Challenge Problems - Part 1

仇羿彤

2025 年 10 月 5 日

1. 鼓励进行讨论。若你的解答得益于与他人的讨论，请在提交时明确列出所有合作讨论者的姓名。
2. 允许查阅参考资料。任何非原创的内容（包括但不限于定理，性质，甚至是题目的直接解答）均须清晰注明来源，并明确标识引用部分。
3. 严禁使用任何生成式 AI 工具（如 ChatGPT, Gemini, Deepseek 等）。
4. 第八题难度稍大，完成前两问即可获得该题全部分数。

1 题目

题目 1

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, 它的 (i,j) 元的代数余子式记作 A_{ij}。把 $\boldsymbol{A}$ 的每个元素都加上同一个数 t, 得到的矩阵记作 $\boldsymbol{A}(t)=(a_{ij}+t)$。证明:

$$|\boldsymbol{A}(t)|=|\boldsymbol{A}|+t\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}$$

题目 2

给定整数 $n\geq 2$，令 T 为所有元素取自集合 $S=\{1,2,\ldots,2025\}$ 的 $n\times n$ 矩阵的集合。求

$$\sum_{A\in T}\det(A).$$

题目 3

令 $s_k=\sum_{i=1}^{n}x_i^k$ ，求如下矩阵的行列式:

$$S=\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} \end{pmatrix}$$

题目 4

设 $S_1, S_2, \ldots, S_{2^n-1}$ 为集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ 的所有非空子集（按某种顺序排列），令 M 为 $(2^n-1)\times(2^n-1)$ 矩阵，其 (i,j) 元素定义为

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{若} S_i \cap S_j = \emptyset \\ 1 & \text{若} S_i \cap S_j \neq \emptyset \end{cases}$$

计算 M 的行列式。

题目 5

方阵

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{s_1-t_1} & \frac{1}{s_1-t_2} & \cdots & \frac{1}{s_1-t_n} \\ \frac{1}{s_2-t_1} & \frac{1}{s_2-t_2} & \cdots & \frac{1}{s_2-t_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{s_n-t_1} & \frac{1}{s_n-t_2} & \cdots & \frac{1}{s_n-t_n} \end{pmatrix}$$

称为 Cauchy 方阵。计算 C 的行列式。

题目 6

复数方阵

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c_1 \\ c_1 & \cdots & c_{n-1} & c_0 \end{pmatrix}$$

称为循环方阵。计算 $\det(C)$ 。

题目 7

设 M 为如下定义的 $n\times n$ 阶系数矩阵：

$$M = \begin{pmatrix} c_{0,1} & c_{1,1} & \cdots & c_{n-1,1} \\ c_{0,2} & c_{1,2} & \cdots & c_{n-1,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{0,n} & c_{1,n} & \cdots & c_{n-1,n} \end{pmatrix},$$

其中对于 $i=0,1,\ldots,n-1$ 且 $k=1,2,\ldots,n$，有

$$c_{i,k} = \frac{1}{(i+1)(i+2)\cdots(i+k)}.$$

求 M 的行列式。

题目 8

对于一个序列 $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ ，其第 n 阶汉克尔矩阵（Hankel Matrix）H_n 是一个 $n \times n$ 的方阵，其元素由 $(H_n)_{i,j} = a_{i+j}$ 给出（其中 $0 \le i, j \le n-1$ ）。即：

$$H_n = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{2n-2} \end{pmatrix}$$

设 $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ 为第 n 个卡特兰数。请解决如下几个问题：

1. 对于序列 $\{C_k\}_{k=0}^{\infty} = \{1, 1, 2, 5, \ldots\}$，其任意 n 阶汉克尔矩阵的行列式均为 1。
2. 对于“左移一位”的序列 $\{C_{k+1}\}_{k=0}^{\infty} = \{1, 2, 5, 14, \ldots\}$，其任意 n 阶汉克尔矩阵的行列式也均为 1。
3. 求所有满足以下两个条件的实数序列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ：
   (a) 对于任意整数 $n \ge 0$ ，由该序列生成的 $(n+1) \times (n+1)$ 阶汉克尔矩阵 $(a_{i+j})_{0 \le i,j \le n}$ ，其行列式为 1。
   (b) 对于任意整数 $n \ge 1$ ，由序列 $\{a_{k+1}\}_{k=0}^{\infty}$（即原序列左移一位）生成的 $n \times n$ 阶汉克尔矩阵 $(a_{i+j+1})_{0 \le i,j \le n-1}$ ，其行列式为 1 。