3.1 基本概念

（基础部分）

一、填空题

1. $Ax=b$ $R(B)$

2. $R(A)=R(A,B)$ $R(A)=R(B)=R(A,B)$

3. 1

4. $\forall x,y\in H\Rightarrow x+y\in H$ $\forall x\in H,\forall k\in R\Rightarrow kx\in H$

二、 A

三、

1. $\beta=\frac{1}{10}(3\alpha_1+2\alpha_2-5\alpha_3)=\begin{pmatrix}2.4\\1.8\\1.2\\0.6\end{pmatrix}$

2. (1) α 不在 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 中. $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 中有 3 个向量.

(2) $span\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 中有无数个向量.

(3) 因为 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha)=\begin{pmatrix}1&2&4&3\\0&1&2&1\\-1&3&6&2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,

所以 α 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，因此 $\alpha\in span\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$.

3. 记 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\2&1&1\\3&3&4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&1\\0&2\\1&3\\1&4\end{pmatrix}$,

因为 $\begin{pmatrix}1&2&3&0&1\\2&4&6&0&2\\2&1&1&1&3\\3&3&4&1&4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&3&0&1\\0&-3&-5&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，因此 $R(A)=R(B)=(A,B)$.

所以

所以$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\6\\1\\4\end{pmatrix}\right\}$，$\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}\right\}$能生成相同的子空间；

4. (1) α=－4 ，β≠0；　（2）α≠－4；　（3）α=－4，β=0，$b=(-\frac{1}{2}c+\frac{1}{2})a_1+ca_2+a_3 \quad (c\in R)$

5. 记 $A=(a_1,a_2,a_3), B=(b_1,b_2,b_3)$. 而 $R(A)=R(A,B)=3, R(B)=2,$ 因此向量组 b_1,b_2,b_3 可由向量组 a_1,a_2,a_3 线性表示，但向量组 a_1,a_2,a_3 不能由向量组 b_1,b_2,b_3 线性表示.

四、由于$\begin{pmatrix}s+3t\\s-t\\2s-t\\4t\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\4\end{pmatrix}$，因此 $w=span\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\4\end{pmatrix}\}$，从而 W 是 $\mathbb{R}^4$ 的一个子空间.

3.1 基本概念
（提高部分）

一、$\forall x,y\in H\cap K,\forall\lambda\in R$ 则 $x\in H 且 x\in K$，同理 $y\in H 且 y\in K$.

由于 H 和 K 是向量空间 V 的子空间，因此 $x+y\in H 且 x+y\in K$，$\lambda x\in H 且 \lambda x\in K$，

故 $H\cap K$ 是 V 的一个子空间.

例 取 $H=span\{(1,0)^T\}, K=span\{(0,1)^T\}$，则 H 和 K 是向量空间 $\mathbb{R}^2$ 的子空间.

$(1,0)^T\in H\subset H\cup K, (0,1)^T\in K\subset H\cup K$，但是 $(1,1)^T=(1,0)^T+(0,1)^T\notin H\cup K$，

因此 $H\cup K$ 不是向量空间 $\mathbb{R}^2$ 的子空间.

二、记 $A=(a_1,a_2), B=(b_1,b_2)$. 则 $R(A)=R(B)=R(A,B)=2,$ 因此向量组 a_1,a_2 和向量组 b_1,b_2 等价，所以 $L_1=L_2$.

三、(1) $\forall y_1,y_2\in A(V),\forall\lambda\in R,$ 则存在 $x_1,x_2\in V,$ 使得 $y_1=Ax_1, y_2=Ax_2$.

因此 $y_1+y_2=Ax_1+Ax_2=A(x_1+x_2), \lambda y_1=\lambda(Ax_1)=A(\lambda x_1)$.

由于 V 为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，所以 $x_1+x_2\in V, \lambda x_1\in V$.

从而 $y_1+y_2\in A(V), \lambda y_1\in A(V)$. 故 $A(V)$ 为 $\mathbb{R}^m$ 的子空间.

(2) $\forall y\in A(V),$ 则存在 $x\in V,$ 使得 $y=Ax$.

由于V的生成集为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$，所以存在数$c_1,c_2,\cdots,c_k$，使得

$$x=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_k\alpha_k.$$

因此$y=A(c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_k\alpha_k)=c_1A\alpha_1+c_2A\alpha_2+\cdots+c_kA\alpha_k.$

即$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_k$为$A(V)$的生成集.

