信息论简介与概率论复习

信息论与编码原理不挂科 第一讲

信息论简介与概率论复习

信息论与编码原理不挂科 第一讲

3大模块

2道题目

信息论与编码原理不挂科 第一讲

信息论简介与概率论复习

模块1 信息的定义

模块2 信息论的研究对象与目的

模块3 概率论知识回顾

信息的定义

小节1 通信系统中的信息、信号和消息

小节2 香农信息的概念

信息的定义

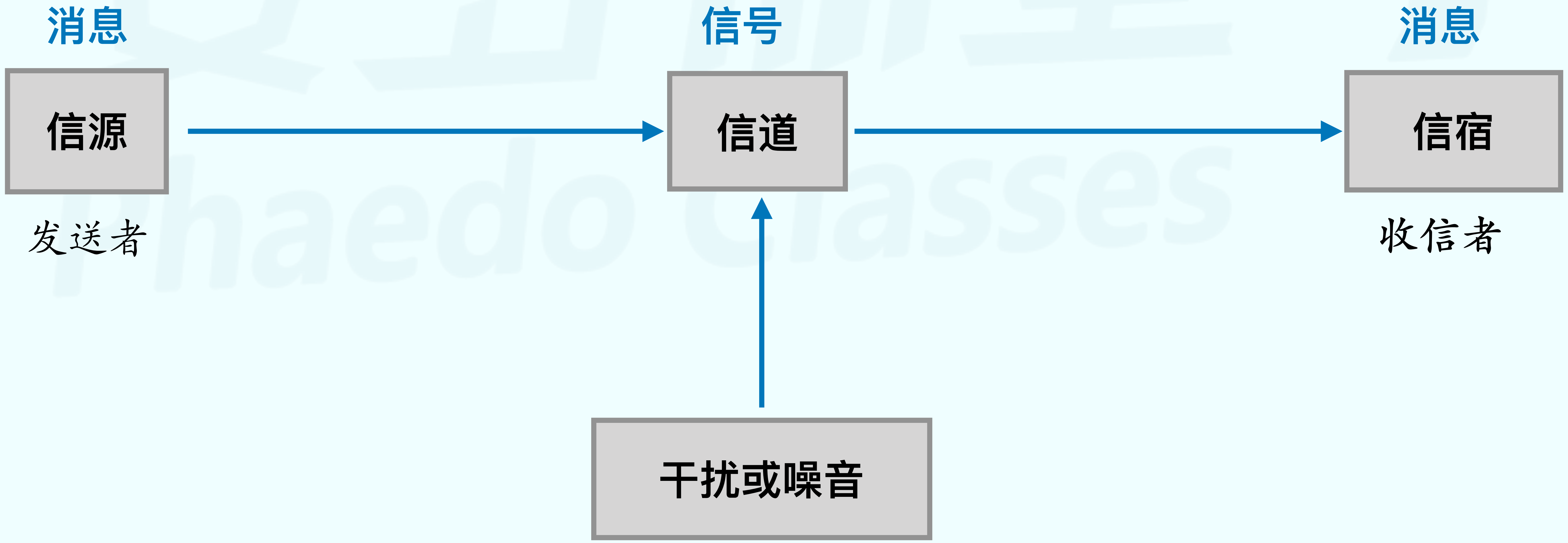
小节1 通信系统中的信息、信号和消息

小节2 香农信息的概念

点对点通信系统模型

通信的基本问题：在一点精确或近似地恢复另一点所选择的信息；

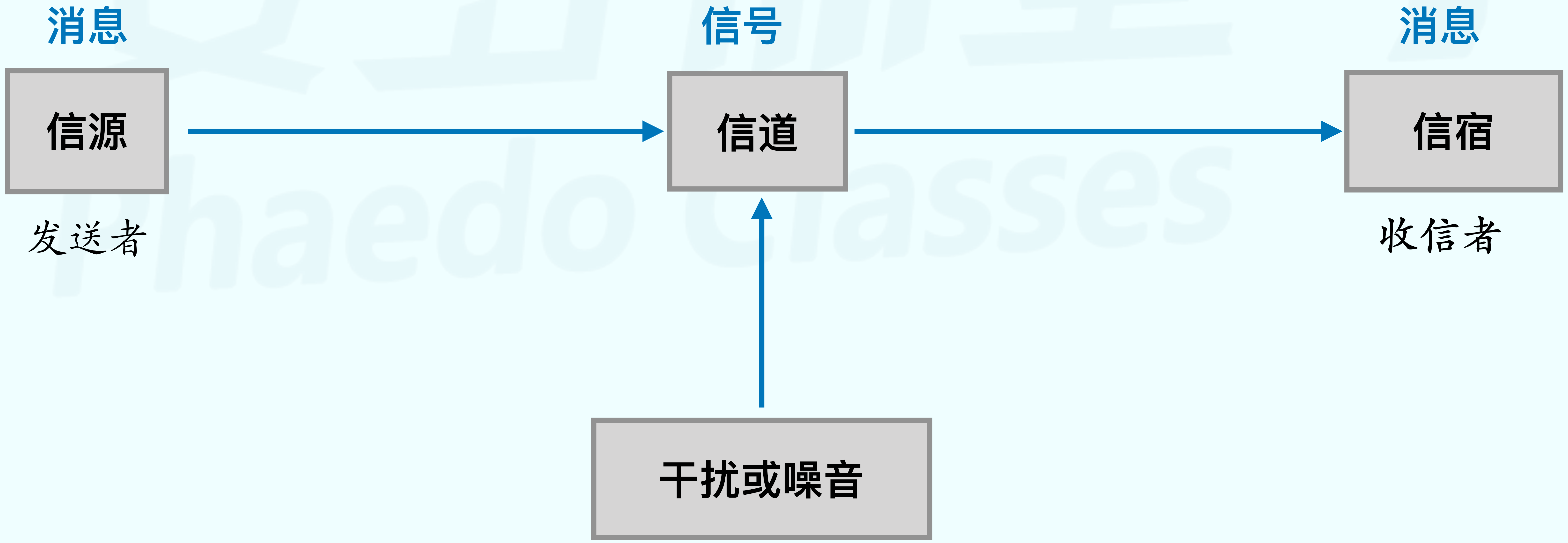
通信的目的：消除不确定性，获得信息。



信息、信号、消息

