线性规划基础

与图解法

线性规划的概念

- 例题 **1.1**：某工厂可以生产产品**A**和产品**B**两种产品。生产单位产品所需的机器、人工的数量以及每天可利用资源总量由下表给出。两种产品在市场上畅销。该厂经理要制订季度的生产计划，其目标是使工厂的销售额最大化。

	产品A	产品B	资源总量
机器（时）	6	8	120台时
人工（时）	10	5	100人时
产品售价（元）	800	300	

线性规划的概念

- 例题 1.1属于一类优化问题，它们的特点：

1. 每一个问题都用一组决策变量表示方案，决策变量的值代表一个具体方案。
2. 存在约束条件，用一组线性等式或线性不等式表示。
3. 都有一个目标，用决策变量的线性函数（称为目标函数）表示。根据问题不同，要求目标函数实现最大化或最小化。

满足以上三个条件的数学模型称为线性规划的数学模型。

线性规划的概念

- 线性规划（**Linear Programming**），简称为**LP**

- 线性规划模型是有目标函数和约束条件的最优化模型。
- 线性规划模型中数学表达式的形式是线性（变量相加减、变量和常数相乘等）。
- 线性规划模型是目前应用得最广泛、最成功的运筹学模型。

线性规划的概念

- ■ 线性规划模型的常用术语
- ➢ **决策变量—**例如活动水平，包括生产活动、营销活动、金融活动等。
- ➢ **约束条件—**对决策变量的约束。

  例如可用资源的约束，包括资金、人员、机器和设备等。
  - 非负约束
  - 函数约束

线性规划的概念

- **目标函数—**例如组织目标中的利润、成本。与决策变量有关。

  确定性：每种决策带来的结果是确定的。
- **参数—**决策变量以外的变量值（常数）。例如单位产品的价格、单位产品消耗资源量。
- **解**
  - 可行解—满足约束条件的决策变量值
  - 最优解—使目标函数值最好的可行解

  可分性：决策变量的值可以是分数。

线性规划的概念

线性规划模型代数形式举例

Maximize $Z = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$ ← Objective Function

subject to

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ &a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ &\vdots \\ &a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{aligned}\right\}$$ ← Functional Constraints

and

$$x_1 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0$$ ← Nonnegativity Constraints

已知参数 $\boldsymbol{c_1, \ldots, c_n}$; $\boldsymbol{a_{11}, \ldots, a_{mn}}$; $\boldsymbol{b_1, \ldots, b_m}$.

线性规划的概念

- 例题 1.1的线性规划模型
  - 决策变量：产品A和产品B的产量
  - 约束条件：机器、人工的数量
  - 目标函数：销售额，希望最大化

$$\max \quad z = 800x_1 + 300x_2$$

$$s.t.$$

$$6x_1 + 8x_2 \le 120$$

$$10x_1 + 5x_2 \le 100$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

北京大学

线性规划问题的图解法

- 图解法特点
  - 形象直观，有助于了解线性规划问题求解的基本原理
  - 只适合有两个决策变量的线性规划问题
- 求解步骤
  - 第一步，得到可行域（符合所有约束条件的点组成，每个点都是可行解）。

