

第 2 章 矩阵及其运算

§2.1 一些特殊形状的矩阵 §2.2 矩阵的基本运算

(基础部分)

一、填空题

1. 矩阵 $A=(a_{ij})_{m \times n}$, $B=(b_{ij})_{m \times n}$, $A=B$, 当且仅当_____.

2.
$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \underline{\hspace{10em}}.$$

3. 设矩阵 $A=(a_{ij})_{m \times n}$, $B=(b_{ij})_{n \times m}$, 则 $tr(AB)$ _____;

$tr(BA)=$ _____.

二、计算题

1. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $2A+3B$, $AB-BA$.

班级:

学号:

姓名:

2. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

计算下列乘积, 并观察计算结果和矩阵 A 的关系.

(1) AP_1, P_1A ; (2) AP_2, P_2A ; (3) AP_3, P_3A .

3. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 AB^T, B^TA 及 $(B^TA)^6$.

班级:

学号:

姓名:

4. (1) 求 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

(2) 已知

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

求 AB .

5. 设 $f(x)=x^2-x+1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 验证 $f(A) = \begin{pmatrix} f(1) & 0 & 0 \\ 0 & f(2) & 0 \\ 0 & 0 & f(3) \end{pmatrix}$.

班级:

学号:

姓名:

6. 计算 $(x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$

7. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

验证: $AB = AC$ 但 $B \neq C$.

§2.1 一些特殊形状的矩阵 §2.2 矩阵的基本运算
(提高部分)

一、设 A, B 都是对称矩阵, 证明 AB 为对称阵的充要条件是 $AB=BA$.

二、设 A, B, C 为三个 n 阶方阵, 证明 $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(BCA) = \text{tr}(CAB)$.

§2.3 分块矩阵及运算

(基础部分)

一、填空题

1. 将矩阵 A 用若干条横、竖分隔线分成若干个小矩阵，每一个小矩阵称为 A 的_____，以_____为元素的矩阵称为**分块矩阵**.
2. 设 $A_{m \times n}$ 的分块矩阵为

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix},$$

则 $A^T =$ _____.

二、画出如下矩阵分隔线，使每个矩阵分成四块保证运算有意义.

(提示: 相乘的两个矩阵, 左矩阵列的分块和右矩阵行的分块一致; 左矩阵行的分块和乘积矩阵行的分块一致; 右矩阵列的分块和乘积矩阵列的分块一致!)

1)

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

2)

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

班级:

学号:

姓名:

三、已知

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

利用分块矩阵乘法求 AB .

§2.4 逆矩阵

(基础部分)

一、填空题

1. 若 n 阶方阵 A 、 B 满足 $AB=E$, 其中 E 是单位阵, 那么 $A^{-1}=\underline{\hspace{2cm}}$.

2. 可逆矩阵的标准形矩阵是 .

3. 等价的矩阵有 (填“相同”或“不同”)标准形.

4. 设 $A = \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}$, $(a_1 a_2 \dots a_n \neq 0)$, 求 $A^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、选择题

1. 设 A 为 n 阶可逆矩阵, 则下面不正确的是 []

(A) A 必为方阵;

(B) $R(A) = R(A^T) = n$

(C) $Ax=b$ 有唯一解;

(D) $AA^T = A^T A = E$

2. 设 A, B 为 n 阶方阵, 满足 $AB=0$, 则 [].

(A) $A=B=0$;

(B) $A+B=0$

(C) 当 A 可逆时, $B=0$;

(D) $A \cdot B = 0$

三、计算题

1. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

班级:

学号:

姓名:

2. 已知 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, 解矩阵方程 $AX = B$.

3. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

班级:

学号:

姓名:

4. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 解矩阵方程 $(A - 2E)X = A$.

5. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, 求解矩阵方程 $XA = B$.

6. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, 且 $AB = A + B$, 求 B .

§2.3 分块矩阵及运算 §2.4 逆矩阵

(提高部分)

一、填空题

1. 设 A, B 均可逆, 则

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}. \quad \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, 则 $A^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、计算题

已知 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, A = P\Lambda P^{-1}$, 求 $\varphi(A) = A^3 + 5A^2 + E$.

