第四章内容梳理

一 基本概念

（一）原函数的概念

1．原函数的定义

若对于$\forall x \in I$，均有$F'(x)=f(x)$，则称$F(x)$为$f(x)$在区间 I 中的一个原函数.

2. 原函数存在的条件:连续函数一定有原函数.

（二）不定积分的概念

1．不定积分的定义

函数$f(x)$在区间 I 中的原函数的全体，称为$f(x)$在区间 I 中的不定积分，记为

$\int f(x)dx$. 设$F(x)$为$f(x)$在区间 I 中的一个原函数，则

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

其中$f(x)$——被积函数，$f(x)dx$——被积式，x——积分变量，C——积分常数

2．不定积分的性质

（1）$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ （$k \neq 0$为常数）

（2）$\int [f_1(x)\pm f_2(x)]dx=\int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$

（3）$\left[\int f(x)dx\right]'=f(x)$ 或 $d\int f(x)dx=f(x)dx$

（4）$\int F'(x)dx=F(x)+C$ 或 $\int dF(x)=F(x)+C$

二 不定积分的计算方法

（一）基本积分公式

$\int 0dx=C$	$\int 1dx=x+C$
$\int x^k dx=\frac{1}{k+1}x^{k+1}+C,(k\neq -1)$	$\int \frac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+C$
$\int \cos xdx=\sin x+C$	$\int \sin xdx=-\cos x+C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx=-\cot x+C$
$\int \sec x\tan xdx=\sec x+C$	$\int \csc x\cot xdx=-\csc x+C$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$	$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C$
$\int \tan xdx = -\ln\lvert \cos \rvert + C$	$\int \cot xdx = \ln\lvert \sin x \rvert + C$
$\int \sec xdx = \ln\lvert \sec x + \tan x \rvert + C$	$\int \csc xdx = \ln\lvert \csc x - \cot x \rvert + C$
$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$	

（二）常用积分方法

1 第一换元积分法（“凑”微分法）

设 $\int f(u)du = F(u)+C$， 则 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) \underline{\underline{令u=\varphi(x)}} \int f(u)du$

$$= F(u)+C \underline{\underline{回代u=\varphi(x)}} F[\varphi(x)]+C$$

2 第二换元积分法

$$\int f(x)dx \underline{\underline{令x=\varphi(t)}} \int f[\varphi(t)]d\varphi(t) = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

$$= F(t)+C \underline{\underline{反代换t=\varphi^{-1}(x)}} F[\varphi^{-1}(x)]+C$$

（1）．利用三角函数代换，变根式积分为三角有理式积分

被积函数 $f(x)$ 含根式	所作代换
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a\sin t$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x = a\tan t$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a\sec t$

（2）．根代换

（3）．其他形式的代换 如倒代换，指数代换等。

3 不定积分的分部积分法

设 $u(x)$ 、 $v(x)$ 可导，若 $\int u'(x)v(x)dx$ 存在，则

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx \ .$$

关键是把被积函数分成两部分，即在公式 $\int udv = uv - \int vdu$ 中，如何选取 u 和 dv。一般来讲，选取的原则是：（1）积分容易者选为 dv；（2）求导简单者选为 u .

常见的几种分部积分类型：

（1） $\int x^n e^{ax} dx$ 型， $\int x^n \cos wxdx$ 、 $\int x^n \sin wxdx$ 型；如， $\int \boldsymbol{x\cos xdx}$ ， $\int \boldsymbol{x^2 e^x dx}$ 。

（2） $\int f(x)$ •对数函数 dx 型， $\int f(x)$ •反三角函数 dx 型；如 $\int \boldsymbol{x\ln^2 xdx}$ ，。 $\int \boldsymbol{x^2 \arctan xdx}$

（3） $\int e^{ax}\sin wxdx$ 、 $\int e^{ax}\cos wxdx$ 型；如 $\int \boldsymbol{e^{2x}\cos xdx}$

（4）有时会将换元积分法与分部积分法相结合。如 $\int \boldsymbol{\sin(\ln x)dx}$ ，， $\int \boldsymbol{\arctan\sqrt{x}dx}$

4 有理函数的积分.

任何有理函数，均可化为一个多项式与一个真分式（分子的幂次数低于分母的幂次数）的和.

真分式 $\dfrac{p(x)}{Q(x)}$ 均可表示为有限个部分分式（或称简单分式）之和.

5 简单无理函数的积分

无理函数积分，一般通过选择变量替换，去掉根号，化为有理函数的积分来进行

6 三角函数有理式的积分

$\int R(\sin x,\cos x)dx$ 型积分均可通过变换 $u=\tan\dfrac{x}{z}$ 化为有理函数的积分，此时

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2} \qquad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \qquad dx = \frac{2}{1+u^2}du$$

注：当然三角有理式的积分可以通过三角变换，应用各种三角公式如积化和差，和差化积，倍角公式，半角公式等去凑微分。建议同学们多试试各种方法，或许有意想不到的收获。

附：三角函数公式：

（1）切与割，弦与割的关系

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x, \quad \cot^2 x + 1 = \csc^2 x;\ \sec x = \frac{1}{\cos x},\ \csc x = \frac{1}{\sin x}.$$

（2）二倍角公式

$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$；　　　$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$；

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$；　　　$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

（3）积化和差公式

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$