第三章中值定理与导数的应用

§1　中值定理(基础部分)

一、　　填空题

1. 函数 $f(x)=\arctan x$ 在[0,1]上使拉格朗日中值定理的结论成立的点ξ是.

2. 设函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$，则方程 $f'(x)=0$ 有个实根，分别位于区间中.

二、选择题

1.罗尔定理的三个条件：$f(x)$在［a，b］上连续，在(a，b)内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，是 $f(x)$ 在(a，b)内至少有一点ξ，使得 $f'(\xi)=0$ 成立的（）.

(A) 必要条件　　　　(B) 充分条件

(C) 充要条件　　　　(D) 非充分非必要

2.下列函数在$[-1,1]$上满足罗尔定理条件的是（ ）.

(A) $f(x)=e^x$　　　　(B) $f(x)=|x|$

(C) $f(x)=1-x^2$　　　　(D) $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

三、证明下列等式

1. $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$ ($-1\le x\le 1$).

2、证明：若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty，+\infty)$ 内满足关系式 $f'(x)=f(x)$，且 $f(0)=1$，则 $f(x)=e^x$.

四、证明下列不等式

1．$\frac{x_1-x_2}{x_1}<\ln\frac{x_1}{x_2}<\frac{x_1-x_2}{x_2}(x_1>x_2>0)$.

2．$\frac{h}{1+h^2}<\arctan h\ \ (h>0)$.

五、构造辅助函数证明中值问题

1. 若函数 $f(x)$ 在 $(a，b)$ 内具有二阶导数，且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，其中 $a<x_1<x_2<x_3<b$，证明在 (x_1,x_3) 内至少有一点 ξ，使得 $f''(\xi)=0$.

2. 设$f(x)$、$g(x)$在［a，b］上连续，在$(a，b)$内可导，$f(a)=f(b)=0$，证明：$\exists\xi\in(a，b)$使得$f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$.

3、设$f(x)$在［a，b］连续，$(a，b)$可导，$ab>0$，证明：$\exists\xi,\eta\in(a,b)$使得$\frac{f'(\xi)}{2\xi}(a+b)=\frac{f'(\eta)}{3\eta^2}(a^2+ab+b^2)$.

§1　中值定值(提高部分)

一、设 $f(x)$在［0，1］上连续，在(0，1)内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$f(\frac{1}{2})=1$，求证：

在(0，1)内至少存在一点ξ，使得 $f'(\xi)=1$.

二、设 $f(x)$在［a，b］上可导，$f(a)=f(b)=0$， $f'_+(a)\cdot f'_-(b)>0$，证明：

(1) $f(x)=0$ 在(a，b)内至少有一个实根;

(2) $f'(x)=0$ 在(a，b)内至少有二个实根.

§2　洛必达法则（基础部分）

一、用洛必达法则求极限：

1．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{\sin 3x}$

2．$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{arc\cot x}$

3．$\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$

4．$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$

5．$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{x+e^x}$

6．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x\sin^2 x}$

7．$\lim\limits_{x\to 0^+}x^2\ln x$

8．$\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$　　　　　　　　　10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^{x}$

二、验证下列函数的极限存在，但不能直接用洛必达法则求解

1．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$　　　　　　　　　2．$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$

三、求极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$

1．若 $f(x)$的二阶导数 $f''(x)$存在且连续;2．若 $f(x)$的二阶导数 $f''(x)$存在.

§2　洛必达法则(提高部分)

一、求下列极限

1．$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

2．$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$

3．$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$

4．$\lim\limits_{x\to0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$

二、讨论函数$f(x)$在 x=0 处的连续性，其中 $f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}} & \text{当 } x>0 \text{ 时} \\ e^{-\frac{1}{2}} & \text{当 } x\le 0 \text{ 时}\end{cases}$.

三、设$f(x)$具有二阶连续导数，且$f(0)$=0，试证明

$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x} & x\neq 0 \\ f'(0) & x=0\end{cases}$具有一阶连续导数.

§3　泰勒公式(基础部分)

一、按$(x-4)$的乘幂表示多项式 $x^4-5x^3+x^2-3x+4$.

二、将下列函数在指定点 x_0 处展开为泰勒公式.

