

## 第二章 矩阵及其运算习题答案

### §2.1§2.2(基础部分)

#### 一、 填空题

$$1. a_{ij} = b_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$2. \begin{bmatrix} \lambda^n & & \\ & \lambda^n & \\ & & \lambda^n \end{bmatrix}$$

$$3. tr(AB) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki}, \quad tr(BA) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m b_{ik} a_{ki}$$

#### 二、 计算题

$$1. 2A + 3B = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 10 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 3 \end{bmatrix}, \quad AB - BA = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -6 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$2. AP_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix}, \quad P_1 A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

$$AP_2 = \begin{bmatrix} k & 2 & 3 \\ 4k & 5 & 6 \\ 7k & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad P_2 A = \begin{bmatrix} k & 2k & 3k \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

$$AP_3 = \begin{bmatrix} 1+2k & 2 & 3 \\ 4+5k & 5 & 6 \\ 7+8k & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad P_3 A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4+k & 5+2k & 6+3k \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

$$3. AB^T = 6$$

$$B^T A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$4. (1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

5. 略

$$6. a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

$$7. AB = AC = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -2 & 14 \end{bmatrix}$$

## §2.1§2.2(提高部分)

一、

证明:  $\because A, B$  对称,  $\therefore A^T = A, B^T = B$

$$AB \text{ 对称} \Leftrightarrow AB = (AB)^T$$

$$\Leftrightarrow AB = B^T A^T$$

$$\Leftrightarrow AB = BA$$

二、证明:

$$\because \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$$

$$\therefore \operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(A(BC)) = \operatorname{tr}((BC)A) = \operatorname{tr}(BCA) = \operatorname{tr}(B(CA)) = \operatorname{tr}((CA)B) = \operatorname{tr}(CAB)$$

$$\therefore \operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(BCA) = \operatorname{tr}(CAB)$$

## §2.3(基础部分)

一、 填空题

1. 子矩阵(或子块), 子矩阵(或子块).

$$2. A^T = \begin{bmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{bmatrix}$$

二、略

$$三、AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -6 \end{bmatrix}, \text{ 注: 此题重点在于考察分块矩阵乘法, 注意分块方式!}$$

## §2.4(基础部分)

一、填空题

1.  $B$ ; 2.  $E$ ; 3. 相同

二、选择题

1. D; 2. C

三、计算题

$$1. A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2. X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 2 \\ -\frac{8}{3} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$3. A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}$$

$$4. A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 4 \\ 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -3 \end{bmatrix}$$

$$5. X = (A - 2E)^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$6. X = BA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$7. B = (A - E)^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

## §2.3§2.4 (提高部分)

### 一、 填空题

$$1. \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}$$

$$2. \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 1 \\ -1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

### 二、计算题

$$1. X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{37}{7} & -\frac{8}{7} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{34}{7} & -\frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{38}{7} & -\frac{6}{7} \end{bmatrix}$$

$$2. A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \varphi(A) = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 24 & 29 \end{bmatrix}$$

$$三、B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

注:

$$方法1 \quad B = (A - E)^{-1}(A^2 - E)$$

$$方法2 \quad 注意到 A^2 - E = (A - E)(A + E) = (A + E)(A - E), 从而有$$

$$B = (A - E)^{-1}(A^2 - E) = (A - E)^{-1}(A - E)(A + E) = A + E$$

$$四、证明: \because X\left(\frac{X+E}{2}\right) = E$$

$$\therefore X \text{ 可逆, 且 } X^{-1} = \frac{X+E}{2}$$

五、解:

$$\therefore (A, E) \xrightarrow{r} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & -4/7 & 3/7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 5/7 & -2/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -6/7 & 1/7 \end{bmatrix} = (PA, P)$$

$$\therefore P = \begin{bmatrix} 0 & -4/7 & 3/7 \\ 0 & 5/7 & -2/7 \\ 1 & -6/7 & 1/7 \end{bmatrix}$$

## §2.5 方阵的行列式

(基础部分)

一、填空题

$$1. (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}; \quad 2. 0; \quad 3. \neq 0; \quad 4. -10; \quad 5. -32; \quad 6. 25; \quad 7. -\frac{2^{2n-1}}{3};$$

$$8. 5; \quad 9. -16$$

二、选择题

$$1. D; \quad 2. C; \quad 3. C; \quad 4. B \text{ (订正: 题目中齐次线性方程组系数矩阵为方阵)}; \quad 5. C$$

### 三、计算题

1.  $-25$ ; 2.  $-1$ ; 3.  $x^4$ ; 4.  $[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$ ; 5.  $a^{n-2}(a^2-1)$ ;  
6.  $(a_0 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i})a_1a_2 \cdots a_n$ ; 7.  $n!$ .