    根据所有约束条件，在二维平面上画出可行域。
  - 第二步，得到最优解。

    在可行域中找到使目标函数最优的点。

图解法第一步—可行域

若变量非负， 可行域在第一象限。

约束：

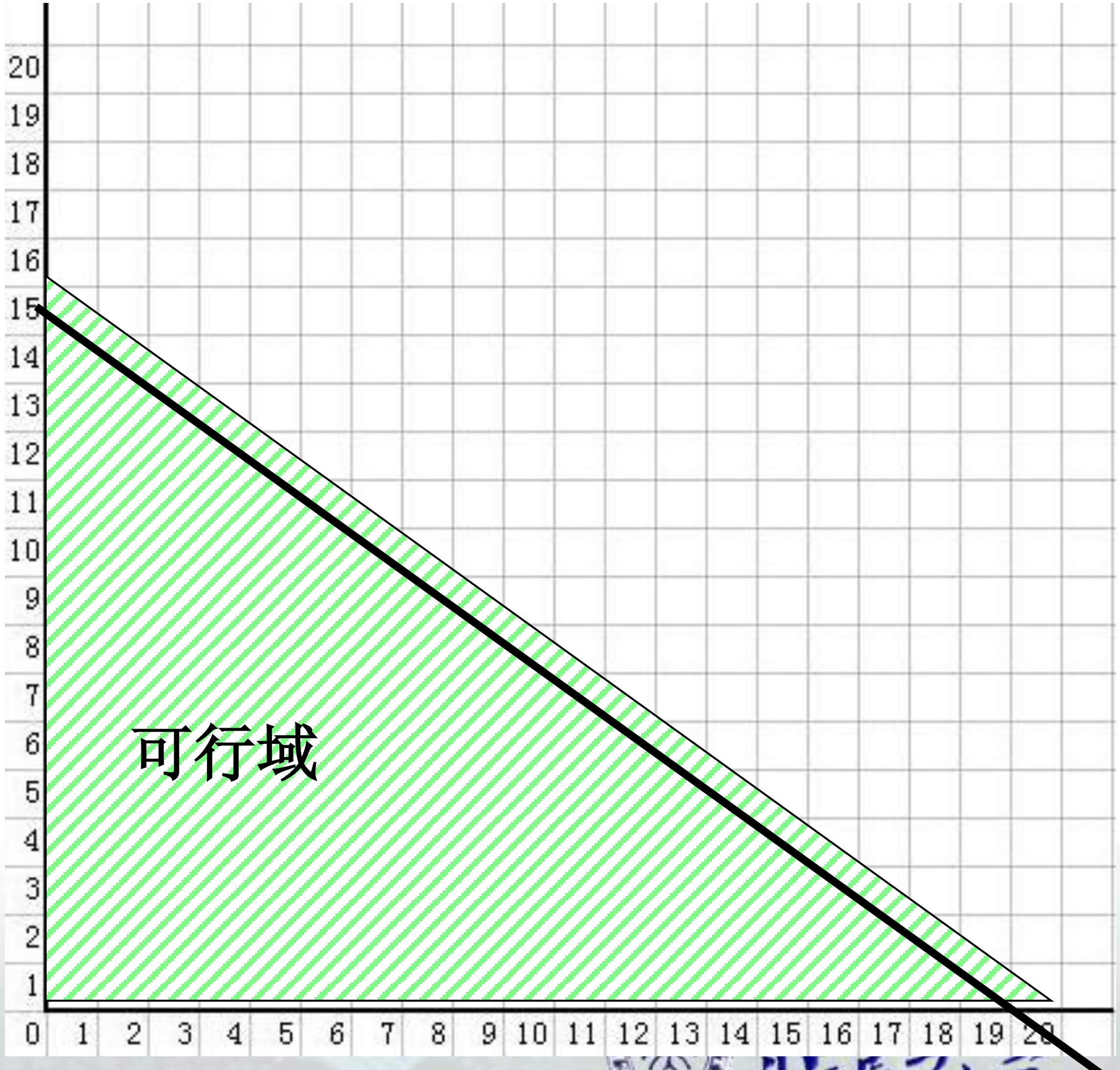
6x1+8x2<=120

先画约束边界线：

6x1+8x2=120

直线两边的点代入 **6x1+8x2** ，一边大于 **120**，一边小于**120.**

可以选一点试验（例如原点）**.**



图解法第二步—最优解

目标函数：

800x1+300X2

令800x1+300X2 =4000

令800x1+300X2 =8000