四、 $\forall x,y\in\ker T,\forall\lambda\in R,$ 则$Tx=0,Ty=0,$

因此$T(x+y)=Tx+Ty=0,T(\lambda x)=\lambda Tx=0,$ 即$x+y\in\ker T,\lambda x\in\ker T.$

所以$\ker T=\{x\in V:\ Tx=0\}$为V的子空间.

五、(1) $\forall\eta_1,\eta_2\in H+K,\forall\lambda\in R,$

则存在$\alpha_1\in H,\alpha_2\in H,\beta_1\in K,\beta_2\in K$，使得$\eta_1=\alpha_1+\beta_1,\eta_2=\alpha_2+\beta_2$.

因此 $\begin{aligned}&\eta_1+\eta_2=(\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_2+\beta_2)=(\alpha_1+\alpha_2)+(\beta_1+\beta_2)\in H+K,\\&\lambda\eta_1=\lambda(\alpha_1+\beta_1)=\lambda\alpha_1+\lambda\beta_1\in H+K.\end{aligned}$

所以$H+K$是V的子空间.

(2) $\forall x\in H$，则$x=x+0\in H+K,\therefore H\subset H+K$,而$H$为$V$的子空间. 所以$H$为$H+K$的子空间.

同理K为$H+K$的子空间.

(3) $\forall\gamma\in H+K,$则存在$\alpha\in H,\beta\in K$，使得 $\gamma=\alpha+\beta$.

由于$H=span\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\}$，$K=span\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_q\}$，

因此存在数$x_1,x_2,\cdots,x_p$和$y_1,y_2,\cdots,y_q$使得

$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_p\alpha_p,\quad \beta=y_1\beta_1+y_2\beta_2+\cdots+y_q\beta_q.$$

从而 $\gamma=\alpha+\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_p\alpha_p+y_1\beta_1+y_2\beta_2+\cdots+y_q\beta_q.$

故$H+K=span\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_q\}$

3.2 线性相关、线性无关

（基础部分）

一、填空

1. 有非零解　<m
2. 相 相
3. 相 无
4. b $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$
5. 向量组的最大无关组所含向量的个数
6. 无 相 V中任一向量
7. = = 最高阶非零子式
8. 列 行 行阶梯形 行阶梯形 主元列 主元列
9. 2 或-1， 2
10. 0
11. 相关

二、选择

(1) A (2) D (3) B A (4) A (5) B (6) A (7) B (8) A (9) D (10) C (11) B

三、

1. $b = ca_1 - (1+c)a_2 \quad (c \in R)$

2. 秩为 3；最大无关组为α_1，α_2，α_4.

3. 一个最大无关组为$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$， $\alpha_4 = \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3$， $\alpha_5 = -\alpha_2 + \alpha_3$.

四、

1. 设 $x_1 b_1 + b_2 x_2 + \cdots + x_r + b_r + = 0$，即 $x_1 a_1 + x_2(a_1 + a_2) + \cdots + x_r(a_1 + a_2 + \cdots + a_r) = 0$，

上式整理得 $(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)a_1 + (x_2 + x_3 + \cdots + x_r)a_2 + \cdots + x_r a_r = 0$.

因为 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 线性无关，所以 $\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_r = 0 \\ x_2 + x_3 + \cdots + x_r = 0 \\ \vdots \\ x_r = 0 \end{cases}$，解得 $x_1 = x_2 = \cdots = x_r = 0$.

因此向量组 $b_1, b_2, \ldots, b_r$ 线性无关.

2. 设 $x_1(\beta - \alpha_1) + x_2(\beta - \alpha_2) + \cdots + x_m(\beta - \alpha_m) = 0,$

即 $x_1(\alpha_2 + \alpha_3 \cdots + \alpha_m) + x_2(\alpha_1 + \alpha_3 \cdots + \alpha_m) + \cdots + x_m(\alpha_1 + \alpha_2 \cdots + \alpha_{m-1}) = 0,$

即 $(x_2 + x_3 + \cdots + x_m)\alpha_1 + (x_1 + x_3 + \cdots + x_m)\alpha_2 + \cdots + (x_1 + x_2 + \cdots + x_{m-1})\alpha_m = 0.$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关，所以 $\begin{cases} x_2 + x_3 + \cdots + x_m = 0 \\ x_1 + x_3 + \cdots + x_m = 0 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{m-1} = 0 \end{cases}$，解得 $x_1 = x_2 = \cdots = x_r = 0$.

