第七章　级数内容梳理

I、常数项无穷级数

一 常数项级数的概念与性质

1 常数项无穷级数的概念

（1）. 常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$.

（2） 部分和 $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

（3） 数项级数收敛定义：若 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于和 S；否则称其发散.

即 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛 $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} S_n$存在.

2 级数的基本性质

性质 1. 设常数 $c \neq 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ 有相同的敛散性；

性质 2. 设有两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$，若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = s \pm \sigma$；

注：（1）若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 发散；

（2）若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 敛散性不确定；

性质 3. 添加、去掉或改变有限项不影响级数的敛散性；

如：若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1000}$ 收敛.

性质 4。 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，对其任意加括号后所得级数仍收敛于原级数的和.

注：① 一个级数加括号后收敛，原级数不一定收敛.

②一个级数加括号后所得新级数发散，则原级数发散；

性质 5. 级数收敛的必要条件：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0$；

注：①$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$不一定收敛；（如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ）

② 若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$，则级数发散。(如：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$)

3 常用的数项级数的敛散性

- 等比级数：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \begin{cases} 收敛 & |q|<1 \\ 发散 & |q|\geq 1 \end{cases}$

- p —级数：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P} \begin{cases} 收敛 & p>1 \\ 发散 & 0<p\leq 1 \end{cases}$

- 调和级数：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散

二 常数项级数审敛法

1 正项级数及其审敛法

(1) 定义：若 $u_n \geq 0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数.

(2) 基本定理：正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和数列 $\{S_n\}$ 有界。

(3) 正项级数审敛法

审敛法 1（比较审敛法）若 $u_n \leq v_n$（可以从某有限项开始），

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；　若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 。则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

注：大的级数收敛，小的级数也收敛；小的级数发散，大的级数也发散.

审敛法 2 （比较判别法的极限形式）

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 都为正项级数，$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$，

①若 $0 < l < +\infty$， 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 具有相同的敛散性；

②若 $l=0$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

③若 $l=\infty$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

注：通常找 u_n 的等价无穷小 v_n，利用 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的敛散性，得到 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性。

审敛法 3（比值审敛法）

$$若 \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho，则 \sum_{n=1}^{\infty} u_n \begin{cases} 收敛, & \rho<1 \\ 发散, & \rho>1（或\rho=+\infty） \\ 此法失效，& \rho=1 \end{cases}$$

审敛法 4 （根值审敛法）

$$若 \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho，则 \sum_{n=1}^{\infty} u_n \begin{cases} 收敛, & \rho<1 \\ 发散, & \rho>1(或\rho=+\infty) \\ 此法失效，& \rho=1 \end{cases}$$

注意：

(1) 比较法（及其极限形式）、比值以及根值审敛法只适用于正项级数，其他级数不能用.

(2) 若级数的一般项为关于 n 的有理式或无理根式或它们的某些复合函数时，一般采用比较判别法或其极限形式，比较的对象为 p —级数， p 等于分母最高次幂的次数减去分子最高次幂的次数；

(3) 比值法、根值法都是充分条件．若 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$ 且 $\rho<1$，则正项级数收敛.

但由正项级数收敛不能得到 $\rho<1$，甚至得不到 $\rho\le 1$.

(4) 当级数的一般项含有 $n!$， a^n 时，可用比值判别法;

(5) 当级数的一般项含有 $f^n(n)$ 时，可考虑用根值法.

(6)有时要将以上方法相结合.

2 交错级数及其审敛法

形如 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ $(u_n>0)$ 的级数为交错级数。

交错级数审敛法(莱布尼兹定理)

若 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 满足下面条件: ① $\lim_{n\to\infty}u_n=0$， ② $u_n\ge u_{n+1}$.

则交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛。

注：①莱布尼兹判别法仅是充分条件，若交错级数满足莱布尼兹判别法的两个条件，它必收敛， 但交错级数收敛它不一定满足两个条件.

如：交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+(-1)^n}}=1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^5}+\cdots$

其奇数项和偶数项都是公比为 $\frac{1}{2^2}$ 的等比级数分别收敛，由级数的基本性质知它收敛，但其显然不满足条件

②用莱布尼茨准则判别交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n\ (u_n>0)$ 是否收敛时，要考察 u_n 与 u_{n+1} 的大小，比较 u_n 与 u_{n+1} 的大小的方法有三种：

（1） 比值法，即考察 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 是否小于 1；

（2） 差值法，即考察 u_n-u_{n+1} 是否大于 0；

（3） 由 u_n 找出一个可导函数 $f(x)$，使 $u_n=f(n),(n=1,2,\cdots)$，考察 $f'(x)$ 是否小于 0.

3 绝对收敛与条件收敛

（1）绝对收敛：若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛；

（2）条件收敛：若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛.

定理：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

注：（1） $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛. $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 不一定收敛.

（2）一般 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 未必发散.但是若用比值或根值审敛法得到级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.