第六章内容梳理

一、元素法的一般步骤：

（1）根据问题的具体情况，选取一个变量例如 x 为积分变量，并确定它的变化区间 $[a,b]$；

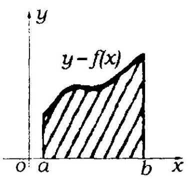
（2）将区间 $[a,b]$ 任意分成若干个小区间，取其中任一小区间并记为 $[x,x+dx]$，求出相应于这小区间的部分量 ΔU 的近似值． 如果 ΔU 能近似地表示为 $[a,b]$ 上的一个连续函数在 x 处的值 $f(x)$ 与 dx 的乘积，就把 $f(x)dx$ 称为量 U 的元素且记作 dU，即 $dU=f(x)dx$；

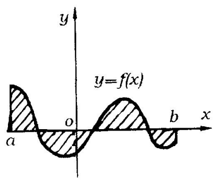
（3）以所求量 U 的元素 $f(x)dx$ 为被积表达式，在区间 $[a,b]$ 上作定积分，得 $U=\int_a^b f(x)dx$，即为所求量 U 的积分表达式.

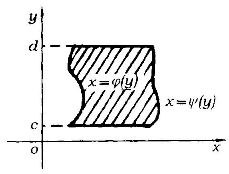
二、几何应用

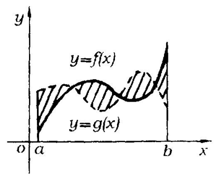
（一）平面图形的面积

1．直角坐标系中图形的面积（几个常用公式）









$S=\int_a^b f(x)dx$ $\qquad S=\int_a^b |f(x)|dx$ $\qquad S=\int_c^d (\psi(y)-\varphi(y))\,dy$ $\qquad S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$

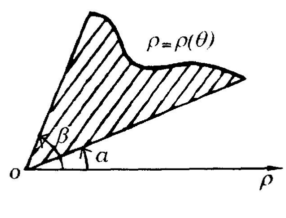
注意：选择合适的积分变量，使积分计算简单.

2．边界曲线为参数方程的图形的面积

$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$， 可以先写出直角坐标形式，再进行变量代换.

3．极坐标下平面图形的面积

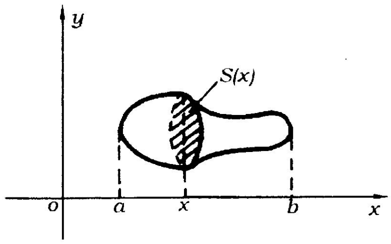
$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)d\theta$$



（二）立体体积

1．已知平行截面面积的立体体积（了解）

$$V=\int_a^b s(x)dx$$



2 旋转体体积

$y=f(x)\ (a\le x\le b)$与 $x=a, x=b$以及 x轴所围图形：

绕 x轴旋转所得旋转体体积， $V_x=\int_a^b \pi[f(x)]^2\,\mathrm{d}x$

绕 y轴旋转所得旋转体体积， $V_y=\int_a^b 2\pi x f(x)\,\mathrm{d}x$

$x=\phi(y)\ (c\le y\le d)$与 $y=c \backslash y=d$以及 y轴所围平面图形

绕 y 轴旋转所得旋转体体积, $V_y=\int_c^d \pi[\varphi(y)]^2\mathrm{d}y$

绕 x轴旋转所得旋转体体积， $V_x=\int_c^d 2\pi y\varphi(y)\,\mathrm{d}y$

（三）平面曲线的弧长

1．直角坐标的情形

设曲线弧由 $y=f(x)\,(a\le x\le b)$ 给出， $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有一阶连续导数，则曲线弧长

$$s=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx\text{；}$$

2．参数方程的情形

设曲线弧由 $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$ $(\alpha\le t\le\beta)$，其中 $\varphi(t),\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有连续的导数，则弧长

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt\text{；}$$

3．极坐标的情形

设曲线弧方程为 $\rho=\rho(\theta)$ $(\alpha\le\theta\le\beta)$，则 $s=\int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\theta)+[\rho'(\theta)]^2}d\theta$.

三、定积分的物理应用

1．变力做功：

步骤：（1）建立直角坐标系；（2）选取积分变量，找出范围。（3）在[x, x+dx]上找出功元素 $dw = f(x)dx$；（4）计算定积分.

2．水压力：

物理原理：压强 $P = \rho gh$ ，压力 $F = PA$ （ρ 为液体密度, A 为面积）

方法：元素法