

班级:

学号:

姓名:

---

## 第2章 矩阵及其运算

### §2.1 一些特殊形状的矩阵    §2.2 矩阵的基本运算 (基础部分)

#### 一、填空题

1. 矩阵  $A=(a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B=(b_{ij})_{m \times n}$ ,  $A=B$ , 当且仅当\_\_\_\_\_.

2.  $\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \underline{\hspace{10cm}}.$

3. 设矩阵  $A=(a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B=(b_{ij})_{n \times m}$ , 则  $tr(AB) = \underline{\hspace{10cm}}$ ;

$tr(BA) = \underline{\hspace{10cm}}.$

#### 二、计算题

1. 已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ , 求  $2A+3B$ ,  $AB-BA$ .

班级:

学号:

姓名:

---

2. 已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ ,  $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $P_2 = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

计算下列乘积，并观察计算结果和矩阵  $A$  的关系.

(1)  $AP_1, P_1A$ ; (2)  $AP_2, P_2A$ ; (3)  $AP_3, P_3A$ .

3. 已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ , 求  $AB^T, B^TA$  及  $(B^TA)^6$ .

班级:

学号:

姓名:

4. (1) 求  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ;

(2) 已知

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

求  $AB$ .

5. 设  $f(x)=x^2-x+1$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ , 验证  $f(A) = \begin{pmatrix} f(1) & 0 & 0 \\ 0 & f(2) & 0 \\ 0 & 0 & f(3) \end{pmatrix}$ .

班级:

学号:

姓名:

---

6. 计算  $(x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ .

7. 设  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

验证:  $AB = AC$  但  $B \neq C$ .

班级:

学号:

姓名:

---

## §2.1 一些特殊形状的矩阵    §2.2 矩阵的基本运算

(提高部分)

一、设  $A, B$  都是对称矩阵, 证明  $AB$  为对称阵的充要条件是  $AB=BA$ .

二、设  $A, B, C$  为三个  $n$  阶方阵, 证明  $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(BCA) = \text{tr}(CAB)$ .

## §2.3 分块矩阵及运算

### (基础部分)

一、填空题

1. 将矩阵  $A$  用若干条横、竖分隔线分成若干个小矩阵，每一个小矩阵称为  $A$  的\_\_\_\_\_，以\_\_\_\_\_为元素的矩阵称为**分块矩阵**.
2. 设  $A_{m \times n}$  的分块矩阵为

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix},$$

则  $A^T = \underline{\hspace{10em}}$ .

二、画出如下矩阵分隔线，使每个矩阵分成四块保证运算有意义.

(提示：相乘的两个矩阵，左矩阵列的分块和右矩阵行的分块一致；左矩阵行的分块和乘积矩阵行的分块一致；右矩阵列的分块和乘积矩阵列的分块一致！)

1)

$$\left( \begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array} \right) \left( \begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|cc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ \hline * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array} \right)$$

2)

$$\left( \begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array} \right) \left( \begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|cc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ \hline * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array} \right)$$

班级:

学号:

姓名:

---

三、已知

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

利用分块矩阵乘法求  $AB$ .

班级:

学号:

姓名:

## §2.4 逆矩阵

### (基础部分)

#### 一、填空题

1. 若  $n$  阶方阵  $A$ 、 $B$  满足  $AB=E$ , 其中  $E$  是单位阵, 那么  $A^{-1}=$ \_\_\_\_\_.
2. 可逆矩阵的标准形矩阵是\_\_\_\_\_.
3. 等价的矩阵有\_\_\_\_\_ (填“相同”或“不同”) 标准形.

4. 设  $A = \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}$ , ( $a_1a_2\dots a_n \neq 0$ ), 求  $A^{-1}=$ \_\_\_\_\_.

#### 二、选择题

1. 设  $A$  为  $n$  阶可逆矩阵, 则下面不正确的是 [ ]

(A)  $A$  必为方阵; (B)  $R(A)=R(A^T)=n$

(C)  $Ax=b$  有唯一解; (D)  $AA^T=A^TA=E$

2. 设  $A$ ,  $B$  为  $n$  阶方阵, 满足  $AB=0$ , 则 [ ].