班级:

学号:

姓名:

三. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 且 $AB+E=A^2+B$, 求 B .

四. 设方阵多项式 $X^2+X-2E=0$, 证明 X 可逆, 并求 X^{-1} .

班级：

学号：

姓名：

五. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, 求一个可逆矩阵 P , 使 PA 为行最简形.

§2.5 方阵的行列式

(基础部分)

一、填空题

1. 行列式
$$\begin{vmatrix} 0 & & & a_{1n} \\ & \ddots & & \\ & & a_{2,n-1} & \\ a_{n1} & & & 0 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1} .$$

2. 若对于 n 阶行列式 D 的元素 a_{ij} 及其代数余子式 A_{ij} , 总有 $\sum_{k=1}^n a_{ki} A_{kj} = 0$ ($i=1, 2, \dots, n$; $j=1, 2, \dots, n$), 则 $D = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 一个含有 n 个方程, n 个未知数的齐次线性方程组, 若其系数行列式 $D \underline{\hspace{2cm}}$, 则该方程组只有零解. (填 “=0” 或者 “ $\neq 0$ ”)

4.
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & x & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$
 中元素 x 的代数余子式为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

5. 若 A 是 5 阶方阵, 且 $|A| = 1$, $|-2A| = \underline{\hspace{2cm}}$.

6. 若 A 是 3 阶方阵, 且 $|A| = 5$, 则 $|A^2| = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 设 A, B 均为 n 阶方阵, $|A| = 2, |B| = -3$, 则 $|2A^* B^{-1}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 设 A 是 n 阶方阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, $|A| = 5$, 则 $|5(A^*)^{-1}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、选择题

1. 设 A, B 为 n 阶方阵, 则 [$\hspace{2cm}$].

(A) $(AB)^k = A^k B^k$;

(B) $||B|A| = |B||A|$;

(C) $B^2 - A^2 = (B-A)(B+A)$;

(D) $|AB| = |BA|$.

2. 设 A, B 为 n 阶方阵, 满足关系 $AB=0$, 则必有 [$\hspace{2cm}$].

班级:

学号:

姓名:

(A) $A=B=0$;

(B) $A+B=0$;

(C) $|A|=0$ 或 $|B|=0$;

(D) $|A|+|B|=0$

3. $D_1 = \begin{vmatrix} 3a_1 & & 0 \\ & 3a_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 3a_n \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & a_n \end{vmatrix},$

其中 $a_1 a_2 \dots a_n \neq 0$, 则 [].

(A) $D_1=D_2$; (B) $D_1 = \frac{1}{3n} D_2$

(C) $D_1=3^n D_2$; (D) $D_1=-3^n D_2$

4. 若系数矩阵为方阵的齐次线性方程组仅有零解, 则它的系数行列式 D [].

(A) 必为 0;

(B) 必不为 0;

(C) 必为 1;

(D) 可取任何值.

5. 若某 n 阶行列式的递推公式为 $D_n=D_{n-1}+(-1)^n a^n$, 则 $D_n=$ [].

(A) $D_{n-2}+2(-1)^n a^n$;

(B) $D_{n-2}+(-1)^{n-1} a^{n-1}$;

(C) $D_{n-2}+(-1)^{n-1} a^{n-1}+(-1)^n a^n$;

(D) $D_{n-2}+(-1)^n a^n$;

三、计算下列行列式

1. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 301 \\ 1 & 2 & 102 \\ 2 & 4 & 199 \end{vmatrix}$

班级:

学号:

姓名:

$$2. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 6 & 10 \\ 4 & 1 & 10 & 20 \end{vmatrix}$$

$$3. \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$4. D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

班级:

学号:

姓名:

5. $D_n = \begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{vmatrix}$, 其中对角线上元素都是 a , 未写出的元素都是 0.

6. $D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \quad (a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0)$

$$7. D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

四、证明题

1. 证明如下命题:

(i) 如果 A 可逆, 则 $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

(ii) 如果 A 为 n 阶矩阵, 则 $\det(rA) = r^n \det A$.

(iii) 如果 A, B 为同阶方阵, 则 $\det(AB) = \det(BA)$.