因此 $\beta-\alpha_1$，$\beta-\alpha_2$，…，$\beta-\alpha_m$ 线性无关.

3.2 线性相关、线性无关

（提高部分）

1. 若 $Bx = 0$，则 $Cx = (AB)x = A(Bx) = 0$.

若 $Cx = 0$，即 $ABx = 0$. 由于 A 为列线性无关，所以 $Ay = 0$ 只有零解，因此 $Bx = 0$.

2. 设 $x_1 b_1 + b_2 x_2 + \cdots + x_r + b_r + = 0$，由已知得 $K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1r} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{s1} & k_{s1} & \cdots & k_{sr} \end{pmatrix}$，

则$\begin{cases} k_{11}a_1+k_{21}a_2+\cdots+k_{s1}a_s=b_1 \\ k_{12}a_1+k_{22}a_2+\cdots+k_{s2}a_s=b_2 \\ \cdots \\ k_{1r}a_1+k_{2r}a_2+\cdots+k_{sr}a_s=b_r \end{cases}$,

因此

$x_1(k_{11}a_1+k_{21}a_2+\cdots+k_{s1}a_s)+x_2(k_{12}a_1+k_{22}a_2+\cdots+k_{s2}a_s)+\cdots+x_m(k_{1r}a_1+k_{2r}a_2+\cdots+k_{sr}a_s)=0,$

即$(x_1k_{11}+\cdots+x_rk_{1r})a_1+(x_1k_{21}+\cdots+x_rk_{2r})a_2+\cdots+(x_1k_{s1}+\cdots+x_rk_{sr})a_s=0,$

因为$a_1,a_2,\cdots,a_s$线性无关，所以$\begin{cases} x_1k_{11}+\cdots+x_rk_{1r}=0 \\ x_1k_{21}+\cdots+x_rk_{2r}=0 \\ \vdots \\ x_1k_{s1}+\cdots+x_rk_{sr}=0 \end{cases}$,

上述方程组只有零解$\Leftrightarrow R(K)=r$..

3. 若 a_1，a_2，…，a_n线性无关，则$R(a_1,a_2,\cdots,a_n)=n.$

从而对于任一 n 维向量 a 有$R(a_1,a_2,\cdots,a_n)=R(a_1,a_2,\cdots,a_n,a)=n.$

因此任一 n 维向量都可由它们线性表示.

若任一 n 维向量都可由 a_1，a_2，…，a_n线性表示，

特别地，单位坐标向量$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$可由 a_1，a_2，…，a_n线性表示，

因此 a_1，a_2，…，a_n与 e_1，e_2，…，e_n等价，所以$R(a_1,a_2,\cdots,a_n)=R(e_1,e_2,\cdots,e_n)=n.$

从而 a_1，a_2，…，a_n线性无关.

4. (1)$\because R(a_2,a_3)\le R(a_1,a_2,a_3)=2, R(a_2,a_3)\ge R(a_2,a_3,a_4)-1=2,$

$\therefore R(a_2,a_3)=R(a_1,a_2,a_3)=3,$ $R(a_1, a_2, a_3)=2$，$R(a_2, a_3, a_4)=3$，

$\therefore$ a_1能由 a_2，a_3线性表示.

(2) 若 a_4能由 a_1, a_2, a_3线性表示，则$2=R(a_1,a_2,a_3)=R(a_1,a_2,a_3,a_4)\ge R(a_2,a_3,a_4)=3.$

矛盾.

5. $\because n=R(E)=R(AB)\le\min\{R(A),R(B)\}\le R(B)\le n$，$\therefore R(B)=n$,

$\therefore$ B 的列向量组线性无关.

6. (1)

$$AP=(Ax,A^2x,A^3x)$$

由 $A^3x=3Ax-A^2x$,得：

$$AP=(Ax,A^2x,A^3x)=(x,Ax,A^2x)\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

由于 $AP=PB$，$\therefore B=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-1\end{pmatrix}$.

(2) $\because$ x，Ax,A^2x 线性无关，$\therefore |P|\neq 0$ P 可逆.

由 $AP=PB$ 得 $A=PBP^{-1}$，$\therefore |A|=|P^{-1}||B||P|=0$.

