第 4 章　特征值与特征向量

§4.1　特征值问题引入 §4.2　特征值与特征向量

（基础部分）

一、填空题

1．假设 λ 为 n 阶可逆矩阵 A 的一个特征值，则 A^{-1} 的特征值__________；A 的伴随矩阵 A^*的特征值__________.

2. 设三阶矩阵 A 的特征值为 1，－1，2，则 A^{-1} 的特征值为___________________，A^2 的特征值为_____________，$2A^3+A^2-3E$ 的特征值为_____________.

3．已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ -10 & 6 & 7 \\ y & -2 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=2$，则 x=____________，y=_____________.

二、选择题

1．可逆矩阵 A 与矩阵［　　］有相同的特征值．

(A)A^T　　　(B)A^{-1}　　　(C)A^2　　　(D)$A+E$

2．设 A 为 n 阶方阵，以下结论中，［　　　］成立．

(A)若 A 可逆，则矩阵 A 的属于特征值 λ 的特征向量也是矩阵 A^{-1} 的属于特征值 $\dfrac{1}{\lambda}$ 的特征向量；

(B)A 的特征向量即为方程$(\lambda E-A)$X=0 的全部解；

(C)A 的特征向量的线性组合仍为特征向量；

(D)A 与 A^T 有相同的特征向量.

三、计算题

1．求下列矩阵的特征值和特征向量.

1）$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$　　　　2）$\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$

2．已知 $p=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量.求参数 a,b 及特征向量 p 所对应的特征值.

四、证明题

设 $A^2+3A+2E=0$，证明 A 的特征值只能取−1 或−2.

§4.1　特征值问题引入 §4.2　特征值与特征向量

（提高部分）

一、填空题

1．若 n 阶矩阵 A 满足 $|2A+3E|=0$，则 A 的一个特征值是________________.

2．已知三阶矩阵 A 的特征值是 0，1，－2，矩阵 $B=2A^3+A^2-3E$，则 B 的特征值分别是_______________，$E+B$ 的秩为_______________.

二、选择题

1．若 n 阶矩阵 A 任意一行的 n 个元素之和都是 a，则 A 的一个特征值为 [　　].

(A)a　　　(B)$-a$　　　(C)0　　　(D)a^{-1}

2．设 A 是 n 阶实对称矩阵，P 是 n 阶可逆矩阵，已知 n 维列向量 α 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量，则矩阵 $(P^{-1}AP)^T$ 属于特征值 λ 的特征向量是[　　　].

(A)$P^{-1}\alpha$　　　(B)$P^T\alpha$　　　(C)$P\alpha$　　　(D)$(P^{-1})^T\alpha$

三、证明题

1．设 $\lambda\neq0$ 是 m 阶矩阵 $A_{m\times n}B_{n\times m}$ 的特征值，证明 λ 也是 n 阶矩阵 BA 的特征值.

2．设 n 阶矩阵 A,B 满足 $R(A)+R(B)<n$，证明 A,B 有公共的特征值，有公共的特征向量.

§4.3　矩阵的相似对角化

（基础部分）

一、填空题

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -4\\ -2 & x & -2\\ -4 & -2 & 1\end{pmatrix}$ 与 $\Lambda=\begin{pmatrix}5 & & 0\\ & -4 & \\ 0 & & y\end{pmatrix}$ 相似，则 x=_______，y=________.

2. 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1，2，3，则 $|A^3-5A^2+7A|$=________.

3. 若 n 阶矩阵 A 有 n 个属于特征值 λ_0 的线性无关的特征向量，则 $R(A-\lambda_0 E)$=_______；A=__________.

4. 设 α，β 为 3 维列向量，若 $\alpha\beta^T$ 相似于 $\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则 $\beta^T\alpha$=__________.

二、选择题

1．已知 A 是 n 阶矩阵，若（　　）成立，则 A 与对角矩阵相似.

（A）A 是可逆矩阵；　　　　（B）$|A|=\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$

（C）A 的 n 个特征值 λ_1，λ_2，…，λ_n 均为单根

（D）$\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=tr(A)=a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}$

2．已知 n 阶矩阵 A 的 n 个特征值全为 0，则（　　）.

