班级：　　　　　　　　　　学号：　　　　　　　　姓名：

第 3 章 向量空间

§3.1　基本概念（基础部分）

一、填空题

1．给定 R^m 中的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 和向量 b，记矩阵 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)$，矩阵 $B=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b\right)$， 则向量 b 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示 $\Leftrightarrow$ 方程组有解 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{R}(A)=$ ____________.

2. 给定 R^n 中的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 与向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$，记 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\right)$，$B=\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\right)$．向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示的充要条件是 ____________________________，两向量组等价的充要条件是____________________.

3. 已知两个向量组 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix};\beta_1=\begin{bmatrix}-1\\2\\t\end{bmatrix},\beta_2=\begin{bmatrix}4\\1\\5\end{bmatrix}$，问 t=________时，两向量组等价?

4. 若 H 为向量空间 V 的非空子集，验证 H 为 V 的子空间，只需验证 H 满足下列性质：

(1) 对加法运算封闭：____;

(2) 对数乘运算封闭：____;

二、选择题

1．设 $C_{m\times n}=A_{m\times s}B_{s\times n}$，则 [　　　]

(A) C 的列向量组可由 A 的列向量组线性表示；

(B) C 的列向量组可由 B 的列向量组线性表示；

(C) A 的行向量组可由 C 的行向量组线性表示；

(D) B 的行向量组可由 C 的行向量组线性表示；

三、计算题

1．已知$\alpha_1=\begin{bmatrix}3\\1\\5\\2\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}10\\5\\1\\10\end{bmatrix}$，$\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\4\end{bmatrix}$，若 $3(\alpha_1-\beta)+2(\alpha_2-\beta)=5(\alpha_3+\beta)$，求 β.

2. 令$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix},\alpha=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$.

(1) α 在$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$中吗？$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$中有多少个向量？

(2) $span\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$中有多少个向量？

(3) α 在由$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$生成的子空间中吗？为什么？

3. 下列集合能否生成相同的子空间：

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\6\\1\\4\end{pmatrix}\right\},\qquad \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}\right\}$$

4．设有向量组 $A: a_1=\begin{pmatrix}\alpha\\2\\10\end{pmatrix}$，$a_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$，$a_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$，及向量 $b=\begin{pmatrix}1\\\beta\\-1\end{pmatrix}$，

问 α，β 为何值时：

(1) 向量 b 不能由向量组 A 线性表示；

(2) 向量 b 能由向量组 A 线性表示，且表示式唯一；

(3) 向量 b 能由向量组 A 线性表示，且表示式不唯一，并求一般表示式.

5. 已知向量组

$$a_1=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\\2\end{pmatrix},a_3=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\1\end{pmatrix}\text{与}\,b_1=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\1\end{pmatrix},b_3=\begin{pmatrix}4\\4\\1\\3\end{pmatrix}$$

证明：(1) 向量组b_1,b_2,b_3可由向量组a_1,a_2,a_3线性表示；(2) 向量组a_1,a_2,a_3不能由向量组b_1,b_2,b_3线性表示.

四、令W是所有形如$\begin{pmatrix}s+3t\\s-t\\2s-t\\4t\end{pmatrix}$的向量集，证明$W$是$\mathbb{R}^4$的一个子空间.

§3.1　基本概念（提高部分）

一. 令 H 和 K 是向量空间 V 的子空间，记 $H \cap K = \{x \in V : x \in H \text{且} x \in K\}$，证明 $H \cap K$ 是 V 的一个子空间. 在 $\mathbb{R}^2$ 中给出一个例子，说明一般而言，两个子空间的并集不是一个子空间.

二．由 $a_1 = (1,1,0,0)^T$， $a_2 = (1,0,1,1)^T$ 所生成的向量空间记作 L_1，由 $b_1 = (2,-1,3,3)^T$，$b_2 = (0,1,-1,-1)^T$ 所生成的向量空间记作 L_2，试证 $L_1 = L_2$.