1．$f(x)=x^2e^x$，$x_0=0$ (三阶泰勒公式)

2．$f(x)=\dfrac{1}{x}$，$x_0=-1$ (n 阶)

3．$y=\sin^2 x$，$x_0=0$ (n 阶)

§3　泰勒公式(提高部分)

一、　选择题（202101）

设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $x=0$ 处的 3 次泰勒多项式为 $ax+bx^2+cx^3$，则（）.

(A) $a=1,b=0,c=-\dfrac{7}{6}$　　(B) $a=1,b=0,c=\dfrac{7}{6}$

(C) $a=-1,b=-1,c=-\dfrac{7}{6}$　　(D) $a=-1,b=-1,c=\dfrac{7}{6}$

二、求下列极限

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3}\right)$

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2\left[x+\ln\left(1-x\right)\right]}$

3.若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$

三、证明题

1. 设$f(x)$在［0，1］上有三阶导数，且$f(0)=0$，$f(1)=\frac{1}{2}$， $f'(\frac{1}{2})=0$，求证：存在$\xi\in(0,1)$使得$f'''(\xi)\geq 12$.

2.设$f(x)$在［0,2］上有连续的三阶导数，且$f(0)=1$，$f(2)=2$, $f'(1)=0$ ，求证：存在$\xi\in(0,2)$使得$f'''(\xi)=3$.

§4　函数的单调性与曲线的凹凸性(基础部分)

一、判别下列函数的单调性并确定单调区间

1． $y = x - e^x$

2． $y = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

二、求下列函数图形的拐点与凹凸区间

1． $y=\ln(1+x^2)$

2． $y=e^{\arctan x}$

三、判别数列 $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n - \ln n}\right\}$ 的单调性.

四、证明下列不等式

1．$\dfrac{a}{b}<\dfrac{\ln a}{\ln b}<\dfrac{b}{a}$ $(e<a<b)$.

2．$\tan x>x+\dfrac{x^3}{3}\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

3．$\sin x+\cos x>1+x-x^2 \quad (x>0)$.

4．$\dfrac{1}{2}(x^n+y^n)>\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n$ $(x>0$，$y>0$，$x\neq y$，$n>1)$.

5．$x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\dfrac{x+y}{2}$ (x>0，y>0).

五、设 $f(x)$在[a，b]上有二阶导数，且 $f''(x)>0$，证明：函数 $F(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 在[a，b]上是单调增加的.

六、求曲线 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 中的 a，b，c，d，使得点(-2，44)为驻点，(1，-10)为拐点.

§4 函数的单调性与曲线的凹凸性(提高部分)

一、选择题

1. 设在[0，1]上 $f''(x)>0$，则 $f'(0),\ f'(1),\ f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 的大小顺序是（）.

（A）$f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$　　　　（B）$f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

（C）$f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$　　　　（D）$f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

2. 设函数 $y=f(x)$具有二阶导数，且 $f'(x)>0,\ f''(x)>0$，Δx 为自变量 x 在 x_0 处的增量，Δy 与 dy 分别为 $f(x)$在点 x_0 处对应的增量与微分，若 $\Delta x>0$，则（）.

（A）$0<dy<\Delta y$　　（B）$0<\Delta y<dy$　　（C）$\Delta y<dy<0$　　（D）$dy<\Delta y<0$

二、填空题

1.曲线 $\begin{cases} x=t^3+3t+1 \\ y=t^3-3t+1 \end{cases}$ 的凹区间对应的 t 的取值范围为，拐点为______________.

2.设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y\ln y-x+y=0$ 确定，则曲线 $y=y(x)$ 在点 $(1,1)$ 附近的凹凸性为______________.

三、证明题

设 $f(x)$在［0，+∞)上二阶可导，且 $f(0)=-1$，$f'(0)>0$，当 $x>0$ 时 $f''(x)>0$，求证：$f(x)=0$ 在(0，+∞)内只有一根.

§5　函数的极值与最大值最小值(基础部分)

一、选择题

1．设 $f(x)$及 $g(x)$均在 $x=x_0$处取得极大值，则 $h(x)=f(x)\cdot g(x)$在 $x=x_0$处(　　).