（A）A=0；　　　　（B）A 只有一个线性无关的特征向量；

（C）A 不能与对角形矩阵相似；　　（D）当 A 与对角矩阵相似时，A=0.

三、计算题

1．设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & x \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ 可相似对角化，求 x.

2．设 $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ 试求一个正交的相似变换矩阵，将矩阵 A 化为对角阵.

3．设 $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 0 & -3 & 4\\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix}$，求 A^{100}.

4．设 3 阶矩阵 A 的特征值为$\lambda_1=2$，$\lambda_2=-2$，$\lambda_3=1$，对应的特征向量依次为 $p_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，$p_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$p_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，求 A.

5．若四阶矩阵 A 与 B 相似，矩阵 A 的特征值为$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{5}$，求行列式$|B^{-1}-E|$的值.

§4.3　矩阵的相似对角化（提高部分）

一、计算题.

矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$是否能化为相似对角阵?如果能，求出可逆阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵Λ.

二、证明题. 设 A、B 都是 n 阶矩阵，且 A 可逆，证明 AB 与 BA 相似.

班级：　　　　　　　　　　学号：　　　　　　　　姓名：

第 4 章　自测题

一、填空题

1．已知 3 阶方阵 A 的 3 个特征值为-2，3，4，则 A^{-1} 的特征值为__________，A^T 的特征为____________，A^*的特征值为_____________，$A^2-3A+2E$ 的特征值为_____________.

2. 如果 2 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}7 & 12\\ y & x\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ 相似，那么 x=_______，y=_______.

二、计算题

1．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & 1\end{pmatrix}$，求 A 的特征值和特征向量.

2．已知 $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$.

3.已知向量 $\alpha=(1,k,1)^T$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1} 的特征向量，试求常数 k 的值.

第 5 章　实对称矩阵与二次型

§5.1 实对称矩阵的对角化　§5.2 二次型及标准形

（基础部分）

一．填空题

1. 已知矩阵$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & a & 3 \end{pmatrix}$ $(a>0)$ 与矩阵$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$相似则 a=________________.

2．已知二次型 $f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2ax_2x_3 \quad (a>0)$，通过正交变换 $X=TY$ 化成标准形 $y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$，则 a=________________.

二．求正交变换化二次型为标准形

（1） $f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_2x_3$

（2）$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_3x_4$

三．已知二次型 $f = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3$，试用正交变换法化 f 为标准形，并写出所用正交变换.

四．将 $A=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&3&1\\0&1&3\end{pmatrix}$ 正交对角化．

五．构造矩阵 A 的一个谱分解，其中 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&3&6\end{pmatrix}$.

§5.1 实对称矩阵的对角化 §5.2 二次型及标准形

（提高部分）

一． 设n阶实对称矩阵A满足$A^2=A$，且A的秩为r，求行列式$|2E-A|$的值.

二． 设 3 阶对称阵A的特征值为$\lambda_1=6$，$\lambda_2=\lambda_3=3$，与特征值$\lambda_1=6$对应的特征值向量为$p_1=(1,1,1)^T$，求A.

班级：　　　　　　　　学号：　　　　　　　　姓名：

三．设 α 是 R^n 中的单位向量，令 $B = \alpha\alpha^T$，

(1)对任意向量 $\beta \in \mathbb{R}^n$，证明 $B\beta$ 是 β 在 α 上的正交投影；

(2)证明 B 为对称阵且 $B^2 = B$；

(3)证明 α 是 B 的特征向量，并求对应的特征值.

四．　设 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$，$a_1 \neq 0$，$A = aa^T$

(1)证明 $\lambda = 0$ 是 A 的 $n-1$ 重特征值；

(2)求 A 的非零特征值及 n 个线性无关的特征向量.

§5.3 正定二次型与正定矩阵

（基础部分）

一、填空题

1．若矩阵$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{t}{2} \\ 0 & \frac{t}{2} & 1 \end{pmatrix}$正定，则 t 的取值范围是____________.

