解LP的单纯形法

求解线性规划问题的方法

- 线性规划若存在最优解，它一定在可行域的某个顶点得到。
- 图解法—不适用于有两个以上决策变量的问题。
- 穷举法—找到所有顶点，然后一一比较，但当变量和约束多时很困难。
- 单纯形法——

从可行域中某个顶点开始，判断是否是最优解；如果不是，则换一个让目标函数值更优的另一个顶点；这个过程一直进行，直到找到让目标函数值达到最优的顶点，此时得到最优解。

线性规划问题的标准型

- 将线性规划模型转化成标准型

$$\max \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$s.t. \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, \cdots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

$$b_1, \cdots, b_m \geq 0$$

- 设A是约束方程组的m*n维系数矩阵，其秩为m。 B是矩阵A中m*m阶非奇异子矩阵（|B|≠0），则称B是线性规划问题的一个基，对应的变量是基变量，其他变量为非基变量。
- 令非基变量等于零，约束方程组能得到一个解，称基解。满足非负条件的基解是基可行解。

可行基解的几何意义

- 每个基可行解对应LP可行域的一个顶点。
- 根据线性规划基本定理，如果LP有最优解，只需在可行基解中寻找。
- 注意：求解LP，若有最优解，只要找出一个即可，不要求找出所有的最优解。

线性规划模型举例

- 例题：某工厂可以生产产品A和产品B两种产品。生产单位产品所需的机器、人工的数量以及每天可利用资源总量由下表给出。两种产品在市场上畅销。该厂经理要制订季度的生产计划，其目标是使工厂的销售额最大化

