限失真信源编码简介

信息论与编码原理不挂科 第六讲

限失真信源编码简介

信息论与编码原理不挂科 第六讲

4大模块

2道题目

信息论与编码原理不挂科 第六讲

限失真信源编码简介

- 模块1 限失真信源编码的基本概念
- 模块2 失真度和平均失真度
- 模块3 信息率失真函数
- 模块4 限失真信源编码定理

限失真信源编码的基本概念

限失真信源编码的基本概念

通信系统中失真存在的原因

1. 信道噪声的干扰使得信息传输过程会产生差错。
2. 信息传输率超过信道容量时，必然产生差错。
3. 信源熵是信源无失真压缩的极限，若再继续压缩则会带来失真。

通信系统中失真存在的合理性

1. 信宿的灵敏度和分辨率有限，不要求绝对无失真。
2. 允许失真的存在，可以提高信息传输率，从而降低通信成本。

本讲的研究内容，为**在允许一定程度的失真的条件下，能够把信源信息压缩到什么程度**，即**最少**需要多少 bit 才能描述信源。

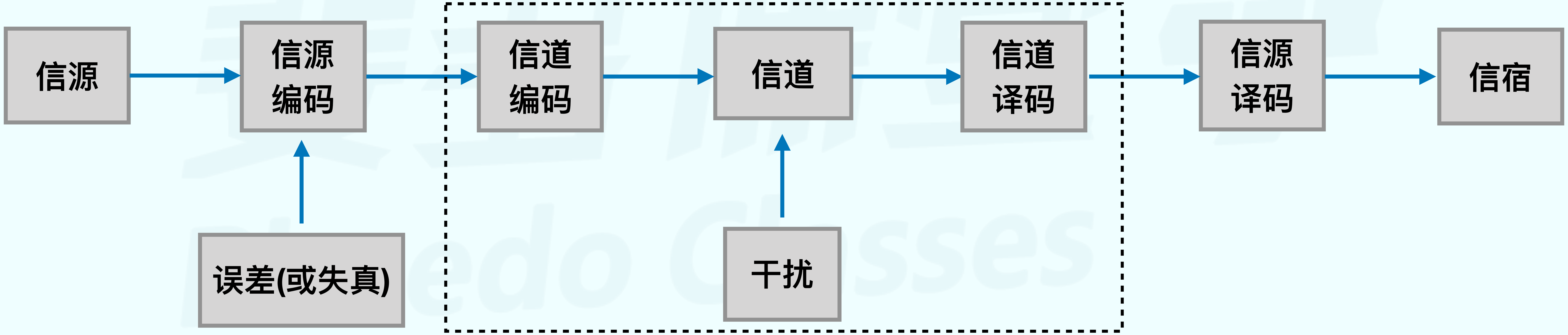
限失真信源编码的基本概念

小节1 限失真信源编码概述

小节2 限失真信源编码的研究方法

限失真信源编码的研究方法

用研究信道的方法来研究有失真信源压缩问题。



只由信源编码产生

广义无干扰信道，可省略

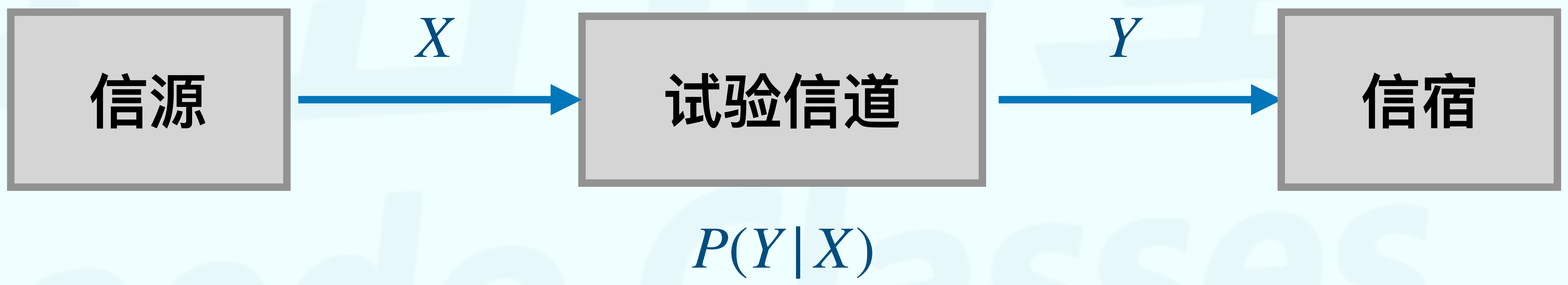
允许失真越大，信息传输率可越小；
允许失真越小，信息传输率须越大。

即R与失真有关。

限失真信源编码的研究方法

用虚拟手法用信道表示信源编码的作用，将信源编码和信源译码等价为一个信道。

由于是失真编码，信道不是一一对应的，用传递概率描述编译码前后的关系，可将通信系统简化为下图：



选择不同的试验信道，相当于不同的编码方法，其所得的平均失真度 D 不同，有的满足 $D \le D^*$，有些则 $D > D^*$。

我们要研究在**给定允许失真**的条件下，是否可以设计一种信源编码使得**信息传输率R最低**，首先需讨论失真测度。

失真度和平均失真度

小节1 失真函数

小节2 平均失真度

失真度和平均失真度

小节1 失真函数

小节2 平均失真度

失真函数$d(x,y)$

失真函数为非负函数，即$d(x_i,y_j)\geq 0$，函数形式可根据需要定义。

用失真函数定量测度信源发生一个符号x_i，而在接收端再接收y_j所引起的误差或失真。

通常较小的d 表示较小的失真，而$d(x_i,y_j)=0$表示无失真。

假设信源分布为 $\begin{bmatrix} X \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p(x_1) & p(x_2) & \dots & p(x_n) \end{bmatrix}$，输出为$Y:\{y_1,y_2,\dots y_m\}$ 。

定义失真矩阵 $D = \begin{bmatrix} d(x_1,y_1) & d(x_1,y_2) & \dots & d(x_1,y_m) \\ d(x_2,y_1) & d(x_2,y_2) & \dots & d(x_2,y_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d(x_n,y_1) & d(x_n,y_2) & \dots & d(x_n,y_m) \end{bmatrix}$ 。

说明

失真函数是根据人们的实际需要和失真引起的损失，风险大小而人为规定的。