2． 若二次型 $f=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$ 是正定的，则 t 的取值范围是____________.

二、选择题

1．n 阶对称矩阵 A 为正定的充分必要条件是［　　］.

(A) $|A|>0$；　　　　　(B)存在 n 阶矩阵 C，使 $A=C^TC$；

(C)A 的特征值全大于零；　　　(D)存在 n 维列向量 $\alpha\neq 0$，有 $\alpha^TA\alpha>0$.

2．若 A，B 都是正定的 n 阶实对称矩阵，那么 AB 一定是［　　］.

(A)实对称矩阵；　　　　　(B)正交矩阵；

(C)正定矩阵；　　　　　(D)可逆矩阵.

三．判定下列二次型的正定性

（1）$f=-2x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$

（2） $f=x_1^2+3x_2^2+9x_3^2+19x_4^2-2x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4-6x_2x_4-12x_3x_4$

四．证明对称阵 A 为正定的充分必要条件是：存在可逆矩阵 U，使 $A=U^TU$，即 A 与单位矩阵 E 合同.

五．设 A，B 分别是 m，n 阶正定矩阵，试证明分块阵 $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ 是正定阵.

§ 5.3 正定二次型与正定矩阵

（提高部分）

一． 设 A 为 n 阶实对称阵，其特征值都大于常数 a，证明当 $t \le a$ 时，二次型 $f = x^T(A-tE)x$ 是正定二次型．

二．设 A，B 都是正定矩阵，试证：AB 是正定矩阵的充要条件是 $AB=BA$．

第 5 章　自测题

一、填空题

1. 已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ a+b & 5 & a-b \\ c & 0 & d \end{pmatrix}$ 是正定矩阵，则参数 a,b,c,d 是________________.

二、选择题

1．满足条件［　　］的两个 n 阶矩阵 A，B 相似.

(A) $|A|=|B|$；(B) $R(A)=R(B)$；(C) A，B 有相同的特征多项式；

(D) A，B 有相同的特征值且 n 个特征值各不相同.

2．对于 n 阶实对称矩阵 A，下列结论中［　　］正确.

(A) A 一定有 n 个不同特征值；(B) 存在正交矩阵 p，使 p^TAp 为对角阵；

(C) 特征值均为整数；(D) 对应于不同特征值的特征向量线性无关，但不一定正交.

3．二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+tx_2^2+3x_3^2+2x_1x_2$，当 $t=$［　　］时，f 的秩是 2.

(A) 0；　　(B) 1；　　(C) 2；　　(D) 3.

4．设 A 为 n 阶可逆矩阵，λ 是 A 的一个特征值，则 A 的伴随矩阵 A^* 的特征值之一是［　　］.

(A) $\lambda^{-1}|A|^n$；　(B) $\lambda^{-1}|A|$；　(C) $\lambda|A|$；　(D) $\lambda|A|^n$.

5．n 阶矩阵 A 与某对角矩阵相似，则［　　］.

(A) $R(A)=n$；　　　　(B) A 是实对称矩阵；

(C) A 有 n 个不同的特征值；　　(D) A 有 n 个线性无关的特征向量.

6．若 $\lambda=0$ 是矩阵 A 的特征值，那么齐次线性方程组 $Ax=0$［　　］.

(A) 有解但不一定有非零解；　　(B) 只有零解；

(C) 不能确定；　　(D) 一定有非零解.

7．如果 n 阶矩阵 A 有且仅有两个属于特征值为 0 的线性无关的特征向量，那么 $R(A)=$［　　］.

(A) n；　　(B) $n-1$；　　(C) $n-2$；　　(D) 0．

三、计算题

1．用正交变换 $x=Py$ 化二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$ 为标准形.

2．设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3，向量 $\alpha_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $Ax=0$ 的两个解，

(I)求 A 的特征值与特征向量．(II)求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ 使得 $Q^TAQ=\Lambda$．

四、 设 A 是 n 阶正定矩阵，E 是 n 阶单位阵，证明：$|A+E|>1$．