	产品A	产品B	资源总量
机器（时）	6	8	120台时
人工（时）	10	5	100人时
产品售价（元）	600	400	

例题的LP模型

- **LP模型:**

$$\max \quad z = 600x_1 + 400x_2$$

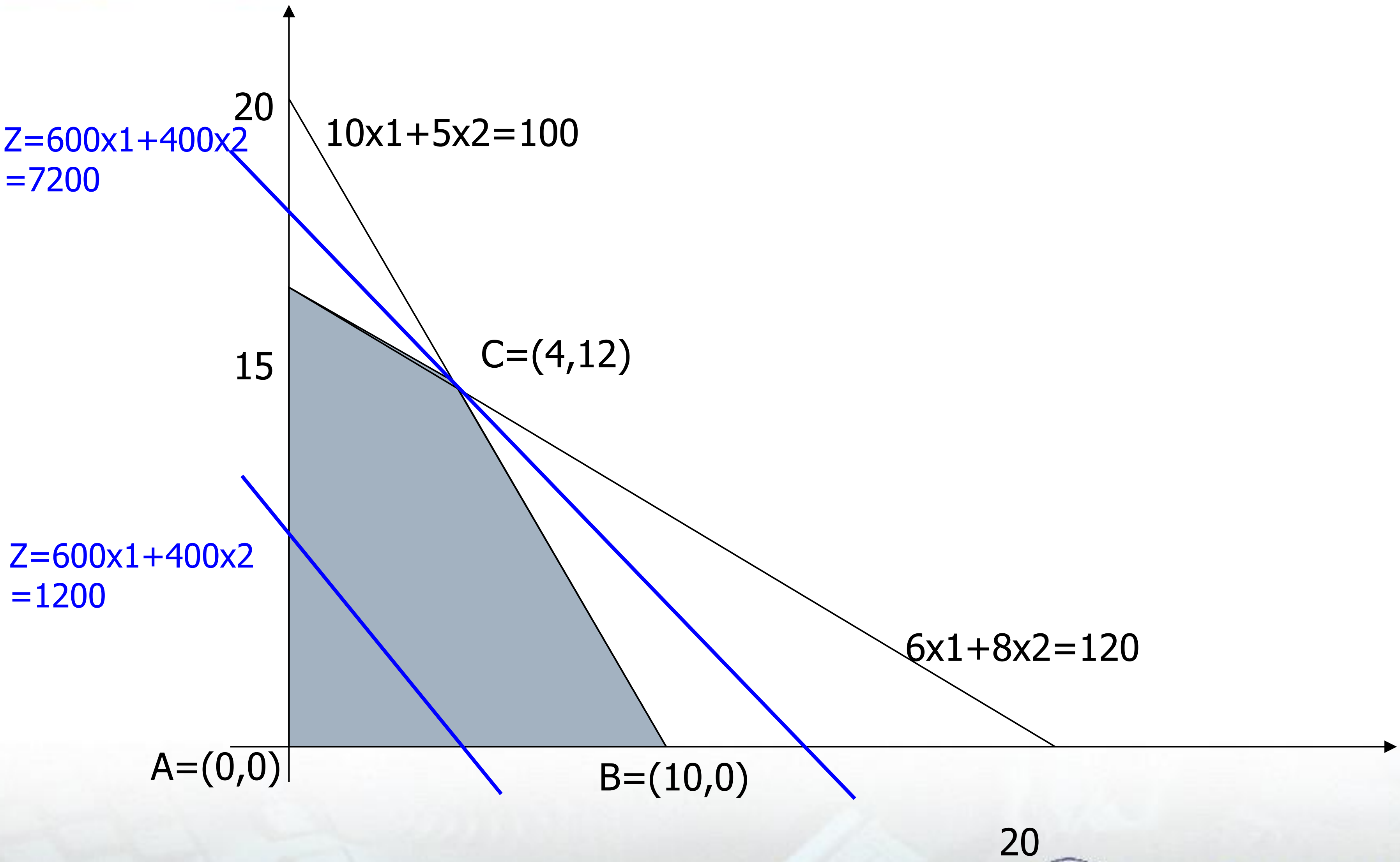
$$s.t.$$

$$6x_1 + 8x_2 \le 120$$

$$10x_1 + 5x_2 \le 100$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

例题的图解法



20
10x1+5x2=100
Z=600x1+400x2
=7200
C=(4,12)
15
Z=600x1+400x2
=1200
6x1+8x2=120
A=(0,0)
B=(10,0)
20

例题的基解示意

- 例题的标准型式

MAX 600X1 +400X2+0 S1+0 S2

ST:

6X1 + 8X2 + S1 = 120

10X1 + 5X2 + S2 = 100

X1, X2, S1, S2 >=0

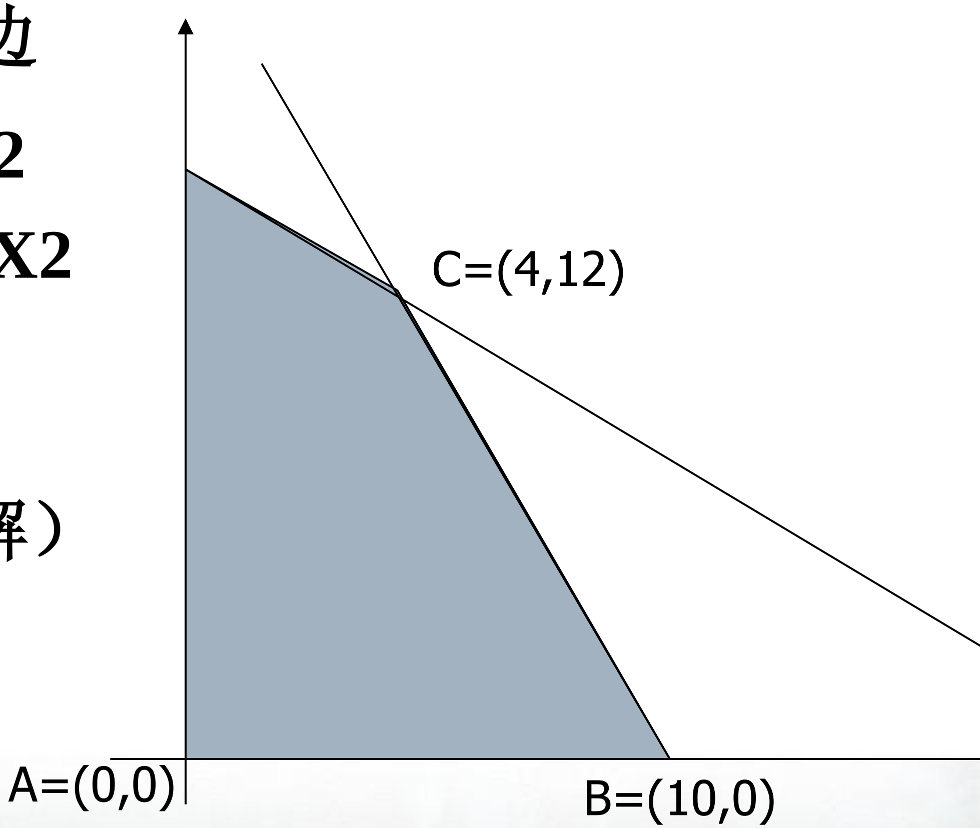
例题的基解示意

- 例题的一个基解（1）
  - 将X1 和X2移到方程右边

    $S1 \quad = 120 - 6X1 - 8X2$

    $S2 = 100 - 10X1 - 5X2$

  - 令X1 =X2=0，得到基解（0,0,120,100）（可行解）
    - 对应图解法中的A点。



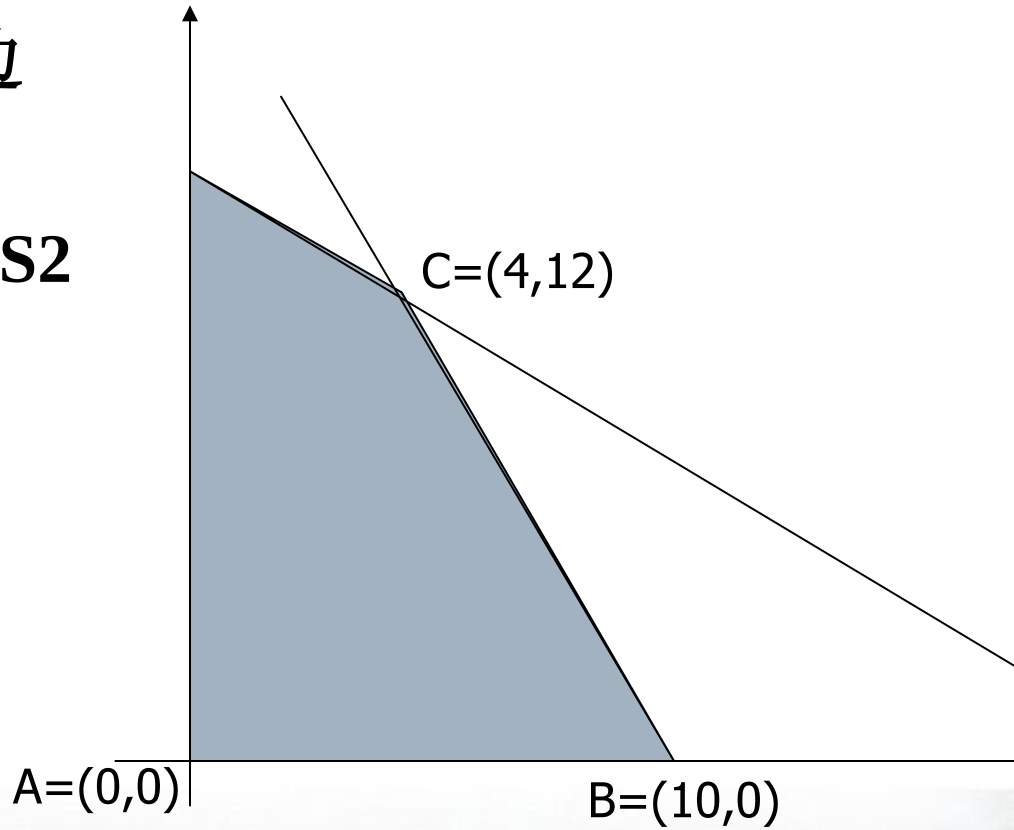
例题的基解示意

- 例题的一个基解（2）
- 将X2和S2移到方程右边

  6X1 + S1 = 120 - 8X2

  10X1 = 100 - 5X2 - S2

- 令X2=S2=0，得到基解（10,0,60,0）（可行解）