(A) 取极大值　　　　　(B) 取极小值

(C) 不可能取极值　　　(D) 是否取极值不能确定

2．设函数 $f(x)$在 $x=0$ 的某一邻域内连续,且 $f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$,则在点 $x=0$ 处 $f(x)$(　　　).

(A) 不可导　　　(B) 可导且 $f'(0)\neq 0$

(C) 取得极大值　　　(D) 取得极小值

3.设 $f(x)$在 $x=x_0$的邻域内可导，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{x-x_0}=a<0$，则(　　).

(A) $f(x_0)$为 $f(x)$的极小值

(B) $f(x_0)$为 $f(x)$的极大值

(C) 在 $x=x_0$的某邻域内 $f(x)$单调增加

(D) 在 $x=x_0$的某邻域内 $f(x)$单调减少

二、求下列函数的极值

1．$y=2-(x-1)^{\frac{2}{3}}$　　　　　　2．$y=\dfrac{x}{\ln x}$

3．已知函数 $y\left(x\right)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 确定，求 $y\left(x\right)$ 的极值.（201701）

三、问 a 取何值时，函数 $f(x)=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取极值，并求此极值，请说明是极大值还是极小值.

四、函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 在 $x=-1$ 处取极大值 8,在 $x=2$ 处取极小值 -19，求 a，b，c，d.

五、求下列函数的最大值与最小值

1． $y=x+2\sqrt{x}$ ，$0\le x\le 4$

2． $y=\sin^3 x+\cos^3 x$，$0\le x\le \dfrac{3}{4}\pi$

3． $y=x^2-\dfrac{54}{x}(x<0)$ 在何处取得最小值.

六、应用题

1．在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 内嵌入一个内接矩形，使矩形的边平行于椭圆的轴，求最大内接矩形的面积.

2．要做一个圆锥漏斗，其母线长为 20 cm，要使其体积最大，问其高应为多少?

§5　函数的极值与最大值最小值(提高部分)

一、选择题

1．设 $f'(x_0)=f''(x_0)=0$，$f'''(x)>0$，则(　　　　).

(A) $f'(x_0)$是$f'(x)$的极大值　　(B) $f(x_0)$是$f(x)$的极大值

(C) $f(x_0)$是$f(x)$的极小值　　(D) $(x_0, f(x_0))$是$y=f(x)$的拐点

2．设$f(x)$有二阶连续导数，且$f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$，则(　　).

(A) $f(0)$是$f(x)$的极大值　　(B) $f(0)$是$f(x)$极小值

(C) $(0, f(0))$是曲线$y=f(x)$的拐点　　(D) $f(0)$不是$f(x)$的极值，$(0, f(0))$也不是$f(x)$的拐点

二、证明不等式

证明当 $0\le x\le 1$ 时，$\dfrac{1}{2^{P-1}}\le x^p+(1-x)^p\le 1\,(p>1)$.

§6　函数图形描绘(基础部分)

一、　叙述垂直渐近线，水平渐进线和斜渐进线的定义。

二、　**解答下列各题**

1.求曲线 $y = c + \dfrac{a^3}{(x-b)^2}$ $(a \neq 0)$ 的渐近线.

2. 求曲线 $y = \dfrac{1}{x} + \ln\left(1+e^x\right)$ 的斜渐近线方程.

三．描绘函数 $y = \dfrac{x}{1-x^2}$ 图形.

§7　曲率(基础部分)

一、求曲线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ $(a>0)$在 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 处的曲率 k.

二、曲线弧 $y=\sin x(0<x<\pi)$上哪一点处曲率半径最小，求出该点的曲率半径 R.

三、应用题

设一工件内表面的内部是一椭圆，现要用砂轮磨削其内表面，问选择多大的砂轮比较合适？

第三章　自测题（基础部分）（满分 100 分）

一、填空题（共 15 分）

1．如果曲线 $y=f(x)$在$[a,b]$上是向上凸的,则当 $f'(x)$存在时,$f'(x)$在$(a，b)$内是单调_______________.

.

2．当 $x=\pm 1$ 时，函数 $f(x)=x^3+px+q$ 取得极值，则 $p=$_______________..