(A)  $A=B=0$ ; (B)  $A+B=0$

(C) 当  $A$  可逆时,  $B=0$ ; (D)  $A-B=0$

#### 三、计算题

1. 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$  的逆矩阵.

班级:

学号:

姓名:

---

2. 已知  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ , 解矩阵方程  $AX = B$ .

3. 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$  的逆矩阵.

班级:

学号:

姓名:

---

4. 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 解矩阵方程  $(A - 2E)X = A$ .

5. 设  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ , 求解矩阵方程  $XA = B$ .

6. 设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ , 且  $AB = A + B$ , 求  $B$ .

班级:

学号:

姓名:

---

## §2.3 分块矩阵及运算 §2.4 逆矩阵

(提高部分)

一、填空题

1. 设  $A, B$  均可逆, 则

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \underline{\hspace{10em}}, \quad \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \underline{\hspace{10em}}.$$

2. 设  $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ , 则  $A^{-1} = \underline{\hspace{10em}}$ .

二、计算题

已知  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $A = P\Lambda P^{-1}$ , 求  $\varphi(A) = A^3 + 5A^2 + E$ .

班级:

学号:

姓名:

---

三. 设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 且  $AB+E=A^2+B$ , 求  $B$ .

四. 设方阵多项式  $X^2+X-2E=0$ , 证明  $X$  可逆, 并求  $X^{-1}$ .

班级:

学号:

姓名:

---

五. 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ , 求一个可逆矩阵  $P$ , 使  $PA$  为行最简形.

## §2.5 方阵的行列式

### (基础部分)

一、填空题

1. 行列式  $\begin{vmatrix} 0 & & a_{1n} \\ & \ddots & a_{2,n-1} \\ a_{n1} & & 0 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} \cdot$

2. 若对于  $n$  阶行列式  $D$  的元素  $a_{ij}$  及其代数余子式  $A_{ij}$ , 总有  $\sum_{k=1}^n a_{ki}A_{kj} = 0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ;  $j=1, 2, \dots, n$ ), 则  $D = \underline{\hspace{2cm}}$ .

3. 一个含有  $n$  个方程,  $n$  个未知数的齐次线性方程组, 若其系数行列式  $D = \underline{\hspace{2cm}}$ , 则该方程组只有零解. (填“=0”或者“ $\neq 0$ ”)

4.  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & x & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & 1 \end{vmatrix}$  中元素  $x$  的代数余子式为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

5. 若  $A$  是 5 阶方阵, 且  $|A| = 1$ ,  $|-2A| = \underline{\hspace{2cm}}$ .

6. 若  $A$  是 3 阶方阵, 且  $|A| = 5$ , 则  $|A^2| = \underline{\hspace{2cm}}$ .

7. 设  $A, B$  均为  $n$  阶方阵,  $|A| = 2, |B| = -3$ , 则  $|2A^*B^{-1}| = \underline{\hspace{2cm}}$ .

8. 设  $A$  是  $n$  阶方阵,  $A^*$  是  $A$  的伴随矩阵,  $|A| = 5$ , 则  $|5(A^*)^{-1}| = \underline{\hspace{2cm}}$ .

二、选择题

1. 设  $A, B$  为  $n$  阶方阵, 则 [ ].

(A)  $(AB)^k = A^k B^k$ ; (B)  $||B|A| = |B||A|$ ;

(C)  $B^2 - A^2 = (B - A)(B + A)$ ; (D)  $|AB| = |BA|$ .

2. 设  $A, B$  为  $n$  阶方阵, 满足关系  $AB = 0$ , 则必有 [ ].

班级:

学号:

姓名:

(A)  $A=B=0$ ;

(B)  $A+B=0$ ;

(C)  $|A|=0$  或  $|B|=0$ ;

(D)  $|A|+|B|=0$

$$3. \quad D_1 = \begin{vmatrix} 3a_1 & & 0 \\ & 3a_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & 3a_n \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & a_n \end{vmatrix},$$

其中  $a_1a_2a\ldots a_n \neq 0$ , 则 [ ].