消息：能被人的感觉器官所感知；消息中包含信息，是信息的载体，是具体、非物理的；

信号：适合信道传输的物理量；信号携带消息，是消息的运载工具，可测量、可显示、可描述。



信息的定义

小节1 通信系统中的信息、信号和消息

小节2 香农信息的概念

香农信息的定义

香农信息的定义是事物运动状态或存在方式的**不确定性**的描述；

1.信息被接受前，具有未知性，不确定性

2.信息在通过通信系统之后，不确定性被完全或部分消除，信宿因此获得了信息

因此，通信过程是一种**消除或部分消除不确定性，从而获得信息的过程**。

不确定性（信息量）的定性和定量描述

定性描述是指事先猜测某随机事件是否发生的难易程度；

1.一夜暴富——概率极低，难猜到——如果发生，获得的信息量很大；

2.学信息论会有一定困难——概率极高，好猜——信息量较小；

3.信息论要用到数学——必然事件，不用猜——信息量为0。

定量描述是指随机事件发生所提供的信息量；

不确定性的大小可以表示为随机事件概率的函数 $I(x_i) = \log \dfrac{1}{p(x_i)} = -\log p(x_i)$；

1.不可能事件概率为0，信息量为无穷大

2.必然事件概率为1，信息量为0

3.随机事件概率和自信息成负相关

信息论的研究对象与目的

小节1 进一步完善的通信系统模型

小节2 信息论的研究目的

信息论的研究对象与目的

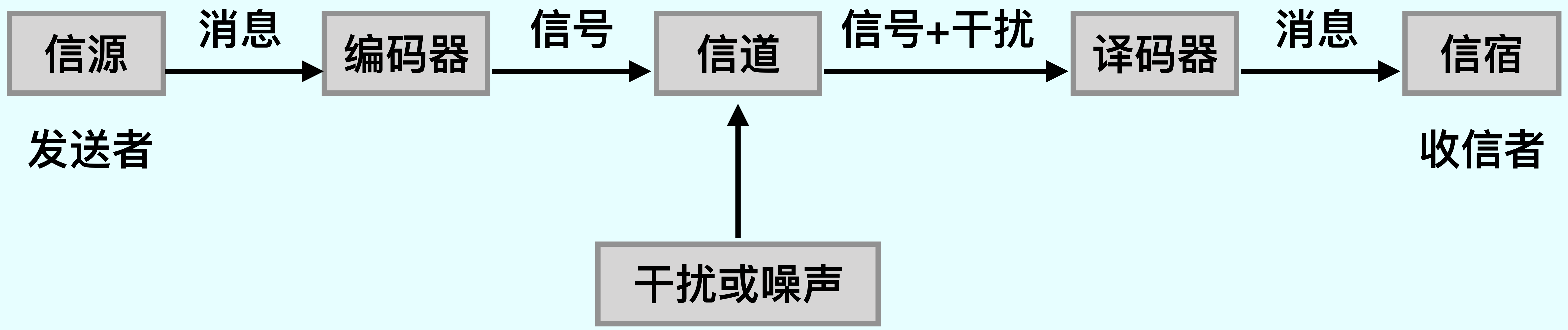
小节1 进一步完善的通信系统模型

小节2 信息论的研究目的

进一步完善的通信系统模型

通信的实质：形式上传输消息，实质上传输信息；

通信的目的：消除不确定性，获得信息；