(iv) 若 A, P 均为 n 阶方阵, P 可逆, 则 $\det(PAP^{-1}) = \det A$.

(v) 假设 U 为方阵, 满足 $U^T U = E$, 则 $\det(U) = 1$ 或 -1 .

班级:

学号:

姓名:

2. 设 A 为 n 阶可逆矩阵, 证明 $|A^*| = |A|^{n-1}$

§2.5 方阵的行列式

(提高部分)

一、计算下列行列式的值

$$1. \quad D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}, \text{ 其中 } a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$$

$$2. \quad D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}, \text{ 求 } c_{11} + c_{12} + \cdots + c_{1n}.$$
[illegible]

班级:

学号:

姓名:

三、已知矩阵 A 的伴随阵 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, 且 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$, 求 B .

四、证明题:

$$1. D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix} = n!(n-1)! \cdots 3!2!$$

(提示: 先将每行公因子提到行列式符号前面, 再按范德蒙行列式结果计算).

班级:

学号:

姓名:

$$2. D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x + a_1 \end{vmatrix} = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

3. (行列式的等价定义)

n 个不同数所有排列具有 $n!$ 种. 排列中各元素之间由小到大的顺序为自然顺序, 否则称为一个逆序. 一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数. 用 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 表示 1 到 n 的自然数的一个排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数.

验证: 二、三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 j_2)} (-1)^{\tau(j_1 j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 j_2 j_3)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$$

其中, 求和是对全排列种数求和, 分别有 $2!=2$ 及 $3!=6$ 项.

证明: n 阶行列式具有如下逆序数表示公式

班级:

学号:

姓名:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_n)} a_{1,j_1} \cdots a_{n,j_n}$$

其中, $\tau(i_1, \cdots, i_n)$ 表示列标排列的逆序数, 右端为取自不同行不同列元素乘积的代数

和, 符号由列标排列的逆序数 $\tau(i_1, \cdots, i_n)$ 确定.

类似地, 行列式还可表为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1 \cdots i_n)} (-1)^{\tau(i_1 \cdots i_n)} a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n}$$

第 2 章 自测题

(基础部分)

一、填空题

1. 设矩阵 $A=(a_{ij})_{m \times n}$, $B=(b_{ij})_{p \times q}$, 则矩阵 A 、 B 可作加法的条件是_____, 可作乘法运算的条件是_____.

2. 若 $AB=E$ (单位阵)且 $|A|=2$, 则 $|B|$ =_____.

3. 设 A 是 n 阶方阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, 则 $AA^*=A^*A$ =_____.

4. 当 k =_____时, 矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & k \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 不可逆.

5. 设 A 为 3 阶方阵, 且 $|A|=2$, 则 $|3A^{-1}-2A^*|$ =_____. $|3A-(A^*)^*|$ =_____.

6. 若将行列式 D 的两行(或两列)互换 n 次, 那么当 n 为_____时, D 的值变号; 当 n 为_____时, D 的值不变.

7. 设 $D_1=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, $D_2=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, 则 $D=\begin{vmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{vmatrix}$ =_____.

8. 若行列式每行元素之和都为零, 则此行列式的值为_____.

9. 行列式 $\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$ =_____.

二、选择题

1. 设 A, B 为 n 阶矩阵, 则必有 [].

(A) $|A+B| = |A| + |B|$; (B) $AB=BA$;

(C) $|AB| = |BA|$; (D) $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$

2. 设 A, B 均为 n 阶方阵, 下列结论中, 正确的是 [].

(A) 若 A, B 均可逆, 则 $A+B$ 可逆;

(B) 若 A, B 均可逆, 则 AB 可逆;

(C) 若 $A+B$ 可逆, 则 $A-B$ 可逆;

(D) 若 $A+B$ 可逆, 则 A, B 可逆;

3. 设行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, $D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, 则_____.

(A) $D=D_1$; (B) $D=-D_1$; (C) $D_1=(-1)^n D$; (D) $D_1=|D|$

4. 方程个数和未知量个数相等的线性方程组中, 下列说法正确的题_____.

