## §4.1 特征值问题引入　§4.2 特征值与特征向量

一、填空题

1. $\frac{1}{\lambda}$，$\frac{|A|}{\lambda}$

2. 1,−1,1/2　　　1,4　　　0,−4,17

3. −1,4

二、选择题

1. A　　2. A

三、计算题

1.（1）$|A-\lambda E|=\ (\lambda+1)^3$

所以 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$。

当$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$时，$(A+E)x=0$，

$$A+E\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},\xi=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

所以 $p=k\xi(k\neq 0,k\in R)$为$\lambda=-1$所对应的特征向量。

（2）$|A-\lambda E|=\ (\lambda+1)^2(\lambda-1)^2$

所以 $\lambda_1=\lambda_2-1,\lambda_3=\lambda_4=1$。

当$\lambda_1=\lambda_2=-1$时，$(A+E)x=0$，

$$A+E\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\xi_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

所以 $x_1=k_1\xi_1+k_2\xi_2(k_1,k_2\in R$，$k_1,k_2$不同时为 $0)$ 为$\lambda=-1$所对应的特征向量。

当$\lambda_1=\lambda_2=1$时，$(A-E)x=0$，

$$A-E\sim\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

所以 $x_2=k_3\xi_3+k_4\xi_4(k_3,k_4\in R$，$k_3,k_4$不同时为 0) 为$\lambda=1$所对应的特征向量。

2. $AP=\lambda P$

$\begin{cases}2-1-2=\lambda\\5+a-3=\lambda\\-1+b+2=-\lambda\end{cases},\begin{cases}a=-3\\b=0\\\lambda=-1\end{cases}$。

四、证明题

1．证：设$A$的特征值为$\lambda$，

$$(A^2+3A+2E)x=(\lambda^2+3\lambda+2)x\quad(x\neq 0)$$

等式左边：$A^2+3A+2E=0,x\neq 0$，$(A^2+3A+2E)x=0$

等式右边：$(\lambda^2+3\lambda+2)x,x\neq 0$ ，

所以$\lambda^2+3\lambda+2=0,\lambda=-1$ 或 $-2$。

## §4.1 特征值问题引入　§4.2 特征值与特征向量

## 提高部分

一、　填空题

1.-3/2

2.-3，0,15　 3

二、选择题

1. A　　2. B

三、证明题

1. 证明：因为$\lambda \neq 0$为$AB$的特征值

所以$(AB)x = \lambda x \ (x \neq 0)$　①

$(BA)Bx = B\lambda x = \lambda(Bx)$

$(BA)\eta = \lambda\eta$

需证 $Bx = \eta \neq 0$即可。

反正：设$Bx = 0$, 则$ABx = 0$。

而由①可知，$\lambda x \neq 0$ 与①矛盾，所以$Bx \neq 0$。

2. 证明：因为$R(A) + R(B) < n$，

所以$R(A) < n$且$R(B) < n$。

由$R(A) < n$ 知 $Ax = 0$有非零解，记为ξ，

所以$A\xi = 0 \cdot \xi$ 知 $\lambda = 0$为其特征值。

同理$R(B) < n$ 知 $\lambda = 0$ 亦为$B$的特征值。

因为 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = 0$ 有非零解，

所以 $R\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} < R(A) + R(B) < n$,

故 $A, B$ 有公共特征向量。

## §4.3 矩阵的相似对角化（基础）

一、　填空题

1. 4, 5

2. 18

3．0，$\lambda_0 E$

4．2

二、选择题

1．C　 2．D

三、计算题

1.解：$|A-\lambda E|=(\lambda-1)^2(\lambda-6)$

所以$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=6$

当$\lambda_1=\lambda_2=1$时，$(A-E)x=0$需有两个线性无关的特征向量。

$$A-E=\begin{pmatrix}1&0&1\\3&0&x\\4&0&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&0&1\\0&0&3-x\\0&0&0\end{pmatrix}$$

