波形信源
与波形信道

信息论与编码原理不挂科 第四讲

波形信源
与波形信道

信息论与编码原理不挂科 第四讲

2大模块

3道题目

信息论与编码原理不挂科 第四讲

信源的分类

按照信号取值集合与取值时刻集合的连续或离散分类

信号取值集合	信号取值时刻集合	信源种类
离散	离散	数字/离散
连续	离散	连续
连续	连续	模拟/波形

信源的分类

按照信号取值集合与取值时刻集合的连续或离散分类

信号取值集合	信号取值时刻集合	信源种类
离散	离散	数字/离散
连续	离散	连续
连续	连续	模拟/波形

信道的分类

按照输入输出信号的幅度和时间特性划分

幅度	时间	信道分类
离散	离散	离散信道（数字信道），对讨论编码时有用
连续	离散	连续信道
连续	连续	模拟信道（波形信道），是实际信道，具有重要意义
离散	连续	理论和实用价值较小，不做讨论

信道的分类

按照输入输出信号的幅度和时间特性划分

幅度	时间	信道分类
离散	离散	离散信道（数字信道），对讨论编码时有用
连续	离散	连续信道
连续	连续	模拟信道（波形信道），是实际信道，具有重要意义
离散	连续	理论和实用价值较小，不做讨论

波形信源与波形信道

模块1 波形信源与连续信源

模块2 波形信道与连续信道

连续信源与波形信源

连续信源与波形信源

小节1 数学模型

小节2 连续信源的差熵

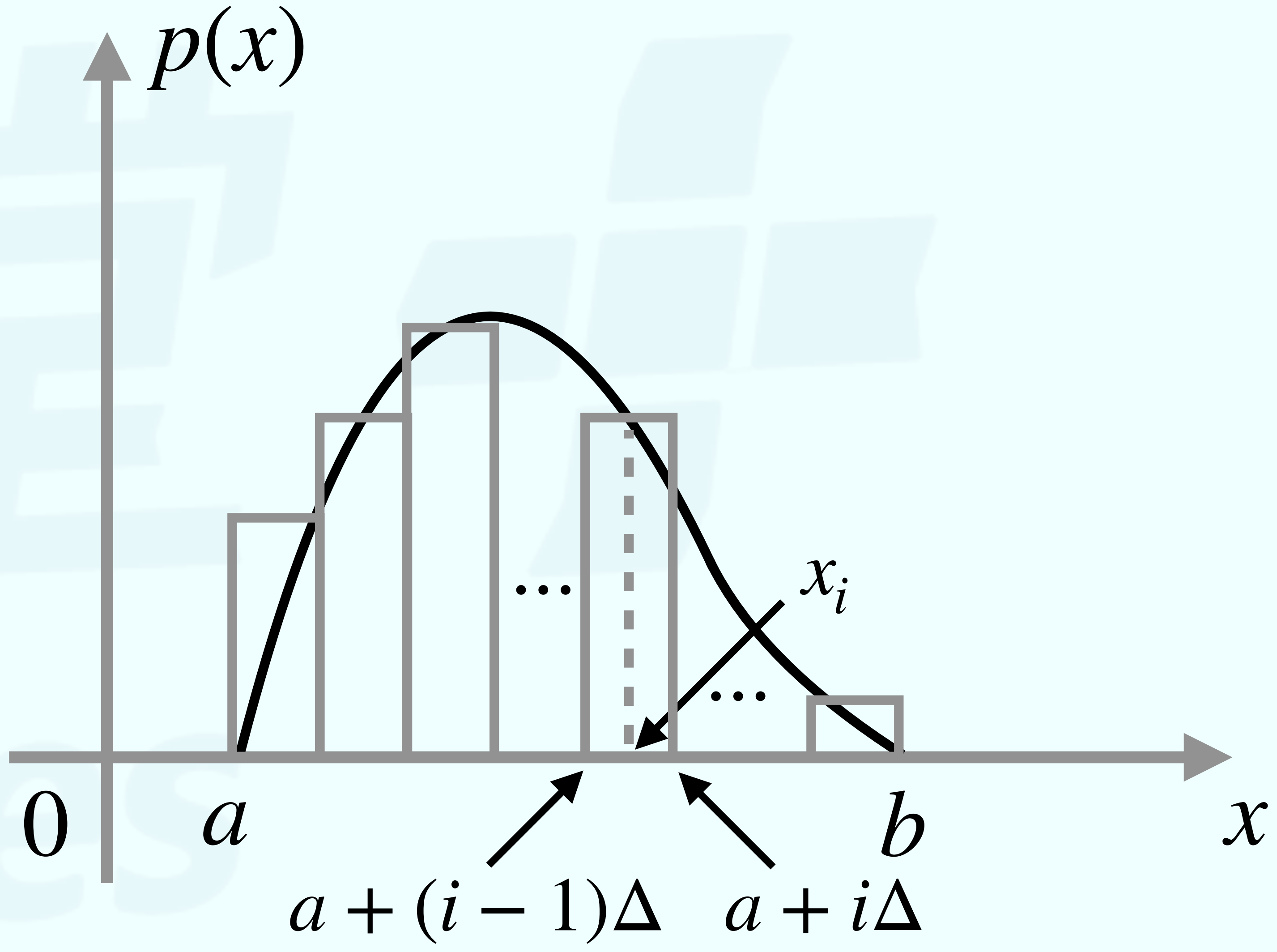
小节3 连续信源的熵功率

连续信源与波形信源的数学模型

单变量连续信源 输出消息为不可数的无限值，即是连续的。

$$\begin{bmatrix} X \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a,b) \\ p(x) \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} X \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(-\infty,\infty) \\ p(x) \end{bmatrix}$$

$$\int_a^b p(x)dx = 1 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$$



将连续型随机变量X的取值分割成n个等宽的区间，

每个区间的宽度 $\Delta = \dfrac{b-a}{n}$，则有 $P[a+(i-1)\Delta \le X \le a+i\Delta] = \displaystyle\int_{a+(i-1)\Delta}^{a+i\Delta} p(x)dx$

根据积分中值定理，当概率密度函数连续时，在区间 $a+(i-1)\Delta \le x \le a+i\Delta$ 内必然存在一个x_i；

此时 $P[a+(i-1)\Delta \le X \le a+i\Delta] = \displaystyle\int_{a+(i-1)\Delta}^{a+i\Delta} p(x)dx = p(x_i)\Delta$

