

第二章 矩阵及其运算习题答案

§2.1 §2.2(基础部分)

一、 填空题

1. $a_{ij} = b_{ij}, \quad i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n$

2.
$$\begin{bmatrix} \lambda^n & & \\ & \lambda^n & \\ & & \lambda^n \end{bmatrix}$$

3. $tr(AB) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki}, \quad tr(BA) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m b_{ik}a_{ki}$

二、计算题

1. $2A + 3B = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 10 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 3 \end{bmatrix}, \quad AB - BA = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -6 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$

2. $AP_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix}, \quad P_1 A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$

$AP_2 = \begin{bmatrix} k & 2 & 3 \\ 4k & 5 & 6 \\ 7k & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad P_2 A = \begin{bmatrix} k & 2k & 3k \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$

$AP_3 = \begin{bmatrix} 1+2k & 2 & 3 \\ 4+5k & 5 & 6 \\ 7+8k & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad P_3 A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4+k & 5+2k & 6+3k \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$

3. $AB^T = 6$

$B^T A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

4. (1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(2) $AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -6 \end{bmatrix}$

5. 略

6. $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$

$$7. AB = AC = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -2 & 14 \end{bmatrix}$$

§2.1§2.2(提高部分)

一、

证明: $\because A, B$ 对称, $\therefore A^T = A, B^T = B$

$$\begin{aligned} AB \text{ 对称} &\Leftrightarrow AB = (AB)^T \\ &\Leftrightarrow AB = B^T A^T \\ &\Leftrightarrow AB = BA \end{aligned}$$

二、证明:

$$\because \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

$$\therefore \text{tr}(ABC) = \text{tr}(A(BC)) = \text{tr}((BC)A) = \text{tr}(BCA) = \text{tr}(B(CA)) = \text{tr}((CA)B) = \text{tr}(CAB)$$

$$\therefore \text{tr}(ABC) = \text{tr}(BCA) = \text{tr}(CAB)$$

§2.3(基础部分)

一、填空题

1. 子矩阵(或子块), 子矩阵(或子块).

$$2. A^T = \begin{bmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{bmatrix}$$

二、略

$$3. AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -6 \end{bmatrix}, \text{注: 此题重点在于考察分块矩阵乘法, 注意分块方式!}$$

§2.4(基础部分)

一、填空题

1. B ; 2. E ; 3. 相同

二、选择题

1.D; 2. C

三、计算题

$$1. A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2. X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 2 \\ -\frac{8}{3} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$3. A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}$$

$$4. A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 4 \\ 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -3 \end{bmatrix}$$

$$5. X = (A - 2E)^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$6. X = BA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$7. B = (A - E)^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

§2.3§2.4 (提高部分)

一、 填空题

$$1. \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}$$

$$2. \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 1 \\ -1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

二、计算题

$$1. X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{37}{7} & -\frac{8}{7} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{34}{7} & -\frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{38}{7} & -\frac{6}{7} \end{bmatrix}$$

$$2. A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \varphi(A) = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 24 & 29 \end{bmatrix}$$

$$\text{三、 } B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

注：

$$\text{方法 1} \quad B = (A - E)^{-1}(A^2 - E)$$

$$\text{方法 2} \quad \text{注意到 } A^2 - E = (A - E)(A + E) = (A + E)(A - E), \text{ 从而有}$$

$$B = (A - E)^{-1}(A^2 - E) = (A - E)^{-1}(A - E)(A + E) = A + E$$

$$\text{四、证明: } \because X \left(\frac{X + E}{2} \right) = E$$

$$\therefore X \text{ 可逆, 且 } X^{-1} = \frac{X + E}{2}$$

五、解：

$$\because (A, E) \xrightarrow{r} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{6}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} = (PA, P)$$

$$\therefore P = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \\ 1 & -\frac{6}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

§2.5 方阵的行列式

(基础部分)

一、填空题

$$1. (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} ; \quad 2. 0 ; \quad 3. \neq 0 ; \quad 4. -10 ; \quad 5. -32 ; \quad 6. 25 ; \quad 7. -\frac{2^{2n-1}}{3} ;$$

$$8. 5 ; \quad 9. -16$$

二、选择题

1. D ; 2. C ; 3. C ; 4. B (订正：题目中齐次线性方程组系数矩阵为方阵) ; 5. C

三、计算题

1. -25 ; 2. -1 ; 3. x^4 ; 4. $[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$; 5. $a^{n-2}(a^2-1)$;

6. $(a_0 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i})a_1 a_2 \cdots a_n$; 7. $n!$.

