este el caso.