令800x1+300X2 =12000

画三条目标函数线

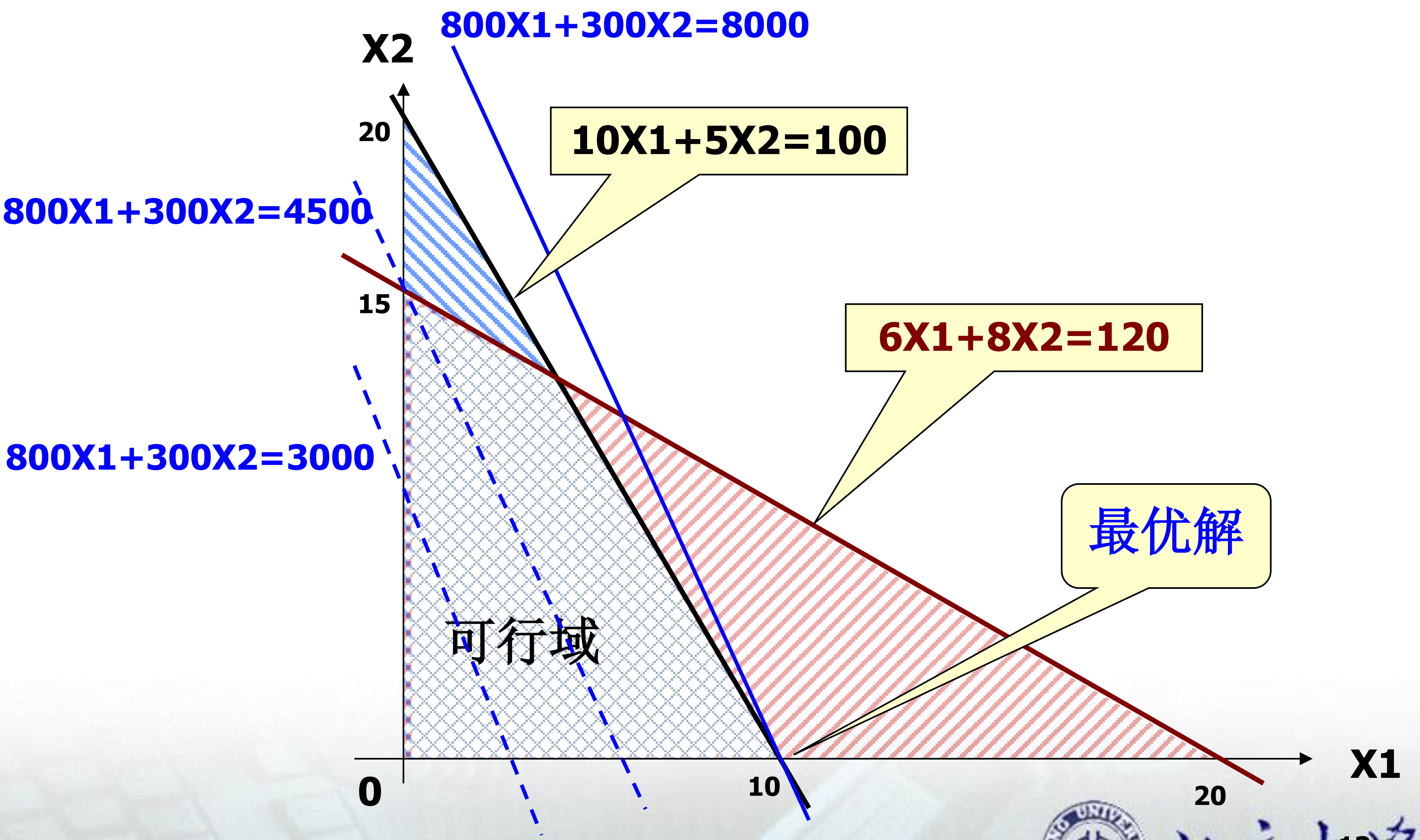
这些直线是平行的等值线，斜率为-8/3 ，向右上移动，值增大。

线性规划问题的图解法

■ 图解法求解步骤细化

- ➢ 画出每个函数约束的约束边界线，用原点（或其它不在约束边界线上的点）来确定直线的哪一侧是约束条件所允许的。
- ➢ 通过确定同时满足所有约束条件的区域来找出可行域。
- ➢ 确定目标函数线的斜率。
- ➢ 在可行域内向目标函数值变得更优的方向移动目标函数线，在它仍然穿过可行域的一个点时停止移动（再移动就离开可行域了），此时得到最优目标函数线。
- ➢ 最优目标函数线上的可行点是最优解。