  - 对应图解法中B点。



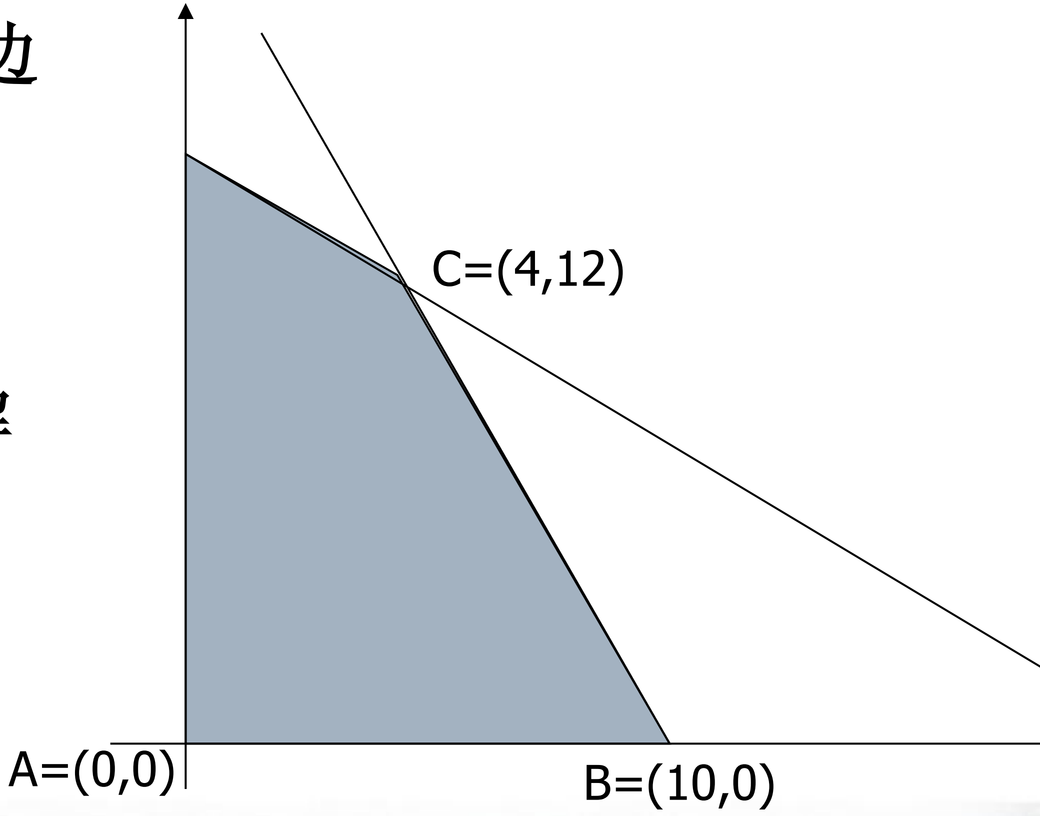
例题的基解示意

- 例题的一个基解（3）
- 将S1和S2移到方程右边

$$6X1 + 8X2 = 120 - S1$$

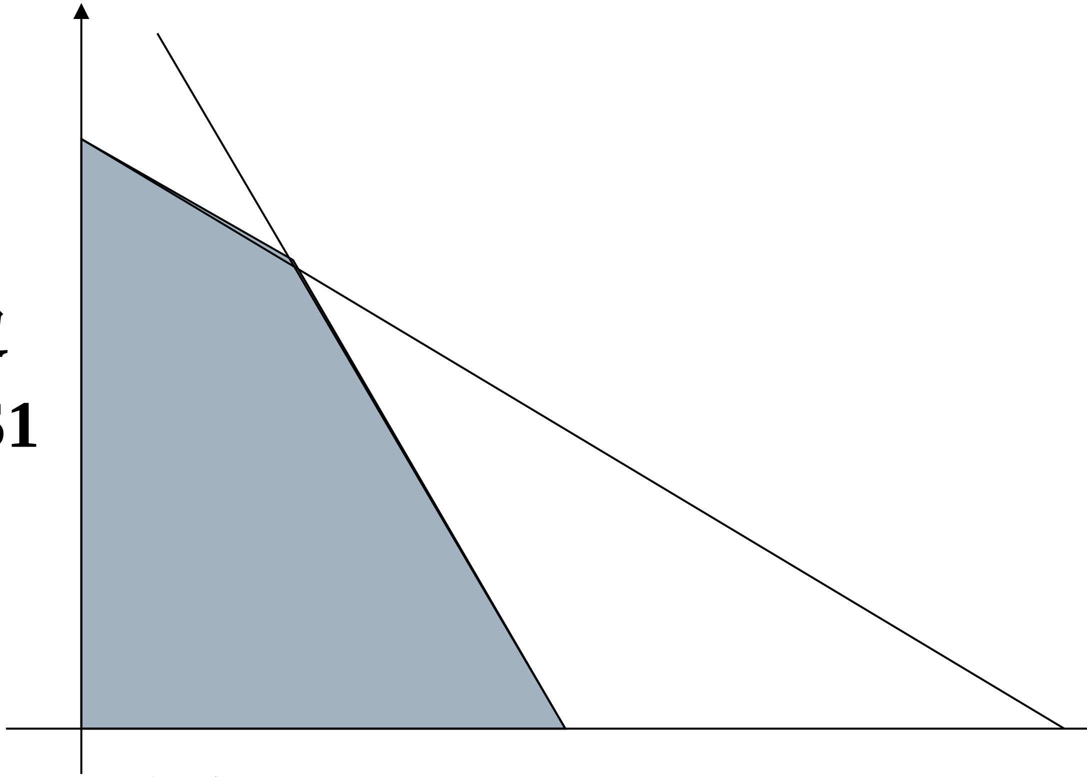
$$10X1 + 5X2 = 100 - S2$$

- 令S1=S2=0，得到基解（4,12,0,0）（可行解）
  - 对应图解法中C点。



例题的基解示意

- 例题的一个基解（4）



➢ 将X2和S1移到方程右边

$$6X1 \qquad\quad = 120 - 8X2 - S1$$

$$10X1 + S2 = 100 - 5X2$$

➢ 令X2=S1=0,得到基解

（20,0,0,-100）S2为负，不是可行解

- 对应图解法中6x1+8x2=120与横轴的交点。

单纯形法简介

- 单纯形法步骤:

步骤1：寻找一个初始可行基解。

步骤2：判断是否为最优解、无界解或无可行解。若是，停止。否则转入下一步。

步骤3：找到一个使目标函数值更好（至少不差）的基可行解，转到步骤2。

单纯形法简介

- 寻找一个初始可行基解:
  - 假如系数矩阵A中有一个m阶单位矩阵，因为标准型中右端项bi>=0, 则将该单位矩阵对应的变量（基变量）留在约束方程左边，其它变量（非基变量）移到右边，并令移到右边的变量为零，就可以得到一个可行基解。因此需要构造m阶单位矩阵。
  - 生产问题例题中，S1、S2所在的列组成可行基，S1、S2为基变量，其它变量X1、X2为非基变量。

单纯形法简介

- 判断是否是最优解

MAX 600X1 + 400X2 + 0 S1 + 0 S2

ST: S1 = 120 - 6X1 - 8X2

S2 = 100 - 10X1 - 5X2

X1, X2, S1, S2 >=0

- 基可行解：（0,0,120,100）对应图中顶点A
- 目标函数值=0。
- 能改进吗？能！因为用非基变量表示的目标函数是:

600X1 + 400X2

系数大于零！如果让X1或X2为基变量可能会增加目标函数值。

单纯形法简介

- 找到一个更好的基可行解
- 选择X1作为基变量（换入变量，因为系数最大）
- 选择S2 作为非基变量（换出变量，因为比值最小）
- ✓ 最小比值法：（基变量变成单位矩阵后）常数项除以换入变量在左端时的系数（大于零），比值最小的方程中的基变量就是换出变量。（为了获得可行解，S1和S2哪个为0时能保证另一个大于等于0呢？）

MAX 600X1 +400X2

ST: S1 = 120 - 6 X1 - 8X2

S2 = 100 - 10 X1 - 5X2

比较 **120/6** 与 **100/10** 哪个小！

北京大学

单纯形法简介

MAX 600X1 + 400X2

ST: S1 = 120 - 6X1 - 8X2

S2 = 100 - 10X1 - 5X2

变为:

MAX 600X1 + 400X2

ST: 6X1 + S1 = 120 - 8X2

10X1 = 100 - 5X2 - S2

单纯形法简介

- 判断是否是最优解

➢ 用非基变量表示目标函数

$$S1 = 60 - 5X2 + 0.6S2$$

$$X1 = 10 - 0.5X2 - 0.1S2$$

令X2=S2=0, 得到：X1=10，S1= 60

基可行解：（10,0,60,0）

600X1 + 400X2

=600（ 10 - 0.5X2 - 0.1S2 ）+ 400X2

=6000＋100X2 - 60S2

目标函数值=6000

➢ 能改进吗？能！因为非基变量X2系数大于零！

如果让X2为基变量可能会增加目标函数值。

单纯形法简介

■ 找到一个更好的基可行解

- 选择X2作为基变量（换入变量）
- 选择S1 作为非基变量（换出变量，因为比值最小）

$$S1 = 60 - 5X2 + 0.6S2$$

$$X1 = 10 - 0.5X2 - 0.1S2$$

比较 60/5 与 10/0.5 哪个小!

- 变为:

MAX 600X1 +400X2

ST: $5X2 = 60 - S1 + 0.6S2$

$X1 + 0.5X2 = 10 - 0.1S2$

单纯形法简介

- **判断是否是最优解**

➢ 用非基变量表示目标函数

X1 = 4 + 0.1S1 - 0.16S2

X2 = 12 - 0.2S1 + 0.12S2

基可行解：（**4,12,0,0**）

600X1 + 400X2

=600（ 4 + 0.1S1 - 0.16S2 ）+ 400（12 - 0.2S1 + 0.12S2）

= 7200 - 20S1 - 48S2

目标函数值=**7200**

➢ 能改进吗？不能！因为S1与S2前面的系数都是负数，再让S1或S2进入基，没有好处。

- **这就是最优解判断标准！**