连续信源与波形信源

小节1 数学模型

小节2 连续信源的差熵

小节3 连续信源的熵功率

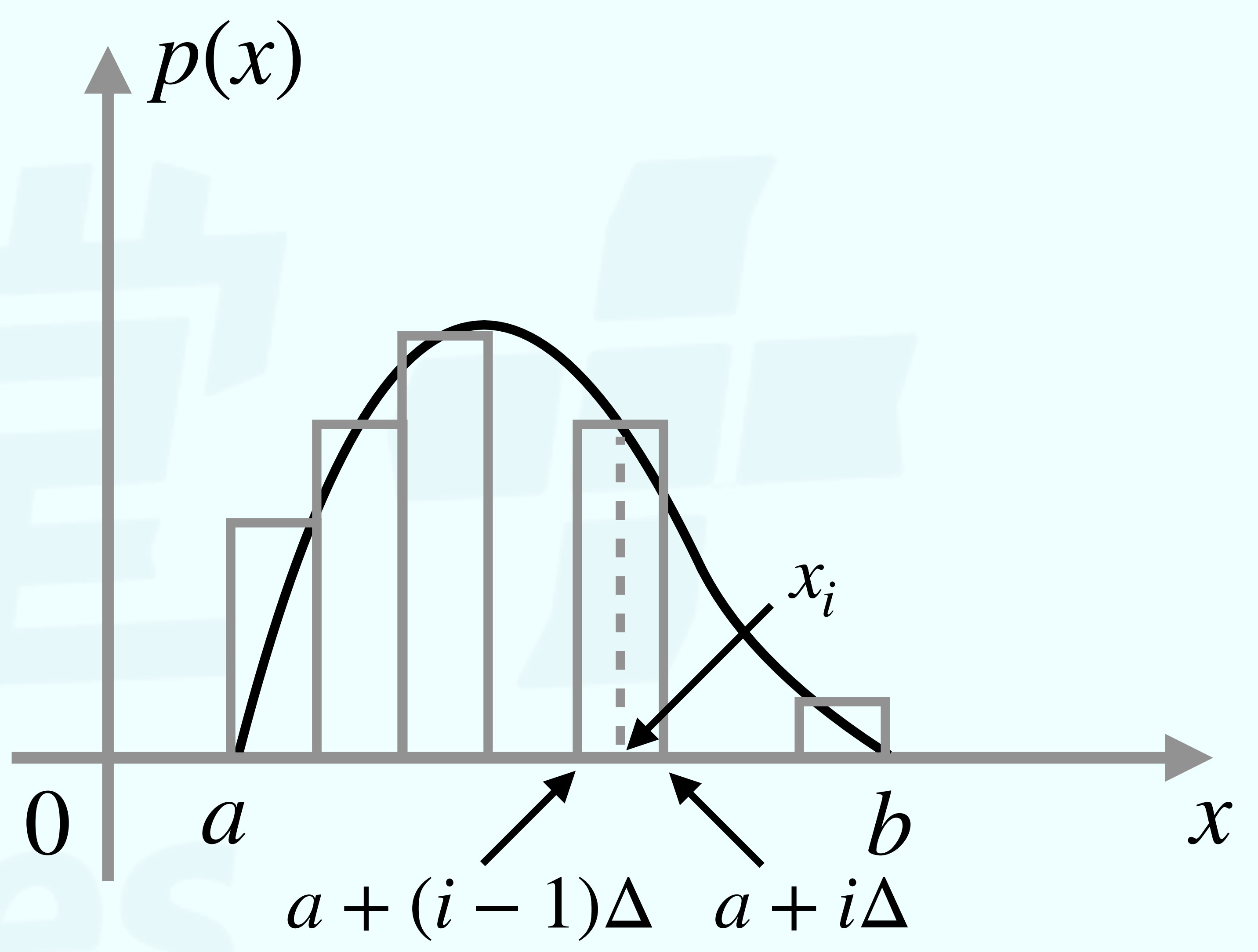
连续信源的差熵

$$P[a+(i-1)\Delta \le X \le a+i\Delta] = \int_{a+(i-1)\Delta}^{a+i\Delta} p(x)dx = p(x_i)\Delta$$

因此我们可以用离散的概率值 $p(x_i)$ 表征连续信源；

也就是说，我们此时将连续信源进行了离散和量化；

当区间的间隔趋于零时，离散信源就可以恢复为连续信源。



记离散量化后的信源为 X_n，我们求解其信息熵：

$$H(X_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\Delta \log[p(x_i)\Delta] = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\Delta \log p(x_i) - \sum_{i=1}^{n} p(x_i)\Delta \log \Delta$$

令区间的划分个数 $n \to \infty$，则区间宽度 $\Delta \to 0$ ，此时离散信源趋近于连续信源，即 $X_n \to X$

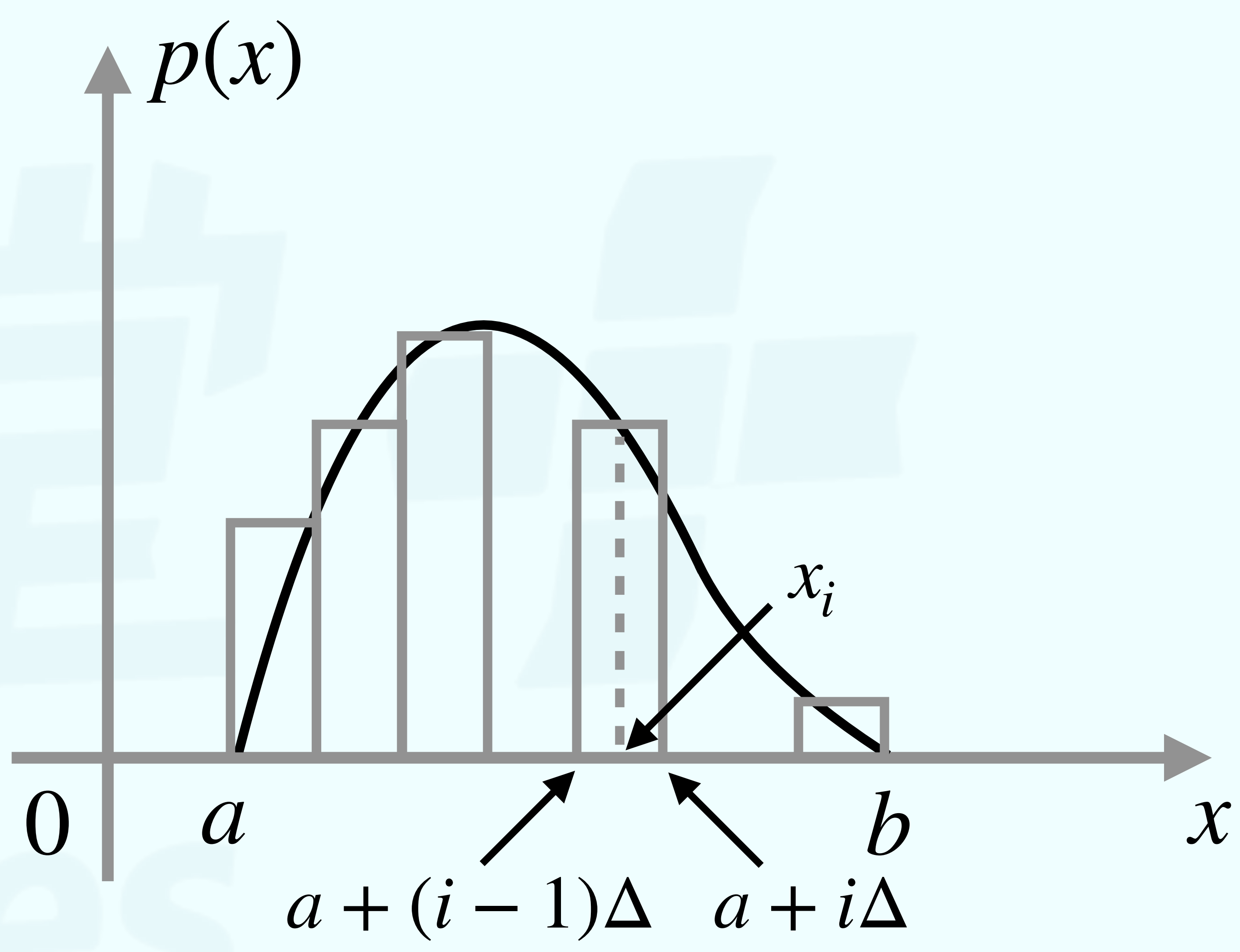
$$H(X) = \lim_{\Delta \to 0} \{ -\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\Delta \log p(x_i) - \sum_{i=1}^{n} p(x_i)\Delta \log \Delta \}$$

连续信源的差熵

$$H(X) = \lim_{\Delta \to 0} \{ -\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\Delta \log p(x_i) - \sum_{i=1}^{n} p(x_i)\Delta \log \Delta \}$$