(A)  $D_1=D_2$ ; (B)  $D_1=\frac{1}{3n}D_2$

(C)  $D_1=3^nD_2$ ; (D)  $D_1=-3^nD_2$

4. 若系数矩阵为方阵的齐次线性方程组仅有零解, 则它的系数行列式  $D$  [ ].

(A) 必为 0; (B) 必不为 0;

(C) 必为 1; (D) 可取任何值.

5. 若某  $n$  阶行列式的递推公式为  $D_n=D_{n-1}+(-1)^n a^n$ , 则  $D_n=$  [ ].

(A)  $D_{n-2}+2(-1)^n a^n$ ; (B)  $D_{n-2}+(-1)^{n-1} a^{n-1}$ ;

(C)  $D_{n-2}+(-1)^{n-1} a^{n-1}+(-1)^n a^n$ ; (D)  $D_{n-2}+(-1)^n a^n$ ;

三、计算下列行列式

$$1. \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 301 \\ 1 & 2 & 102 \\ 2 & 4 & 199 \end{vmatrix}$$

班级:

学号:

姓名:

$$2. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 6 & 10 \\ 4 & 1 & 10 & 20 \end{vmatrix}$$

$$3. \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$4. D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

班级:

学号:

姓名:

---

5.  $D_n = \begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{vmatrix}$ , 其中对角线上元素都是  $a$ , 未写出的元素都是 0.

6.  $D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \quad (a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0)$

班级:

学号:

姓名:

$$7. D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

#### 四、证明题

1. 证明如下命题:

$$(i) \text{ 如果 } A \text{ 可逆, 则 } \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

$$(ii) \text{ 如果 } A \text{ 为 } n \text{ 阶矩阵, 则 } \det(rA) = r^n \det A.$$

$$(iii) \text{ 如果 } A, B \text{ 为同阶方阵, 则 } \det(AB) = \det(BA).$$

$$(iv) \text{ 若 } A, P \text{ 均为 } n \text{ 阶方阵, } P \text{ 可逆, 则 } \det(PAP^{-1}) = \det A.$$

$$(v) \text{ 假设 } U \text{ 为方阵, 满足 } U^T U = E, \text{ 则 } \det(U) = 1 \text{ 或 } -1.$$

班级:

学号:

姓名:

---

2. 设  $A$  为  $n$  阶可逆矩阵, 证明  $|A^*| = |A|^{n-1}$

班级:

学号:

姓名:

## §2.5 方阵的行列式

(提高部分)

一、计算下列行列式的值

$$1. \ D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}, \text{ 其中 } a_1a_2\dots a_n \neq 0$$

$$2. \ D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

班级:

学号:

姓名:

3. 已知

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}, \text{ 求 } c_{11} + c_{12} + \cdots + c_{1n}.$$

二、求解方程组:

$$\begin{cases} x_1 + a_1 x_2 + a_1^2 x_3 + \cdots + a_1^{n-1} x_n = 1 \\ x_1 + a_2 x_2 + a_2^2 x_3 + \cdots + a_2^{n-1} x_n = 1 \\ x_1 + a_3 x_2 + a_3^2 x_3 + \cdots + a_3^{n-1} x_n = 1, \text{ 假设实常数 } a_i \neq a_j (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, n) \\ \cdots \cdots \cdots \\ x_1 + a_n x_2 + a_n^2 x_3 + \cdots + a_n^{n-1} x_n = 1 \end{cases}$$

班级:

学号:

姓名:

三、已知矩阵  $A$  的伴随阵  $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ , 且  $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$ , 求  $B$ .

四、证明题:

$$1. D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix} = n!(n-1)!\cdots 3!2!$$

(提示: 先将每行公因子提到行列式符号前面, 再按范德蒙行列式结果计算).

班级:

学号:

姓名:

$$2. D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

### 3. (行列式的等价定义)

$n$  个不同数所有排列具有  $n!$  种. 排列中各元素之间由小到大的顺序为自然顺序, 否则称为一个逆序. 一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数. 用  $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$  表示 1 到  $n$  的自然数的一个排列  $j_1 j_2 \cdots j_n$  的逆序数.