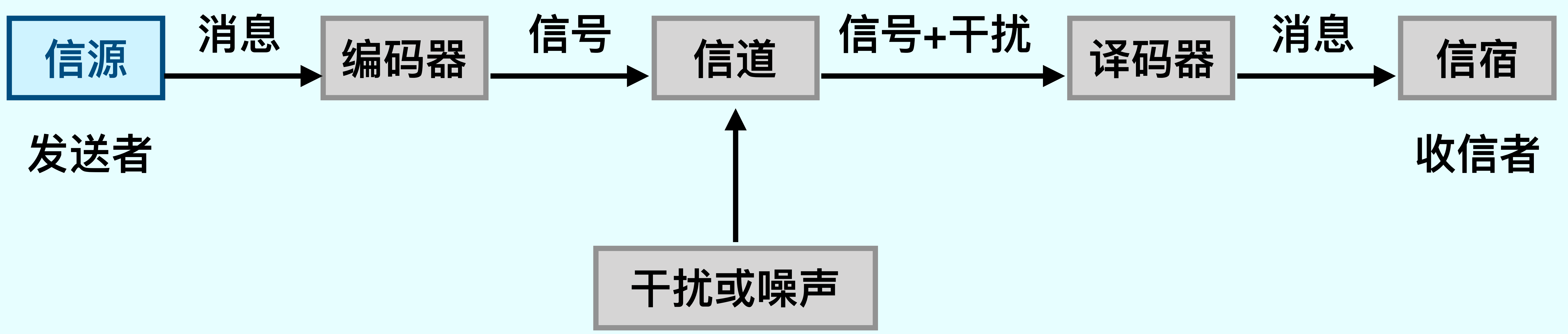


进一步完善的通信系统模型

通信的实质：形式上传输消息，实质上传输信息；

通信的目的：消除不确定性，获得信息；

信源：产生消息和消息序列的源；

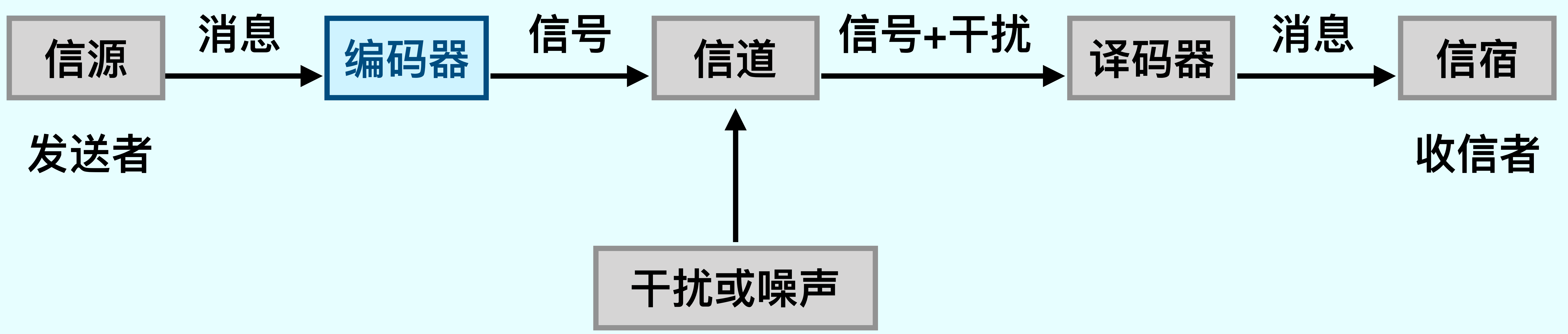


进一步完善的通信系统模型

通信的实质：形式上传输消息，实质上传输信息；

通信的目的：消除不确定性，获得信息；

编码器：将消息变成适合信道传输的物理量；

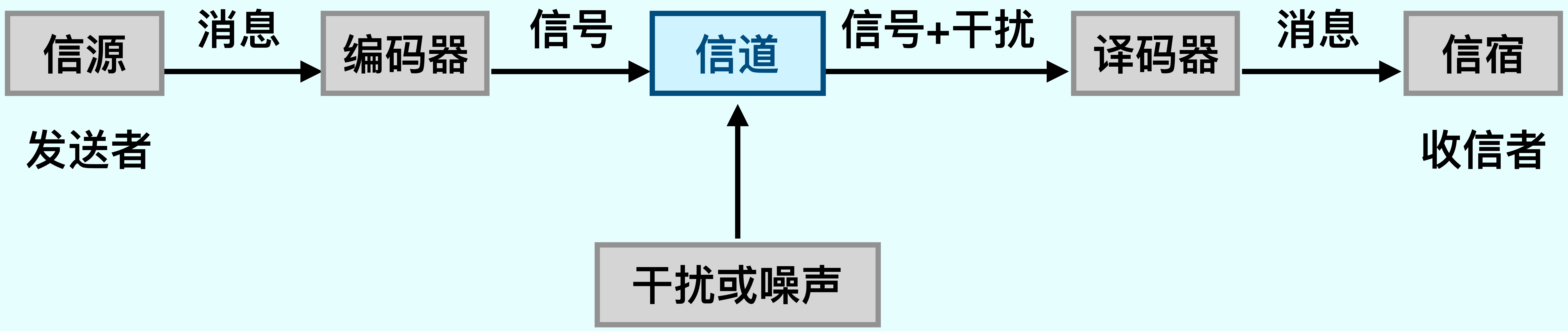


进一步完善的通信系统模型

通信的实质：形式上传输消息，实质上传输信息；

通信的目的：消除不确定性，获得信息；

信道：传输、存储信号的媒介；

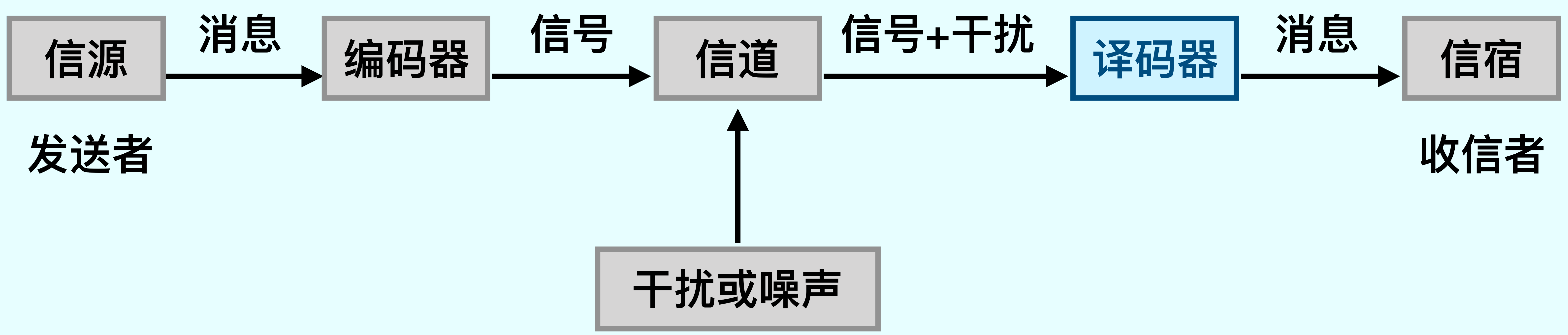