$n \to \infty$ 时，$\sum_{i=1}^{n} \to \int_a^b$ ，$\Delta \to dx$

$$H(X) = -\int_a^b p(x)\log p(x)dx - \lim_{\Delta \to 0} \log \Delta$$



$H(X)$ 称为连续信源的绝对熵；

$-\int_a^b p(x)\log p(x)dx$ **称为微分熵，又称为差熵，用$h(X)$表示。**

$\lim_{\Delta \to 0} \log \Delta$为无限大的常数项。

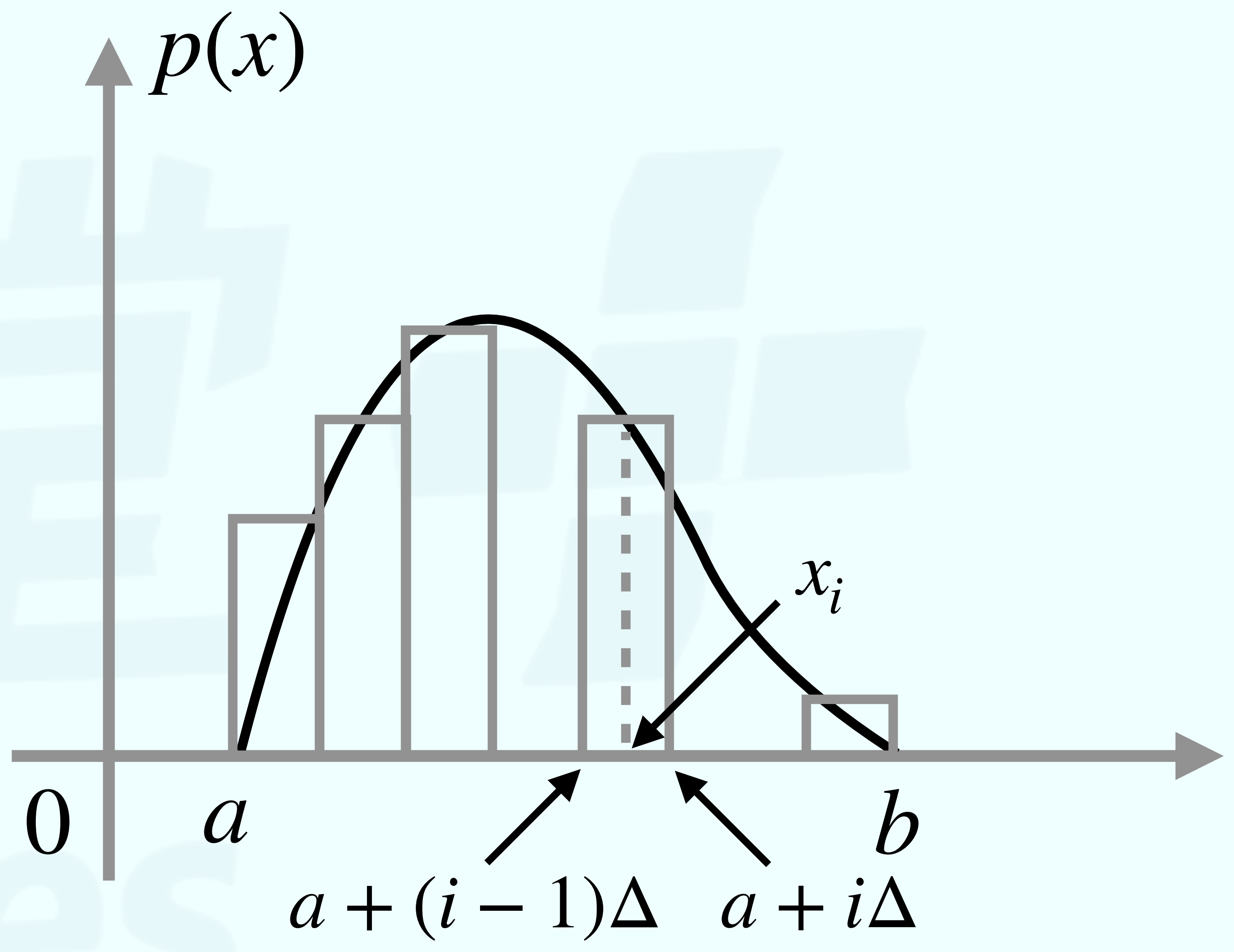
连续信源的差熵

连续信源的差熵

$$h(X) = -\int_a^b p(x)\log p(x)dx$$

离散信源的熵

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\log p(x_i)$$



两个公式在形式上是相统一的。

在前面的讨论中，我们已经知道连续信源的绝对熵还包含一个无限大的常数项 $\lim_{\Delta\to 0}\log\Delta$，在实际研究中，我们一般研究熵之间的差值（即平均互信息），因此可以抵消这一项，这也是“差熵”这一名称的由来。我们研究连续信源时就着重研究差熵。

两种特殊连续信源的差熵「均匀分布」

若连续信源的统计特性为均匀分布的概率密度函数，即：

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & , a \le x \le b \\ 0 & , others \end{cases}$$

则服从均匀分布的连续信源的差熵

$$h(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\log p(x)dx = -\int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}\log\frac{1}{b-a}dx = \log(b-a)$$

讨论 $b-a=1,\ \ h(X)=0$

$b-a<1,\ \ h(X)<0$ **连续信源的差熵无非负性，可以为负值。**

$b-a>1,\ \ h(X)>0$

两种特殊连续信源的差熵「高斯分布」

若连续信源的统计特性为高斯分布的概率密度函数，即：

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

随机变量X的均值 $m = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$ m^2 代表连续随机变量的直流功率；

随机变量X的方差 $\sigma^2 = E[(X-m)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 p(x)dx$ σ^2代表连续随机变量的交流功率；

当均值$m = 0$时，方差 $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx$ 代表随机变量的平均功率。

下面我们来求解服从高斯分布的连续信源的差熵。

两种特殊连续信源的差熵「高斯分布」

下面我们来求解服从高斯分布的连续信源的差熵。

$$h(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\log p(x)dx = -\int_R p(x)\log(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}})dx$$

$$= -\int_R p(x)\log\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}dx - \int_R p(x)\log e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$= \frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2)\int_R p(x)dx + \frac{1}{2\sigma^2}\log e\int_R (x-m)^2 p(x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2) + \frac{1}{2}\log e$$

$$= \frac{1}{2}\log(2\pi e\sigma^2) = \log\sqrt{2\pi e\sigma^2}$$

两种特殊连续信源的差熵「高斯分布」

$h(X)=\frac{1}{2}\log(2\pi e\sigma^2)$ 高斯信源的差熵与方差有关，与均值无关；

换言之，高斯分布的信息量完全取决于交流信号，与直流无关；

如果信源信号中既有直流也有交流，则信号的平均功率 $P=m^2+\sigma^2$；

在实际发送的随机信源信号中，一般不包含直流，因为直流不含有信息还耗费功率；

因此，若信号中不包含直流，则平均功率 $P=\sigma^2$；

此时，对于均值为零的高斯信源，差熵就只与平均功率有关，即

$$h(X)=\frac{1}{2}\log(2\pi e\sigma^2)=\frac{1}{2}\log(2\pi eP)$$

联合熵、条件熵、波形信源的差熵

两个连续随机变量的联合熵

$$h(XY) = -\iint_{R^2} p(xy)\log p(xy)dxdy$$

两个连续随机变量的条件熵

$$h(X|Y) = -\iint_{R^2} p(xy)\log p(x|y)dxdy \qquad h(Y|X) = -\iint_{R^2} p(xy)\log p(y|x)dxdy$$

类比离散信源，可以得到连续信源条件熵与联合熵的有关性质。

两信源相互关联时，$h(XY) = h(X) + h(Y|X) = h(Y) + h(X|Y)$

两信源相互独立时，$h(XY) = h(X) + h(Y)$

类比强可加性与可加性

不等式关系：$h(X|Y) \le h(X)$, $h(Y|X) \le h(Y)$, $h(XY) \le h(X) + h(Y)$

当且仅当两变量相互独立时取等号

联合熵、条件熵、波形信源的差熵

平稳随机过程可以通过时域取样分解为取值连续的无穷平稳随机序列 $\vec{X} = X_1X_1\cdots X_N$

连续随机变量序列的联合熵为

$$h(\vec{X}) = h(X_1X_1\cdots X_N) = -\int_R p(\vec{X})\log \vec{X}\, d\vec{X}$$

$$= h(X_1) + h(X_2|X_1) + h(X_3|X_1X_2)\cdots + h(X_N|X_1X_2\cdots X_{N-1})$$

波形信源（平稳随机过程）的差熵为取样趋于无穷时的联合熵，即 $h(\{x(t)\}) = \lim_{N\to\infty} h(\vec{X})$

对于限时T，限频F的随机过程，根据奈奎斯特采样定理，可以用 $N = 2FT$的有限维随机矢量表示。

奈奎斯特频率 $F_s = 2F$，故限时T的随机过程采样点数为$N = \frac{T}{T_s} = TF_s = 2FT$。

最大差熵定理

对离散信源来说，当信源呈等概率分布时，信源熵取到最大值；

对连续信源来说：如果没有限制条件，就没有最大熵；

连续信源在不同的限制条件下，信源的最大熵也不同。

- **信源的输出值受限(随机变量在有限范围内取值) 时，有限峰值功率的最大熵定理。**
- **信源的输出平均功率受限(随机变量的方差有限) 时，有限平均功率的最大熵定理。**