三．给定 $m\times n$ 矩阵 A 以及 R^n 的子空间 V，V 在矩阵 A 下的像定义为

$$A\left(V\right)=\left\{Ax:\ x\in V\right\},$$

(1) 证明 $A\left(V\right)$ 为 R^m 的子空间；

(2) 若 V 的生成集为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$，求证 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_k$ 为 $A\left(V\right)$ 的生成集.

四．给定向量空间 V 和 W，T 为从 V 到 W 的线性变换，即对任意 $x,y\in V$ 及任意 $\alpha,\beta\in R$，有 $T(\alpha x+\beta y)=\alpha T(x)+\beta T(y)$.

证明：T 的核 $\ker T=\left\{x\in V:\ Tx=0\right\}$ 为 V 的子空间.

五．令 H 和 K 是向量空间 V 的子空间，记 $H+K=\{\gamma\in V:\gamma=\alpha+\beta,\text{其中}\alpha\in H,\beta\in K\}$，

(1) 证明 $H+K$ 是 V 的子空间.

(2) 证明 H 和 K 均为 $H+K$ 的子空间.

(3) 假设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_q$ 是向量空间 V 中的向量，且

$$H=span\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\},\quad K=span\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_q\}$$

证明 $H+K=span\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_q\}$.

班级：　　　　　　　　　　学号：　　　　　　　　姓名：

§3.2　线性相关、线性无关

(基础部分)

一、填空题

1．给定 R^n 中的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ ，记矩阵 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\right)$ ，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$

线性相关 $\Leftrightarrow$ $Ax=0$ ____________ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{R}(A)$ ____________.

2. R^n 中由 m 个 n 维向量构成的向量组，当 $n<m$ 时，向量组一定线性____关. 因此 $n+1$ 个 n 维向量构成的向量组一定线性____关.

3. 向量空间 V 中，若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1}$ 线性______关；反之，若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1}$ 线性无关，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性______关.

4. 向量空间 V 中向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，而向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,b$ 线性相关. 则__________可由______________唯一地线性表示.

5.______________________________________称为向量组的秩.

6. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为向量组 V 的极大无关组，则

(1) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性_____关；

(2) 若 V 中所含向量个数多于 r ，那么 V 中任意 $r+1$ 个向量构成的向量组线性_____关；

(3) ____________________________可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示.

7. $\mathrm{R}(A)$ ________它的列秩，_______它的行秩；等于____________________的阶数.

*8. 利用初等变换法求向量组的极大无关组，具体过程：

1) 将所给向量组作为矩阵 A 的______向量组，构成矩阵 A .

2) 对矩阵 A 进行初等______变换，化为__________ 矩阵 U .

3) 通过_________矩阵 U 找出矩阵 A 的__________，__________构成的向量组即为所给向量组的极大无关组.

9. 设 $a_1=\begin{pmatrix}\lambda\\1\\1\end{pmatrix}$，$a_2=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\-1\end{pmatrix}$，$a_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\\lambda\end{pmatrix}$， 当 λ=________时，向量组 a_1，a_2，a_3线性相关；当 λ=________时，向量组 a_3可由 a_1，a_2唯一线性表示。

10．若向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}a\\b\\c+a\end{pmatrix}$的秩为 2，则 c=__________.

11．设向量组 α_1，α_2，…，α_{10}的秩为 8，则该向量组线性____________.

二、选择题

1．若[　　　]，则称向量组 a_1，a_2，…，a_s线性相关.

(A) 存在一组不全为零的数 k_1，k_2，…，k_s，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_s\alpha_s=0$

(B) 存在一组全不为零的数 k_1，k_2，…，k_s，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_s\alpha_s\neq0$

(C) 任意一组不全为零的数 k_1，k_2，…，k_s，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_s\alpha_s=0$

(D) 任意一组全不为零的数 k_1，k_2，…，k_s，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_s\alpha_s=0$

2．向量组 a_1，a_2，…，a_s线性无关的充分必要条件是[　　　].

(A) 存在一组全为零的数 k_1，k_2，…，k_s，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_s\alpha_s=0$

(B) 存在一组不全为零的数 k_1，k_2，…，k_s，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_s\alpha_s\neq0$

(C) a_1，a_2，…，a_s中任何 $s-1$ 个向量线性无关.