验证: 二、三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 j_2)} (-1)^{\tau(j_1 j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 j_2 j_3)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$$

其中, 求和是对全排列种数求和, 分别有  $2!=2$  及  $3!=6$  项.

证明:  $n$  阶行列式具有如下逆序数表示公式

班级:

学号:

姓名:

---

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_n)} a_{1,j_1} \cdots a_{n,j_n}$$

其中,  $\tau(i_1, \dots, i_n)$  表示列标排列的逆序数, 右端为取自不同行不同列元素乘积的代数

和, 符号由列标排列的逆序数  $\tau(i_1, \dots, i_n)$  确定.

类似地, 行列式还可表为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1 \cdots i_n)} (-1)^{\tau(i_1 \cdots i_n)} a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n}$$

## 第2章 自测题

### (基础部分)

一、填空题

1. 设矩阵  $A=(a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B=(b_{ij})_{p \times q}$ , 则矩阵  $A$ 、 $B$  可作加法的条件是\_\_\_\_\_, 可作乘法运算的条件是\_\_\_\_\_.
2. 若  $AB=E$ (单位阵)且  $|A|=2$ , 则  $|B|=_____$ .
3. 设  $A$  是  $n$  阶方阵,  $A^*$  是  $A$  的伴随矩阵, 则  $AA^*=A^*A=_____$ .
4. 当  $k=_____$  时, 矩阵  $A=\begin{pmatrix} 1 & k \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  不可逆.
5. 设  $A$  为 3 阶方阵, 且  $|A|=2$ , 则  $|3A^{-1}-2A^*|=_____$ .  $|3A-(A^*)^*|=_____$ .
6. 若将行列式  $D$  的两行(或两列)互换  $n$  次, 那么当  $n$  为\_\_\_\_\_时,  $D$  的值变号;  
当  $n$  为\_\_\_\_\_时,  $D$  的值不变.

7. 设  $D_1=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ ,  $D_2=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ , 则  $D=\begin{vmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{vmatrix}=_____$

8. 若行列式每行元素之和都为零, 则此行列式的值为\_\_\_\_\_.

9. 行列式  $\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}=_____$ .

二、选择题

1. 设  $A$ ,  $B$  为  $n$  阶矩阵, 则必有 [ ].  
 (A)  $|A+B|=|A|+|B|$ ;                   (B)  $AB=BA$ ;  
 (C)  $|AB|=|BA|$ ;                           (D)  $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$

班级:

学号:

姓名:

2. 设  $A, B$  均为  $n$  阶方阵, 下列结论中, 正确的是 [ ].

- (A) 若  $A, B$  均可逆, 则  $A+B$  可逆;
- (B) 若  $A, B$  均可逆, 则  $AB$  可逆;
- (C) 若  $A+B$  可逆, 则  $A-B$  可逆;
- (D) 若  $A+B$  可逆, 则  $A, B$  可逆;

3. 设行列式  $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ ,  $D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ , 则\_\_\_\_\_.

- (A)  $D=D_1$ ; (B)  $D=-D_1$ ; (C)  $D_1=(-1)^n D$ ; (D)  $D_1=|D|$

4. 方程个数和未知量个数相等的线性方程组中, 下列说法正确的题\_\_\_\_\_.

- (A) 系数行列式  $D \neq 0$ , 方程组一定有解;
- (B) 系数行列式  $D \neq 0$ , 方程组一定无解;
- (C) 系数行列式  $D=0$ , 方程组一定无解;
- (D) 方程组有解, 则系数行列式一定不等于零;

### 三、计算题

1. 判断矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  是否可逆, 若可逆, 求其逆矩阵.

班级:

学号:

姓名:

---

$$2. \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$3. \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 6 & -4 \\ 2 & 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$4. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & & & & \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix} =$$

班级:

学号:

姓名:

---

$$5. \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & d & c & b \\ c & d & a & b \\ c & b & a & d \end{vmatrix} =$$

四、解答下列各题

1. 当  $\lambda, \mu$  满足什么条件时, 齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解.