所以$x=3.$

2. $|A-\lambda E|=(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-4)$

所以$\lambda_1=-2,\lambda_2=1,\lambda_3=4.$

当$\lambda_1=-2$时，$\mathrm{p}_1=\frac{1}{3}(1,2,2)^T.$

当$\lambda_2=1$时，$\mathrm{p}_2=\frac{1}{3}(2,1,2)^T$

当$\lambda_3=4$时，$\mathrm{p}_3=\frac{1}{3}(2,-2,1)^T$

故$\mathrm{P}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}$。

3. $|A-\lambda E|=(1-\lambda)(\lambda-5)(\lambda+5)$

所以$\lambda_1=1,\lambda_2=5,\lambda_3=-5.$

当$\lambda_1=1$时，$\mathrm{p}_1=(1,0,0)^T.$

当$\lambda_2=5$时，$\mathrm{p}_2=(2,1,2)^T$

当$\lambda_3=-5$时，$\mathrm{p}_3=(1,-2,1)^T$

$$P=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-2\\0&2&1\end{pmatrix}$$

由定理可知P为可逆矩阵，且

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&5&\\&&-5\end{pmatrix}$$

$$A=P\Lambda P^{-1}$$

所以$A^{100}=P\begin{pmatrix}1&&\\&5^{100}&\\&&(-5)^{100}\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&5^{100}-1\\0&5^{100}&0\\0&0&5^{100}\end{pmatrix}.$

4. 因为$\lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3$故$A$可对角化$P^{-1}AP=\Lambda$

$$A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}-2&3&-3\\-4&5&-3\\-4&4&-2\end{pmatrix}$$

5. 因为$A$与$B$相似，$A$与$B$有相同的特征值.

$B$的特征值$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$

$B^{-1}$的特征值2,3,4,5

$B^{-1}-E$的特征值1,2,3,4

故$|B^{-1}-E|=1\cdot2\cdot3\cdot4=24.$

## §4.3 矩阵的相似对角化（提高）

一、计算题

解：$|A-\lambda E|=\lambda^2(\lambda-2)^2$

所以$\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=\lambda_4=2.$

当$\lambda_1=\lambda_2=0$时，$(A-0E)=0$

$A\sim\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，故$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$

当$\lambda_3=\lambda_4=2$时，$(A-2E)=0$

$$(A-2E)\sim\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}，故\eta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}，\eta_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$所以P=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&1&0&-1\end{pmatrix}$$

二、证明题

证明：$A^{-1}(AB)A=BA$

故存在可逆阵$A$，使得

$A^{-1}(AB)A=BA$

所以$AB$与$BA$相似。

## 第 4 章 自测题

一、填空题

1．$-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$　　$-2$，$3$，$4$　　$12$，$-8$，$-6$　　$12$，$2$，$6$

2．$-2$，$-1$

二、计算题

1．$|A-\lambda E|=(1-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-1)$

所以$\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=1.$

当$\lambda_1=-2$时，$(A+2E)x=0$

$$A+2E\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}，故\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

当$\lambda_2=\lambda_3=1$时，$(A+E)x=0$

$A-E\sim\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，故$\xi_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

2. $|A-\lambda E|=\left(\frac{1}{4}-\lambda\right)\left(\frac{1}{5}-\lambda\right)\left(\frac{1}{6}-\lambda\right)$

所以$\lambda_1=\frac{1}{4},\lambda_2=\frac{1}{5},\lambda_3=\frac{1}{6}$.

$A$可相似对角化，存在$P$使得$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&&\\&\frac{1}{5}&\\&&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$

$$A^n=P\Lambda^nP^{-1}=P\begin{pmatrix}\left(\frac{1}{4}\right)^n&&\\&\left(\frac{1}{5}\right)^n&\\&&\left(\frac{1}{6}\right)^n\end{pmatrix}P^{-1}$$

所以$\lim_{n\to\infty}A^n=0$.

3. 因为$\alpha$为$A^{-1}$的特征向量，

所以$\alpha$也为$A$的特征向量，

即$A\alpha=\lambda\alpha$,

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}$$

所以$k=-2$或$k=1$.