(D) 对于任何一组不全为零的数 k_1，k_2，…，k_s，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_s\alpha_s\neq0$

3. 向量组的极大无关组是[　　　]的，极大无关组所含向量的个数是的[　　　].

(A) 唯一　(B)　不唯一

4. 向量组的秩为 r，则该向量组中任意 r 个线性无关的向量构成的部分组[　　　]该向量组的一个极大无关组.

(A) 是　(B)　不是

5. 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$可由向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性表示，

则 $R\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\right)$[　　　]$R\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\right)$.

(A) ≥　(B) ≤　(C) ＝

6. 等价的向量组的秩[　　　　].

(A) 相同　(B) 不同

7. 有相同秩的向量组[　　　　]等价.

(A) 一定　(B) 不一定

8. 矩阵经过初等变换，得到的新矩阵的行秩和列秩[　　　　]

(A) 不改变　(B) 不一定改变　(C) 改变

9. 设 a_1, a_2, a_3 是向量组 a_1，a_2, a_3，…, a_s(s＞3)的一个最大无关组，则[　　　　].

(A) a_1，a_2，a_3，…，a_s 中每一个向量可由其余向量线性表出

(B) a_1 可由 a_2，a_3 线性表出

(C) a_1，a_2，a_i (i≠1,2,3)线性无关

(D) a_1，a_2，a_3，…，a_s 中任何三个线性无关向量组都是向量组 a_1，a_2，a_3，…，a_s 的一个极大无关组.

10．设向量组 a_1，a_2，a_3，…，a_s 的秩为 3，则[　　　　] .

(A) 任意三个向量线性无关；　　(B) a_1，a_2，a_3，…，a_s 中无零向量；

(C) 任意四个向量线性相关；　　(D) 任意两个向量线性无关.

11．设 A，B 为 n 阶非零矩阵，且 AB=0，则 $R(A)$，$R(B)$满足［　　］.

(A) 必有一个等于 0；　　(B) 都小于 n；

(C) 一个小于 n，一个等于 n；　　(D) 都等于 n.

三、计算题

1. 设有向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\4\\-1\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\6\\2\\3\end{pmatrix}$，求向量组的秩

及一个最大无关组.

2. 求矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$的列向量组的一个最大无关组，并把其余列向量用该最大无关组线性表示.

四、证明题

1．设$b_1 = a_1, b_2 = a_1 + a_2, b_r = a_1 + a_2 + \cdots a_r$，且向量组$a_1, a_2, \cdots, a_r$线性无关，

证明向量组$b_1, b_2, \cdots, b_r$线性无关.

2．设向量组 α_1，α_2，…，$\alpha_m(m>1)$线性无关，且 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m$，证明向量 $\beta-\alpha_1$，$\beta-\alpha_2$，…，$\beta-\alpha_m$ 线性无关.

§3.2　线性相关、线性无关

(提高部分)

1. 设 A 为列线性无关，且 $AB=C$，证明线性方程组 $Bx=0$ 与 $Cx=0$ 同解.

2. 设向量组 $B:b_1,b_2,\cdots,b_r$ 能由向量组 $A:a_1,a_2,\cdots,a_s$ 线性表示为

$$\left(b_1,b_2,\cdots,b_r\right)=\left(a_1,a_2,\cdots,a_s\right)K,$$

其中 K 为 $s\times r$ 矩阵，且向量组 A 线性无关. 证明向量组 B 线性无关的充要条件是矩阵 K 的秩为 r.

3．设 a_1，a_2，…，a_n 是一组 n 维向量，证明它们线性无关的充分必要条件是：任一 n 维向量都可由它们线性表示.

4．已知 $R(a_1, a_2, a_3)=2$，$R(a_2, a_3, a_4)=3$，证明：

(1) a_1 能由 a_2，a_3 线性表示.

(2) a_4 不能由 a_1，a_2，a_3 线性表示.

