

第一章 函数与极限

§1 映射与函数(基础部分)

一、填空题

1. 若 $f(x) = \frac{1}{1-x}$, 则 $f[f(x)] =$ _____.

2. 若 $f(x + \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 1$, 则 $f(x) =$ _____.

3. $\arccos(-\frac{1}{2}) =$ _____ 4. $\sec \frac{3\pi}{4} =$ _____ 5. $\csc \frac{\pi}{6} =$ _____

6. $y = \sqrt{3-x} + \arcsin \frac{3-2x}{5}$ 的定义域为_____.

7. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 有定义且单调增加, $f(0) = 0, f(a) = a$, 则 $y = f(x)$ 与 $y = 0, x = a$ 围成的面积和 $y = f^{-1}(x)$ 与 $y = 0, x = a$ 围成的面积之和为_____

二、选择题

1. 函数 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 是 ()

(A) 奇函数. (B) 偶函数. (C) 有界函数. (D) 周期函数

2. 设 $f(x)$ 是定义在对称区间 $(-l, l)$ 上的任意函数, 则 $y = (f(x) - f(-x)) \arcsin x$ 是 ()

(A) 奇函数. (B) 偶函数. (C) 无界函数. (D) 周期函数

3. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 分别为定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的偶函数与奇函数, 则 $f(g(x))$ 与 $g(f(x))$ 分别 ()

(A) 都是奇函数. (B) 都是偶函数. (C) 是奇函数与偶函数. (D) 是偶函数与奇函数.

4. 下列函数中是初等函数的是 ()

(A) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x^2 + x, & x > 0 \end{cases}$ (B) $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$

(C) $f(x) = x + x^2 + x^3 + \dots$ (D) $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$

三、解答题

1. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x^2 + x, & x > 0 \end{cases}$, 求 $f(-x)$ 的表达式.

2. 设 $f(\sin^2 x) = \cos 2x + \tan^2 x$, $0 < x < 1$, 求函数 $f(x)$ 的表达式

3. 在同一个坐标系中作出函数 $y = \cot x$ 和 $y = \operatorname{arccot} x$ 的图形

四、设 $f(x)$ 是定义在对称区间 $(-l, l)$ 上的任意函数, 证明:

1. $f(x) + f(-x)$ 是偶函数, $f(x) - f(-x)$ 是奇函数;
2. $f(x)$ 总可表示为一个奇函数与一个偶函数之和.

§1 映射与函数(提高部分)

一、填空题

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}, \text{ 求 } f(f(f(x))) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

二、选择题

1. 设 $f(x)$ 严格单调增加, $\varphi(x)$ 严格单调减少, 并可以构成下面所见的复合函数, 则()

- (A) $f(\varphi(x))$ 必严格单调增. (B) $\varphi(f(x))$ 必严格单调减.
(C) $f(x)\varphi(x)$ 必严格单调增. (D) $f(x)\varphi(x)$ 必严格单调减.

2. 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 则 $y = x - [x]$ 是()

- (A) 无界函数 (B) 周期为 1 的周期函数 (C) 单调函数 (D) 偶函数

3. 下列等式成立的有 () 个:

- (1) $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$
(2) $\csc^2 x - \cot^2 x = 1$
(3) $\sin x \cos y = [\sin(x+y) + \sin(x-y)]/2$
(4) $\sin x \sin y = -[\cos(x+y) - \cos(x-y)]/2$
(5) $\cos x \cos y = [\cos(x+y) + \cos(x-y)]/2$

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

4. 下列等式成立的有 () 个:

- (1) $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$
(2) $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$
(3) $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$
(4) $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 1

§ 2 数列的极限(基础部分)

一、 填空题

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = \underline{\hspace{2cm}}$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n} = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. $|a| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. $a > 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \underline{\hspace{2cm}}$

5. 数列 $\{x_n\}$ 有界是此数列收敛的 $\underline{\hspace{2cm}}$ 条件.6. 设 $x_n = \frac{3n+1}{2n+1}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\hspace{2cm}}$. 对于预先任意给定的正数 ε , 可取 $N = \underline{\hspace{2cm}}$, 则当 $n > N$ 时, 总有 $|x_n - a| < \varepsilon$.

二、 选择题

1. 下列结论中, 正确的是 $\underline{\hspace{2cm}}$.(A) 若 $x_n > 0$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n > 0$;

(B) 发散数列必无界;

(C) 无界数列必发散;

(D) 有界数列必收敛;

2. 下列结论错误的是 ().