3．$f(x)=x-\ln(1+x)$的单调减少区间是_______________..

4．半径为 R 圆周上任一点的曲率 K=，曲率半径为_______________.

5．曲线 $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$ 拐点为_______________.

.

二、求极限（共 15 分）

1．$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right]$.

2．设函数 $f(x)$具有二阶导数，且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，$f''(0)=2$，试求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}$.

3．设 $f(x)$具有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$, $f''(0)=4$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

三、证明下列各题（共 55 分）

1．设 0<β<α<$\frac{\pi}{2}$，证明：$\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta}<\tan\alpha-\tan\beta<\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha}$.（7 分）

2．x>0 时，证明：$e^x>1+\left(1+x\right)\ln\left(1+x\right)$.（8 分）

3．设 e<a<b<e^2，证明：$\ln^2 b—\ln^2 a>\left(b—a\right)$.（8 分）

4．设 $f(x)$在［a，b］上可微，且 0<a<b，证明至少存在一点$\xi\in(a$，$b)$，使 $f(b)$-$f(a)$= $\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$.（8 分）

5．已知 $f(x)$在 0≤x<+∞上连续，$f(0)$=0，$f'(x)$在(0，+∞)上存在且单调增加，试证明函数 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ 在(0，+∞)上也是单调增加的.（8 分）

6．设 $f(x)$在[a，+∞)上连续可导，且 x>a 时，$f'(x)$>1，证明：如果 $f(a)$<0，则方程 $f(x)$=0 在区间［a，a−$f(a)$］内有且仅有一个实根.（8 分）

7. 设$f(x)$在［0，1］上二阶可导，$\max\limits_{x\in(0,1)} f(x)=\dfrac{1}{4}$，$|f''(x)|\le 1$，证明：$|f(0)|+|f(1)|<1$.

（8 分）

四、应用题（15 分）

1. 求数列$\{\sqrt[n]{n}\}$的最大项.

2. 求点(3，0)到抛物线 $y^2=4x$ 的最短距离.

第三章　自测题(提高部分)（满分 100 分）

一、填空题（共 12 分）

1．$\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=$______________..

2．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$______________..

3．$y=\ln x$ 上曲率最大的点为______________.

4.当 x=时，函数 $y=x2^x$ 取极小值______________.

二、选择题（共 9 分）

1．已知 $y=f(x)$对一切 x 满足 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}$，若 $f'(x_0)=0$　($x_0\neq 0$)，则(　　).

(A) $f(x_0)$ 是 $f(x)$的极大值

(B) $f(x_0)$是 $f(x)$的极小值

(C) $(x_0, f(x_0))$是曲线 $y=f(x)$的拐点

(D) $f(x_0)$不是 $f(x)$的极值，$(x_0, f(x_0))$也不是 $y=f(x)$的拐点

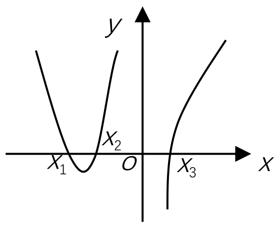
2．设函数 $f(x)$在（∞,+∞）内连续，其导函数的图形如图所示，则 $f(x)$有（）.

（A）一个极小值点和两个极大值点.

（B）两个极小值点和一个极大值点.

（C）两个极小值点和两个极大值点.

（D）三个极小值点和一个极大值点.



3. 曲线 $y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$　(　　).

(A) 没有渐近线　　　　　(B) 仅有水平渐近线

(C) 仅有铅直渐近线　　　(D) 既有水平又有铅直渐近线

三、求极限（共 20 分）

1．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^{2}}}$　　　　2．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^{3}(2x)}{x^{4}}\cdot\left(1-\dfrac{x}{e^{x}-1}\right)$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}-e\right]$　　　　4. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{2}\left[\arctan(1+x)-\arctan x\right]$

四、证明下列不等式（15 分）

1．$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^{2}})>\sqrt{1+x^{2}}$　$(x>0)$.

2．$4x\ln x - x^2 - 2x + 4 > 0$ (0<x<2).