进一步完善的通信系统模型

通信的实质：形式上传输消息，实质上传输信息；

通信的目的：消除不确定性，获得信息；

译码器：对干扰+信号进行反变换；

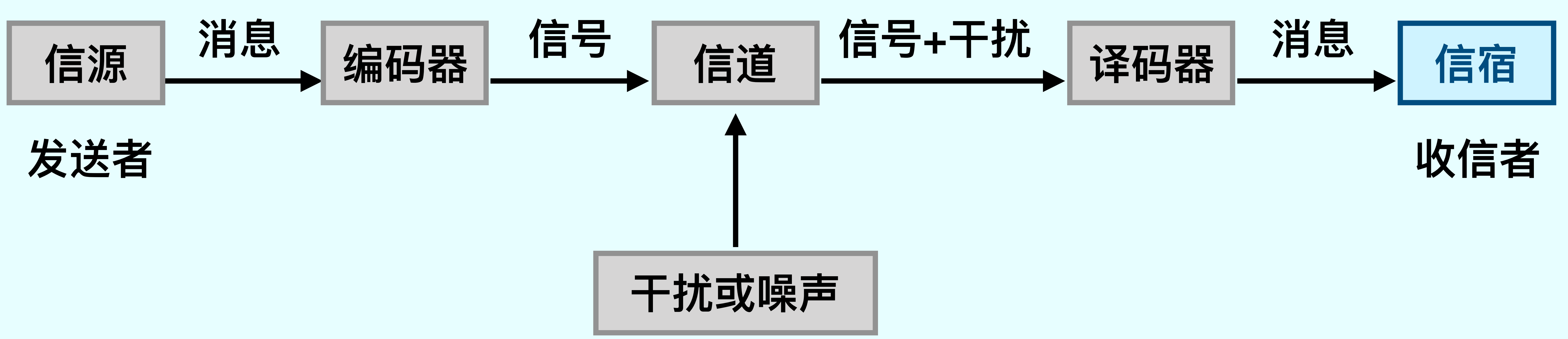


进一步完善的通信系统模型

通信的实质：形式上传输消息，实质上传输信息；

通信的目的：消除不确定性，获得信息；

信宿：消息传递的对象；



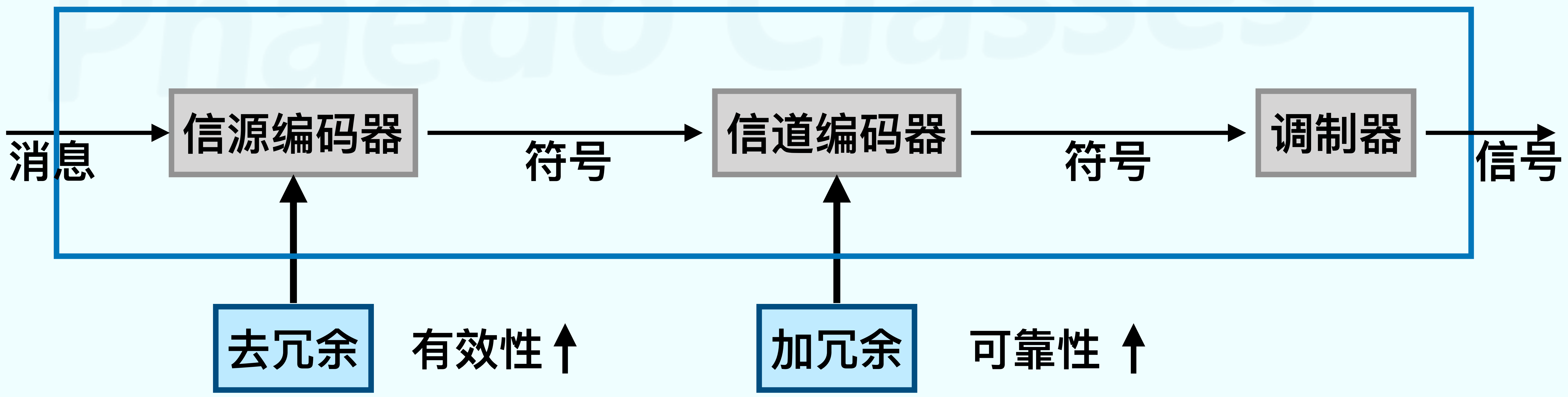
编码器的概念和作用

编码器：将消息变成适合信道传输的物理量；

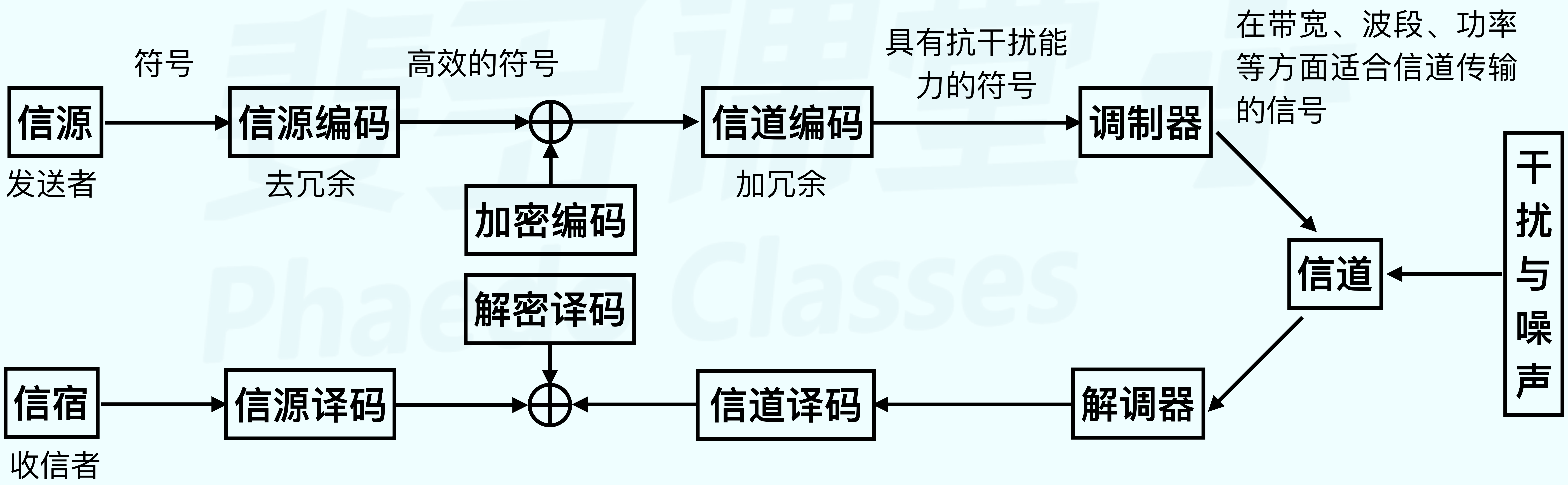
信源编码器：通过去冗余提高通信系统的有效性——信息传输应尽可能快，高传输码率，可通过压缩等手段实现；