(A) 若 $a \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ (B) 若 $a \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$ (C) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$ (D) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

§ 2 数列的极限(提高部分)

一、用定义证明: $0.\dot{9}=1$

二、选择题

1. “对任意给定的 $\varepsilon \in (0,1)$, 总存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| \leq 2\varepsilon$ ”是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的().

(A) 充分但非必要条件; (B) 必要但非充分条件;

(C) 充分必要条件; (D) 既非充分又非必要条件.

2. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \neq 0$, 则当 n 充分大时, 下列结论正确的有().

(A) $|a_n| > \frac{|a|}{2}$ (B) $|a_n| < \frac{|a|}{2}$ (C) $a_n > a - \frac{1}{n}$ (D) $a_n < a + \frac{1}{n}$

3. 数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ 的几何意义是().

(A) 在点 A 的某一邻域内部, 含有 $\{x_n\}$ 中的无穷多个点;

(B) 在点 A 的某一邻域外部, 含有 $\{x_n\}$ 中的无穷多个点;

(C) 在点 A 的任何一个邻域的外部, 含有 $\{x_n\}$ 中的无穷多个点;

(D) 在点 A 的任何一个邻域的外部, 至多含有 $\{x_n\}$ 中的有限个点.

4. 设 $\{x_n\}$ 是数列, 则下列命题不正确的是().

(A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$

(B) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

(C) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = a$

(D) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

§3 函数的极限(基础部分)

一. 填空题

$$1. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \underline{\hspace{2cm}} \quad 2. \text{ 已知 } f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \\ x-1, & x > 0 \end{cases}, \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \underline{\hspace{2cm}} \quad 4. \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arc} \cot x = \underline{\hspace{2cm}} \quad 6. \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccot} x = \underline{\hspace{2cm}}$$

二、选择题

1. 下列结论中正确的是().

(A) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 、 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 均存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在;

(B) 若 $f(x) > 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $A > 0$;

(C) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$, 则在 x_0 的某去心邻域内必有 $f(x) > 0$;

(D) 若 $f(x) > g(x)$ 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则 $A > B$.

三、利用左右极限证明

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \text{ 不存在}$$

$$2. [x] \text{ 为取整函数, } f(x) = x \left[\frac{1}{x} \right], \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{5}} f(x) \text{ 不存在}$$

§ 3 函数的极限(提高部分)

一、选择题

1. 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 不存在, 则下列结论正确的是().
- (A) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$ 必不存在; (B) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$ 必存在;
- (C) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ 必不存在; (D) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ 必存在.

二、根据函数极限的定义证明:

1. $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{1-4x^2}{1+2x} = 2$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

§4 无穷小与无穷大

§5 极限运算法则(基础部分)

一、填空题

$$1. \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \underline{\quad}. \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \underline{\quad}. 2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2x^2 + 1} \arctan(1 + \sin x) = \underline{\quad}.$$

二、选择题

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x-1}} = \underline{\quad}.$$

(A) 2 (B) 0 (C) ∞ (D) 不存在也不为 ∞

2. 下列结论中正确的是()

(A) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} a(x) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{a(x)} = \infty$ ($a(x) \neq 0$);

(B) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \infty$;

(C) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 则等式 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ 与 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ 至少有一式成立;

(D) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 均不存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$ 必不存在.

3. 下列计算过程正确的是()

(A) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\beta(x)} = b \neq 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) \beta(x) = 0$;

(B) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = 0$;

(C) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x+2)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x-2)} = \frac{4}{0} = \infty$;

(D) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0$.

4. 数列 $\{x_n\}$ 的通项公式为:

$$x_n = \begin{cases} \frac{\sqrt{n} + n^2}{n}, & n = 2k + 1 \\ \frac{1}{n}, & n = 2k \end{cases}, k \in N, \quad \text{则 } n \rightarrow \infty \text{ 时, } x_n \text{ 是()}$$

(A) 无穷大量; (B) 无穷小量; (C) 有界变量; (D) 无界变量.

三、计算下列极限

1.
$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 + 1}$$

2.
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$$

3.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^4 - 3x^2 + 1}$$

4.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x - 9)^{10} (5x + 3)^{20}}{(6x - 1)^{15} (3x + 2)^{15}}$$

5.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n-1}}{2^n + 3^n}$$

6.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} [1 + 2 + \cdots + (n-1) - \frac{n^2}{2}]$$

7.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + \cos x}{x - \sin x}$$

8.
$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$$

9.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$$

10.
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}})$$

§ 4 无穷小与无穷大

§ 5 极限运算法则(提高部分)

一、选择题

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{x}{|x|} \right] = (\quad).$$

- (A) 1 (B) -1 (C) 0 (D) 不存在

2. 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 则下列结论正确的是()

- (A) 若 x_n 发散, 则 y_n 必发散; (B) 若 x_n 无界, 则 y_n 必有界;
 (C) 若 x_n 有界, 则 y_n 必为无穷小; (D) 若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小, 则 y_n 必为无穷小.