7. （1）当 $R(A)=n$ 时，$|A|\neq 0$

$A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$ 有 $AA^*=|A|E$

$|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0$

故 $R(A^*)=n$

(2) 当 $R(A)=n-1$ 时，$|A|=0$

$AA^*=|A|E=0$

由秩的性质知

$R(A)+R(A^*)\leq n$

$R(A)=n-1$

$\therefore R(A^*)\leq 1$

$\because R(A)=n-1$

$\therefore$ 至少存在一个 n−1 阶子式不等于 0

$\therefore$ 矩阵 A^* 至少存在一个非 0 元素

$\therefore R(A^*)\geq 1$

故 $R(A^*)=1$

(3) 当 $R(A)<n-1$

由于 $R(A)<n-1$，所以 n−1 阶子式全等于 0

$A_{ij}=0\ (I,\ j=1,2...n)$

$\therefore A^*=0$

故 $R(A^*)=0$

8. (1) 若存在非零向量 $\alpha\in\mathbb{R}^m$ 以及非零向量 $\beta\in\mathbb{R}^n$，使得 $A=\alpha\beta^T$，那么 $R(A)\le R(\alpha)=1$，且矩阵 $A\neq 0$，因此 $R(A)\ge 1$.从而 $R(A)=1$.

若 $R(A)=1$，

那么存在可逆阵 $P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m1} & \cdots & p_{mm} \end{pmatrix}$ 和可逆阵 $Q=\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$，使得

$$A=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m1} & \cdots & p_{mm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{m1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \end{pmatrix}.$$

由于 P，Q 可逆，所以 $\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{m1} \end{pmatrix}\neq 0,\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \end{pmatrix}\neq 0.$

(2) $\beta=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

3.3 向量空间的基与维数、坐标系、过渡矩阵
（基础部分）

一、填空题

1. 最小的　极大
2. 无关　V 的一组基
3. 极大无关组　极大无关组所含向量的个数
4. 坐标　坐标（向量）　的坐标映射
5. 一一对应 （1）$(x_1,x_2,...,x_n)^T+(y_1,y_2,...,y_n)^T$ (2) $(\lambda x_1,\lambda x_2,...,\lambda x_n)^T$ 线性同构
6. 可逆　坐标变换公式
7. $(\frac{5}{4},\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4})^T$
8. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

二、

V_1 是，　n-1 维

$$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

n-1 个向量

V_2 不是

三、

1. $$\left(a_1,a_2,a_3,\gamma_1,\gamma_2\right)=\begin{pmatrix}1&2&3&5&-9\\-1&1&1&0&-8\\0&3&2&7&-13\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&2&3\\0&1&0&3&-3\\0&0&1&-1&-2\end{pmatrix},$$

所以α_1，α_2，α_3为R^3中的一组基，且

$V_1=2\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3 \quad V_2=3\alpha_1-3\alpha_2-2\alpha_3$

2. $[x]_B=\begin{pmatrix}8\\-5\end{pmatrix}$ ，$[x]_B=\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}$

3. $x=5\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-7\end{pmatrix}$ $\qquad x=3\begin{pmatrix}1\\-4\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}5\\2\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\-7\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-5\\0\end{pmatrix}$

4. （1）$A=\left(e_1,e_2,e_3,e_4\right) \qquad B=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right)$

过渡$P=A^{-1}B=\begin{pmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{pmatrix}$

（2）x 的坐标为$B^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$

（3）

$Ax=Bx$

$(B-A)x=0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0$$

$x = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ t 为任意常数.

3.3 向量空间的基与维数、坐标系、过渡矩阵

（提高部分）

一.

（1）

$$\alpha = \begin{pmatrix} a-4b-2c \\ 2a+5b-4c \\ -a+2c \\ -3a+7b+6c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix} \underset{\sim}{r} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\therefore \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ 为一组基 2 维

（2）

$\begin{cases} a-3b+c=0 \\ b-2c=0 \\ 2b-c=0 \end{cases}$ 只有零解 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 0 维 ，无基

（3）

基：（3，1，0，0），（-1，0，1，0），（0，0，0，1） 3 维

（4） 1 维 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

（5）

n-1 维 $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

（6）

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 维　$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$为基

（7）

6 维：基

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.4 矩阵的零空间、列空间、线性方程组的结构
（基础部分）

一．　填空题

1. 零空间，　Nul A,　解空间，　基础解系，　零空间.
2. 列空间，　Col A,　行空间，　Row A.
3. 有解.
4. （1）　$\mathbb{R}^m$.　（2）向量线性无关.
5. 自由，　n.
6. $x = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_t\eta_t$，　$k_1, k_2, \cdots, k_t \in \mathbb{R}$；

   $x = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_t\eta_t + \eta$，　$k_1, k_2, \cdots, k_t \in \mathbb{R}$.
7. 4
8. 2，$x = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R}$.