最大差熵定理

➢ **信源的输出值受限(随机变量在有限范围内取值) 时，有限峰值功率的最大熵定理。**

对于峰值功率受限，即在**输出幅度受限**的情况下，服从**均匀分布**的随机变量具有最大熵。

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & , a \le x \le b \\ 0 & , others \end{cases} \qquad h(X) = \log(b-a)$$

➢ **信源的输出平均功率受限(随机变量的方差有限) 时，有限平均功率的最大熵定理。**

对于**平均功率受限**的情况下，服从**高斯分布**的随机变量具有最大熵。

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \qquad h(X) = \frac{1}{2}\log(2\pi e\sigma^2)$$

连续信源与波形信源

小节1 数学模型

小节2 连续信源的差熵

小节3 连续信源的熵功率

连续信源的熵功率「引入」

在不同的约束条件下，连续信源有不同的最大熵。

均值为0、平均功率受限的连续信源，是实际中最常见的信源。我们重点讨论这种信源的冗余问题。

对均值为0、平均功率受限为P的连续信源，当服从高斯分布时达到最大熵，此时的最大熵为 $h_P(X)=\frac{1}{2}\log(2\pi eP)$，因此求得其对应的功率 $P=\frac{1}{2\pi e}e^{2h_P(X)}$；

若另一种信源的受限平均功率也为P，但不是高斯分布，则该信源的差熵必小于$h_P(X)$。

连续信源的熵功率

设限定的平均功率为P，某连续信源的差熵为$h(X)$， 则与它具有相同熵的高斯信源的平均功率被定义为熵功率。

熵功率的定义式为 $\overline{P} = \frac{1}{2\pi e}e^{2h(X)}$

由于该连续信源的差熵小于$h_P(X)$，因此其熵功率必然小于限定的平均功率。

把信源的平均功率和熵功率之差$P - \overline{P}$，称为连续信源的剩余度。熵功率和信号的平均功率相差越大，说明信号的剩余越大 。

连续信道与波形信道

连续信道与波形信道

小节1 数学模型及分类

小节2 信道容量

小节3 高斯加性波形信道

连续信道与波形信道的数学模型

■ 波形信道

信道的输入和输出都是随机过程$\{x(t)\}$和$\{y(t)\}$，即信道输入和输出都是随机模拟信号。波形信道也称为模拟信道。

■ 连续信道

用连续随机变量来描述信道的输入和输出的消息，可以由波形信道取样得到。

实际波形信道的频宽总是受限的，在有限观察时间T内能满足限时限频条件。

因此可以根据取样定理把波形信道的输入$\{x(t)\}$和输出$\{y(t)\}$的平稳随机过程信号离散化成 $N(=2FT)$个时间离散、取值连续的平稳随机序列 $X=X_1X_2...X_N$ 和 $Y=Y_1Y_2...Y_N$ 。

从而我们将波形信道问题转化为多维连续信道问题研究。

连续信道与波形信道的数学模型

输入随机过程

$\{x(t)\}$ → 波形信道 → $\{y(t)\}$

输出随机过程

取样

限时T，限频F，则采样频率应满足奈奎斯特定理

因此最大采样间隔为$T_s = \dfrac{1}{2F}$

因此在限时T内的采样点数为 $N = T/T_s = 2FT$

输入序列

$\vec{X} = (X_1X_2\cdots X_N)$ → 连续信道 → $\vec{Y} = (Y_1Y_2\cdots Y_N)$

输出序列

$P(y_1y_2\cdots y_N | x_1x_2\cdots x_N)$

连续信道与波形信道的分类「按噪声统计特性分类」

- **高斯信道**

信道中的噪声是高斯噪声。高斯噪声是平稳遍历的随机过程，其瞬时值的概率密度函数服从高斯分布（即正态分布）。

- **白噪声信道**

信道中的噪声是白噪声。白噪声也是平稳遍历的随机过程。它的功率谱密度均匀分布于整个频率区间，功率谱密度为一常数。

$P_n(\omega)=\dfrac{N_0}{2},\ (-\infty\le\omega\le\infty)$，其瞬时值的概率密度函数可以是任意的。此处白噪声的功率是按正、负两半轴上的频谱定义的，为双边谱密度。

若只采用正半轴频谱来定义，则功率谱为$P_n(\omega)=N_0,\ (0\le\omega\le\infty)$，为单边谱密度。

连续信道与波形信道的分类「按噪声统计特性分类」

- **高斯白噪声信道**

具有高斯分布的白噪声称为高斯白噪声。一般情况下把既服从高斯分布而功率谱密度又是均匀的噪声称为高斯白噪声。

关于低频限带高斯白噪声有一个很重要的性质，即低频限带高斯白噪声经过取样函数取值后可分解成 $N(=2FT)$ 个统计独立的高斯随机变量。

低频限带高斯白噪声可以看成是无限带宽的高斯白噪声通过一个理想低通滤波器后所得。 如果理想低通滤波器其带宽为F赫兹，那么其传递函数的频率响应为：

$$K(\omega)=\begin{cases}1, & -2\pi F \le \omega \le 2\pi F\\ 0, & others\end{cases}$$

连续信道与波形信道的分类「按噪声对信号的功能分类」

- **乘性信道**

信道中噪声对信号的干扰作用表现为是与信号相乘的关系，则信道称为乘性信道，噪声称为乘性干扰。

$$\{y(t)\} = \{x(t)\} \times \{n(t)\}$$

- **加性信道**

信道中噪声对信号的干扰作用表现为是与信号相加的关系，则信道称为加性信道，噪声称为加性噪声。

$$\{y(t)\} = \{x(t)\} + \{n(t)\}$$

连续信道与波形信道的分类「按信号的记忆性分类」

- **无记忆信道**

若多维连续信道的传递概率密度函数满足 $p(\vec{y}\mid\vec{x})=\prod_{i=1}^{N}p(y_i|x_i)$；

则称此信道为连续无记忆信道。连续无记忆信道在任一时刻输出的变量只与对应时刻的输入变量有关，与以前时刻的输入、输出变量无关，也与以后的输入变量无关。

- **有记忆信道**

若连续信道任何时刻的输出变量与其他任何时刻的输入，输出变量都有关。则此信道称为连续有记忆信道。

基本连续信道

基本连续信道指的是输入和输出都是**单个连续型随机变量**的信道。基本连续信道是单符号连续信道，其输入是连续型随机变量 X，X 取值于$[a, b]$ 或实数域 R；输出也是连续性随机变量Y，取值于$[a', b']$或实数域R；信道的传递概率密度函数为$p(y|x)$，并满足 $\int_R p(y|x)dy = 1$。

因此，可用 $[X, p(y|x), Y]$ 来描述单符号连续信道。根据噪声的统计特性和作用，多维连续信道和单符号 连续信道同样有加性信道，乘性信道和高斯信道等之区分。