3. 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 函数 $y = x \cos x$ 是()

- (A) 无穷小; (B) 无穷大;
 (C) 有界的, 但不是无穷小; (D) 无界的, 但不是无穷大.

二、计算下列极限

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + x})$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$$

班级:

姓名:

序号:

3. 设 $x_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{1}{4n^2 - 1}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

4. $|a| < 1$ 时, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+a)(1+a^2)(1+a^4) \cdots (1+a^{2^n})$

三. 已知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{x^2 - x} - ax - b) = 0$, 求 a 、 b 的值.

§ 6 极限存在准则 两个重要极限(基础部分)

一、填空题

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cot x = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^{\frac{x}{3}} = 8$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}.$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+5}{5x+3} \cdot \sin \frac{1}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$

二、选择题

1. 下列各极限中, 与 $\lim_{n \rightarrow \infty} [\ln(n+1) - \ln n]$ 值相等的是().

(A) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$; (B) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin x$; (C) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \arctan x$; (D) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$

2. 下列各式中正确的是()

(A) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$; (B) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^{|x|} = e$; (C) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{x})^x = e$; (D) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^{-x} = e$

三、计算下列极限

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x};$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{2}{\sin x}};$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + \tan^2 x}{x \sin x};$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+2}\right)^x$

班级:

姓名:

序号:

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{x^2}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{x^3}$

§ 6 极限存在准则 两个重要极限(提高部分)

一、计算下列极限

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin 2x + \cos x)^{\frac{1}{x}}$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (1^n + 2^n + \cdots + 2021^n)^{\frac{1}{n}}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$

4. 设 $0 < a < b$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^{-n} + b^{-n}}$

二、利用极限存在准则证明

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n^2 + \pi} + \frac{1}{n^2 + 2\pi} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n\pi} \right) = 1$

2. 设 $x_1 = \sqrt{2}$, $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$ ($n = 2, 3, \cdots$), 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ [提示: 先证数列 $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$

极限存在再证极限值为 2]

3. 设 $a > 0$, $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在并求极限值.

§ 7 无穷小的比较(基础部分)

一、选择题

1. $x \rightarrow 0$ 时, $\tan 3x$ 是 $2x$ 的().
(A) 高阶无穷小; (B) 同阶无穷小, 但不等价;
(C) 低阶无穷小; (D) 等价无穷小.
2. 设 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, $g(x) = 1-x^3$, 则当 $x \rightarrow 1$ 时, f 是 g 的().
(A) 高阶无穷小; (B) 同阶(但不等价)无穷小;
(C) 低阶无穷小; (D) 等价无穷小.
3. 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 与 \sqrt{x} 等价的无穷小量是 ().
(A) $1 - e^{\sqrt{x}}$. (B) $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$.
(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$. (D) $1 - \cos \sqrt{x}$.

二、利用等价无穷小的性质, 求下列极限

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x)}{\tan(\sin x)}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin x^2}{1 - \cos x^2}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arctan x^2}{\ln(1+x^3)}$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x^2 \arctan \frac{1}{x})}{\sin x}$

§ 7 无穷小的比较(提高部分)

一、填空题:

1. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a} (b + \cos x) = 5$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} =$ _____

3. 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = \sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}$ 为 x^k 的同阶无穷小, 则 $k =$ _____.

二、选择题

1. 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - \cos x) \ln(1 + x^2)$ 是比 $x \sin x^n$ 高阶的无穷小, 而 $x \sin x^n$ 又是比 $e^{x^2} - 1$ 高阶的无穷小, 则正整数 n 等于 _____.

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4.

2. $x \rightarrow 0^+$ 时, $\ln^\alpha(1 + 2x)$ 与 $(1 - \cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小, 则 α 的可能取值范围是 _____.

(A) $(2, +\infty)$ (B) $(1, 2)$ (C) $(\frac{1}{2}, 1)$ (D) $(0, \frac{1}{2})$

3. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列无穷小中阶数最高的是 _____.

