第二章知识梳理

一、基本概念

1. 导数的概念

（1）导数的等价定义：

$y=f(x)$ 在点 x_0 可导 $\Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$，

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

（2）导数的几何意义：

在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$，表示曲线 $y=f(x)$ 在 $M(x_0,y_0)$ 处的切线斜率.

（3）可导与连续的关系

若 $f(x)$ 在 x_0 可导，则它在 x_0 一定连续.

注：①若 $f(x)$ 在 x_0 连续，$f(x)$ 在 x_0 不一定可导；如：$y=|x|$.

②若 $f(x)$ 在 x_0 不连续，则 $f(x)$ 在 x_0 一定不可导.

（1）微分的概念可微的条件： 一元函数 $y=f(x)$ 在 x_0 可微 $\Leftrightarrow y=f(x)$ 在 x_0 可导.

3 **微分的求法：** $dy=y'dx$.

4 高阶导数

（1）定义 若 $y=f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在点 x 处可导，则称 $f'(x)$ 在 x 处的导数为 $y=f(x)$ 在点 x 处的二阶导数，记为 $\dfrac{d^2y}{dx^2}, f''(x)$.

同样可定义 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$

（2）简单函数的 n 阶导数

$$(e^x)^{(n)}=e^x$$

$$[\ln(1+x)]^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \qquad (x^\alpha)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n}{2}\pi\right) \qquad (\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)$$

（2）求高阶导数的常用方法。

（i）拆项法.

（i i）利用莱布尼茨公式

$$(u\cdot v)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}，\ 其中 C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}，\ u^{(0)}=u, v^{(0)}=v.$$

二 基本公式及法则.（背过且会用）

1 常用的基本求导公式

$(c)'=0$，（c 为常数）； $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$；

$(e^x)'=e^x$； $(a^x)'=a^x\ln a,(a>0)$；

$(\sin x)'=\cos x$； $(\cos x)'=\sin x$；

$(\tan x)'=\sec^2 x$； $(\cot x)'=-\csc^2 x$；

$(\sec x)'=\sec x\tan x$； $(\csc x)'=-\csc x\cot x$；

$(\ln x)'=\frac{1}{x}$； $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}(a>0)$；

$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$； $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$； $(arc\cot x)'=-\frac{1}{1+x^2}$

2 导数的运算法则

设 $u=u(x),v=v(x)$ 均可导，则

（1）$(u\pm v)'=u'\pm v'$， （2）$(uv)'=u'v+uv'$，

（3）$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}(v\neq 0)$，

3 复合函数的求导法则

$u=g(x)$在x_0可导，$y=f(u)$在对应点u_0可导，则复合函数$f\left[g(x)\right]$在x_0可导，且

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=f'\left[g(x)\right]g'(x)$$

三 各类函数的求导方法

1 利用导数的四则运算以及复合运算法则求具体或抽象函数的导数.

2. 隐函数的导数.

方法：方程 $F(x,y)=0$ 两边对 x 求导，要记住 y 是 x 的函数，最后解出 y'.

3. 对数求导法.（可以求幂指函数以及多个函数相乘的导数）

$$y=u(x)^{v(x)}$$

$$\xRightarrow{\text{两边取对数}} \ln y=v(x)\ln u(x)$$

$$\xRightarrow{\text{两边关于}x\text{求导}} \frac{y'}{y}=v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$\Rightarrow y'=y\left[v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right]=u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right]$$

4. 参数方程求导法

设$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$，则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt}$，　　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dt}\Bigg/\dfrac{dx}{dt}$

5. 变限积分的导数

公式：设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$\forall x\in[a,b]$，积分上限函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 对 x 可导，

并且有 $\Phi'(x)=\dfrac{d}{dx}(\int_a^x f(t)dt)=f(x)$.

推论 设 $F(x)=\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)}f(t)dt$，则 $F'(x)=f[\varphi(x)]\varphi'(x)-f[\psi(x)]\psi'(x)$.

6. 分段函数在分界点处的导数.

$f(x)=\begin{cases}g(x), & x\neq x_0\\ A, & x=x_0\end{cases}$，一般利用导数定义，$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$f(x)=\begin{cases}g(x), & x\le x_0\\ h(x), & x\ge x_0\end{cases}$ 看$f_-'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$与$f_+'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$是否相等.