其中，**对于加性信道而言，信道的传递概率密度函数就等于噪声的概率密度函数**。这也进一步说明了信道的传递概率是由于噪声所引起的。

后续我们主要讨论加性信道，噪声源主要是高斯白噪声。

连续信道与波形信道

小节1 数学模型及分类

小节2 信道容量

小节3 高斯加性波形信道

基本连续信道的平均互信息

基本连续信道又称单符号连续信道，其输入是连续型随机变量 X，X 取值于$[a, b]$ 或实数域 R；输出也是连续性随机变量Y，取值于$[a', b']$或实数域R；

信道的传递概率密度函数为$p(y|x)$，并满足$\int_R p(y|x)dy = 1$

类似于单符号离散信道，我们可推得基本连续信道输入X和输出Y之间的平均互信息为

$$I(X;Y) = \iint_R p(xy)\log\frac{p(x|y)}{p(x)}dxdy = h(X) - h(X|Y)$$

$$I(X;Y) = \iint_R p(xy)\log\frac{p(y|x)}{p(y)}dxdy = h(Y) - h(Y|X)$$

$$I(X;Y) = \iint_R p(xy)\log\frac{p(xy)}{p(x)p(y)}dxdy = h(X) + h(Y) - h(XY)$$

基本连续信道的平均互信息

类似于单符号离散信道，我们可推得基本连续信道输入X和输出Y之间的平均互信息为

$$I(X;Y)=\iint_R p(xy)\log\frac{p(x|y)}{p(x)}dxdy=h(X)-h(X|Y)$$

$$I(X;Y)=\iint_R p(xy)\log\frac{p(y|x)}{p(y)}dxdy=h(Y)-h(Y|X)$$

$$I(X;Y)=\iint_R p(xy)\log\frac{p(xy)}{p(x)p(y)}dxdy=h(X)+h(Y)-h(XY)$$

对于连续信道的平均互信息来说，关系式和离散信道下平均互信息的关系式完全类似，而且保留了离散信道平均互信息的含义和性质。只是表达式中用**连续信源的差熵**代替了离散信源的熵。

连续信源的平均互信息也具备非负性、对称性、凸性、以及信息不增性。

多维连续信道的平均互信息

类似于离散扩展信道，我们可推得多维连续信道输入序列和输出序列之间的平均互信息为

$$I(\vec{X};\vec{Y}) = \iint_{\vec{x}\vec{y}} p(\vec{x}\vec{y})\log\frac{p(\vec{x}\,|\,\vec{y})}{p(\vec{x})}d\vec{x}\,d\vec{y} = h(\vec{X}) - h(\vec{X}\,|\,\vec{Y})$$

$$I(\vec{X};\vec{Y}) = \iint_{\vec{x}\vec{y}} p(\vec{x}\vec{y})\log\frac{p(\vec{y}\,|\,\vec{x})}{p(\vec{y})}d\vec{x}\,d\vec{y} = h(\vec{Y}) - h(\vec{Y}\,|\,\vec{X})$$

$$I(\vec{X};\vec{Y}) = \iint_{\vec{x}\vec{y}} p(\vec{x}\vec{y})\log\frac{p(\vec{x}\vec{y})}{p(\vec{x})p(\vec{y})}d\vec{x}\,d\vec{y} = h(\vec{X}) + h(\vec{Y}) - h(\vec{X}\vec{Y})$$

关系式与离散扩展信道下平均互信息的关系式完全类似，因此它具备与离散扩展信道相类似的结论。

多维连续信道的平均互信息

信道无记忆 $$I(\vec{X};\vec{Y}) \le \sum_{k=1}^{N} I(X_k;Y_k)$$

信源无记忆，信道无记忆 $$I(\vec{X};\vec{Y}) = \sum_{k=1}^{N} I(X_k;Y_k)$$

信源无记忆，信道有记忆 $$I(\vec{X};\vec{Y}) \ge \sum_{k=1}^{N} I(X_k;Y_k)$$

信源的输入独立同分布 $$I(\vec{X};\vec{Y}) = \sum_{k=1}^{N} I(X_k;Y_k) = NI(X;Y)$$

连续信道与波形信道的信息传输率

基本连续信道的信息传输率 $R = I(X;Y) = h(X) - h(X|Y)$ 单位为bit/自由度

多维连续信道的信息传输率 $R = I(\vec{X};\vec{Y}) = h(\vec{X}) - h(\vec{X}|\vec{Y})$ 单位为bit/N个自由度

其中每个自由度的信息传输率 $R = \dfrac{1}{N}I(\vec{X};\vec{Y})$

波形信道的平均互信息 $I(\{x(t)\};\{y(t)\}) = \lim\limits_{N\to\infty} I(\vec{X};\vec{Y})$

波形信道的信息传输率 $R_t = \lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{T}I(\vec{X};\vec{Y})$ 一般研究单位时间，单位为bit/s

连续信道与波形信道的信道容量

和离散信道一样，对于固定的连续信道和波形信道都有一个**最大的信息传输率**，称为信道容量。它也是信道可靠传输的最大信息传输率。对于不同的连续信道和波形信道，它们存在的噪声形式不同，信道的带宽以及信号的各种限制不同，所以具有不同的信道容量。

单符号连续信道的信道容量 $C=\max\limits_{p(x)}\{I(X;Y)\}=\max\limits_{p(x)}[h(Y)-h(Y|X)]$ 单位为$bit/$自由度

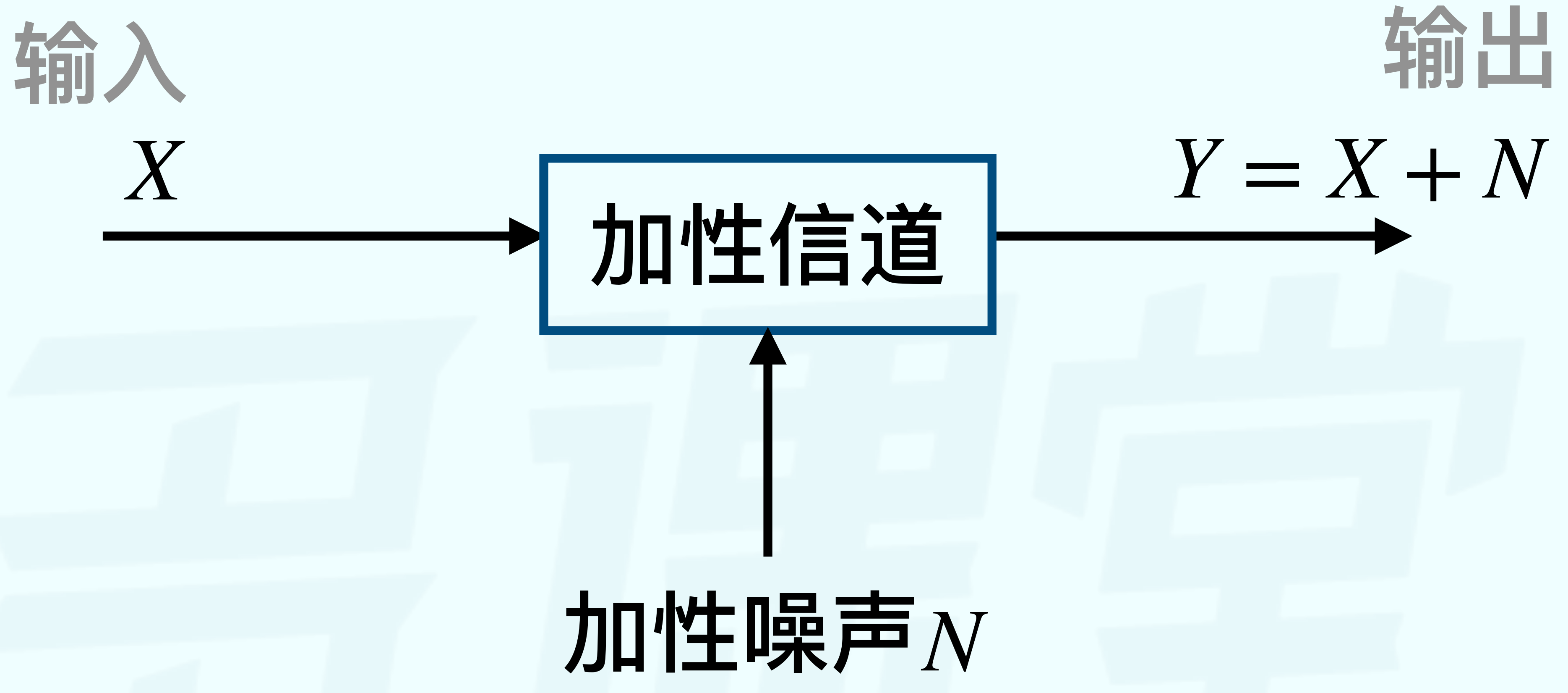
单符号波形信道的信道容量 $C=\max\limits_{p(x)}\{\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}I(X;Y)\}=\max\limits_{p(x)}\{\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}[h(Y)-h(Y|X)]\}$ 单位为bit/s