(A) $3x^3 - 4x^4 + x^5$ (B) $\sqrt{1 + \ln(1 + x^4)} - 1$
(C) $e - e^{\cos x}$ (D) $\ln(x^3 + e^x) - x$

三. 求下列极限

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1 + x)}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin^2 x + e^x) - x}{\ln(x^2 + e^{2x}) - 2x}$

班级:

姓名:

序号:

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{\ln(2-\cos x+\sin x)}$

4. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1} = 2$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\tan(\sin x) - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{x \cos x}}{x \ln \cos x}$

四. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \right)^{\frac{1}{\sin kx}} = e$, 求 k 的值。

五. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^{\sin x}}{x^3}$, 求 a 的值。

§ 8 函数的连续性与间断点(基础部分)

一、填空题

1. $x=0$ 是函数 $\frac{\sin x}{|x|}$ 的第_____类_____间断点; 2. $x=0$ 是函数 $\cos^2 \frac{1}{x}$ 的第_____类

间断点;

3. $x=0$ 是函数 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 的第_____类_____间断点; 4. $x=0$ 是函数 $\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ 的第_____类

间断点.

二、求下列函数的间断点并指出其类型

$$1. y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$2. y = \frac{x}{\tan x}$$

$$3. y = \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{x(x-1)}$$

$$4. y = \arcsin \frac{|x|}{x}$$

$$5. y = \arctan \frac{1}{x-1}$$

$$6. y = \frac{2e^{\frac{1}{x}} + 3}{3e^{\frac{1}{x}} + 2}$$

§ 8 函数的连续性与间断点(提高部分)

一、单选题

1. 函数 $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点个数为 ().

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

2. 设 $f(x) = \lim_{t \rightarrow x} \left(\frac{\sin t}{\sin x} \right)^{\frac{t}{\sin t - \sin x}}$, 则有 ().

- (A) $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点
(B) $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点
(C) $x = 0$ 是第一类间断点, $x = k\pi (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ 是第二类间断点
(D) $x = 0$ 是第二类间断点, $x = k\pi (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ 是第一类间断点

二、研究函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x \frac{1 - x^{2n}}{1 + x^{2n}}$ 的连续性, 若有间断点, 判别其类型.

班级:

姓名:

序号:

三. 试确定 a, b 的值, 使 $f(x) = \frac{e^x - b}{(x-1)(x-a)}$ 有无穷间断点 $x=0$; 有可去间断点 $x=1$.

四. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln \cos(x-1)}{1 - \sin \frac{\pi}{2} x} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$, 问 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是否连续? 若不连续, 修改定义使之在 $x=1$ 处连续.

§ 9 连续函数的运算与初等函数的连续性

一. 填空题

1. $y = \frac{1}{\ln(x-1)}$ 的连续区间是_____.

2. 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ x+a, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 则 $a =$ _____.

二、求下列极限

1. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{9}} \ln(2 \cos 3x)$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x-4} - \sqrt{x}}{x-1}$

三、选择题

1. 下列命题正确的是().

(A) 若 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, $g(x)$ 在点 x_0 处不连续, 则 $f(x)+g(x)$ 在 x_0 处必定不连续;

(B) 若 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在 x_0 处均不连续, 则 $f(x)+g(x)$ 在 x_0 处必不连续;

(C) 若 $f(x)$ 在 x_0 处连续, $g(x)$ 在 x_0 处不连续, 则 $f(x) \cdot g(x)$ 在 x_0 处必不连续;

(D) 若 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在 x_0 处均不连续, 则 $f(x) \cdot g(x)$ 在 x_0 处必不连续.

2. 下列命题正确的是().

(A) 初等函数在其定义域内连续;

(B) 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内必有界;

(C) 若 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 则 $|f(x)|$ 在 x_0 处连续;

(D) 若 $|f(x)|$ 在 x_0 处连续, 则 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

§ 10 闭区间上的连续函数的性质

一、证明题

1. 证明方程 $x^5 - 3x - 1 = 0$ 至少有一实根位于开区间 $(1, 2)$ 内.

2. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$ 则在 $[x_1, x_n]$ 内至少存在一点 ξ , 使

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

3. 设 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 且对任意的 x_1, x_2 都有 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

证明: 若 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

4. 讨论 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^n + x^n)}{n}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 的连续性.

第一章自测题(基础部分) (100 分)

一、填空题 (20 分)

1. $y = \ln \tan 2x$ 是由_____这些基本初等函数复合而成的.

