第一章答案

§1.1，1.2（基础）

一、

1.同型；相等　2.同解（或等价）　3.相容

二、

1.D　2.D

三、

1.

（1）$\begin{pmatrix} 1 & k & -3 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \underset{r_2+r_1}{\overset{r_2\times\frac{1}{2}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & k & -3 \\ 0 & k+2 & 0 \end{pmatrix}$　恒相容$(k\in R)$

（2）$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 & k \\ 0 & 3 & -5 & h \\ -2 & 5 & -9 & l \end{pmatrix} \overset{r_3+2r_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 & k \\ 0 & 3 & -5 & h \\ 0 & -3 & 5 & 2k+l \end{pmatrix} \overset{r_3+r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 & k \\ 0 & 3 & -5 & h \\ 0 & 0 & 0 & h+2k+l \end{pmatrix}$

$\Rightarrow h+2k+l=0$

2.

（1）$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -2 & 2 \end{pmatrix} \overset{r_2-3r_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix} \overset{r_1+r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$

$\therefore$通解为$\begin{cases} x_1=2t-4 \\ x_2=t \\ x_3=-7 \end{cases} \quad (t\in R)$

（2）$\overset{r_1+r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{r_1+3r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore$通解为$\begin{cases} x_1 = 3t_2 + 5 \\ x_2 = 4t_2 + 1 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = -9t_2 + 4 \\ x_5 = t_2 \end{cases} \quad (t_1、t_2 \in R)$

§1.1，1.2（提高）

一、

1. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 & 0 \\ -9 & 12 & -6 & 0 \\ -6 & 8 & -4 & 0 \end{pmatrix} \underset{r_3+2r_1}{\overset{r_2+3r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{r_1 \times \frac{1}{3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore$通解为$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{3}t_1 - \frac{2}{3}t_2 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = t_2 \end{cases} \quad (t_1、t_2 \in R)$

2. $\begin{pmatrix} 1 & -7 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & 7 & -4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \overset{r_3+r_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -7 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & 12 \end{pmatrix} \overset{r_3+4r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -7 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore$通解为$\begin{cases} x_1 = 7t_1 - 6t_2 + 5 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = 2t_2 - 3 \\ x_4 = t_2 \end{cases} \quad (t_1、t_2 \in R)$

二、

1. 系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&1&-1&1\\2&1&-1&2&-3\\3&-2&-1&1&-2\\2&-5&1&-2&2\end{pmatrix}\underset{\substack{r_3-r_2\\r_3-r_1\\r_2-2r_1}}{\overset{r_4-r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&-2&1&-1&1\\0&5&-3&4&-5\\0&-1&-1&0&0\\0&-6&2&-4&5\end{pmatrix}\underset{\substack{r_4-r_3\\r_2\leftrightarrow r_3}}{\overset{r_4+r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&-2&1&-1&1\\0&-1&-1&0&0\\0&5&-3&4&-5\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_2\times(-1)}{\overset{r_3+5r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&-2&1&-1&1\\0&1&1&0&0\\0&0&-8&4&-5\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\underset{\substack{r_1\times 8\\r_1+3r_3}}{\overset{\substack{r_1+2r_2\\r_2\times 8\\r_2+r_3}}{\sim}}\begin{pmatrix}8&0&0&4&-7\\0&8&0&4&-5\\0&0&-8&4&-5\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{7}{8}\\0&1&0&\frac{1}{2}&-\frac{5}{8}\\0&0&1&-\frac{1}{2}&\frac{5}{8}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\therefore\text{通解为}\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}t_1+\frac{7}{8}t_2\\x_2=-\frac{1}{2}t_1+\frac{5}{8}t_2\\x_3=\frac{1}{2}t_1-\frac{5}{8}t_2\\x_4=t_1\\x_5=t_2\end{cases}\qquad(t_1\text{、}t_2\in R)$$

2.

$$B=\begin{pmatrix}1&1&-6&-4&6\\3&-1&-6&-4&2\\2&3&9&2&6\\3&2&3&8&-7\end{pmatrix}\underset{\substack{r_2-3r_1\\r_3-2r_1}}{\overset{r_4-r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&-6&-4&6\\0&-4&12&8&-16\\0&1&21&10&-6\\0&3&9&12&-9\end{pmatrix}\underset{\substack{r_3-r_2\\r_4-3r_2\\r_4\times(-\frac{1}{3})}}{\overset{r_2\times(-\frac{1}{4})}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&-6&-4&6\\0&1&-3&-2&4\\0&0&24&12&-10\\0&0&-6&-6&7\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&-6&-4&6\\0&1&-3&-2&4\\0&0&-6&-6&7\\0&0&0&2&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-6&0&0\\0&1&-3&0&1\\0&0&-6&0&-2\\0&0&0&2&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0&0&2\\0&2&0&0&4\\0&0&-6&0&-2\\0&0&0&2&-3\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&2\\0&0&1&0&\frac{1}{3}\\0&0&0&1&\frac{-3}{2}\end{pmatrix}$$