四、证明题 略

§2.5 方阵的行列式

(提高部分)

一、计算下列行列式的值

1. $(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i})a_1 a_2 \cdots a_n$; 2. $(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$

二、求解方程组

$$x_1=1, x_2=\cdots=x_n=0$$

三、 $B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

四、

1.

$$D_n = n! \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & \cdots & 3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & n & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix} = n! \prod_{n \geq i > j \geq 1} (i-j) = n!(n-1)!\cdots 3!2!$$

2.

$$D_n \stackrel{c_1+xc_2+x^2c_3+\cdots+x^{n-1}c_n}{=} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ \varphi(x) & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

其中

$$\varphi(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

按第一列展开, 得

$$D_n = \varphi(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

3. 提示：数学归纳法验证。

第二章 自测题

(基础部分)

一、填空题

1. $m = p$ 且 $n = q$, $n = p$; 2. $\frac{1}{2}$; 3. $|A|E$; 4. $\frac{1}{2}$; 5. $-\frac{1}{2}, 2$; 6. 奇数, 偶数;
7. -12; 8. 0; 9. $a^3 + 2b^3 - 3ab^2$;

二、选择题

1. C; 2. B; 3. A; 4. A.

三、计算题

1. 可逆, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -9 & 7 & 2 & -3 \\ 5 & -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2. 0; 3. 218; 4. $(-1) \times 2 \times (n-2)!$; 5. 0;

四、计算和证明

1. $\mu=0$ 或 $\lambda=1$; 2. -16;

3. 证明:

$$\because A^* \left(\frac{1}{|A|} A \right) = \frac{1}{|A|} (A^* A) = \frac{1}{|A|} (|A| E) = E$$

$$\therefore A^* \text{可逆, 且 } A^{*-1} = \frac{1}{|A|} A.$$

4. 证明:

$$(i) \because A^* A = |A| E, \text{ 又 } \because A \text{ 可逆,}$$

$$\therefore A^* = |A| A^{-1}$$

$$\therefore A^* A^{-1} = (|A| A^{-1}) A^{-1} = |A| (A^{-1}) A^{-1} = |A| |A^{-1}| E = E$$

$$\therefore A^* \text{可逆, 且 } A^{*-1} = A^{-1}.$$

(ii) 分两种情况讨论:

1) 若 $A = 0$,

$$\text{则必有 } A^* = 0, \text{ 从而有 } |A^*| = 0;$$

2) 若 $A \neq 0$, 用反证法.

若 $|A^*| \neq 0$, 则 A^* 可逆, 从而由 $AA^* = |A|E = 0$, 得到 $A = 0$ $A^{*-1} = 0$.

与 $A \neq 0$ 矛盾, 结论得证.

(iii) $|A| = 0$ 的情形见 (ii), 下证 $|A| \neq 0$ 的情形.

$$\because AA^* = |A|E = 0, \text{ 又} \because A \text{ 可逆}, \therefore A^* = |A|A^{-1}$$

$$\therefore |A^*| = |A| |A^{-1}| = |A|^n |A^{-1}| = |A|^{n-1}.$$

(提高部分)

一、填空题

1. 2 或 -2; 2. 2; 3. 负;

二、选择题

1. D; 2. A; 3. B; 4. C

三、计算题

方程化简为 $X(C - B)^T = E$, 解得

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

四、证明:

$\because A(A^2 - A + 2E) = E$, $\therefore A$ 可逆, 且 $A^{-1} = A^2 - A + 2E$.

$\because (E - A)(A^2 + 2E) = E$, $\therefore (E - A)$ 可逆, 且 $(E - A)^{-1} = A^2 + 2E$.

五、

(1) 解:

由已知得

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ X & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & Y \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ XA_{11} & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & Y \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{11}Y \\ XA_{11} & XA_{11}Y + S \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} A_{12} = A_{11}Y \\ A_{21} = XA_{11} \\ A_{22} = XA_{11}Y + S \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} X = A_{21}A_{11}^{-1} \\ Y = A_{11}^{-1}A_{12} \end{cases}.$$

(2) 证明:

$\because A_{11}$ 可逆,

$$\therefore \begin{pmatrix} E & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix}$$

又 $\because A$ 可逆,

$$\begin{aligned} \therefore |A| &= \begin{vmatrix} E & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & E \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & E \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{vmatrix} = |A_{11}| |A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}| \neq 0 \end{aligned}$$

$\therefore |A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}| \neq 0$, 所以 $S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ 可逆.

六、证明: (注: 平凡解是指方程组的零解!)

(1) 用反证法.

假设存在 $\tilde{x} \neq 0$, 使得 $A\tilde{x} = 0$, 则

$$0 = C(A\tilde{x}) = (CA)\tilde{x} = E\tilde{x} = \tilde{x} \neq 0$$

矛盾！故 $Ax = 0$ 仅有平凡解.

由 $Ax = 0$ 仅有平凡解，可得 $R(A) = n \leq \min\{m, n\} \leq m$ ，

故 $n \leq m$ 得证.

(2) 对任意 m 维列向量 b ，有

$$A(Db) = (AD)b = Eb = b,$$

$\therefore \tilde{x} = Db$ 为 $Ax = b$ 的一个解，即 $Ax = b$ 有解.

下证 $m \leq n$ ，

因为对任意 m 维列向量 b ， $Ax = b$ 有解，

所以 $AX = E_m$ 有解，从而有 $R(A) = R(A, E_m)$.

又 $\because m = R(E_m) \leq R(A, E_m) \leq m$ ， $\therefore R(A, E_m) = m$ ，

$\therefore m = R(A) \leq \min\{m, n\} \leq n$ ， $m \leq n$ 得证.

(3) 由结论 (1) 和 (2) 可得 $m \leq n$ 且 $m \geq n$ ，从而有 $m = n$ ，

即 A 为方阵.

七、 $D_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$.