信道编码器：通过加冗余提高通信系统的可靠性——信息传输应尽可能准确，降低误码率；

调制器：变成适合信号传输要求的信号。



加入编码器和译码器后的通信系统模型



信息论的研究对象与目的

小节1 进一步完善的通信系统模型

小节2 信息论的研究目的

信息论的研究目的

- 找到信息传输的共同规律;
- 信息论研究通信系统的整个过程，而非单个环节;
- 实现在有干扰的情况下，最佳的传送和准确(或近似)再现信息;
- 提高信息传输的有效性，可靠性，安全性;
- 关心系统的理论极限和潜能，实现信息传输系统的最优化。

概率论知识回顾

概率论知识回顾

小节1 用矩阵表示概率分布

小节2 常用概率公式

利用矩阵表示概率分布「一维概率分布」

$$\begin{bmatrix} X \\ P(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p(x_1) & p(x_2) & \cdots & p(x_n) \end{bmatrix} \longrightarrow P_X = \begin{bmatrix} p(x_1) & p(x_2) & \cdots & p(x_n) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y \\ P(Y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ p(y_1) & p(y_2) & \cdots & p(y_m) \end{bmatrix} \longrightarrow P_Y = \begin{bmatrix} p(y_1) & p(y_2) & \cdots & p(y_m) \end{bmatrix}$$

利用矩阵表示概率分布「联合概率分布」

依据联合分布矩阵可以写出边缘分布矩阵 P_X，P_Y ；

$$
P_{XY} = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{array} \\
\begin{bmatrix}
p(x_1 y_1) & p(x_2 y_1) & \cdots & p(x_n y_1) \\
p(x_1 y_2) & p(x_2 y_2) & \cdots & p(x_n y_2) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
p(x_1 y_m) & p(x_2 y_m) & \cdots & p(x_n y_m)
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

利用矩阵表示概率分布「条件概率分布」

矩阵每行的条件概率之和恒为1（每一行的条件要相同）$\sum_{i=1}^{n} p(x_i \mid y_j) = 1$；

$$P_{X|Y} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{array} \\ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{array} & \begin{bmatrix} p(x_1 \mid y_1) & p(x_2 \mid y_1) & \cdots & p(x_n \mid y_1) \\ p(x_1 \mid y_2) & p(x_2 \mid y_2) & \cdots & p(x_n \mid y_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p(x_1 \mid y_m) & p(x_2 \mid y_m) & \cdots & p(x_n \mid y_m) \end{bmatrix} \end{array}$$

条件概率分布、联合概率分布和边缘概率分布的关系

$$\frac{\text{联合概率中某行各元素}}{\text{联合概率中该行元素之和}} = \frac{\text{联合概率中某行各元素}}{\text{该行条件对应的边缘分布}}$$

$$P_{X|Y} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{array} \\ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{array} & \begin{bmatrix} p(x_1|y_1) & p(x_2|y_1) & \cdots & p(x_n|y_1) \\ p(x_1|y_2) & p(x_2|y_2) & \cdots & p(x_n|y_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p(x_1|y_m) & p(x_2|y_m) & \cdots & p(x_n|y_m) \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} \frac{p(x_1y_1)}{p(y_1)} & \frac{p(x_2y_1)}{p(y_1)} & \cdots & \frac{p(x_ny_1)}{p(y_1)} \\ \frac{p(x_1y_2)}{p(y_2)} & \frac{p(x_2y_2)}{p(y_2)} & \cdots & \frac{p(x_ny_2)}{p(y_2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{p(x_1y_m)}{p(y_m)} & \frac{p(x_2y_m)}{p(y_m)} & \cdots & \frac{p(x_ny_m)}{p(y_m)} \end{bmatrix}$$

条件概率分布 、联合概率分布和边缘概率分布的关系

由随机变量X的边缘分布以及以X为条件随机变量Y的条件概率分布，可求得结果Y的边缘分布；

用矩阵的形式，可表示为 $P_Y = P_X P_{Y|X}$ ，同理可推得 $P_X = P_Y P_{X|Y}$ 。

条件概率分布、联合概率分布和边缘概率分布的关系

公式 $P_Y = P_X P_{Y|X}$ 与 $P_X = P_Y P_{X|Y}$ 的证明：

证明

$$
\begin{aligned}
P_X P_{Y|X} &= [p(x_1)\ p(x_2)\ \cdots\ p(x_m)]
\begin{bmatrix}
p(y_1|x_1) & p(y_2|x_1) & \cdots & p(y_n|x_1) \\
p(y_1|x_2) & p(y_2|x_2) & \cdots & p(y_n|x_2) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
p(y_1|x_m) & p(y_2|x_m) & \cdots & p(y_n|x_m)
\end{bmatrix} \\
&= [p(x_1)p(y_1|x_1) + p(x_2)p(y_1|x_2) + \cdots + p(x_m)p(y_1|x_m) + \cdots] \\
&= [p(y_1)\ \ p(y_2)\ \ \cdots\ \ p(y_n)] \\
&= P_Y
\end{aligned}
$$