(A) 系数行列式 $D \neq 0$, 方程组一定有解;

(B) 系数行列式 $D \neq 0$, 方程组一定无解;

(C) 系数行列式 $D=0$, 方程组一定无解;

(D) 方程组有解, 则系数行列式一定不等于零;

三、计算题

1. 判断矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求其逆矩阵.

班级:

学号:

姓名:

$$2. \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$3. \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 6 & -4 \\ 2 & 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$4. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & & & & \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix} =$$

班级:

学号:

姓名:

$$5. \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & d & c & b \\ c & d & a & b \\ c & b & a & d \end{vmatrix} =$$

四、解答下列各题

1. 当 λ, μ 满足什么条件时, 齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解.

班级:

学号:

姓名:

2. 设 A 为 3 阶矩阵, $\det A = \frac{1}{2}$, 求 $\det((2A)^{-1} - 5A^*)$.

3. 设 n 阶矩阵 A 可逆, 证明: A^* 也可逆, 且 $(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|} A$.

班级:

学号:

姓名:

4. 设 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵为 A^* , 证明:

(i) 若 A 可逆, 则 A^* 也可逆, 且 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

(ii) 若 $|A| = 0$, 则 $|A^*| = 0$.

(iii) $|A^*| = |A|^{n-1}$.

第 2 章 自测题

(提高部分)

一、填空

1. 设 A 为 5 阶方阵, 且 $|A^*| = 16$, 则 $|A| =$ _____.

2. 设 A 为 3 阶方阵, 且 $|A| = 4$, 则 $|2A^* - 6A^{-1}| =$ _____.

二、选择题

1. 设 A, B, C 为 n 阶方阵, 且 $ABC = E$, 则必有 [].

(A) $ACB = E$; (B) $CBA = E$; (C) $BAC = E$; (D) $BCA = E$.

2. 设 A, B 都是 n 阶可逆矩阵, 则 $\left| -2 \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \right|$ 等于 [].

(A) $(-2)^{2n} |A| |B|^{-1}$; (B) $(-2)^n |A| |B|^{-1}$;

(C) $-2 |A^T| |B|$; (D) $-2 |A| |B|^{-1}$.

3. 如果 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = M \neq 0$, 而 $D_1 = \begin{vmatrix} 3a_{11} & 4a_{11} - a_{12} & -a_{13} \\ 3a_{21} & 4a_{21} - a_{22} & -a_{23} \\ 3a_{31} & 4a_{31} - a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix}$, 则

$D_1 =$ [].

(A) $-3M$; (B) $3M$; (C) $12M$; (D) $-12M$.

4. $\begin{vmatrix} 99 & 100 & 203 \\ 202 & 200 & 397 \\ 298 & 300 & 601 \end{vmatrix} =$ [].

(A) 2000; (B) -2000 ; (C) 2300; (D) -2300

班级:

学号:

姓名:

三、计算

设 4 阶矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 又矩阵 X 满足方程

$X(E - C^{-1}B)^T C^T = E$, 化简方程并求 X .

四、设方阵 A 满足 $A^3 - A^2 + 2A - E = 0$, 证明 A 及 $E - A$ 均可逆, 并求 A^{-1} 和 $(E - A)^{-1}$.

班级:

学号:

姓名:

五、设 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$

(1) A_{11} 可逆, 求 X 与 Y 使

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ X & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & Y \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

其中 $S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ 称为 A_{11} 的舒尔补; 类似地, 若 A_{22} 可逆, 则 $A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ 称为 A_{22} 的舒尔补.

(2) 若 A 可逆且 A_{11} 可逆, 则 A_{11} 的舒尔补 S 也可逆.

班级:

学号:

姓名:

六、设 A 是 $m \times n$ 矩阵

(1) 设 $CA = E_n$, 证明 $Ax = 0$ 仅有零解, 且 A 的列数不大于行数, 即 $n \leq m$.

(2) 设 $AD = E_m$, 证明对任意 m 维列向量 b , 方程 $Ax = b$ 有解, 且 A 的行数不大于列数, 即 $m \leq n$.

(3) 若有 $n \times m$ 矩阵 C 和 D 满足 $CA = E_n$ 且 $AD = E_m$, 则 A 是方阵.