5．设 A 为 $n\times m$ 矩阵，B 为 $m\times n$ 矩阵，$n<m$，若 $AB=E$，证明：B 的列向量组线性无关．

6．已知 3 阶矩阵 A 与 3 维列向量 x 满足 $A^3x=3Ax-A^2x$, 且向量组 x，Ax,A^2x 线性无关．(1) 记 $P=(x,Ax,A^2x)$, 求 3 阶矩阵 B，使 $AP=PB$；　　(2) 求 $|A|$．

7. 设 A 是 n 阶矩阵($n\geq 2$)，证明：$R(A^*)=\begin{cases} n, & R(A)=n; \\ 1, & R(A)=n-1; \\ 0, & R(A)<n-1. \end{cases}$

8. (1) 证明：$m\times n$ 矩阵 A 的秩为 1 的充分必要条件是存在非零向量 $\alpha\in\mathbb{R}^m$ 以及非零向量 $\beta\in\mathbb{R}^n$，使得 $A=\alpha\beta^T$.

(2) 令 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，求 $\mathbb{R}^3$ 中的向量 β，使得 $\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 2 & -6 & 8\end{pmatrix}=\alpha\beta^T$.

§3.3　向量空间的基与维数、坐标系、过渡矩阵

(基础部分)

一、填空题

1．向量空间V的一组基是____________生成元，是____________无关组.

2. 对于n维向量空间V（$n>0$），任意n个生成空间V的向量必线性__________；V中任意n个线性无关的向量必是________________.

3. 若向量空间V为R^n或R^n的子空间，此时可以将V视为一个向量组，那么V的一组基就是V的一个______________________________，基的维数就是______________________.

4. 设$B=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$是$n$维向量空间$V$的一组基，对于任何$\alpha\in V$，存在唯一的有序数组$x_1,x_2,\cdots,x_n$，使得$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n$，称有序数组$x_1,x_2,\cdots,x_n$为向量$\alpha$在基$B$下的____________，称$\mathbb{R}^n$中的向量$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$为$\alpha$在基$B$下的__________，记作$[\alpha]_B=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$. 映射$\alpha\to[\alpha]_B$称为由基$B$确定的从$V$到$\mathbb{R}^n$________________.

5. n维线性空间V给定一组基后，V中的向量α与α在$\mathbb{R}^n$中的坐标向量$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$建立了___________关系，且这种关系满足下列性质：

设$\alpha\leftrightarrow x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, $\beta\leftrightarrow y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$，则

(1) $\alpha+\beta\leftrightarrow x+y=$____；

(2) $\lambda\alpha\leftrightarrow\lambda x=$____.

即这个对应关系保持线性组合的对应. 在此意义上，称V与$\mathbb{R}^n$____________.

6. 设$B:b_1,b_2,\cdots,b_n$和$C:c_1,c_2,\cdots,c_n$是向量空间V的基，则存在n阶______矩阵P，使得对任何$\alpha\in V$有$[\alpha]_C=P[\alpha]_B$. 该式称为由基B到基C的_____________________.

7. 向量$\xi=$（1，2，1，1）^{T}在基底$\eta_1=(1，1，1，1)^T$，$\eta_2=(1，1，-1，-1)^T$，$\eta_3=$（1，-1，1，-1）^{T}，$\eta_4=$（1，-1，-1，1）^{T}下的坐标为________________________.

8．已知 R^3 的两个基为 $a_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, a_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ 及 $b_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, b_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}, b_3=\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$，

则由基 a_1,a_2,a_3 到基 b_1,b_2,b_3 的过渡矩阵 P=______________.

二、已知向量集合：

$$V_1=\{x=(x_1,\cdots,x_n)\mid x_1,\cdots,x_n\in R,满足x_1+x_2+\cdots+x_n=0\}$$
$$V_2=\{x=(x_1,\cdots,x_n)\mid x_1,\cdots,x_n\in R,满足x_1+x_2+\cdots+x_n=1\}$$

判断 V_1,V_2 是否为向量空间，若是向量空间，求其维数和一个基.

三、解答题

1. 验证 $a_1=(1,-1,0)^T$，$a_2=(2,1,3)^T$，$a_3=(3,1,2)^T$ 为 R^3 的的一个基，并把 $v_1=(5,0,7)^T$，$v_2=(-9,-8,-13)^T$ 用这个基线性表示.

