第一章内容梳理

Ⅰ、基本概念

一．极限的概念

1 数列的极限

（1）形象描述

如果$n\to\infty$时，x_n无限地接近于一个数a，则称a为当$n\to\infty$时，数列$\{x_n\}$的极限.

注意：对于数列的极限（$n\to\infty$就是$n\to+\infty$）

（2）数列极限的性质

（i）有界性 若数列有极限，则数列有界；

注意：① 数列有界极限不一定存在。（如：$x_n=(-1)^n$）

② 数列无界一定发散。

③ 单调有界数列的极限一定存在。

（ii）保号性

如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，且$a>0$(或$a<0$)，则存在正整数N，当$n>N$时，都有$x_n>0$(或$x_n<0$).

注意：

如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，且存在正整数N，当$n>N$时，都有$x_n>0$(或$x_n<0$)，则$a\geq0$(或$a\leq0$).

如：$x_n=\dfrac{1}{n}$

（iii）收敛数列与子数列的关系性

如果数列收敛于a，那么它的任一子数列也收敛，且极限为a.

注意：① 如果一个数列有两个子列的极限不同，则该数列的极限不存在。

①如果奇数列与偶数列的极限相同，这个数列的极限一定存在。

2．函数的极限

A x趋于特定值x_0时函数的极限

（1）形象描述

如果$x\to x_0$时，$f(x)$无限地接近于一个数A，则称A为当$x\to x_0$时$f(x)$的极限.

（2）充要条件：

函数极限存在的充要条件是左右极限都存在而且相等

即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$都存在且相等。

B　x 趋于无穷时函数的极限

（1）形象描述

如果$x\to\infty$时，$f(x)$无限地接近于一个数A, 则称A为当$x\to\infty$时$f(x)$的极限。

（2）充要条件：

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$存在 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$与$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$都存在且相等。

注：如果$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$与$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$不相等，则$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$不存在。

C 函数极限的性质

（i）局部有界性

若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，则存在$\delta>0$及$M>0$, 当$0<|x-x_0|<\delta$时, $|f(x)|<M$.

（ii）局部保号性

若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且A > 0,则存在$\delta>0$,当$0<|x-x_0|<\delta$时，$f(x)>0$.

注意： 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且存在$\delta>0$,当$0<|x-x_0|<\delta$时，$f(x)>0$,则A ≥ 0.

二 无穷小与无穷大

（1）无穷小：以 0 为极限的量称为无穷小量.

有限个无穷小的和是无穷小，有限个无穷小的乘积是无穷小。

（2）无穷大（是极限不存在的一种情况）

在自变量的某一变化过程中，若 $f(x)$ 的绝对值无穷增大，则称 $f(x)$ 为无穷大量.

（3）无穷小与无穷大的关系

在自变量的同一变化过程中，无穷大的倒数为无穷小，无穷小（且函数值不为零）的倒数为无穷大

（4）无穷小的比较

设 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \alpha(x)=0$， $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \beta(x)=0$

1）若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小，记为 $\alpha(x)=o(\beta(x))$；

2）若 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 低阶的无穷小；

3）若 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C$，$(C\neq 0)$ 则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶的无穷小；

4）若 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小，记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$；

5）若 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=C(C\neq 0),k>0$，则称 $\alpha(x)$ 为 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小.

三、连续的概念

1 连续性的等价定义

$y=f(x)$ 在点 x_0 连续

$\Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$，

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

$\Leftrightarrow f(x)$在x_0既左连续又右连续。

2、闭区间上连续函数的性质

闭区间上的连续函数有界，有最大值和最小值，而且可取到介于最大最小值之间的一切值。

3、间断点的分类

$$\underset{\text{（关键看左右极限是否都存在）}}{\text{间断点}}\begin{cases}\underset{\text{（左右极限都存在）}}{\text{第一类间断点}}\begin{cases}\text{可去间断点（左极限=右极限）}\\\text{跳跃间断点（左极限}\neq\text{右极限）}\end{cases}\\\underset{\text{（左右极限至少有一个不存在）}}{\text{第二类间断点}}\begin{cases}\text{无穷间断点}\\\text{震荡间断点}\end{cases}\end{cases}$$

结论：初等函数在其定义区间是连续的。

II 极限的求法

1、极限的四则运算法则：若 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$

$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$

$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$

$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0\text{时})$

该四则运算法则对数列极限也适用

注意：(1) 极限 $\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$ 均存在是极限四则运算前提。

(2) 商的极限运算法则中，分母 $g(x)$ 的极限.

(3) 有时要用到通分，分子或分母有理化，分子分母同乘或同除以一个表达式等恒等变形

的方法.

2、利用函数的连续性。

$y=f(x)$ 在点 x_0 连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

3、利用有界变量与无穷小的乘积是无穷小。

4、利用夹逼准则。

给定数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$，满足

$y_n \le x_n \le z_n (n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ （a 有限或为 $\pm\infty$ ）

注意：（1）该准则对函数极限也适用。

（2）有时会与积分中值定理，估值定理相结合.

5、利用两个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$

6、利用等价无穷小代换.

注意：（1）当 $x\to 0$ 时，常用的等价无穷小为

$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x-1$

$1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$，　$(1+x)^\alpha-1 \sim \alpha x$，　$a^x-1 \sim x\ln a\ (a>0)$

（2）等价无穷小代换一般只能用在乘除运算中，不能用于加减运算.

7、洛必达法则

条件：$\dfrac{0}{0}$型（或$\dfrac{\infty}{\infty}$型）

(1)　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} F(x)=0$　（或∞）

(2)　$f'(x)$和$F'(x)$在 x_0 点的某个邻域内（x_0 点除外）均存在，且 $F'(x)\ne 0$

(3)　$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$存在 （或$\infty$）

结论：$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$

说明：(1)若 $f'(x)$ 和 $F'(x)$ 又满足法则的三个条件时，本法则可继续使用。

(2)　$\infty-\infty$型、$0\cdot\infty$型 通过代数变换化为$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{\infty}{\infty}$型；

0^0型、∞^0型、1^∞型 可先取对数，然后化为$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型，再使用洛必达法则。

8. 利用定积分的定义

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)dx$$

9. 利用导数定义

若$y=f(x)$在点x_0可导，则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$

附：求极限的常用公式。

一 常用公式

1 $\lim\limits_{n\to\infty} a^n=0 \quad (|a|<1)$

2 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1 \quad (a>0$为常数$)$

3 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

二、三角函数和差化积公式

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin[(\alpha+\beta)/2]\cdot\cos[(\alpha-\beta)/2]$

$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos[(\alpha+\beta)/2]\cdot\sin[(\alpha-\beta)/2]$

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos[(\alpha+\beta)/2]\cdot\cos[(\alpha-\beta)/2]$

$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin[(\alpha+\beta)/2]\cdot\sin[(\alpha-\beta)/2]$