9. N

二． 选择题

1. D

三． 解答题

1. $(A,\alpha)=\begin{pmatrix}7 & 6 & -4 & 1 & 1\\ -5 & -1 & 0 & -2 & 1\\ 9 & -11 & 7 & -3 & -1\\ 19 & -9 & 7 & 1 & -3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}7 & 6 & -4 & 1 & 1\\ 0 & 23 & -20 & -9 & 12\\ 0 & 0 & -665 & -1869 & 1204\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

所以$Ax=\alpha$有解，α在A的列空间中.

$A\alpha=\begin{pmatrix}14\\0\\0\\0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$，所以$\alpha$不在$A$的零空间中.

2.

（1） $\begin{pmatrix}2 & -3 & -2 & 1\\ 3 & 5 & 4 & -2\\ 8 & 7 & 6 & -3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{2}{19} & -\frac{1}{19}\\ 0 & 1 & \frac{14}{19} & -\frac{7}{19}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 基础解系为$\xi_1=\begin{pmatrix}-\frac{2}{19}\\ -\frac{14}{19}\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{19}\\ \frac{7}{19}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$.

（2）基础解系为$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\ \vdots\\ 0\\ -n\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\ 0\\ -(n-1)\end{pmatrix}$，…，$\xi_{n-1}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$.

3. 解：

$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 5\\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1\\ 5 & 3 & 2 & 2 & 3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & -8\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 13\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$,

非齐次方程组得一个特解为$\begin{pmatrix}-8\\13\\0\\2\end{pmatrix}$，齐次线性方程组的基础解系为$\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$.

4. 解：

$$A \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Ax = 0 \text{ 的通解为 } x = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Col A 的基为 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$， 3 维.

Row A 的基为 $\beta_1^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \beta_2^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$，

$\beta_3^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，3 维.

Nul A 的基为 $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$， 2 维.

3.4 矩阵的零空间、列空间、线性方程组的结构
（提高部分）

1. 解：（1） 令 $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$， $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 7 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，所以 $Ex = 0$ 有解. 因此，

$b \in ColA$，方程组 $Ax = b$ 相容.

（2）因为 $Ax = b$ 相容，取一个特解 η， $\eta + c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R}$ 全部为 $Ax = b$ 的解，

有无穷多个.

2. 解：$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ 的一个基础解系为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \xi_{n-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 的一个基础解系为

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. 解：$A \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{8} & -\frac{11}{8} \end{pmatrix}$， $Ax = 0$ 的基础解系为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{5}{8} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} \\ \frac{11}{8} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

取 $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{5}{8} & \frac{11}{8} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. 解： 因为 a_2, a_3, a_4 线性无关，且 $a_1 = 2a_2 - a_3$，所以 $R(A) = 3.$

而

$$a_1 = 2a_2 - a_3 \Leftrightarrow (a_1, a_2, a_3, a_4)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$b = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \Leftrightarrow (a_1, a_2, a_3, a_4)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = b,$$

因此线性方程组的通解为 $x = c\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R}$.

5. 解：$\eta_2 + \eta_3 - 2\eta_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$,

通解为 $x = c\begin{pmatrix}-7\\-2\\1\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\1\\0\\2\end{pmatrix}, c \in \mathbb{R}$.

3.5 向量的内积、正交阵
（基础部分）

一、填空题

1. $\geq$ $x=0$ 内积空间

2. 无关

3. $AA^T=E$ A^T 正交变换

4. 标准正交基 $\langle x,y\rangle$

5. $\dfrac{9}{8}$

6. ± 1 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

二、

1. 因为 A、B都是正交阵，所以 $(AB)^T AB = B^T A^T AB = B^T B = E$，因此 AB也是正交阵.

2. 由于 $H^T=(E-2xx^T)^T=E^T-(2xx^T)^T=E-2(x^T)^T x^T=E-2xx^T=H$，故 H 为对称阵.

$H^T H = HH = (E-2xx^T)(E-2xx^T)=E-2xx^T-2xx^T+4xx^T(xx^T)=E,$ 故 H 为正交阵.