用图解法解例1.1



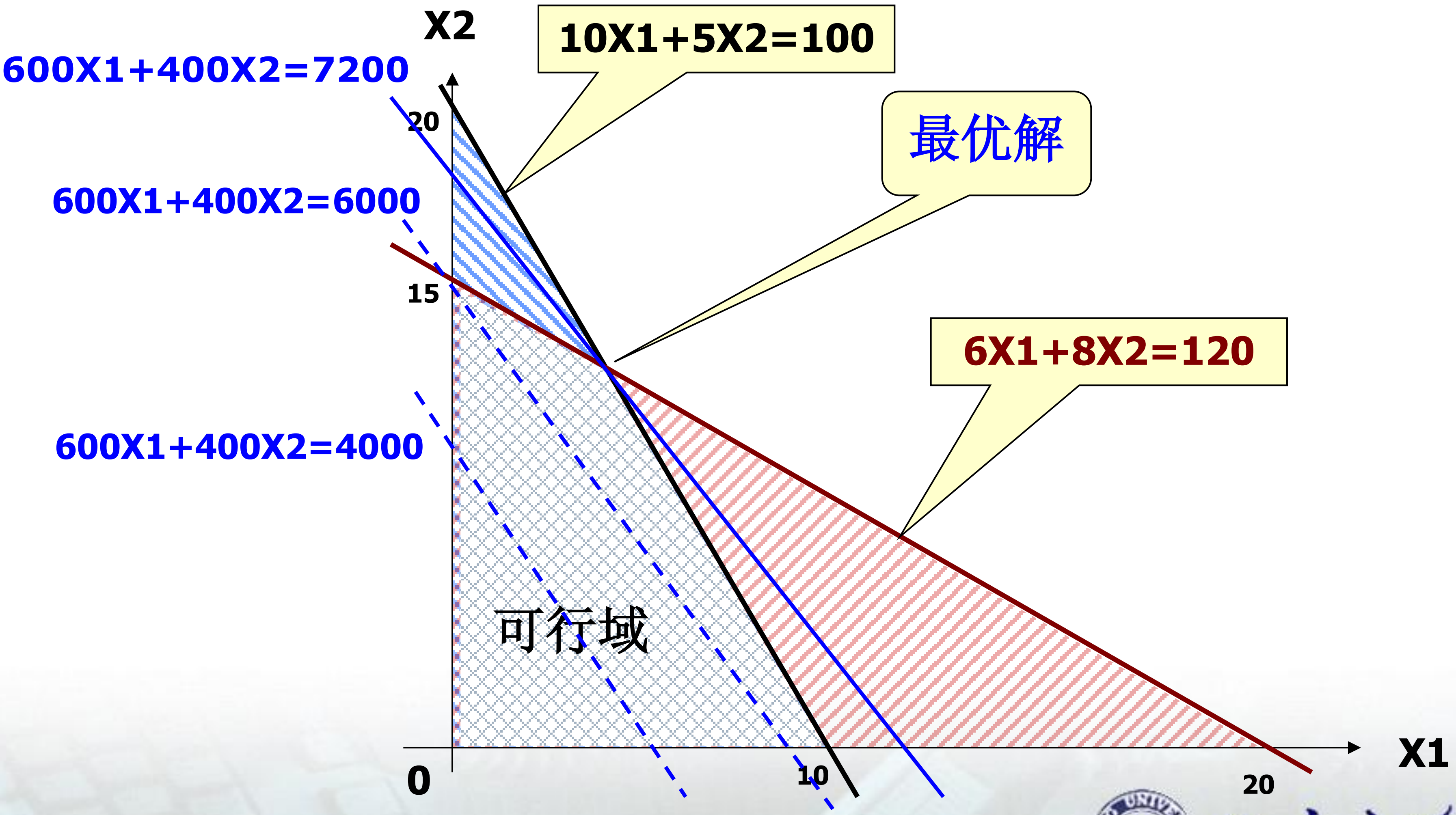
800X1+300X2=8000
X2
20
10X1+5X2=100
800X1+300X2=4500
15
6X1+8X2=120
800X1+300X2=3000
最优解
可行域
0
10
20
X1

线性规划问题的图解法

- 例题1.2 该工厂根据市场状况调整了两种产品的售价。产品A和B的价格调整为600元和400元，其它条件不变，如何制定生产计划？
- LP模型：

$$\max \ z = 600x_1 + 400x_2$$
$$s.t.$$
$$6x_1 + 8x_2 \le 120$$
$$10x_1 + 5x_2 \le 100$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

用图解法解例1.2



X2
10X1+5X2=100
600X1+400X2=7200
20
最优解
600X1+400X2=6000
15
6X1+8X2=120
600X1+400X2=4000
可行域
0
10
X1
20

线性规划问题的图解法

- 例题1.3 该工厂根据市场状况调整了两种产品的售价。产品A和B的价格调整为800元和400元，其它条件不变，如何制定生产计划?
- LP模型:

$$\max \ z = 800x_1 + 400x_2$$

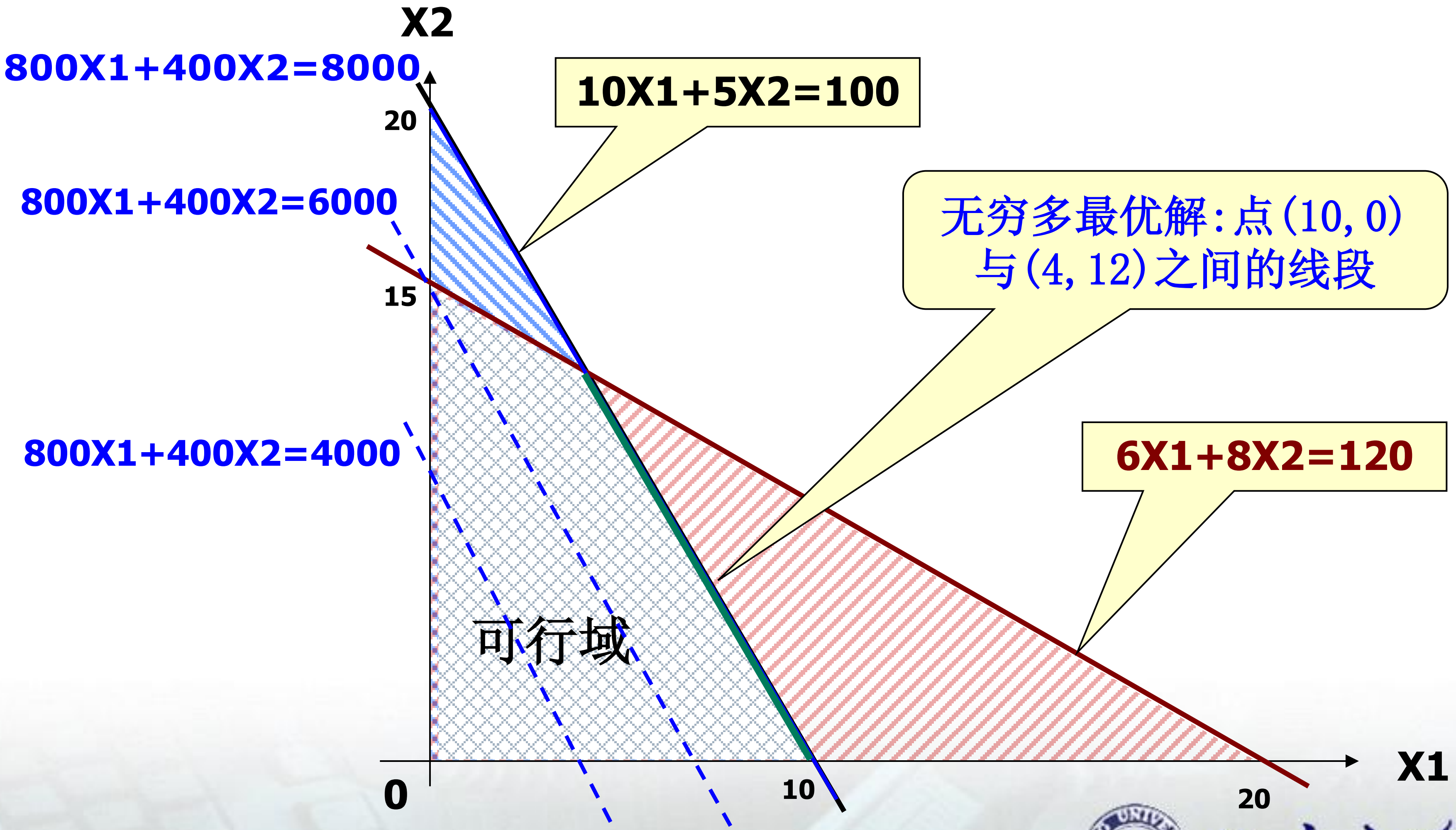
$$s.t.$$

$$6x_1 + 8x_2 \le 120$$

$$10x_1 + 5x_2 \le 100$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

用图解法解例1.3

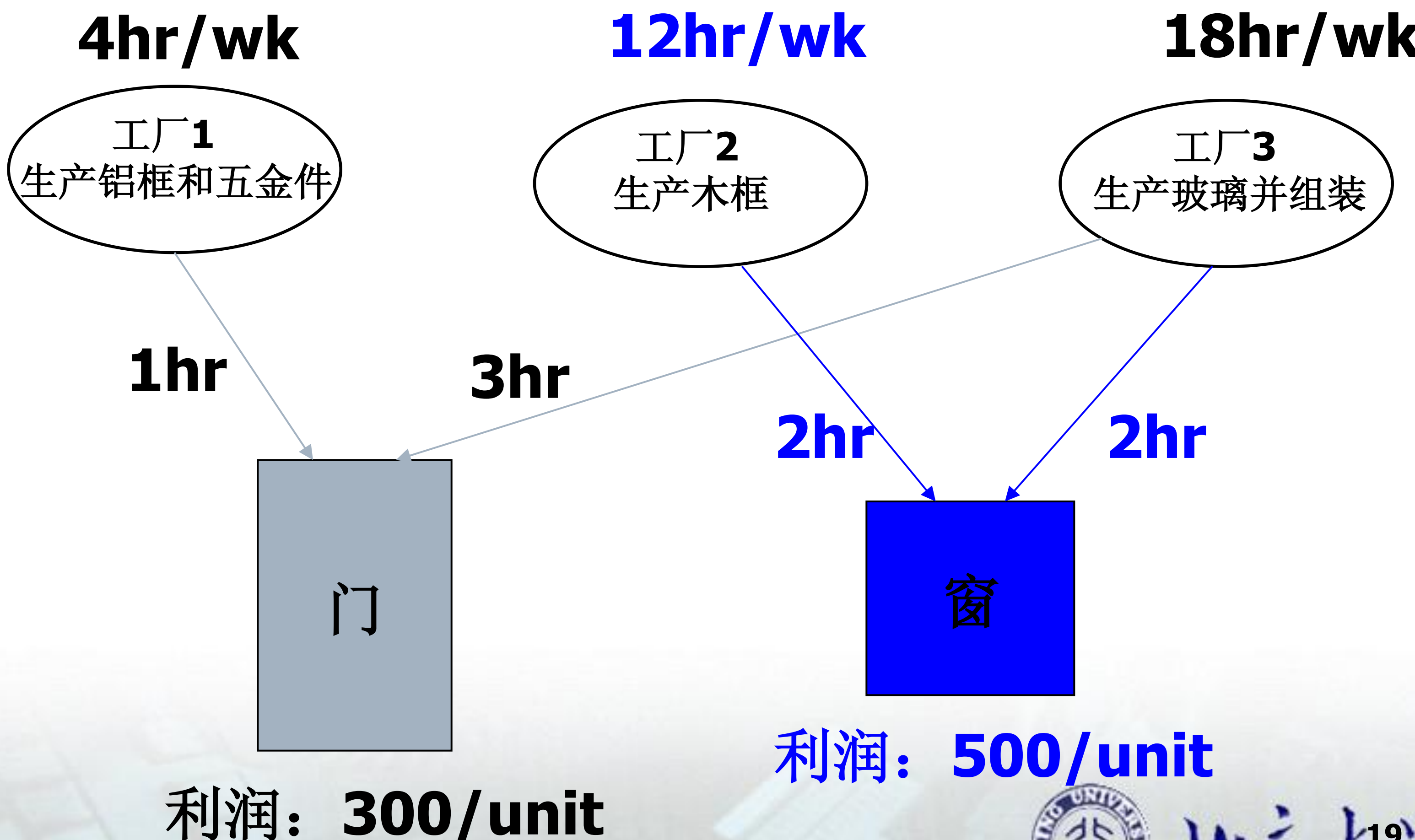

X2
800X1+400X2=8000
20
10X1+5X2=100
800X1+400X2=6000
无穷多最优解:点(10, 0)
与(4, 12)之间的线段
15
800X1+400X2=4000
6X1+8X2=120
可行域
0
10
20
X1

伟恩德公司案例

- 案例：伟恩德公司的产品组合问题
- 两种性能极佳的新产品
  - 铝框玻璃门和双把木框窗
- 生产能力：有一些空闲
- 市场需求：可以卖掉
- 问题：是否生产？各生产多少为最优？
- 目标：利润最大