常用的失真函数有：

1 汉明失真：$d(x_i, y_j) = \begin{cases} 0 & x_i = y_j \\ 1 & x_i \neq y_j \end{cases}$

2 平方误差失真函数：$d(x_i, y_j) = (x_i - y_j)^2$

例题6-1 设信道输入为$X=\{0,1\}$，输出为$Y=\{0,?,2\}$，规定失真函数：

$$d(0,0)=d(1,1)=0$$
$$d(0,1)=d(1,0)=1$$
$$d(0,?)=d(1,?)=0.5$$

求失真矩阵。

解析6-1

$$D=\begin{bmatrix} d(0,0) & d(0,?) & d(0,1) \\ d(1,0) & d(1,?) & d(1,1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

矢量传输中的失真函数$d(\alpha, \beta)$

输入N长符号序列$\alpha = X_1X_2\cdots X_N$，其中每个消息$X$的取值均来自$\{x_1, x_2, ..., x_n\}$；

输出N长符号序列$\beta = Y_1Y_2\cdots Y_N$，其中每个消息Y的取值均来自$\{y_1, y_2, ..., y_m\}$；

用失真函数定量测度信源发生一个符号x_i，而在接收端再接收y_j所引起的误差或失真。

定义矢量失真函数 $d(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{N} d(X_i, Y_i)$ 。

即矢量的失真度等于序列中对应单个信源符号的失真度之和。

同样可以定义失真度的矢量失真函数矩阵，而该矩阵中共有 $n^N \times m^N$个元素。

失真度和平均失真度

小节1 失真函数

小节2 平均失真度

平均失真度

$$\overline{D} = E[d(x_i, y_j)] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j)d(x_i, y_j)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i)p(y_j \mid x_i)d(x_i, y_j)$$

平均失真度表示信源 P_X 在给定信道 $P_{Y|X}$ 中传输时所引起的失真的总体量度。

若平均失真度 $\overline{D}$ 不大于所允许的失真 D^*，即 $\overline{D} \leq D^*$，则称此为保真度准则。

N长信源序列的平均失真度$\overline{D}(N)$

$$\overline{D}(N)=E[d(\alpha_i,\beta_j)]=\sum_{i=1}^{n^N}\sum_{j=1}^{m^N}p(\alpha_i,\beta_j)d(\alpha_i,\beta_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{n^N}\sum_{j=1}^{m^N}p(\alpha_i)p(\beta_j\,|\,\alpha_i)d(\alpha_i,\beta_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{n^N}\sum_{j=1}^{m^N}p(\alpha_i)p(\beta_j\,|\,\alpha_i)\sum_{l=1}^{N}d(\alpha_{il},\beta_{jl})$$