同理可证 $P_X = P_Y P_{X|Y}$ 。

条件概率分布、联合概率分布和边缘概率分布的关系「全概率公式」

$$P_X = P_Y P_{X|Y} \longrightarrow p(x_i) = \sum_{j=1}^{n} p(y_j)p(x_i|y_j)$$

$$P_Y = P_X P_{Y|X} \longrightarrow p(y_j) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)p(y_j|x_i)$$

概率论知识回顾

小节1 用矩阵表示概率分布

小节2 常用概率公式

常用概率公式

条件概率公式 $$p(X=x_i|Y=y_j)=\frac{p(X=x_i,Y=y_j)}{p(Y=y_i)}=\frac{p(x_iy_j)}{p(y_j)}$$

全概率公式 $$p(X=x_i)=\sum_{j=1}^{n}p(Y=y_j)p(X=x_i|Y=y_j)=\sum_{j=1}^{n}p(y_j)p(x_i|y_j)$$

贝叶斯公式 $$p(X=x_i|Y=y_j)=\frac{p(x_iy_j)}{p(y_j)}=\frac{p(y_j|x_i)p(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}p(x_i)p(y_j|x_i)}$$

例题1–1 已知随机变量X和Y的联合概率分布如下表所示，试用概率空间表示 P_{XY}，并求 $P_X, P_Y, P_{X|Y}, P_{Y|X}$ 。

$p(x_iy_j)$		y_j = 1	2	3
x_i	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{18}$	0
	2	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{18}$
	3	0	$\frac{1}{18}$	$\frac{7}{36}$

解析1-1

$$P_{XY} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{18} & 0 \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{3} & \frac{1}{18} \\ 0 & \frac{1}{18} & \frac{7}{36} \end{bmatrix} \end{array}$$

例题1–1 已知随机变量X和Y的联合概率分布如下表所示，试用概率空间表示 P_{XY}，并求 $P_X, P_Y, P_{X|Y}, P_{Y|X}$ 。

解析1-1

$$P_{XY} = \begin{array}{c|ccc} & y_1 & y_2 & y_3 \\ \hline x_1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{18} & 0 \\ x_2 & \frac{1}{18} & \frac{1}{3} & \frac{1}{18} \\ x_3 & 0 & \frac{1}{18} & \frac{7}{36} \end{array}$$

$$P_X = \begin{bmatrix} \frac{11}{36} & \frac{16}{36} & \frac{9}{36} \end{bmatrix} \qquad P_Y = \begin{bmatrix} \frac{11}{36} & \frac{16}{36} & \frac{9}{36} \end{bmatrix}$$

$$P_{X|Y} = \begin{bmatrix} p(x_1|y_1) & p(x_2|y_1) & p(x_3|y_1) \\ p(x_1|y_2) & p(x_2|y_2) & p(x_3|y_2) \\ p(x_1|y_3) & p(x_2|y_3) & p(x_3|y_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p(x_1y_1)}{p(y_1)} & \frac{p(x_2y_1)}{p(y_1)} & \frac{p(x_3y_1)}{p(y_1)} \\ \frac{p(x_1y_2)}{p(y_2)} & \frac{p(x_2y_2)}{p(y_2)} & \frac{p(x_3y_2)}{p(y_2)} \\ \frac{p(x_1y_3)}{p(y_3)} & \frac{p(x_2y_3)}{p(y_3)} & \frac{p(x_3y_3)}{p(y_3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{11} & \frac{2}{11} & 0 \\ \frac{2}{16} & \frac{12}{16} & \frac{2}{16} \\ 0 & \frac{2}{9} & \frac{7}{9} \end{bmatrix}$$

例题1–1 已知随机变量X和Y的联合概率分布如下表所示，试用概率空间表示 P_{XY}，并求 $P_X, P_Y, P_{X|Y}, P_{Y|X}$ 。

解析1-1

$$P_{XY} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{18} & 0 \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{3} & \frac{1}{18} \\ 0 & \frac{1}{18} & \frac{7}{36} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$P_X = \begin{bmatrix} \frac{11}{36} & \frac{16}{36} & \frac{9}{36} \end{bmatrix} \qquad P_Y = \begin{bmatrix} \frac{11}{36} & \frac{16}{36} & \frac{9}{36} \end{bmatrix}$$

$$P_{Y|X} = \begin{bmatrix} p(y_1|x_1) & p(y_2|x_1) & p(y_3|x_1) \\ p(y_1|x_2) & p(y_2|x_2) & p(y_3|x_2) \\ p(y_1|x_3) & p(y_2|x_3) & p(y_3|x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p(x_1y_1)}{p(x_1)} & \frac{p(x_1y_2)}{p(x_1)} & \frac{p(x_1y_3)}{p(x_1)} \\ \frac{p(x_2y_1)}{p(x_2)} & \frac{p(x_2y_2)}{p(x_2)} & \frac{p(x_2y_3)}{p(x_2)} \\ \frac{p(x_3y_1)}{p(x_3)} & \frac{p(x_3y_2)}{p(x_3)} & \frac{p(x_3y_3)}{p(x_3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{11} & \frac{2}{11} & 0 \\ \frac{2}{16} & \frac{12}{16} & \frac{2}{16} \\ 0 & \frac{2}{9} & \frac{7}{9} \end{bmatrix}$$