五、证明题（共 44 分）

1．设 $f(x)$可导，试证在 $f(x)$的二个零点之间一定有 $f(x)+f'(x)$的零点.**（共 7 分）**

2．设 $f(x)$ 在［0,1］上有二阶连续导数，且 $f(0)=f(1)=0$ 及 $\min\limits_{0<x<1} f(x) = -1$，证明：$\max\limits_{0\le x\le 1} f''(x) \ge 8$.**（共 7 分）**

3．设在［0，a］上｜$f''(x)$｜$\leq M$，且 $f(x)$在(0，a)内取得最大值，试证$|f'(0)|+|f'(a)|\leq Ma$.
（共 7 分）

4.讨论方程 $6\ln x=x^2$ $(0<x<e)$有几个实根，并确定根的范围.**（共 7 分）**

5. 求曲线 $y=x^2\ln ax\,(a>0)$的拐点，并求当 a 变动时，拐点的轨迹.**（共 8 分）**

6．设 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内具有三阶连续导数，如果 $f'\left(x_0\right)=0, f''\left(x_0\right)=0,$ 而 $f'''\left(x_0\right)\neq 0,$ 试问 $x=x_0$ 是否为极值点，为什么？又$(x_0，f(x_0))$是否为拐点?为什么？**（共 8 分）**

第三章答案

习题 3-1(基础部分)

一、1. $\sqrt{\dfrac{4}{\pi}-1}$

2. 3　　$(1,2),(2,3),(3,4)$

二、1.B　　2. C

三、1.提示：$f(x)=\arcsin x+\arccos x$ 在 ± 1 处不可导，得单独讨论.

2.提示：$f(x)=e^x$ 等价于 $f(x)e^{-x}=1$.

四、1.提示：$\ln x$ 在 $[x_2,x_1]$ 上应用拉格朗日中值定理.

2.提示：$\arctan x$ 在 $[0,h]$ 上应用拉格朗日中值定理.

五、1．提示：对 $f(x),f'(x)$ 应用罗尔定理.

2.提示：$f(x)e^{g(x)}$ 在 $[a,b]$ 上应用罗尔定理.

3.提示：$x^2,f(x)$ 及 $x^3,f(x)$ 分别在 $[a,b]$ 上应用柯西中值定理.

(提高部分)

一、提示：　$f(x)-x$ 在 $[0,x_0]$ 上应用罗尔定理，x_0 是零点.

二、(1）提示：应用极限的保号和零点定理.

（2）提示：$f(x)$ 在 $[a,x_0],[x_0,b]$ 上分别应用罗尔定理，x_0 是零点.

习题 3-2(基础部分)

一、1. 0　　2. 1　　3. $\dfrac{2}{\pi}$　　4. 0　　5. 0　　6. $\dfrac{1}{3}$　　7. 0　　8. 1

9. 1　　10. $e^{-\frac{2}{\pi}}$

二、1.0（提示：无穷小性质）

2.0 (提示：先换元再洛必达，不能直接用洛必达法则)

三、1. $f''(x)$ （提示：应用洛必达法则两次）

2. $f''(x)$（提示：仅应用一次洛必达和导数的定义）

（提高部分）

一、1. $e^{-\frac{1}{3}}$　　　2. $-\frac{1}{6}$　　　3. $e^{-\frac{1}{2}}$　　　4. $e^{-\frac{\pi}{2}}$

二、提示：利用定义讨论分段函数的连续性.

三、提示：先求导函数 $g'(x)$：$x=0$ 处用导数定义；$x\neq 0$ 处用求导法则，再讨论 $g'(x)$ 的连续性.

习题 3-3（基础部分）

一、$-56+21(x-4)+37(x-4)^2+11(x-4)^3+(x-4)^4$

二、1. $x^2+x^3+o(x^3)$　　　2. $-\sum_{k=0}^{n}(x+1)^k+o((x+1)^n)$　　　3. $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{2^{2k-1}x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n})$

（提高部分）

一、A　　　　二、1. $\frac{3}{2}$　　　2. $\frac{1}{6}$　　　3. 36

三、1. 提示：$f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处的 3 阶泰勒公式，代入两端点,放大成最大值.

2. 提示: $f(x)$ 在 $x=1$ 处的 3 阶泰勒公式，代入两端点,利用介值定理得中值等式.