多维连续信道的信道容量 $C=\max\limits_{p(\vec{x})}\{I(\vec{X};\vec{Y})\}=\max\limits_{p(\vec{x})}[h(\vec{Y})-h(\vec{Y}|\vec{X})]$ 单位为bit/N自由度

多维波形信道的信道容量 $C=\max\limits_{p(\vec{x})}\{\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}I(\vec{X};\vec{Y})\}=\max\limits_{p(\vec{x})}\{\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}[h(\vec{Y})-h(\vec{Y}|\vec{X})]\}$ 单位为bit/s

连续信道与波形信道

加性信道的噪声熵



设单符号加性噪声信道的噪声为连续随机变量N，且与X相互统计独立。

对于加性信道而言，信道的传递概率密度函数就等于噪声的概率密度函数

$$
\begin{aligned}
h(Y|X) &= -\iint_R p(xy)\log p(y|x)dxdy = -\iint_R p(x)p(y|x)\log p(y|x)dxdy \\
&= -\iint_R p(x)p(n)\log p(n)dxdn = -\int_R p(x)dx\int_R p(n)\log p(n)dn \\
&= -\int_R p(n)\log p(n)dn \ = h(N)
\end{aligned}
$$

也就是说，加性噪声信道的噪声熵即为噪声N的差熵。

加性信道的信道容量

加性噪声信道的噪声熵即为噪声N的差熵，即$h(Y|X) = h(N)$

因此单符号加性噪声信道的信道容量

$$C = \max_{p(x)}\{I(X;Y)\} = \max_{p(x)}[h(Y) - h(Y|X)] = \max_{p(x)}[h(Y) - h(N)]$$ 单位为bit/自由度

同理，多维加性噪声信道的信道容量

$$C = \max_{p(\vec{x})}\{I(\vec{X};\vec{Y})\} = \max_{p(\vec{x})}[h(\vec{Y}) - h(\vec{Y}|\vec{X})] = \max_{p(\vec{x})}[h(\vec{Y}) - h(\vec{N})]$$ 单位为bit/N个自由度

公式表明：加性连续信道的信道容量取决于噪声（即信道）的统计特性与输入随机变量所受的限制条件，对于不同的限制条件，连续随机变量具备不同的最大熵。

上式中$h(N)$与输入X的概率密度函数$p(x)$无关(因输入X 与噪声矢量n统计独立)。

所以，求加性信道的信道容量就是求某种发送信号的概率密度函数，使得接收信号的熵$h(Y)$最大。

高斯加性信道的信道容量

- **单符号高斯加性噪声信道的信道容量**

单符号高斯加性信道的输入和输出都是一维连续随机变量，而加入信道的噪声是加性高斯噪声。

设信道叠加的噪声 N 是均值为零，方差为 σ^2 的一维高斯噪声，则噪声的差熵为 $h(N)=\frac{1}{2}\log(2\pi e\sigma^2)$

因此单符号高斯加性噪声信道的信道容量为

$$C=\max_{p(x)}[h(Y)-h(N)]=\max_{p(x)}[h(Y)-\frac{1}{2}\log(2\pi e\sigma^2)]$$

上式中只有 $h(Y)$ 与输入信号的概率密度函数$p(x)$有关。根据最大差熵定理，当信道输出信号的平均功率限制在P_0时，Y 服从高斯分布时，其差熵 $h(Y)$ 达到最大。（假设不传送直流，均值为零）

高斯加性信道的信道容量

- **单符号高斯加性噪声信道的信道容量**

$$C=\max_{p(x)}[h(Y)-h(N)]=\max_{p(x)}[h(Y)-\frac{1}{2}\log(2\pi e\sigma^2)]$$

上式中只有 $h(Y)$ 与输入信号的概率密度函数$p(x)$有关。根据最大差熵定理，当信道输出信号的平均功率限制在P_0时，Y 服从高斯分布时，其差熵 $h(Y)$ 达到最大。（假设不传送直流，均值为零）

输出信号Y是输入信号 X 和噪声信号N的线性叠加，已知噪声是均值为零，方差为 σ^2 的高斯变量，而且与 X 统计独立。

那么，要使Y服从平均功率为P_0的高斯变量，必须要求X是均值为零，平均功率为 $P_0-\sigma^2$ 的高斯变量

- 根据概率论的有关知识，统计独立的正态分布的随机变量之和，仍服从正态分布，且和变量的方差是各变量的方差之和。

高斯加性信道的信道容量

- **单符号高斯加性噪声信道的信道容量**

$$C=\max_{p(x)}[h(Y)-h(N)]=\max_{p(x)}[h(Y)-\frac{1}{2}\log(2\pi e\sigma^2)]$$

那么，要使Y服从平均功率为P_0的高斯变量，必须要求X是均值为零，平均功率为 $P_0-\sigma^2$ 的高斯变量

因此，得到平均功率受限的单符号高斯加性信道的信道容量为:

$$C=\max_{p(x)}[h(Y)-h(N)]=\frac{1}{2}\log(2\pi eP_0)-\frac{1}{2}\log(2\pi e\sigma^2)=\frac{1}{2}\log\frac{P_0}{\sigma^2}$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{\sigma^2+P_X}{\sigma^2}=\frac{1}{2}\log(1+\frac{P_X}{\sigma^2})$$

$$=\frac{1}{2}\log(1+\frac{P_X}{P_N})$$ 信噪功率比

可见，单符号高斯加性信道的信道容量值取决于信道的信噪功率比 $\frac{P_X}{P_N}$ 。

高斯加性信道的信道容量

- **多维高斯加性噪声信道的信道容量**

多维高斯加性信道的输入和输出都是连续随机变量序列，而加入信道的噪声是加性高斯噪声序列。

输入 $\vec{X} = X_1X_2\cdots X_N$，输出 $\vec{Y} = Y_1Y_2\cdots Y_N$，高斯噪声序列 $\vec{N} = N_1N_2\cdots N_N$，且有 $\vec{Y} = \vec{X} + \vec{N}$；

因此，得到平均功率受限的多维高斯加性信道的信道容量为:

$$C = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\log(1+\frac{P_{Xi}}{P_{Ni}})$$

当且仅当输入随机矢量中各分量统计独立，并且服从高斯分布时达到此信道容量。

高斯加性信道的信道容量

- **限带高斯白噪声加性波形信道（AWGN）★**
  - 输入和输出信号是随机过程$\{x(t)\}$和$\{y(t)\}$；
  - 加入信道的噪声是加性高斯白噪声$\{n(t)\}$(其均值为零，单边功率谱密度为N_0)
  - 输出信号满足$\{y(t)\}=\{x(t)\}+\{n(t)\}$

设信道的带宽为W（即$|f|<W$），此时信道的输入、输出信号、和噪声都是限频的随机过程。由取样定理，可把一个时间连续的波形信道变换成时间离散的多维连续信道来处理。

