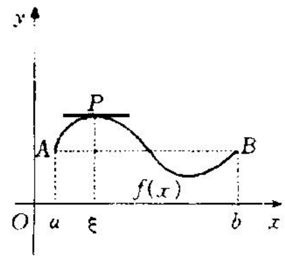
第三章内容梳理

Ⅰ 微分中值定理

一 罗尔定理



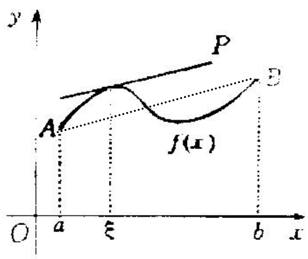
若函数 $f(x)$ 满足：

①在闭区间 $[a,b]$ 上连续

②在开区间 (a,b) 内可导

③ $f(a)=f(b)$.则至少 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

二 拉格朗日中值定理



若函数 $f(x)$ 满足：

①在闭区间 $[a,b]$ 上连续

②在开区间 (a,b) 内可导，

则至少 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

三 柯西中值定理

若函数 $f(x),g(x)$ 满足：

①在闭区间 $[a,b]$ 上连续

② 在开区间 (a,b) 内可导，且 $g'(x)\neq 0$

则至少 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

四 泰勒公式

1 泰勒中值定理

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的某邻域内具有 $n+1$ 阶导数，则对该邻域内异于 x_0 的任意点 x，

在 x_0 与 x 之间至少 $\exists$ 一个 ξ，使

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，称为 $f(x)$ 在 x_0 处的 n 阶泰勒余项.

注：(1)将 $R_n(x)$ 记作 $o(x-x_0)^n$，则称为带**皮亚诺余项的** n **泰勒劳公式**;

（2）当 $x_0=0$ 时，则 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$

称为 $f(x)$ 的 n 阶麦克劳林公式.

（3）若 $f(x)$ 具有 n 阶导数，则 $f(x)$ 只能展成 $n-1$ 阶泰勒公式.

2 常用的五种函数在 $x_0=0$ 处的麦克劳林公式

（1）$e^x==1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)$

（2）$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+o(x^{2m-1})$

（3）$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+o(x^{2m})$

（4）$\ln(1+x)==x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+o(x^n)$；

（5）$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$

II 导数的应用

一 单调性

判别方法：利用一阶导数的符号判断函数的单调性。

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 内可导，如果对 $\forall x\in(a,b)$，都有 $f'(x)>0$（或 $f'(x)<0$），则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内是单调增加的（或单减）.

二 极值与最值

1 极值的求法

（1）利用定义

设函数在 $f(x)$ 点 x_0 的某一邻域内有定义，x 为该邻域内异于 x_0 的任一点，若恒有 $f(x)>f(x_0)$（或 $f(x)<f(x_0)$），则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小值（或极大值）.

（2）利用第一充分条件

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域连续，

① 若当 x 经过 x_0 时，$f'(x)$ 由 “+” 变 “－”，则 $f(x_0)$ 为极大值；

② 若当 x 经过 x_0 时，$f'(x)$ 由 “－” 变 “+”，则 $f(x_0)$ 为极小值；

③ 若 $f'(x)$ 当 x 经过 $x=x_0$ 的两侧不变号，则 $f(x_0)$ 不是极值.

（3）利用第二充分条件

设 $f(x)$ 在点 x_0 处有 $f''(x_0)\neq 0$，且 $f'(x_0)=0$，则

① 当 $f''(x_0)<0$ 时，$f(x_0)$ 为极大值；

② 当 $f''(x_0)>0$ 时，$f(x_0)$ 为极小值.

2 最大、小值的求法

（1）闭区间上连续函数的最值的求法

若 $f(x)$ 为定义在 $[a,b]$ 上的连续函数，则最值的求法程序如下：

第一步：求 $f'(x)$，求出驻点和使 $f'(x)$ 不存在的点；

第二步：计算出（1）中所得到的各点的函数值及 $f(a)$与$f(b)$；

第三步： 比较以上各函数值的大小，最大者为最大值，最小者为最小值.

如：求 $f(x)=x^p+(1-x)^p\ (0\leq x\leq 1, p>1)$ 的最值.

（2）实际问题中最值的求法

若 $y=f(x)$ 为依据实际问题建立的函数关系，它在 (a,b) 是可导的，如果 $f(x)$ 在 (a,b) 内只有一个驻点 x_0，则即为所求的最大（或最小）值.

如：要做一个圆锥漏斗，其母线长为 20 cm，要使其体积最大，问其高应为多少?

3 凹、凸性与拐点

（1）图形凹凸性的定义

设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若对于 I 中任意两点 x_1,x_2，恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\left(\text{或} f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right)$$

则称 $f(x)$ 在 I 上是凸的（或凹的）.

（2）凹凸性的判别方法。

若在 I 上 $f''(x)<0$（或 $f''(x)>0$）则 $f(x)$ 在 I 上是凸的（或凹的）.

函数 $y=f(x)$ 的图形的凹弧与凸弧的分界点称为拐点.

如：求 $y=\ln\left(1+x^2\right)$ 的凹凸区间和拐点.

4 渐近线

（1）水平渐近线:

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$，或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$，则 $y=b$ 称为函数 $y=b$ 的水平渐近线.

（2）铅直渐近线：

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$，或 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$，则 $x=x_0$ 是曲线 $y=f(x)$ 的垂直渐近线.

（3）斜渐近线：

若 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ 或x\to-\infty}} \dfrac{f(x)}{x}=a$，又 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ 或x\to-\infty}} [f(x)-ax]=b$ 存在，则直线 $y=ax+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线.

5. 曲率与曲率半径

（1）曲率 $k=\dfrac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

（2）曲率半径 $R=\dfrac{1}{k}$.