3.5 向量的内积、正交阵
（提高部分）

一．形如 $c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+c_3\alpha_3$ 的向量中距离 b 最接近的向量为向量 b 在 $span\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 中的正交投影，因此

$$\alpha=\frac{\langle b,\alpha_1\rangle}{\langle \alpha_1,\alpha_1\rangle}\alpha_1+\frac{\langle b,\alpha_2\rangle}{\langle \alpha_2,\alpha_2\rangle}\alpha_2+\frac{\langle b,\alpha_3\rangle}{\langle \alpha_3,\alpha_3\rangle}\alpha_3$$

$$=\frac{6}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{10}{15}\begin{pmatrix}-1\\3\\1\\-2\end{pmatrix}+\frac{-2}{3}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\0\\0\end{pmatrix}$$

第三章 自测题
（基础部分）

一、填空题

1. $m=2n$
2. 无
3. 1
4. 2 2
5. 3

二、选择题

1. C 2. C 3. B 4. B 5. C

三、计算题

1. （1）$\beta=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\2&3&a+2&4&b+3\\3&5&1&a+8&5\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&1&a&2&b+1\\0&2&-2&a+3&2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&0&a+1&0&b\\0&0&0&a+1&0\end{pmatrix}$$

当 R(A)$\neq$R(B)时，不能线性表示. 故 $a=-1, b\neq 0$

（2）β 可由 α_1，…，α_4 惟一地线性表示. R(A)=R(B)=4, $a\neq -1$

$$B\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&0&a+1&0&b\\0&0&0&a+1&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&2&-1&0\\0&1&-1&2&1\\0&0&1&0&\frac{b}{a+1}\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&2&0&0\\0&1&-1&0&1\\0&0&1&0&\frac{b}{a+1}\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0&-\frac{2b}{a+1}\\0&1&0&0&1+\frac{b}{a+1}\\0&0&1&0&\frac{b}{a+1}\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\beta=-\frac{2b}{a+1}\alpha_1+(1+\frac{b}{a+1})\alpha_2+\frac{b}{a+1}\alpha_3+0\ \alpha_4$$

2. 秩为 3，β_1,β_2,β_5 为一个最大无关组

3. 一个最大无关组为α_1，α_2；$\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2$

第三章 自测题
（提高部分）

一、填空题

1. 4

2. $k(1,1,\cdots,1)^T, k \in R$

二、选择题

1. C 2. B 3. A

三、计算题

1. (1) 基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ (2) 有公共解 $k(-1,1,1,1)^T, k \in R$

2. (1) 将 A，B 按列分块，设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$

$Col\,A = Col\,B \Leftrightarrow \alpha_i \in Col\,B, \beta_i \in Col\,A, i=1,2,\cdots,n \Leftrightarrow A$，$B$ 的列可以互相线性表示

$\Leftrightarrow A \overset{c}{\sim} B$

(2) $Nul\ A = Nul\ B \Leftrightarrow Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解 $\Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} B$

3. 设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=k_3\alpha_3+k_4\alpha_4$, 即 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\-k_3\\-k_4\end{pmatrix}=0.$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}5&1&2&0\\3&3&-1&12\\8&4&5&-28\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{10}{3}\\0&1&0&-\frac{26}{3}\\0&0&1&-4\end{pmatrix}$$

因此可取 $u=4\alpha_3+\alpha_4=\begin{pmatrix}8\\-16\\-8\end{pmatrix}.$

4. (1) 设 $k_0\eta^*+k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}=0.$

则 $A(k_0\eta^*+k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r})=0$, 即 $k_0A\eta^*+k_1A\xi_1+\cdots+k_{n-r}A\xi_{n-r}=0.$

由于 ξ_1，…，$\xi_{n\text{-}r}$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系，所以 $k_0 b=0$. 而 $b\neq 0$，因此 $k_0=0$.

从而 $k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$.

(2) $$(\eta^*,\eta^*+\xi_1,\cdots,\eta^*+\xi_{n-r})=(\eta^*,\xi_1,\cdots,\xi_{n-r})\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1&&\\\vdots&\vdots&&\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix},$$

而 $\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1&&\\\vdots&\vdots&&\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$ 可逆，所以 η^*，$\eta^*+\xi_1$，…，$\eta^*+\xi_{n\text{-}r}$ 线性无关.