2. 若 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 内的奇函数, 且 $f(1) = 2$, 且对于任何实数 x 均有 $f(x+2) - f(x) = f(2)$, 则 $f(2) =$ _____.

3. 分别用(A)=1, (B)=0, (C)= ∞ , (D)不存在也不为 ∞ , 四项中取合适的填入下述空格.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$ _____;

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$ _____;

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ _____;

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \sin \frac{1}{x}$ _____.

4. 设 $f(\sin \frac{x}{2}) = 1 + \cos x$, 则 $f(\cos \frac{x}{2}) =$ _____.

二、求下列极限 (36 分)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin 2x}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 1} \right)$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^x - 2e^{-x}}{2e^x + 3e^{-x}}$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{3x}$

班级:

姓名:

序号:

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - \sin x}{2x^2 + \cos x}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

三、证明与综合题 (44 分)

$$1. \text{ 证明: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right) = 1$$

$$2. \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{2x} & x < 0 \\ (1+ax)^{\frac{1}{x}} & x > 0 \end{cases} \quad \text{求 } a \text{ 使 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ 存在.}$$

3. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2-2\cos x}}{x}, & x < 0 \\ ae^x, & x \geq 0 \end{cases}$ 问 a 为何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

4. 证明: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) < a$, $f(b) > b$, 试证: 在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f(\xi) = \xi$.

5. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - ax - b \right) = 0$, 求参数 a, b .

6. 已知 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + ax + b}{x - a} = 3$, 求参数 a, b .

第一章自测题(提高部分) (100 分)

一、填空题 (18 分, 每空 3 分)

1. 若 $f(x) = \frac{e^x - a}{x(x-1)}$ 有无穷间断点 $x=0$ 及可去间断点 $x=1$, 则 $a=$ _____.

2. $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$ 的间断点是 $x=$ _____.

3. 设 $f(x) = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{x-1}}}$, 则 $f(x)$ 有间断点 $x=$ _____, 是_____型, 及间断点 $x=$ _____, 是_____型

型

二、选择题 (10 分)

1. 当 $x \rightarrow 1$ 时, $1 + \cos \pi x$ 是 $x-1$ 的()

(A) 高阶无穷小; (B) 低阶无穷小;

(C) 同阶非等价无穷小; (D) 等价无穷小.

2. 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, $f(x)$ 连续且 $f(x) \neq 0$, $\varphi(x)$ 有间断点, 则().

(A) $\varphi[f(x)]$ 必有间断点; (B) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点;

(C) $f[\varphi(x)]$ 必有间断点; (D) $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点.

三、求下列极限 (48 分)

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - \sqrt{x})(1 - \sqrt[3]{x})}{1 + \cos \pi x}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos^n \theta - \sin^n \theta}{\cos^n \theta + \sin^n \theta} \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

班级:

姓名:

序号:

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}$

4. 求 $f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x + e^{tx}}{1 + x e^{tx}}$ 的表达式..

5. $\lim_{x \rightarrow 2} (3-x)^{\tan \frac{\pi}{4} x}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-5x} - \sqrt{1-3x}}{x^2 + 2x}$

四、(12 分) 若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.

五、(12 分) 利用左右极限求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x}} + 1}{e^{\frac{1}{x}} - 1} \arctan \frac{1}{x}$.

第一章 答案

习题 1-1 (基础部分)

一、1. $1-x^{-1}$; 2. x^2-3 ; 3. $2\pi/3$; 4. $-\sqrt{2}$; 5. 2; 6. $-1 \leq x \leq 3$; 7. a^2

二、1. A; 2. B; 3. B; 4. B

三、1. 当 $x \geq 0$ 时, $f(-x) = x^2$, 当 $x < 0$ 时, $f(-x) = x^2 - x$

2. $f(x) = 1 - 2x + x(1-x)^{-1}$, $x \in (0, \sin^2 1)$

(提高部分)

一、1; 二、1. B; 2. B; 3. D; 4. C

习题 1-2 (基础部分)

一、1. 0; 2. 1; 3. 0; 4. 1; 5. 必要; 6. $\frac{3}{2}, \left[\frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon} \right]$; 二、1. C; 2. A;

(提高部分)

二、1. C; 2. A; 3. D; 4. D

习题 1-3 (基础部分)

一、1. 6; 2. -1, 1; 3. $\pi/2$; 4. $-\pi/2$; 5. 0; 6. π ; 二、1. C;

(提高部分)

一、1. C

习题 1-4、1-5 (基础部分)