班级:

学号:

姓名:

---

2. 设  $A$  为 3 阶矩阵,  $\det A = \frac{1}{2}$ , 求  $\det((2A)^{-1} - 5A^*)$ .

3. 设  $n$  阶矩阵  $A$  可逆, 证明:  $A^*$  也可逆, 且  $(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}A$ .

班级:

学号:

姓名:

---

4. 设  $n$  阶矩阵  $A$  的伴随矩阵为  $A^*$ , 证明:

( i ) 若  $A$  可逆, 则  $A^*$  也可逆, 且  $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ .

( ii ) 若  $|A| = 0$ , 则  $|A^*| = 0$ .

( iii )  $|A^*| = |A|^{n-1}$ .

## 第2章 自测题

### (提高部分)

一、填空

1. 设  $A$  为 5 阶方阵, 且  $|A^*| = 16$ , 则  $|A| = \underline{\hspace{2cm}}$ .
2. 设  $A$  为 3 阶方阵, 且  $|A| = 4$ , 则  $|2A^* - 6A^{-1}| = \underline{\hspace{2cm}}$ .

二、选择题

1. 设  $A, B, C$  为  $n$  阶方阵, 且  $ABC=E$ , 则必有 [ ].  
 (A)  $ACB=E$ ; (B)  $CBA=E$ ; (C)  $BAC=E$ ; (D)  $BCA=E$ .
2. 设  $A, B$  都是  $n$  阶可逆矩阵, 则  $\left| -2 \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \right|$  等于 [ ].  
 (A)  $(-2)^{2n} |A| |B|^{-1}$ ; (B)  $(-2)^n |A| |B|^{-1}$ ;  
 (C)  $-2 |A^T| |B|$ ; (D)  $-2 |A| |B|^{-1}$ .
3. 如果  $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = M \neq 0$ , 而  $D_1 = \begin{vmatrix} 3a_{11} & 4a_{11}-a_{12} & -a_{13} \\ 3a_{21} & 4a_{21}-a_{22} & -a_{23} \\ 3a_{31} & 4a_{31}-a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix}$ , 则  
 $D_1 = [ ]$ .  
 (A)  $-3M$ ; (B)  $3M$ ; (C)  $12M$ ; (D)  $-12M$ .
4.  $\begin{vmatrix} 99 & 100 & 203 \\ 202 & 200 & 397 \\ 298 & 300 & 601 \end{vmatrix} = [ ]$ .  
 (A)  $2000$ ; (B)  $-2000$ ; (C)  $2300$ ; (D)  $-2300$

班级:

学号:

姓名:

---

三、计算

设 4 阶矩阵  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ , 又矩阵  $X$  满足方程

$$X(E - C^{-1}B)^T C^T = E, \text{ 化简方程并求 } X.$$

四、设方阵  $A$  满足  $A^3 - A^2 + 2A - E = 0$ , 证明  $A$  及  $E - A$  均可逆, 并求  $A^{-1}$  和  $(E - A)^{-1}$ .

班级:

学号:

姓名:

---

五、设  $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$

(1)  $A_{11}$  可逆, 求  $X$  与  $Y$  使

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ X & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & Y \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

其中  $S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$  称为  $A_{11}$  的舒尔补; 类似地, 若  $A_{22}$  可逆, 则  $A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$  称为  $A_{22}$  的舒尔补.

(2) 若  $A$  可逆且  $A_{11}$  可逆, 则  $A_{11}$  的舒尔补  $S$  也可逆.

班级:

学号:

姓名:

---

六、设  $A$  是  $m \times n$  矩阵

(1) 设  $CA = E_n$ , 证明  $Ax = 0$  仅有零解, 且  $A$  的列数不大于行数, 即  $n \leq m$ .

(2) 设  $AD = E_m$ , 证明对任意  $m$  维列向量  $b$ , 方程  $Ax = b$  有解, 且  $A$  的行数不大于列数, 即  $m \leq n$ .

(3) 若有  $n \times m$  矩阵  $C$  和  $D$  满足  $CA = E_n$  且  $AD = E_m$ , 则  $A$  是方阵.