2. 求x关于给定基的坐标向量：

(1) $B=\left\{b_1=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}\right\}$, $x=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$；

(2) $B=\left\{b_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}-3\\4\\9\end{pmatrix},b_3=\begin{pmatrix}2\\-2\\4\end{pmatrix}\right\}$, $x=\begin{pmatrix}8\\-9\\6\end{pmatrix}$.

3. 已知基B和坐标向量x_B，求向量x：

(1) $B=\left\{\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}\right\}$, $x_B=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$；　(2) $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\-4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\2\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\-7\\0\end{pmatrix}\right\}$, $x_B=\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$

4. 在 R^4 中取两个基

$$\begin{cases} e_1 = (1,0,0)^T \\ e_2 = (0,1,0)^T \\ e_3 = (0,0,1)^T \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha_1 = (2,1,-1)^T \\ \alpha_2 = (0,3,1)^T \\ \alpha_3 = (5,3,2)^T \end{cases}$$

(1) 求由前一个基到后一个基的过渡矩阵；

(2) 求向量 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ 在后一个基下的坐标；

(3) 求在两个基下有相同坐标的向量.

§3.3　向量空间的基与维数、坐标系、过渡矩阵

(提高部分)

一．求下列空间的一组基和维数：

(1) $\left\{\begin{pmatrix} a-4b-2c \\ 2a+5b-4c \\ -a+2c \\ -3a+7b+6c \end{pmatrix} : a,b,c\in \mathbb{R}\right\}$；

(2) $\{(a,b,c): a-3b+c=0, b-2c=0, 2b-c=0\}$；

(3) $\{(a,b,c,d): a-3b+c=0\}$.

(4) 分量都相等的n维列向量构成的空间；

(5) 分量之和为零的n维列向量构成的空间.

(6) 由向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$生成的空间，其中

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-3\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\-3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-3\\-4\\1\\6\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\-3\\-8\\7\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}2\\1\\-6\\9\end{pmatrix}$$

(7) 3×3对称矩阵构成的空间

§3.4　矩阵的零空间、列空间、线性方程组的结构
(基础部分)

一、填空题

1. 给定 $m\times n$ 矩阵 A，集合 $S=\{x\mid x\in\mathrm{R}^n \text{且} Ax=0\}$ 称为矩阵 A 的__________，记作_________，称为方程组 $Ax=0$ 的____________. 集合 S 的极大无关组为 $Ax=0$ 的_____________， 为矩阵 A 的____________的基.

2. 给定 $m\times n$ 矩阵 A，A 列向量的所有线性组合构成的集合称为 A 的__________，记作___________， A 的行向量的所有线性组合构成的集合称为 A 的__________，记作___________.

3. $b\in Col\,A \Leftrightarrow$ 方程组 $Ax=b$ _________.

4. 设 A 为 $m\times n$ 的矩阵，则

（1）任一 $b\in\mathbb{R}^m$， 方程组 $Ax=b$ 都有解 $\Leftrightarrow$ $Col\,A=$_________________.

（2）对每个 $b\in\mathbb{R}^m$，方程组 $Ax=b$ 至多有一个解 $\Leftrightarrow$ A 的列____________.

5. 设 A 为 $m\times n$ 的矩阵，则 $Nul\,A$ 的维数= $Ax=0$ 中____未知量的个数，$Nul\,A$ 的维数+ $Col\,A$ 的维数=________.

6. 设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，η 为非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的一个特解，那么 $Ax=0$ 的通解可以表示为_______________________________________， $Ax=b$ 的通解可以表示为_____________________________，

7. 线性方程组 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0$ 的基础解系含有_________个解向量.

8. 已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=1 \\ x_1-2x_2+x_3=2 \\ ax_1+bx_2+cx_3=d \end{cases}$$

的两个解 $\eta_1=(2,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3})^{\mathrm{T}}$，$\eta_2=(\frac{1}{3},\ -\frac{4}{3},\ -1)^{\mathrm{T}}$，则系数矩阵的秩为___________；该方程组的全部解为__________________.