一、1. $+\infty, 0$; 2. 0; 二、1. D; 2. A; 3. A; 4. D

三、1. 2 2. $\frac{2}{3}$ 3. 0 4. $10^5 \cdot (5/9)^{15}$

5. $\frac{1}{3}$ 6. $-\frac{1}{2}$ 7. 2 8. -1 9. 1 10. .1

(提高部分)

一、1. A; 2. D; 3. D; 二、1. -1/2; 2. -2; 3. 1/2; 4. $1/(1-a)$

三、 $a=1; b=1/2$

习题 1-6 (基础部分)

一、1. $\frac{2}{5}$; 2. e^{-2} ; 3. 1; 4. $3\ln 2$; 5. $\frac{3}{5}$; 二、1. A; 2. A

三、1. 0 2. e^6 3. 3 4. e^2 5. -4 6. -1

(提高部分)

一、1. e^2 ; 2. 2021; 3. e^2 ; 4. $1/a$

二、3. 证明: 因为 $a > 0$, $X_1 > 0$, 由归纳法易证 $X_n > 0$, 从而

$$X_{n+1} = \frac{1}{2} \left(X_n + \frac{a}{X_n} \right) \geq \sqrt{X_n \cdot \frac{a}{X_n}} = \sqrt{a}.$$

因此有 $\frac{X_{n+1}}{X_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{a}{X_n^2} \leq 1$ 即 X_n 单调减小且有下界, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ 存在.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = A$, 由 $X_{n+1} = \frac{1}{2} \left(X_n + \frac{a}{X_n} \right)$ 可得 $A = \frac{1}{2} \left(A + \frac{a}{A} \right) \Rightarrow A^2 = a \Rightarrow A = \pm \sqrt{a}$.

由极限的唯一性及 $X_n > 0$ 可知: $A = \sqrt{a}$.

习题 1-7 (基础部分)

一、1. B; 2. B; 3. B

二、1. 3 2. 1 3. 2 4. $1/2$ 5. 1 6. 0

习题 1-7 (提高部分)

一、1. 1, 4; 2. 1; 3. 3

二、1. B; 2. B; 3. B

三、1. $\frac{3}{2}$; 2. 1; 3. $\frac{2}{3}$; 4. 6; 5. $\frac{1}{2}$; 6. -1; 四、-2; 五、 $a = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2}$

习题 1-8 (基础部分)

一、1. 一, 跳跃; 2. 二, 振荡; 3. 一, 可去; 4. 一, 跳跃;

二、1. $x=1$ 为第一类可去间断点; $x=2$ 为第二类无穷间断点.

2. $x=0$, $x=k\pi + \frac{\pi}{2}$ 为第一类可去间断点;

$x=k\pi (k \neq 0)$ 为第二类无穷间断点 ($k \in \mathbb{Z}$)

3. $x=0$ 为第二类无穷间断点; $x=1$ 为第一类可去间断点.

4. $x=0$ 为第一类跳跃间断点;

5. $x=1$ 第一类跳跃间断点; 6. $x=0$ 为第一类跳跃间断点.

习题 1-8 (提高部分)

一、1. B ; 2. C

二、除 $x=\pm 1$ 外, 函数对所有实数连续, $x=\pm 1$ 为第一类跳跃间断点.

三、当 $a=0$, $b \neq 1$ 时 $x=0$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点; 当 $a \neq 1$, $b=e$ 时 $x=1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

四、 $-\frac{4}{\pi^2}$

习题 1-9

一、1. $(1, 2) \cup (2, +\infty)$; 2. 1; 二、1. 0; 2. 2

三、1. A; 2. C;

习题 1-10

四、4. 函数在所讨论范围内都连续

第一章 自测题(基础部分)

一、1. $\ln x, \tan x$; 2. 4; 3. BADC; 4. $1 - \cos x$;

二、1. 0 2. $\frac{1}{4}$ 3. $\frac{3}{2}$ 4. e^3 5. $\frac{1}{2}$ 6. $\frac{1}{2}$

三、2. $a = -\ln 2$ 3. $a = -1$ 5. $a = 1, b = -1$ 6. $a = 1, b = -2$

(提高部分)

一、1. e 2. 1 3. 0, 无穷; 1, 跳跃.; 二、1. A 2. D

三、1. $\frac{1}{3\pi^2}$ 2. 当 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ 时, 1; 当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时, 0; 当 $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ 时, -1

3. $\frac{1}{2}$ 4. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ x, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 5. $e^{\frac{4}{\pi}}$ 6. $-\frac{1}{2}$

五、 $\frac{\pi}{2}$