伟恩德公司案例—生产条件

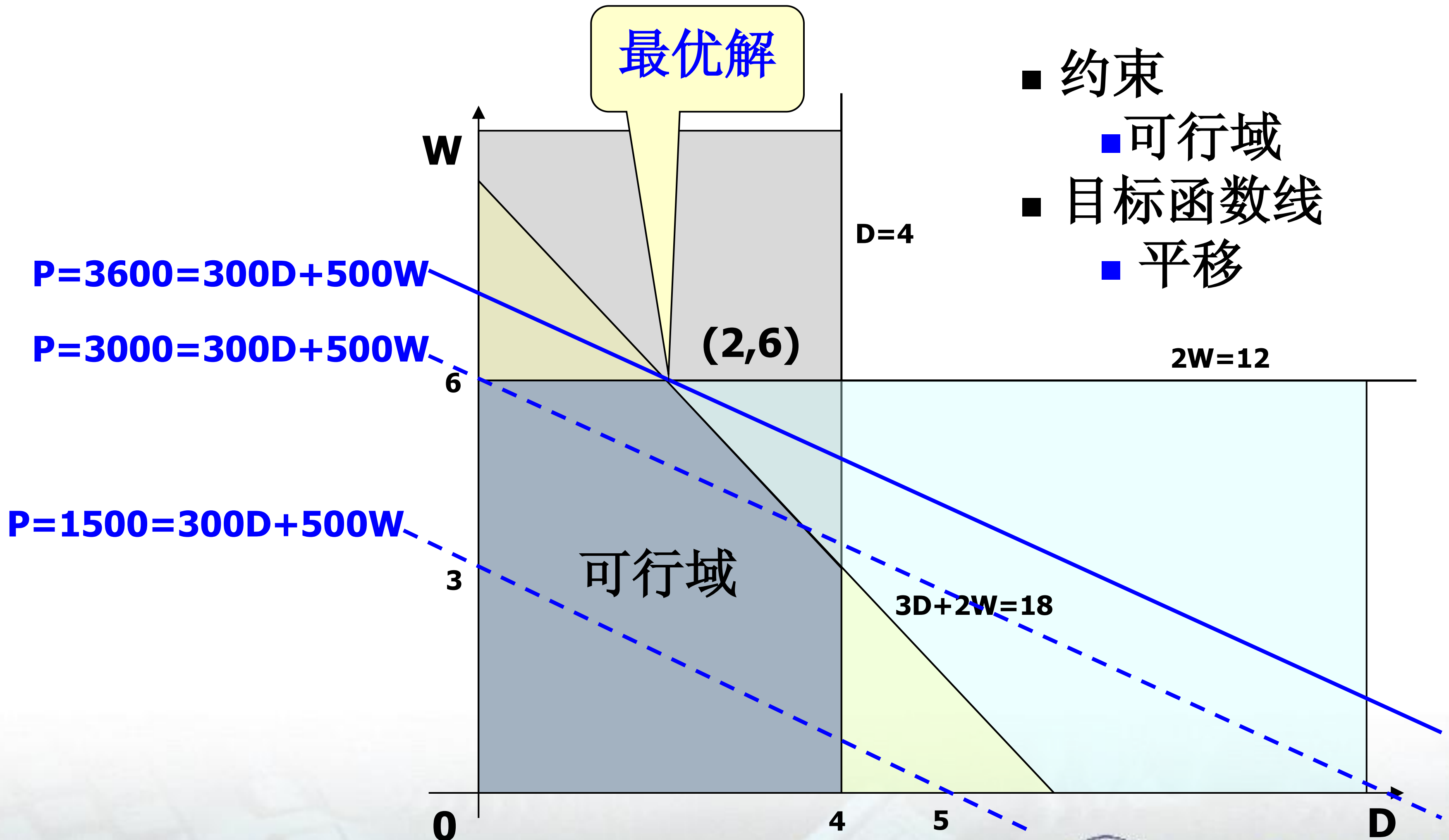
生产能力、产品所需资源、利润：



伟恩德公司案例—数学模型

- 决策变量：门和窗每周生产率D和W
- 目标函数：总利润，希望最大
  $P=300D+500W$
- 约束条件：工厂生产能力
  - 工厂1： $D \le 4$
  - 工厂2： $2W \le 12$
  - 工厂3：$3D + 2W \le 18$
  - 非负约束：$D \ge 0 \quad W \ge 0$

伟恩德公司案例—图解法



- 约束
  - 可行域
- 目标函数线
  - 平移

利博公司案例

- **案例：利博公司广告组合问题。**利博公司决定在下列三个主要产品上实行大规模广告活动。公司已经开发出一个强调洗衣液特色的商业广告，准备在全国的电视上播出；印刷媒体的广告将用来促销所有三种产品。做一单位广告对不同产品的销售促进作用不同，公司最终对每种产品的销售增加量有一最低目标（数据见下表）。请问以最低成本达到公司目标的广告投放量是多少？

产品	每单位广告增加的市场份额（%）		需要最小的增加量（%）
	电视	印刷媒体	
预洗喷雾去污剂	0	1	3
洗衣液	3	2	18
洗衣粉	-1	4	4
单位成本	100万美元	200万美元	