信源的平均失真度（单个符号的失真度）$\overline{D}_N=\dfrac{1}{N}\overline{D}(N)$

当信源与信道均无记忆时，$\overline{D}(N)=\sum_{l=1}^{N}D_l$，$D_l$是信源序列中第$l$个分量的平均失真度；

若离散信源平稳，则$\overline{D}(N)=N\overline{D}$，离散无记忆平稳信源通过无记忆试验信道时，序列平均失真度为单符号平均失真度的N倍。

信息率失真函数

小节1 保真度准则

小节2 信息率失真函数

信息率失真函数

小节1 保真度准则

小节2 信息率失真函数

保真度准则的定义与限失真试验信道

保真度准则

若预先规定的平均失真度为 D^*，则称信源压缩后的平均失真度 $\overline{D}$ 不大于D^*的准则称为保真度准则，即$\overline{D} \le D^*$。

D^*允许的试验信道

将满足保真度准则的所有信道称为失真度 D^*允许信道（也称 D^*允许的实验信道），记作：

$$B_{D^*} = \{p(y_j|x_i) : \overline{D} \le D^*\}$$

对于确定信源和失真函数，不同编码对应不同的试验信道。

信息率失真函数

小节1 保真度准则

小节2 信息率失真函数

信息率失真函数的定义

在满足失真要求的信道中，寻找一种信道，使给定的信源经过这个信道传输时，其信息传输率，即平均互信息 $I(X;Y)$ 最小。定义这个最小值为信息率失真函数。

在满足保真度准则的前提下, $R(D)$是信息率允许压缩到的最小值，为信源特有的参数。

$$R(D) = \min_{p(y_j|x_i)\in B_D} \{I(X;Y)\} = \min_{p(y_j|x_i)\in B_D} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i)p(y_j|x_i)\frac{\log p(y_j|x_i)}{p(y_j)}$$

注：此时满足 $I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(Y)$。

信道容量与信息率失真函数的比较

信道容量$C=\max\limits_{p(x_i)} I(X;Y)$是在信道固定前提下，选取一种信源概率分布使信息传输率最大（求极大值），它反映了信道传输信息的能力，是信道可靠传输的最大信息传输率，信道容量与信源无关，是反映信道特性的参量。

率失真函数$R(D)=\min\limits_{p(y_j|x_i)\overline{D}\le D} I(X;Y)$是在信源固定，满足保真度准则的条件下的信息传输率的最小值，反映了满足一定失真度的条件下，信源可压缩的程度，即满足失真要求而再现信源消息所必须获得的最少平均信息量。

信息率失真函数的性质

1 $R(D)$的定义域和值域:

平均失真度D的取值范围: $[D_{\min}, D_{\max}]$

率失真函数的取值范围: $[H(X),0]$

- 对$D_{\min}$的讨论:

由信源给定

$$D_{\min} = \min[\sum_X \sum_Y p(x_i)p(y_j|x_i)d(x_i,y_j)] = \boxed{\sum_{i=1}^{r} p(x_i)} \min\boxed{[\sum_{j=1}^{s} p(y_j|x_i)d(x_i,y_j)]}$$

选择合适的试验信道

让求和号中的每一项最小化

当信源输入（即x_i）固定时，对于不同的y_j，失真矩阵对应行的元素中必然有一个最小值，或若干个相同的最小值。我们可以通过构造试验信道使平均失真度最小化。

信息率失真函数的性质

1 $R(D)$的定义域和值域：

平均失真度D的取值范围： $[D_{min}, D_{max}]$

率失真函数的取值范围： $[H(X),0]$

- 对D_{min}的讨论：

由信源给定

$$D_{min} = \min[\sum_X \sum_Y p(x_i)p(y_j|x_i)d(x_i,y_j)] = \boxed{\sum_{i=1}^{r} p(x_i)} \min \boxed{[\sum_{j=1}^{s} p(y_j|x_i)d(x_i,y_j)]}$$

选择合适的试验信道

让求和号中的每一项最小化

我们构造试验信道满足：

$\sum_j p(y_j|x_i) = 1$ $d(x_i, y_j)$ 为失真矩阵每一行中的最小值

$\sum_j p(y_j|x_i) = 0$ $d(x_i, y_j)$ 不为失真矩阵每一行中的最小值

因此最小平均失真度 $D_{min} = \sum_i p(x_i) \boxed{\min d(x_i, y_j)}$ 信源输入x_i固定时，失真矩阵对应行的最小值