$\therefore$解为$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = \dfrac{1}{3} \\ x_4 = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$

§1.3 基础部分

一、1.不变 2.R(A)=R(A,b) 3.R(A)<n

二、1.C

三、1.R(A)=5

2.R(A)=3

四、1.B～$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ 系数矩阵与增广矩阵的秩都为 4

∴相容

解为(3,-3,-1/3,-2)

2.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \underset{\substack{r_4 - 3r_2 \\ r_4 + r_3}}{\overset{r_4 + 2r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore$解为：$\begin{cases} x_1 = 2t - 3 \\ x_2 = 3t - 1 \\ x_3 = -3t + 1 \\ x_4 = t \end{cases} \qquad t \in R$

五.

$$B=\begin{pmatrix}1&1&2&3&1\\1&3&6&1&3\\3&-1&a&15&3\\1&-5&-10&12&b\end{pmatrix}\underset{\substack{r_3-3r_1\\r_4-r_1}}{\overset{r_2-r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&2&3&1\\0&2&4&-2&2\\0&-4&a-6&6&0\\0&-6&-12&9&b-1\end{pmatrix}\underset{\substack{r_4+3r_2\\r_2\times\frac{1}{2}}}{\overset{r_3+2r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&2&3&1\\0&1&2&-1&1\\0&0&a+2&2&4\\0&0&0&3&b+5\end{pmatrix}$$

①当 $a+2\neq0$ 即 $a\neq-2$ 时，有唯一解

$$\begin{cases}x_1=-\dfrac{4}{3}(b+5)\\x_2=\dfrac{ab+8a+6b+12}{3(a+2)}\\x_3=\dfrac{2(1-b)}{3(a+2)}\\x_4=\dfrac{b+5}{3}\end{cases}$$

②当 $a+2=0$ 即 $a=-2$ 时 $B\sim\begin{pmatrix}1&1&2&3&1\\0&1&2&-1&1\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&b-1\end{pmatrix}$

i）当 $b\neq1$ 时，即 $a=-2$，$b\neq1$ 时无解

ii）当 $a=-2$，$b=1$ 时有无穷解

通解为 $\begin{cases}x_1=-8\\x_2=-2t+3\\x_3=t\\x_4=2\end{cases}\quad t\in R$

§1.3 提高部分

一、1.r=n, r<n

2.a=-1

3.$\sum_{i=1}^{5}a_i=0$

二、1.B　2.D

三、1.A～$\begin{pmatrix}1 & -2 & 3k \\ 0 & 2(k-1) & 3(k-1) \\ 0 & 0 & -3(k+2)(k-1)\end{pmatrix}$

当 k≠1, k≠−2 时，R(A)=3

当 k=1 时，R(A)=1

当 k=-2 时，R(A)=2

2.

B～$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -2 & 2-3\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda\end{pmatrix}$

当λ =1 时有解，

解为$\begin{cases}x_1=-t+1 \\ x_2=2t-1 \quad t\in R \\ x_3=t\end{cases}$

第 1 章 自测题

一、1.相容

2. $\begin{cases}x_1=t_1 \\ x_2=t_2+1 \\ x_3=3-4t_2 \\ x_4=t_2\end{cases} \quad t_1,t_2\in R$

二、

1.B～$\begin{pmatrix}1 & -1/3 & 0 & 0 & 13/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

∴通解为$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}t_1 + \frac{13}{3} \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = -7 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad t \in R$

2. B～$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

通解为：

$$\begin{cases} x_1 = -8 \\ x_2 = t + 3 \\ x_3 = 2t + 6 \\ x_4 = t \end{cases} \quad t \in R$$

三、1. B～$\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 8-4a & b-8 \end{pmatrix}$

①当 a≠2 时，有唯一解

②当 a=2,b≠8 时，无解

③当 a=2, b=8 时，有无穷多解

通解为$\begin{cases} x_1 = -2t + 2 \\ x_2 = t \end{cases} \quad t \in R$

2. B～$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & k-2 & 8 \\ 0 & 0 & -(k-4)(k+1) & 2k(k-4) \end{pmatrix}$

①当 k≠-1, k≠4 时，有唯一解

②当 k=-1 时，无解

③当 k=4 时，有无穷多解

通解为$\begin{cases} x_1 = -3t \\ x_2 = -t + 4 \\ x_3 = t \end{cases} \quad t \in R$