利博公司案例—数学模型

- 最小化问题（费用以100万为单位）

$$\min \ C = TV + 2PM$$

$$s.t.$$

$$PM \geq 3$$

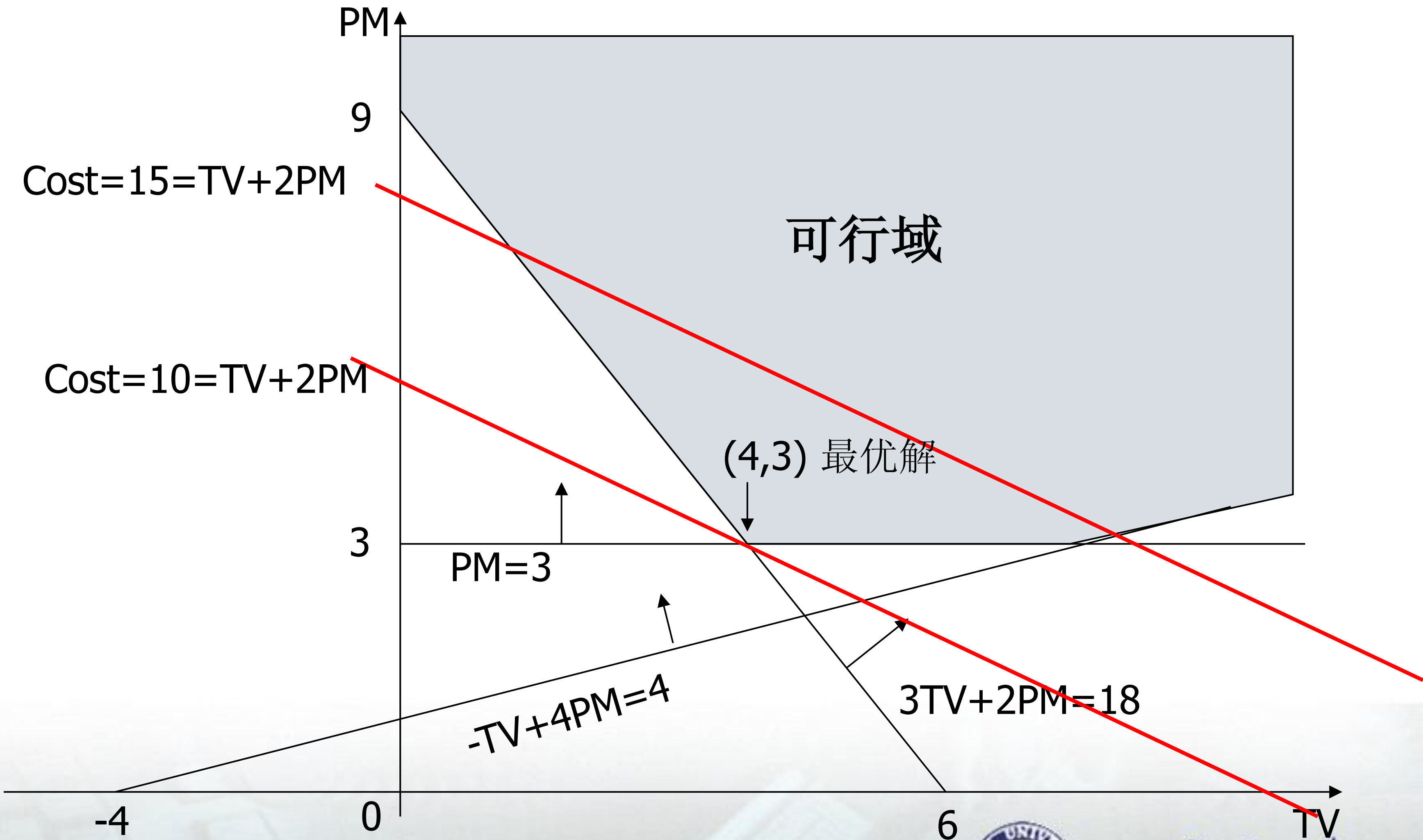
$$3TV + 2PM \geq 18$$

$$-TV + 4PM \geq 4$$

$$TV, PM \geq 0$$

北京大学

利博公司案例—图解法

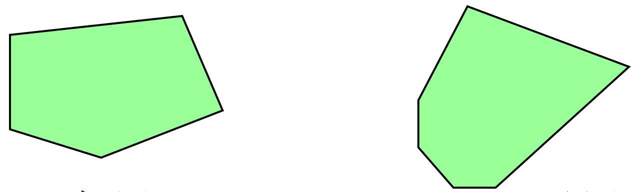


PM
9
Cost=15=TV+2PM
可行域
Cost=10=TV+2PM
(4,3) 最优解
3
PM=3
-TV+4PM=4
3TV+2PM=18
-4
0
6
TV

从图解法得到的启示

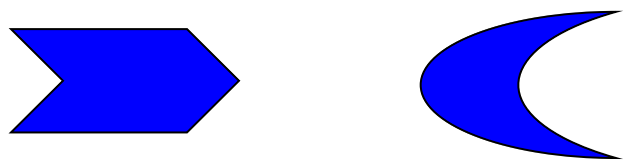
- 线性规划可行域非空时，它是有界或无界的凸集（集合内任意两点连线上的一切点都在集合内）。

可能像



有界　　无界

不可能像



- 线性规划若存在最优解，它一定在可行域的某个顶点得到。若在两个顶点同时得到最优解，则它们连线上的任意一点都是最优解，即有无穷多最优解。

从图解法得到的启示

LP的可行域		LP的解与最优解	
空集		⟷ 无可行解	
非空	有界	⟶ 有最优解	有唯一最优解
			无穷多个最优解
	无界	⟶ 无界解	

无界 ⟶ 有最优解

出现无界解和无可行解的情况时，一般说明线性规划问题的数学模型有错误。前者缺乏必要的约束条件，后者存在有矛盾的约束条件。