信息率失真函数的性质

1 $R(D)$的定义域和值域：

平均失真度D的取值范围：　$[D_{\min}, D_{\max}]$

率失真函数的取值范围：　$[H(X),0]$

- 对$D_{\min}$的讨论：

$$D_{\min} = \sum_i p(x_i)\boxed{\min d(x_i, y_j)}$$ 信源输入x_i固定时，失真矩阵对应行的最小值

当**失真矩阵中每行至少有一个零元素**时，$D_{\min} = 0$，此时意味着不允许任何失真的情况，一般情况下$D_{\min} = 0$，此时信息传输率至少应该等于信源输出的信息量，即信源熵，故$R(0) = H(X)$；

当失真矩阵不符合上述条件时 $D_{\min} \neq 0$；

信息率失真函数的性质

1 $R(D)$的定义域和值域：

平均失真度D的取值范围： $[D_{\min}, D_{\max}]$

率失真函数的取值范围： $[H(X),0]$

- 对$D_{\max}$的讨论：

$D_{\max}$ 是满足信息传输率$R(D)=0$的最小失真，即对于$\forall D \geq D_{\max}$，$R(D)=0$恒成立；

对于$\forall D \geq D_{\max}$，$R(D)=0$，从而$I(X;Y)=0$，此时X,Y统计独立，故$p(y_j|x_i)$与x_i无关；

我们不难发现会有很多种试验信道满足条件，但我们要研究的是下界$D=D_{\max}$的情形；

$$D_{\max} = \min \sum_{i,j} p(x_i)p(y_j|x_i)d(x_i,y_j)$$

$$= \min \sum_{i,j} p(y_j|x_i) \sum_{i} p(x_i)d(x_i,y_j)$$

信息率失真函数的性质

1 $R(D)$的定义域和值域：

平均失真度D的取值范围： $[D_{\min}, D_{\max}]$

率失真函数的取值范围： $[H(X),0]$

- 对$D_{\max}$的讨论：

$$D_{\max} = \min \sum_{i,j} p(x_i)p(y_j|x_i)d(x_i, y_j)$$

$$= \min \sum_{i,j} p(y_j|x_i) \boxed{\sum_i p(x_i)d(x_i, y_j)}$$ **最小化**

我们构造试验信道满足：

对于固定的x_i，当$\sum_i p(x_i)d(x_i, y_j)$ 最小时，令 $p(y_j|x_i) = q(y_j) = 1$

否则，令 $p(y_j|x_i) = q(y_j) = 0$，则$D_{\max} = \min \sum_i p(x_i)d(x_i, y_j)$

例题6-2 设信道输入为$X=\{a_1,a_2,a_3\}$，且为等概分布，已知失真矩阵为$D=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&2&1\end{bmatrix}$；

试求$D_{\min}$与$D_{\max}$ 以及相应试验信道的转移概率矩阵。

解析6-2

$$D_{\min}=\sum_i p(x_i)\min d(x_i,y_j)$$

$$=\frac{1}{3}\min(1,2,3)+\frac{1}{3}\min(2,1,3)+\frac{1}{3}\min(3,2,1)$$

$$=1$$

$$D=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&2&1\end{bmatrix}$$

试验信道为

$$P_{Y|X}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$D_{\max}=\min\sum_i p(x_i)d(x_i,y_j)$$

$$=\min\begin{bmatrix}p(a_1)\times1+p(a_2)\times2+p(a_3)\times3\\p(a_1)\times2+p(a_2)\times1+p(a_3)\times2\\p(a_1)\times3+p(a_2)\times3+p(a_3)\times1\end{bmatrix}=\frac{5}{3}$$