习题 3-4（基础部分）

一、1. 在$(-\infty，0]$上单调增加，在$[0，+\infty)$上单调减少.

2. 在$(-\infty，0]$上单调减少，在$[0，+\infty)$上单调增加.

二、1. 在$(-\infty，-1]$，$[1，+\infty]$向上凸，在$[-1，1]$向上凹，拐点$(-1，\ln 2)$，$(1，\ln 2)$

2. 在 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$ 向上凹，在 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$ 向上凸，拐点 $\left(\frac{1}{2},e^{\arctan\frac{1}{2}}\right)$

三、单调减少

四、1.提示：利用 $\frac{\ln x}{x}$ 及 $x\ln x$ 的单调性.

2.提示：$0<x<\frac{\pi}{2}$ 时 $\sin x<x<\tan x$.

3.提示：求二阶导数.

4.提示：利用 $f(t)=t^n$ 的凹凸性.

5.提示：利用 $f(t)=t\ln t$ 的凹凸性.

五、提示：巧用拉格朗日中值定理.

六、a=1，b=-3，c=-24，d=16

（提高部分）

一、　1.B2.A

二、　1.$[0,+\infty)$ $(1,1)$ 2.凸的

三、零点定理的端点取为 $x=0$ 和 $(0,-1)$ 处切线与轴的交点.

习题 3-5（基础部分）

一、1．D　　2．D3. B

二、1.极大值 $y(1)=2$

2.极小值 $y(e)=e$

3. 极大值 $y(1)=1$ 极小值 $y(-1)=0$.

三、$a=2$，极大值 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$

四、$a=2$，$b=-3$，$c=-12$，$d=1$

五、1. 最大值 $y(4)=8$，最小值 $y(0)=0$

2. 最大值 $y(0)=y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$，最小值 $y\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)=0$

3. 最小值 $y(-3)=27$

六、1. $2ab$　　2. $\dfrac{20}{\sqrt{3}}cm$

（提高部分）

一、1．D　　2．B

二、利用最大值、最小值证明.

习题 3-6（基础部分）

一、略

二、1.垂直渐近线为 $x=b$，水平渐近线为 $y=c$，无斜渐近线 2. $y=x$

习题 3-7（基础部分）

一、$k=\dfrac{1}{2\sqrt{2}a}$ 二、$\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$, $\mathrm{R}=1$ 三、$R\le\dfrac{b^2}{a}$

第三章　自测题（基础部分）

一、1. 减少　　2. -3　　3. (-1，0]　　4. $\dfrac{1}{R}$，R　　5. $\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{1}{4}\right)$

二、1. $\dfrac{1}{2}$　　2.1　　3. e^2

三、1. 提示：拉格朗日中值定理

2. 提示：单调性

3. 提示：单调性或拉格朗日定理

4. 提示：柯西中值定理

5. 提示：拉格朗日中值定理、单调性

6. 提示：拉格朗日中值定理、零点定理、单调性

7. 提示：在最大值点展开成二阶泰勒公式

四、1. $\sqrt[3]{3}$　　2. $2\sqrt{2}$

（提高部分）

一、1. $\dfrac{1}{6}$　　2. 0　　3. $(\dfrac{1}{\sqrt{2}}，-\dfrac{1}{2}\ln 2)$4. $-\dfrac{1}{\ln 2}$

二、1. B　　2.C　　3. D

三、1. 1　　2. 4　　3. $-\dfrac{e}{2}$ 4. 1

四、1. 提示：求二阶导数.

2.提示：求二阶导数，利用极小值证.

五、1. 提示：罗尔定理

2. 提示：在最小值点展开成二阶泰勒公式.

3. 提示：对 $f'(x)$ 应用拉格朗日中值定理.

4. 两个实根，分别在(0，$\sqrt{3}$)及($\sqrt{3}$，e)内.

5. $\left(\dfrac{1}{a}e^{-\frac{3}{2}},-\dfrac{3e^{-3}}{2a^2}\right)$, $y=-\dfrac{3}{2}x^2\ (x>0)$

6. $x=x_0$ 不是极值点，(x_0，$f(x_0)$)是拐点.