9．设 $A_{m\times n}B_{n\times s}=0$，则 $R(A)+R(B)\leq$ ________.

二、选择题

1．设 ξ_1，ξ_2，ξ_3 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，则［　　　］不是 $Ax=0$ 的基础解系.

(A) $\xi_1+\xi_2$，$\xi_2+\xi_3$，$\xi_3+\xi_1$；　(B) $\xi_1+2\xi_2$，$\xi_2+2\xi_3$，$\xi_3+2\xi_1$；

(C) ξ_1，$\xi_1+\xi_2$，$\xi_1+\xi_2+\xi_3$；　(D) $\xi_1-\xi_2$，$\xi_2-\xi_3$，$\xi_3-\xi_1$；

三、解答题

1. 判定 α 是否在 A 的列空间中，是否在的 A 零空间中，这里

$$\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-3\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}7&6&-4&1\\-5&-1&0&-2\\9&-11&7&-3\\19&-9&7&1\end{pmatrix}$$

2. 求下列齐次方程组的基础解系：

(1) $\begin{cases} 2x_1-3x_2-2x_3+x_4=0 \\ 3x_1+5x_2+4x_3-2x_4=0 \\ 8x_1+7x_2+6x_3-3x_4=0 \end{cases}$　　(2) $nx_1+(n-1)x_2+\cdots+2x_{n-1}+x_n=0$

3. 求解非齐次方程组 $\begin{cases} x_1+x_2=5 \\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=1 \\ 5x_1+3x_2+2x_3+2x_4=3 \end{cases}$ 的一个特解以及对应齐次方程组的基础解系.

4. 给定矩阵 A，求 $Col\ A, Row\ A, Nul\ A$ 的基和维数，其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -1 & 9 \\ -2 & 6 & -6 & -1 & -10 \\ -3 & 9 & -6 & -6 & -3 \\ 3 & -9 & 4 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

§3.4　矩阵的零空间、列空间、线性方程组的结构

(提高部分)

1. 设 A 为 3 阶方阵，空间 $Col\,A$ 与 $Nul\,A$ 的生成集分别为 $M=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}$ 和 $N=\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$，给定向量 $b=\begin{pmatrix}1\\-7\\0\end{pmatrix}$

(1) 为什么非齐次线性方程组 $Ax=b$ 一定相容？

(2) 为什么方程组 $Ax=b$ 有无穷多解？

2．求齐次线性方程组 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 的一个基础解系和齐次线性方程组 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 的一个基础解系．

3．设 $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 9 & -5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$，求一个 4×2 矩阵 B，使 $AB=0$，且 $R(B)=2$．

4. 设矩阵 $A=(a_1,a_2,a_3,a_4)$,其中 a_2,a_3,a_4 线性无关，$a_1=2a_2-a_3$，向量 $b=a_1+a_2+a_3+a_4$，求方程 $Ax=b$ 的通解．

5. 设四元非齐次线性方程组系数矩阵的秩为 3，已知 η_1，η_2，η_3 是它的三个解向量，且

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}，\ \eta_2 + \eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

求它的通解.

§3.5　向量的内积、正交阵
(基础部分)

一、填空题

1．给定线性空间V，存在一个实数$\langle x,y\rangle$满足：对V中任意的向量x,y,z，以及任意的实数λ

(1) $\langle x,x\rangle$_____ 0，且$\langle x,x\rangle=0$当且仅当_________；

(2) $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$；

(3) $\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$；

(4) $\langle \lambda x,y\rangle=\lambda\langle x,y\rangle=\langle x,\lambda y\rangle$；

称实数$\langle x,y\rangle$为向量x与y的内积，具有内积的线性空间V称为___________________.

2. 线性空间V中的正交向量组一定线性_________________.

3. 设A为n阶方阵，满足_________________________，即$A^{-1}=$______，称A为正交阵. 与正交阵A对应的线性变换$y=Ax$，称为________________.

4. 设A为正交阵，则A的列（行）向量为$\mathbb{R}^n$的______________________，$\langle Ax,Ay\rangle=$ ________.