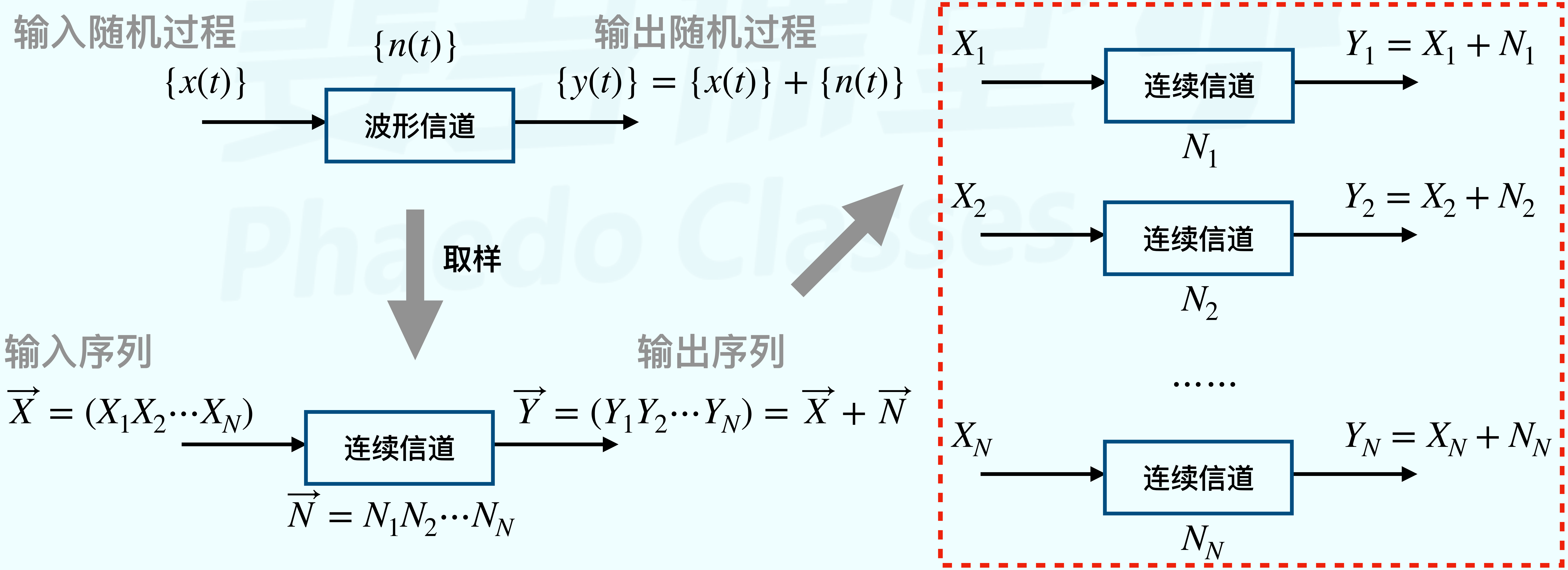
因此，通过取样，我们可以将限频的高斯白噪声过程分解成 $N=2WT$ 维统计独立的随机序列。

易证得信道为**多维无记忆高斯加性信道**，因此信道可等效成N**个独立的并联高斯加性信道**。

高斯加性信道的信道容量

- **限带高斯白噪声加性波形信道（AWGN）★**

易证得信道为**多维无记忆高斯加性信道**，因此信道可等效成**N个独立的并联高斯加性信道**。



高斯加性信道的信道容量

- 限带高斯白噪声加性波形信道（AWGN）★

信道的带宽满足 $|f| < W$ ，取样频率为 $2W$，即每秒传送 $2W$ 个样值，则 T 时间内有 $2TW$ 个样值；

假设信号的平均功率受限为 P_S ，噪声的单边功率谱密度为 N_0 ；

设限时为 $[0, T]$，则每个信号样本值的平均功率为 $P_{Xi} = \frac{P_S T}{N} = \frac{P_S T}{2WT} = \frac{P_S}{2W}$

每个噪声样本值的平均功率为 $P_{Ni} = \frac{P_N T}{N} = \frac{N_0 WT}{2WT} = \frac{N_0}{2}$

因此，在限时 $[0, T]$ 内，限带高斯白噪声加性连续信道的信道容量为

$$C = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \log(1 + \frac{P_{Xi}}{P_{Ni}}) = \frac{N}{2}\log(1 + \frac{P_S/2W}{N_0/2}) = \frac{N}{2}\log(1 + \frac{P_S}{N_0 W}) = WT\log(1 + \frac{P_S}{N_0 W})$$

香农公式

因此，在限时$[0, T]$ 内，限带高斯白噪声加性连续信道的信道容量为

$$C = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\log(1+\frac{P_{Xi}}{P_{Ni}}) = \frac{N}{2}\log(1+\frac{P_S/2W}{N_0/2}) = \frac{N}{2}\log(1+\frac{P_S}{N_0 W}) = WT\log(1+\frac{P_S}{N_0 W})$$

可求得限带高斯白噪声加性信道单位时间内的信道容量为

$$\boxed{C_t = \lim_{T\to\infty}\frac{C}{T} = W\log(1+\frac{P_S}{N_0 W})\ bit/\sec}$$

香农公式

在香农公式中，P_S 是信号的平均功率，$N_0 W$ 是高斯白噪声在带宽W内的平均功率(其单边功率谱密度为N_0)，$P_S/N_0 W$ 为信噪功率比 。可见，**信道容量与信噪功率比和带宽有关。**

关于香农公式的说明

可求得限带高斯白噪声加性信道单位时间内的信道容量为

$$\boxed{C_t = \lim_{T\to\infty} \frac{C}{T} = W\log(1+\frac{P_S}{N_0 W})\ bit/\sec}$$

香农公式

- **香农公式适用于加性高斯白噪声信道。**只有输入信号为功率受限的高斯白噪声信号时，其信道容量才能达到该极限值。
- 高斯白噪声信道是平均功率受限时的最差信道，所以**香农公式给出了非高斯信道容量的下限**而实际上很多是非高斯信道。
- 香农公式给出了理想通信系统的极限信息传输率。

关于香农公式的讨论

$$C_t = \lim_{T\to\infty}\frac{C}{T} = W\log(1+\frac{P_S}{N_0 W})\ bit/\sec$$

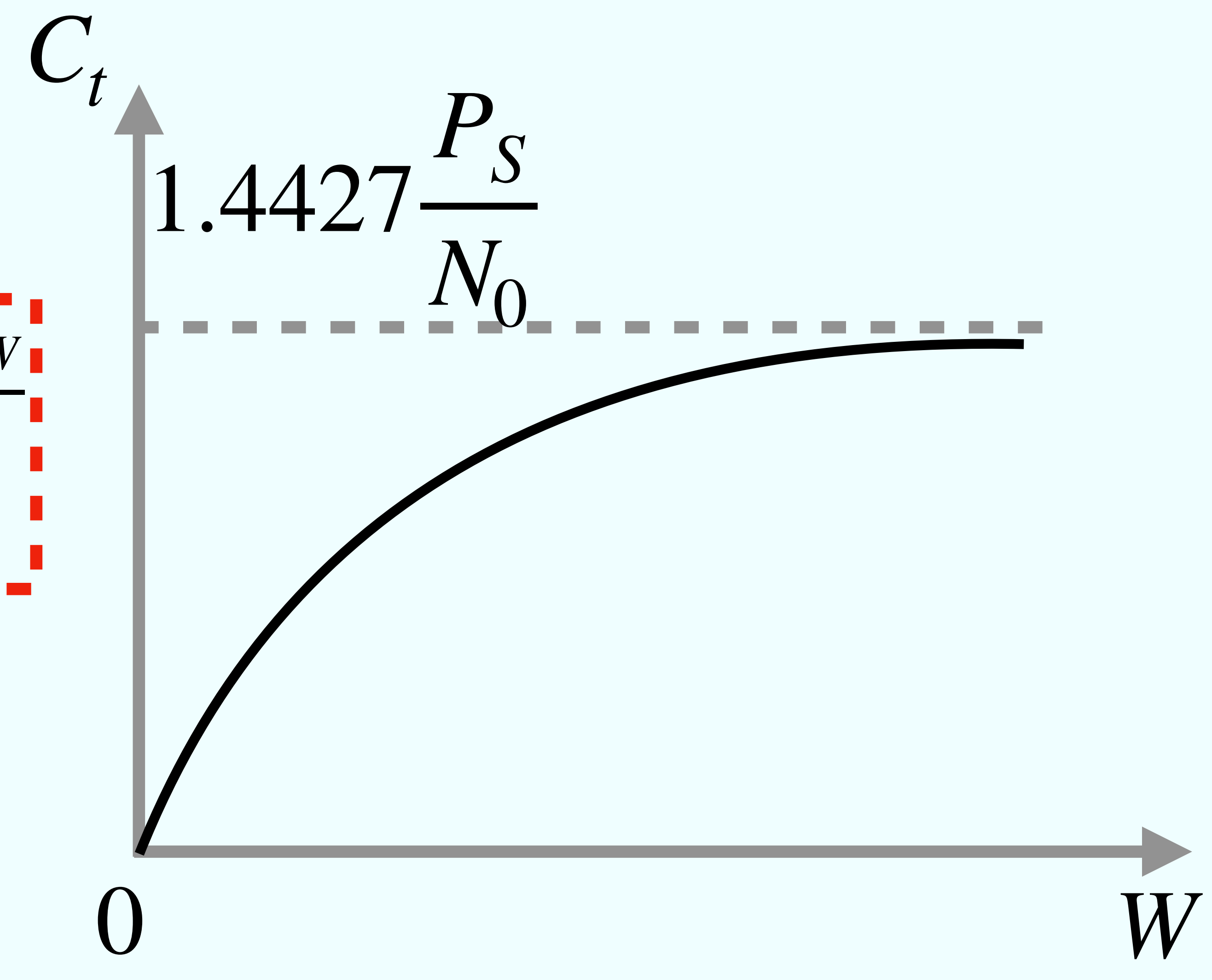
- 提高信噪比，就可以增加信道的信道容量。
- 当噪声功率趋于零时，信道容量C_t趋近于无穷大，即无干扰连续信道的信道容量为无穷大。
- 增加信道的带宽（即增加信号的带宽），并不能无限制的增大信道容量。