例题1-2 已知某年级有甲、乙、丙三个班，各班人数分别占年级总人数的1/4、1/3、5/12，已知甲、乙、丙3个班级中集邮人数分别占该班总人数的1/2、1/4、1/5，试求：

（1）事件“某人为集邮者”的概率;

（2）事件“某人既为集邮者，又属于乙班”的概率；

（3）事件“某集邮者来自乙班”的概率。

解析1-2 设随机变量X = {X1 = 甲班，X2 =乙班，X3 = 丙班}代表学生的班级，

随机变量Y = {Y1 = 集邮，Y2 = 不集邮}代表学生是否集邮的状态。

$$P_X = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \end{bmatrix} \qquad P_{Y|X} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \end{array}$$

例题1-2 已知某年级有甲、乙、丙三个班，各班人数分别占年级总人数的1/4、1/3、5/12，已知甲、乙、丙3个班级中集邮人数分别占该班总人数的1/2、1/4、1/5，试求：

（1）事件“某人为集邮者”的概率;

（2）事件“某人既为集邮者，又属于乙班”的概率；

（3）事件“某集邮者来自乙班”的概率。

解析1-2

$$P_X = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \end{bmatrix} \qquad P_{Y|X} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \end{array}$$

（1）事件“某人为集邮者”的概率为 $p(y_1)$

$$P_Y = P_X P_{Y|X} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{24} & \frac{17}{24} \end{bmatrix}$$

事件“某人为集邮者”的概率为 $p(y_1) = \frac{7}{24}$

例题1-2 已知某年级有甲、乙、丙三个班，各班人数分别占年级总人数的1/4、1/3、5/12，已知甲、乙、丙3个班级中集邮人数分别占该班总人数的1/2、1/4、1/5，试求：

（1）事件“某人为集邮者”的概率;

（2）事件“某人既为集邮者，又属于乙班”的概率 ;

（3）事件“某集邮者来自乙班”的概率。

解析1-2

$$P_X=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12}\end{bmatrix} \qquad P_{Y|X}=\begin{array}{c|cc} & y_1 & y_2 \\ \hline x_1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ x_2 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ x_3 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5}\end{array}$$

（2）事件“某人既为集邮者，又属于乙班”的概率为 $p(x_2y_1)$

$$P_{XY}=\begin{bmatrix}p(x_1y_1) & p(x_2y_1) & p(x_3y_1)\\ p(x_1y_2) & p(x_2y_2) & p(x_3y_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p(y_1|x_1)p(x_1) & p(y_1|x_2)p(x_2) & p(y_1|x_3)p(x_3)\\ p(y_2|x_1)p(x_1) & p(y_2|x_2)p(x_2) & p(y_2|x_3)p(x_3)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{8} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12}\\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

事件“某人既为集邮者，又属于乙班”的概率为 $p(x_2y_1)=\frac{1}{12}$

例题1-2 已知某年级有甲、乙、丙三个班，各班人数分别占年级总人数的1/4、1/3、5/12，已知甲、乙、丙3个班级中集邮人数分别占该班总人数的1/2、1/4、1/5，试求：

（1）事件“某人为集邮者”的概率;

（2）事件“某人既为集邮者，又属于乙班”的概率；

（3）事件“某集邮者来自乙班”的概率。

解析1-2

$$P_X = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \end{bmatrix} \qquad P_{Y|X} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \end{array} \qquad P_{XY} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \qquad P_Y = \begin{bmatrix} \frac{7}{24} & \frac{17}{24} \end{bmatrix}$$

（3）事件“某集邮者来自乙班”的概率为 $p(x_2|y_1)$

$$P_{X|Y} = \begin{bmatrix} p(x_1|y_1) & p(x_2|y_1) & p(x_3|y_1) \\ p(x_1|y_2) & p(x_2|y_2) & p(x_3|y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p(x_1y_1)}{p(y_1)} & \frac{p(x_2y_1)}{p(y_1)} & \frac{p(x_3y_1)}{p(y_1)} \\ \frac{p(x_1y_2)}{p(y_2)} & \frac{p(x_2y_2)}{p(y_2)} & \frac{p(x_3y_2)}{p(y_2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{17} & \frac{6}{17} & \frac{8}{17} \end{bmatrix}$$

事件“某集邮者来自乙班”的概率为 $p(x_2|y_1) = \frac{2}{7}$