$$D=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&2&1\end{bmatrix}$$

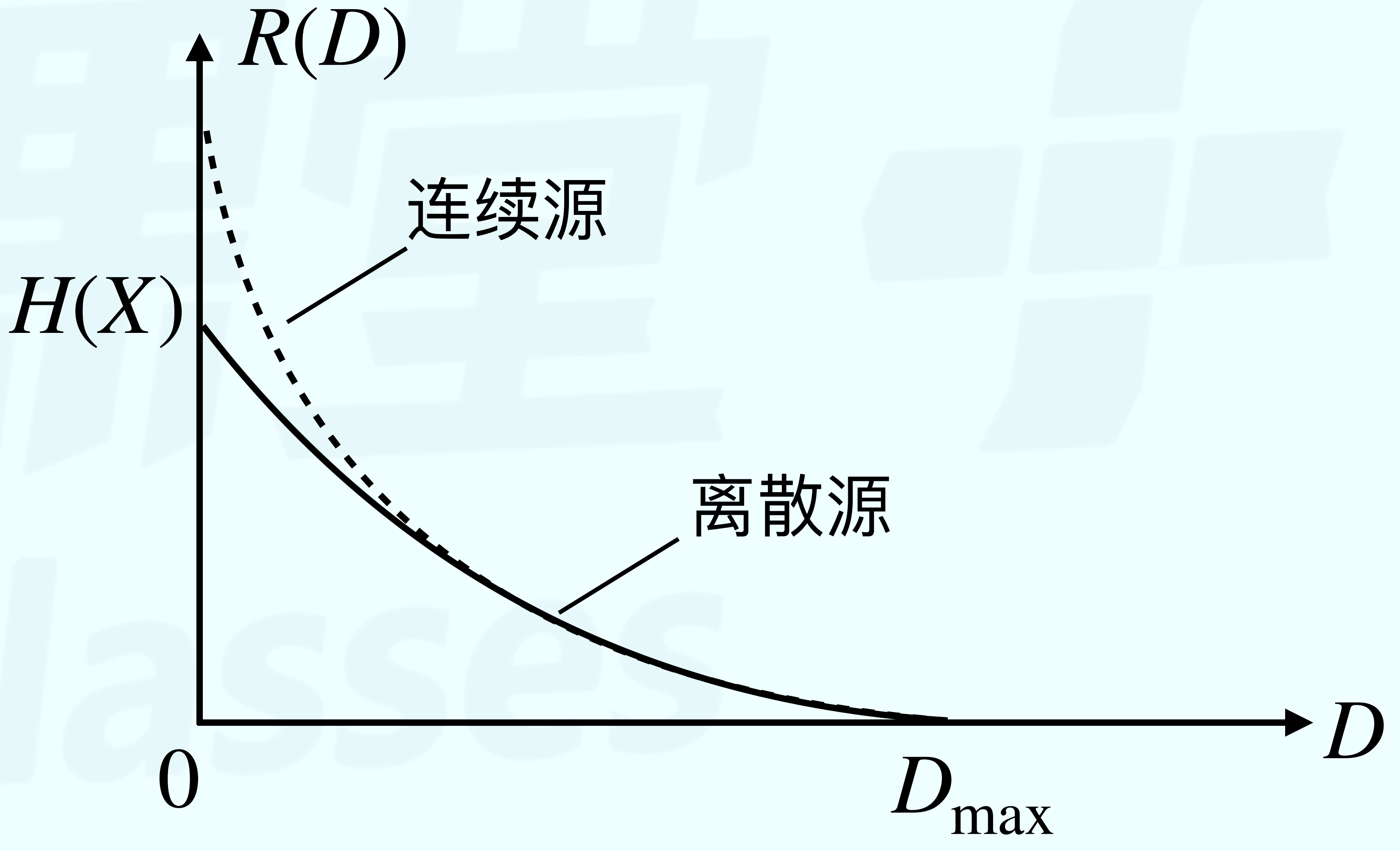
试验信道为

$$P_{Y|X}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

信息率失真函数的性质

2 $R(D)$是关于D的下凸函数。

3 $R(D)$在定义区间是严格递减函数。



限失真信源编码定理

小节1 香农第三定理

香农第三定理

设离散无记忆平稳信源的信息率失真函数为$R(D)$，只要满足$R \geq R(D)$，信源序列长度N足够大时，一定存在一种编码方法，其译码失真小于或等于$D+\varepsilon$，其中ε是任意小的正数。

反之，若$R < R(D)$，则无论采用什么样的编码方法，其译码失真必大于D。

即在允许失真D的条件下，信源最小的、可达的信息传输率是信源的$R(D)$，提供了压缩的下界。

说明

该定理为存在性定理。

正定理：$R \geq R(D)$ 时，译码失真小于或等于$D+\varepsilon$的码肯定存在，但定理本身未给出码的构造方法。

逆定理：$R < R(D)$ 时，译码失真必大于D，肯定找不到满足条件的码，因此用不着浪费时间与精力。

香农信息论的三个概念：信源熵、信道容量和信息率失真函数，都是临界值，是从理论上衡量通信能够满足要求的重要极限。