第五章内容梳理

一 定积分的基本概念

1 定积分定义

$$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

注：（1）定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 是一个确定的数，这个数与积分区间 $[a,b]$ 和被积函数的函数关系有关，与积分变量用什么字母表示无关.

（2）积分存在条件

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续或有界且有有限个第一类间断点，则函数在 $[a,b]$ 上定积分存在.

（3）几何意义

（4）补充规定：

（i）当 $a=b$ 时，$\int_a^b f(x)dx = 0$；

（ii）当 $a>b$ 时，$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

2 定积分的性质

性质 1　设 $f_i(x)\ (i=1,2)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则

$$\int_a^b (k_1 f_1(x) \pm k_2 f_2(x))dx = k_1\int_a^b f_1(x)dx \pm k_2\int_a^b f_2(x)dx\ ;$$

性质 2　$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$;

性质 3　如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)=1$，且 $\int_a^b dx = b-a$;

性质 4　（比较定理）设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，$f(x)\ge 0, x\in[a,b]$，则 $\int_a^b f(x)dx \ge 0$;

推论 1　设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，则函数 $|f(x)|$ 在区间 $[a,b]$ 上也可积，且

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx\ ;$$

推论 2

若 $f_i(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$i=1,2,$ 且 $f_1(x)\ge f_2(x), x\in[a,b]$，则 $\int_a^b f_1(x)dx \ge \int_a^b f_2(x)dx$;

性质 5　（估值定理）

设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上最大值及最小值，则

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a);$$

性质 6 （积分中值定理）

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\exists \xi \in [a,b]$，使 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

二　重要结论

定理 1　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，，则变上限积分 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ 上可导，并且有 $\Phi'(x)=\dfrac{d}{dx}(\int_a^x f(t)dt)=f(x)$.

推论　设 $F(x)=\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt$，则 $F'(x)=f[\varphi(x)]\varphi'(x)-f[\psi(x)]\psi'(x)$.

注意：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$x\in[a,b]$，则 $\int_a^x f(t)dt$ 是 $f(x)$ 的一个原函数.

三　定积分的计算

（一）微积分基本公式

（牛顿—莱布尼兹公式）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

（二）定积分的常用积分方法。

1 定积分的换元积分法

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，若变换 $x=\varphi(t)$ 满足如下条件：

（1）$\varphi'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，且 $\varphi'(t)\ne 0$；

（2）$\varphi(a)=a, \varphi(\beta)=b$，并且当 t 在 $[\alpha,\beta]$ 上变化时，$\varphi(t)$ 的值在 $[a,b]$ 上变化，则

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

注：（1）在做变量替换的同时，一定要更换积分上下限；

（2）$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 的确定方法。

（3）积分表达式中所有 $\boldsymbol{x}$ 都要换成 $\varphi(t)$.

2 定积分的分部积分法

设 $u(x), v(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续导函数 $u'(x), v'(x)$，则有分部积分公式：

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx,$$

其中 $u(x), dv=v'(x)dx$ 的选择与不定积分的分部积分法同.

（三）　常用结果

1.（积分区间的对称性）

若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$

若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

若 $f(x)$ 为非奇非偶函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} [f(x)+f(-x)]\,\mathrm{d}x.$

注：在定积分计算时，若是对称区间上的积分，首先观察被积函数是否具有奇偶性。

2（周期性）设 $f(x)$ 为以 T 为周期的连续函数，a 为任意实数，则 $\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$；

3 可用定积分的几何意义计算.

4. 华里士公式

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x$$

$$= \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{ 为偶数} \\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}, & n\text{ 为奇数} \end{cases}$$

（四）反常积分

1. 无穷限的反常积分

定义：设 $f(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 内连续，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛 $\Leftrightarrow \lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$存在..

求法：$\int_a^{+\infty} f(x)dx = [F(x)]_a^{+\infty} = \lim\limits_{t\to+\infty}[F(x)]_a^t$.（其中 $\boldsymbol{F(x)}$ 是 $f(x)$ 一个原函数）

注意：（1）同理，$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$收敛 $\Leftrightarrow \lim\limits_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx$存在.；

求法：$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = [F(x)]_{-\infty}^{b} = \lim\limits_{t\to-\infty}[F(x)]_{-\infty}^{b}$.（其中 $\boldsymbol{F(x)}$ 是 $f(x)$ 一个原函数）

（2）$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$收敛 $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} f(x)dx$与$\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$都收敛.

只有 $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ 与 $\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$ 都收敛时，$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx$

2．无界函数的反常积分

定义：设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续，而 $\lim\limits_{x\to a^{+}} f(x)=\infty$，（$a$ 为瑕点）

$$\int_a^b f(x)dx\text{收敛} \Leftrightarrow \lim_{t\to a^{+}}\int_t^b f(x)dx\text{存在}..$$

求法：$\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=\lim\limits_{t\to a^{+}}\left[F(x)\right]_t^b$.（其中 $F(x)$ 是 $f(x)$ 一个原函数）

注意：（1）同理，若 b 为瑕点，$\int_a^b f(x)dx\text{收敛} \Leftrightarrow \lim\limits_{t\to b^{-}}\int_a^t f(x)dx\text{存在}.$

求法：$\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=\lim\limits_{t\to b^{-}}\left[F(x)\right]_a^t$.（其中 $F(x)$ 是 $f(x)$ 一个原函数）.

（2）若 $a<c<b$ ，c 为瑕点

$$\int_a^b f(x)dx\text{收敛} \Leftrightarrow \int_a^c f(x)dx\text{与}\int_c^b f(x)dx\text{都收敛}.$$

当 $\int_a^c f(x)dx$ 及 $\int_c^b f(x)dx$ 都收敛时，才有 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

3. 两个重要的反常积分

$$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\begin{cases}+\infty, & p\le 1\\ \dfrac{1}{(p-1)\,a^{p-1}}, & p>1\end{cases}\qquad (a>0)$$

$$\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}=\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^q}=\begin{cases}\dfrac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & q<1\\ +\infty, & q\ge 1\end{cases}$$