

§ 1. Что такое многоугольник Ньютона

Диаграмма Ньютона многочлена от двух переменных

Напомним, что *одночленом* от независимых переменных x и y называется функция вида $x^m y^n$, где m и n - неотрицательные целые числа, а *многочленом* от x и y с действительными коэффициентами называется функция $P(x, y)$, заданная формулой

$$P(x, y) = a_1 O_1 + a_2 O_2 + \dots + a_k O_k, \tag{1}$$

где a_1, a_2, \dots, a_k - действительные числа, а O_1, O_2, \dots, O_k - попарно различные одночлены¹⁾. Если в формуле (1) коэффициент a_i отличен от нуля, то говорят, что одночлен O_i *входит* в многочлен $P(x, y)$. Например в многочлен $2 + 3y - \sqrt{2}x^3y^2$ входят одночлены $1, y$ и x^3y^2 , а в многочлен $P(x, y) \equiv 0$ не входит ни один одночлен. Удобно изображать одночлены, входящие в многочлен $P(x, y)$, точками на координатной плоскости: мы отмечаем на этой плоскости точку $M(m_0; n_0)$, если одночлен $x^{m_0} y^{n_0}$ входит в многочлен $P(x, y)$. Тогда каждому ненулевому многочлену $P(x, y)$ мы сопоставляем конечное множество на плоскости Omn - будем обозначать его $D(P)$, - изображающее наглядно одночлены, входящие в $P(x, y)$. Точку плоскости, у которой обе координаты - целые числа, мы будем называть *целой* точкой. Для любого многочлена P множество $D(P)$ состоит только из целых точек, поэтому его удобно рисовать на клетчатой бумаге. Например, множество $D(P)$ для многочлена

$$P(x, y) = xy - y^3 + 3x^3y^2 + 0,5^4 - 2x^3y^4 \tag{2}$$

изображено на рисунке 1. Подчеркнем, что значения ненулевых коэффициентов многочлена P никак не учитываются при построении множества $D(P)$. Это множество обычно называют *диаграммой Ньютона* многочлена P .

Предостережение. Не следует смешивать числовую плоскость **R** - об-

ласть определения многочлена P , с координатной плоскостью Omn , на которой мы рисуем диаграмму Ньютона многочлена P . Точки этих плоскостей имеют разную природу.

Как Ньютон определял «диаграмму Ньютона»

Ньютон тоже отмечал одночлены, входящие в многочлен от переменных x, y , на клетчатой бумаге. Ньютон расчерчивал такую бумагу сам и отмечал не углы клеток, а целые клетки. Вот как он описывает эти построения в письме одному из своих коллег.

«...Для лучшего уразумения этого правила поясню его на следующей диаграмме. Построй прямой угол ВАС; стороны его ВА и АС раздели на равные части и, восставив перпендикуляры, раздели угловую площадь на равные квадраты или параллелограммы, которые отметь вписанными в них измерениями букв x и y (см. рисунок 2). Затем, когда дано уравнение, отметь каким-нибудь знаком параллелограммы, соответствующие всем его членам...»

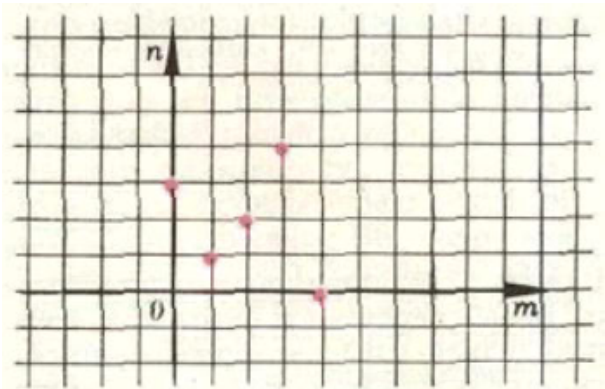


Рис. 1

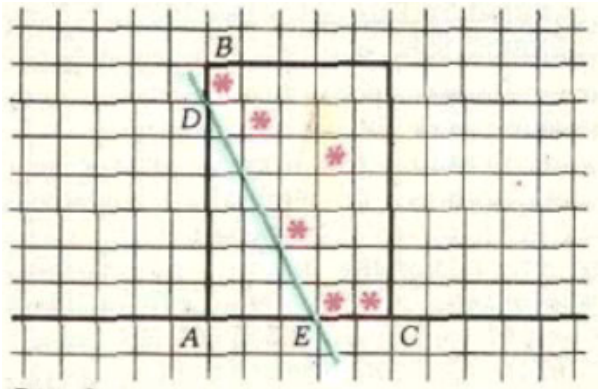


Рис. 2

¹⁾Независимые переменные x и y принимают значения в множестве действительных чисел; таким образом, функция $P(x, y)$ имеет в качестве области определения числовую плоскость, а в качестве множества значений - числовую прямую.