### 四、证明题 略

## §2.5 方阵的行列式

### (提高部分)

#### 一、计算下列行列式的值

1.  $(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i})a_1a_2 \cdots a_n$ ; 2.  $(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$

#### 二、求解方程组

$$x_1=1, x_2=\cdots=x_n=0$$

三、  $B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

#### 四、

1.

$$D_n = n! \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & \cdots & 3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & n & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix} = n! \prod_{n \geq i > j \geq 1} (i-j) = n!(n-1)! \cdots 3!2!$$

2.

$$D_n^{c_1 + xc_2 + x^2c_3 + \cdots + x^{n-1}c_n} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ \varphi(x) & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

其中

$$\varphi(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

按第一列展开，得

$$D_n = \varphi(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

3. 提示：数学归纳法验证。

## 第二章 自测题

### (基础部分)

#### 一、填空题

1.  $m = p$  且  $n = q$ ,  $n = p$ ; 2.  $\frac{1}{2}$ ; 3.  $|A|E$ ; 4.  $\frac{1}{2}$ ; 5.  $-\frac{1}{2}, 2$ ; 6. 奇数, 偶数;  
7.  $-12$ ; 8.  $0$ ; 9.  $a^3 + 2b^3 - 3ab^2$ ;

#### 二、选择题

1. C; 2. B; 3. A; 4. A.

#### 三、计算题

$$1. \text{可逆, } A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -9 & 7 & 2 & -3 \\ 5 & -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2.  $0$ ; 3.  $218$ ; 4.  $(-1) \times 2 \times (n-2)!$ ; 5.  $0$ ;

#### 四、计算和证明

1.  $\mu=0$  或  $\lambda=1$ ; 2.  $-16$ ;

3. 证明:

$$\because A^* \begin{pmatrix} 1 \\ |A| \end{pmatrix} A = \frac{1}{|A|} (A^* A) = \frac{1}{|A|} (|A| E) = E$$

$$\therefore A^* \text{可逆, 且 } A^{*-1} = \frac{1}{|A|} A.$$

4. 证明:

(i)  $\because A^* A = |A| E$ , 又  $\because A$  可逆,

$$\therefore A^* = |A| A^{-1}$$

$$\therefore A^* A^{-1*} = (|A| A^{-1}) A^{-1*} = |A| (A^{-1}) A^{-1*} = |A| |A^{-1}| E = E$$

$$\therefore A^* \text{可逆, 且 } A^{*-1} = A^{-1*}.$$

(ii) 分两种情况讨论:

1) 若  $A = 0$ ,

则必有  $A^* = 0$ , 从而有  $|A^*| = 0$ ;

2) 若  $A \neq 0$ , 用反证法.

若  $|A^*| \neq 0$ , 则  $A^*$  可逆, 从而由  $AA^* = |A| E = 0$ , 得到  $A = 0 \cdot A^{*-1} = 0$ .

与  $A \neq 0$  矛盾, 结论得证.

(iii)  $|A| = 0$  的情形见 (ii), 下证  $|A| \neq 0$  的情形.

$$\begin{aligned} \because AA^* &= |A|E = 0, \text{ 又 } \because A \text{ 可逆}, \therefore A^* = |A|A^{-1} \\ \therefore |A^*| &= ||A|A^{-1}| = |A|^n |A^{-1}| = |A|^{n-1}. \end{aligned}$$

### (提高部分)

#### 一、填空题

1. 2 或 -2;    2. 2;    3. 负;

#### 二、选择题

1. D; 2. A; 3. B; 4. C

#### 三、计算题

方程化简为  $X(C-B)^T = E$ , 解得

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

#### 四、证明:

$\because A(A^2 - A + 2E) = E$ ,  $\therefore A$  可逆, 且  $A^{-1} = A^2 - A + 2E$ .

$\because (E - A)(A^2 + 2E) = E$ ,  $\therefore (E - A)$  可逆, 且  $(E - A)^{-1} = A^2 + 2E$ .

#### 五、

(1) 解:

由已知得

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E & 0 \\ X & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & Y \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ XA_{11} & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & Y \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{11}Y \\ XA_{11} & XA_{11}Y + S \end{pmatrix} \\ \therefore \begin{cases} A_{12} = A_{11}Y \\ A_{21} = XA_{11} \\ A_{22} = XA_{11}Y + S \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} X = A_{21}A_{11}^{-1} \\ Y = A_{11}^{-1}A_{12} \end{cases}. \end{aligned}$$

(2) 证明:

$\because A_{11}$  可逆,

$$\therefore \begin{pmatrix} E & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix}$$

又  $\because A$  可逆,

$$\begin{aligned} \therefore |A| &= \begin{vmatrix} E & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & E \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & E \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{vmatrix} = |A_{11}| |A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}| \neq 0 \end{aligned}$$

$\therefore |A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}| \neq 0$ , 所以  $S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$  可逆.

#### 六、证明: (注: 平凡解是指方程组的零解!)

(1) 用反证法.

假设存在  $\tilde{x} \neq 0$ , 使得  $A\tilde{x} = 0$ , 则

$$0 = C(A\tilde{x}) = (CA)\tilde{x} = E\tilde{x} = \tilde{x} \neq 0$$

矛盾！故  $Ax = 0$  仅有平凡解.

由  $Ax = 0$  仅有平凡解，可得  $R(A) = n \leq \min\{m, n\} \leq m$ ，

故  $n \leq m$  得证.

(2) 对任意  $m$  维列向量  $b$ ，有

$$A(Db) = (AD)b = Eb = b，$$

$\therefore \tilde{x} = Db$  为  $Ax = b$  的一个解，即  $Ax = b$  有解.

下证  $m \leq n$ ，

因为对任意  $m$  维列向量  $b$ ， $Ax = b$  有解，

所以  $AX = E_m$  有解，从而有  $R(A) = R(A, E_m)$ .

又  $\because m = R(E_m) \leq R(A, E_m) \leq m$ ， $\therefore R(A, E_m) = m$ ，

$\therefore m = R(A) \leq \min\{m, n\} \leq n$ ， $m \leq n$  得证.

(3) 由结论 (1) 和 (2) 可得  $m \leq n$  且  $m \geq n$ ，从而有  $m = n$ ，

即  $A$  为方阵.

七、 $D_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$  .