5. 已知$\alpha=(3，5，-2，t)^T$，$\beta=(3t，-1，2，-1)^T$，若α与β正交，则$t=$_____________.

6. 已知矩阵$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & b & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$是正交矩阵，则$a$____________，$b$____________.

二、证明题

1．设A、B都是正交阵，证明AB也是正交阵.

2．设 x 为 n 维列向量，$x^T x = 1$，令 $H = E - 2xx^T$，证明 H 是对称的正交阵.

§3.5　向量的内积、正交阵

(提高部分)

一．在形如 $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3$ 的向量中找出最接近 b 的向量 α，其中

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

班级：　　　　　　　　　　　学号：　　　　　　　　　姓名：

第 3 章　自测题

(基础部分)

一、填空题

1．如果$\alpha_1=(1，1，1)^T$, $\alpha_2=(m，n，0)^T$，$\alpha_3=(1，2，3)^T$线性相关，那么 m，n 应满足关系式______________.

2．如果α_1，α_2，α_3线性无关，那么$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$线性______关.

3．已知$\alpha=(1，0，-1，2)^T$，$\beta=(0，1，0，2)^T$，$A=\alpha\beta^T$，则 $R(A)$=________________.

4．若 4 元线性方程组 $Ax=0$ 的同解方程组是$\begin{cases} x_1=-3x_3 \\ x_2=0 \end{cases}$，那么 $R(A)$=______，基础解系有_______个解向量.

5. 已知向量组 $\alpha_1=(1，2，-1，1)^T$，$\alpha_2=(2，0，t，0)^T$，$\alpha_3=(0，-4，5，-2)^T$的秩为 2，则 t=__________.

二、选择题

1．设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 A 经若干次初等行变换后所得的矩阵，则 [　　].

(A) B 的列向量组可由 A 的列向量组线性表示；

(B) B 的行向量组可由 A 的行向量组线性表示，但 A 的行向量组不能由 B 的行向量组线性表示；

(C) A，B 的行向量组可以互相线性表示；

(D) A，B 的行或列向量组之间无线性关系.

2．若向量组α、β、γ线性无关，α、β、δ线性相关则 [　　].

(A) α必可由β、γ、δ线性表示；　(B) β必不可由α、γ、δ线性表示；

(C) δ必可由α、β、γ线性表示；　(D) δ必不可由α、β、γ线性表示.

3．如果β不能由α_1，…，α_m线性表示，那么α_1，…，α_m，β [　　].

(A) 必线性无关；　　　　(B) 不一定线性无关；

(C) 必线性相关；　　　　(D) 当α_1，…，α_m中不含零向量时，必线性无关.

4．已知β_1，β_2是非齐次线性方程组$Ax=b$的两个不同的解，α_1，α_2是其导出组$Ax=0$的基础解系，k_1，k_2是任意常数，则$Ax=b$的通解是 [　　].

(A) $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+\frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2)$；　　(B) $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1-\alpha_2)+\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)$；

(C) $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)+\frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2)$；　　(D) $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)+\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)$；

5．设ξ_1，ξ_2，ξ_3是$Ax=0$的一个基础解系，则 [　　] 也是该方程组的一个基础解系.

(A) ξ_1，ξ_2，ξ_3的一个等价向量组；　　(B) ξ_1，ξ_2，ξ_3的一个等秩向量组；

(C) ξ_1，$\xi_1+\xi_2$，$\xi_1+\xi_2+\xi_3$　　(D) $\xi_1-\xi_2$，$\xi_2-\xi_3$，$\xi_3-\xi_1$

三、计算题

1．已知$\alpha_1=(1，0，2，3)^T$，$\alpha_2=(1，1，3，5)^T$，$\alpha_3=(1，-1，a+2，1)^T$，$\alpha_4=(1，2，4，a+8)^T$，$\beta=(1，1，b+3，5)^T$.

（1）a，b为何值时，β不能由α_1，…，α_4线性表示?

（2）a，b为何值时，β可由α_1，…，α_4惟一地线性表示?写出该表示式.