$$\lim_{W\to\infty} C_t = \lim_{W\to\infty} W\log(1+\frac{P_S}{N_0 W}) = \lim_{W\to\infty}\frac{P_S}{N_0}\frac{N_0 W}{P_S}\log(1+\frac{P_S}{N_0 W})$$

$$= \frac{P_S}{N_0\ln 2}\lim_{W\to\infty}\frac{N_0 W}{P_S}\ln(1+\frac{P_S}{N_0 W}) = \frac{P_S}{N_0}\log e\ \boxed{\lim_{W\to\infty}\ln(1+\frac{P_S}{N_0 W})^{\frac{N_0 W}{P_S}}}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$= \log e\frac{P_S}{N_0} \approx 1.4427\frac{P_S}{N_0}$$ 香农极限



关于香农公式的讨论

$$C_t = \lim_{T\to\infty} \frac{C}{T} = W\log(1+\frac{P_S}{N_0 W})\ bit/\sec$$

➢ 信道容量一定时，带宽W、传输时间T和信噪功率比 P_S/P_N 三者之间可以互换。

香农公式把信道的统计参量（信道容量）和实际物理量（带宽、传输时间和信噪功率比）联系起来，它表明一个信道可靠传输的最大信息量完全由W、T和 P_S/P_N 所确定。 一旦这三个物理量给定，理想通信系统的极限信息传输率就确定了。

- 若传输时间确定，则扩展信道的带宽可以降低对信噪比的要求**（扩频通信）**；反之，带宽变窄，就要通过增加信噪功率比进行补偿，即带宽和信噪功率比互换可保持信息传输率恒定。
- 若信噪功率比确定，则扩展信道的带宽可以缩短传输时间；或者可以通过更长的传输时间来节省带宽**（窄带通信）**，即频带和通信时间之间可以互换。
- 若带宽确定，则增加通信时间可以降低对信噪功率比的要求。（或者说是改善信噪功率比）

补充：信噪比的计算

信噪功率比

输入功率与噪声功率的比值，即 $\frac{P_S}{P_N}$。

有时我们也考虑信道输出信号功率与噪声功率的比值，即 $\frac{P_S+P_N}{P_N}=1+\frac{P_S}{P_N}$。

信噪比（SNR，Signal-Noise Ratio）

$SNR=10\lg\frac{P_S}{P_N}$ 或 $SNR=10\lg(1+\frac{P_S}{P_N})$ 信噪比与信噪功率比的对数有关，单位是dB。.

关于放大比例的单位

贝尔：B　　$B \leftrightarrow \lg\frac{P_S}{P_N}\ or\ \lg(1+\frac{P_S}{P_N})$

分贝：dB　　$dB \leftrightarrow 10\lg\frac{P_S}{P_N}\ or\ 10\lg(1+\frac{P_S}{P_N})$

$1dB=10B$

例题4-1 设某一个信号的信息率为5.6kbps，噪声功率谱为$N_0 = 5 \times 10^{-6}\ mW/Hz$，在带限$B = 4kHz$的高斯信道中传输，试求无差错传输需要的最小限输入功率是多少?

解析4-1 根据香农公式

$$C_t = W\log(1 + \frac{P_S}{N_0 W}) = W\log(1 + \frac{P_S}{P_N})\ bit/s$$

代入题目数据，$5.6 \times 10^3 = 4000\log(1 + \frac{P_S}{5 \times 10^6 \times 4000})$

解得最小输入功率为

$$P_S = 3.28 \times 10^{-2} mV$$

例题4-2 在图片传输中，每帧约2.25×10^6个像素，为了能很好的重现图像，需分16个亮度电平，并假设亮度电平等概率分布，试计算每秒钟传送30帧图像所需信道的带宽（信噪比约为30dB）。

解析4-2 每帧图像所传输的信息量为 $2.25\times10^6\times\log 16 = 9\times10^6\ bit/$帧；

因此每秒钟传输30帧图像，所传输的信息量为 $C_t = 9\times10^6\times30 = 2.7\times10^8\ bit/s$

信道的信噪比约为30dB，即 $10\lg\dfrac{P_S}{P_N} = 30$，解得 $\dfrac{P_S}{P_N} = 1000$；

根据香农公式，有

$$C_t = W\log(1+\frac{P_S}{P_N}) = W\log(1+1000) = 2.7\times10^8\ bit/s$$

因此信道的带宽为$W = \dfrac{2.7\times10^8}{\log 1001} \approx 2.71\times10^7 Hz$

例题4-3 设在平均功率受限的高斯加性波形信道中，信道的带宽为3kHz，又设信噪比为(信号功率+噪声功率)/噪声功率=10dB

（1）试计算该信道传送的单位时间最大信息率；

（2）若功率信噪比降为5dB，要达到相同的最大信息传输率，信道的带宽应该是多少?

解析4-3 首先要注意本题中的信噪比是输出信号功率与噪声功率的比值，即 $SNR = 10\lg(1+\frac{P_S}{P_N})$；

（1）根据已知条件：(信号功率+噪声功率)/噪声功率=10dB，我们有 $10\lg\frac{P_S+P_N}{P_N} = 10$ ；

所以可求得输入信号与噪声信号的功率比为 $\frac{P_S}{P_N} = 9$；

因此根据香农公式，该信道传送的单位时间最大信息率，即单位时间信道容量为；

$$C_t = W\log(1+\frac{P_S}{P_N}) = W\log 10 = 3\times 10^3 \log 10 = 9.96\times 10^3\ bit/\sec$$

（2）若功率信噪比降为5dB，即 $10\lg(1+\frac{P_S}{P_N}) = 5$ ，所以 $1+\frac{P_S}{P_N} = \sqrt{10}$

若想达到相同最大信息率，需满足 $C_t = W_1\log(1+\frac{P_S}{P_N}) = W_1\log\sqrt{10} = \frac{W_1}{2}\log 10 = W\log 10$

因此信道的带宽应该为原带宽的两倍，即 $W_1 = 2W = 6kHz$