2．判断向量组$\beta_1=(2，1，3，4)^T$，$\beta_2=(5，0，1，-1)^T$，$\beta_3=(1，-2，-5，-9)^T$，$\beta_4=(3，-1，-2，-5)^T$，$\beta_5=(0，5，13，12)^T$的线性相关性，并求秩和一个最大线性无关组．

3．求向量组$\alpha_1=(2，-1，7，3)^T$，$\alpha_2=(1，4，11，-2)^T$，$\alpha_3=(3，-6，3，8)^T$的一个最大无关组，并把其余向量用这个最大无关组线性表示出来.

（提高部分）

一、填空

1．若 A 为 5 阶方阵，$R(A)=4$，则齐次线性方程组 $A^*x=0$ 的基础解系含有______个解向量.

2．设 n 阶方阵 A 的秩为 $n-1$，A 的各行元素之和均为 0，则齐次线性方程组 $Ax=0$ 的通解是_________.

二、选择题

1．已知向量组 α_1，α_2，α_3，α_4 线性无关，则向量组 $2\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4$，$\alpha_2-\alpha_4$，$\alpha_3+\alpha_4$，$\alpha_2+\alpha_3$，$2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 的秩是 [　　].

(A) 1；　　(B) 2；　　(C) 3；　　(D)4.

2．设向量组

(I)$\alpha_1=(a_1，a_2，a_3)^T$，$\alpha_2=(b_1，b_2，b_3)^T$，$\alpha_3=(c_1，c_2，c_3)^T$；

(II)$\beta_1=(a_1，a_2，a_3，a_4)^T$，$\beta_2=(b_1，b_2，b_3，b_4)^T$，$\beta_3=(c_1，c_2，c_3，c_4)^T$，则 [　　].

(A)(I)线性相关，则(II)线性相关；　　(B)(I)线性无关，则(II)线性无关；

(C)(II)线性无关，则(I)线性无关；　　(D)(I)线性无关的充要条件是(II)线性无关.

3．设 A 、B 为满足 $AB=0$ 的任意两个非零矩阵，则必有 [　　].

（A） A 的列向量线性相关，B 的行向量线性相关

（B） A 的列向量线性相关，B 的列向量线性相关

（C） A 的行向量线性相关，B 的行向量线性相关

（D） A 的行向量线性相关，B 的列向量线性相关

三、计算

1．设 4 元线性方程组(I)为 $\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_2-x_4=0 \end{cases}$，又已知齐次线性方程组(II)的通解为

$$X = k_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}-1\\2\\2\\1\end{pmatrix}$$

(1) 求方程组(I)的基础解系.

(2) 问线性方程组(I)和(II)是否有非零公共解?若有，则求出所有的非零公共解；若没有，则说明理由.

2. 讨论多项式组 $5t+t^2, 1-8t-2t^2, -3+4t+2t^2$ 的线性相关性.

3. 以下矩阵$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -7 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$是否线性相关?

4. 讨论多项式$6+3t-t^2$是否可由多项式组$1+t,1+t^2,t+t^2$唯一线性表示，并求线性表示系数.

5. 若 A,B 均为 $m\times n$ 矩阵，则

(1) $Col\,A = Col\,B \Leftrightarrow A \overset{c}{\sim} B$；　　　(2) $Nul\,A = Nul\,B \Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} B$.

四、证明

1. 令 $H = span\{\alpha_1,\alpha_2\}, K = span\{\alpha_3,\alpha_4\}$，其中

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}5\\3\\8\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\-12\\-28\end{pmatrix}$$

则 H 和 K 是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间. 事实上，H 和 K 是 $\mathbb{R}^3$ 中通过原点的平面，二者相交于一条通过原点的直线，求一个非零向量 u，使之生成这条直线.

2．设 η^* 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的一个解，ξ_1，…，ξ_{n-r} 是对应的齐次方程组的一个基础解系．证明：

(1)η^*，ξ_1，…，ξ_{n-r} 线性无关；

(2)η^*，$\eta^*+\xi_1$，…，$\eta^*+\xi_{n-r}$ 线性无关．