第三章　　行列式

目录

目录

§3.0 矩阵的概念和运算初步

矩阵的定义和记号

把 $m \times n$ 个数排成 m 行 n 列形成的矩形数据表叫一个 $m \times n$ 阶矩阵(或称 $m \times n$ 型矩阵, 简称矩阵), 见如下:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

§3.0 矩阵的概念和运算初步

矩阵的定义和记号

把 $m \times n$ 个数排成 m 行 n 列形成的矩形数据表叫一个 $m \times n$ 阶矩阵(或称 $m \times n$ 型矩阵, 简称矩阵), 见如下:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

注意

- 2×6 型矩阵, 6×2 型矩阵, 3×4 型矩阵, 1×12 型矩阵都是不同型号的矩阵.

§3.0 矩阵的概念和运算初步

矩阵的定义和记号

把 $m \times n$ 个数排成 m 行 n 列形成的矩形数据表叫一个 $m \times n$ 阶矩阵(或称 $m \times n$ 型矩阵, 简称矩阵), 见如下:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

注意

- 2×6 型矩阵, 6×2 型矩阵, 3×4 型矩阵, 1×12 型矩阵都是不同型号的矩阵.
- $a_{i,j}$ 在不引起歧义的情况下, 可以简记作 a_{ij}.

矩阵相等

- 记号 $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$ 或者 $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}$.

矩阵相等

- 记号 $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ 或者 $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n}$.
- 常用大写英文字母表示矩阵. 例如, 记号 A 或者 $A_{m\times n}$ 表示一个矩阵. 注意这里 $A_{m\times n}$ 用于提示 A 的型号.

矩阵相等

- 记号 $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ 或者 $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n}$.
- 常用大写英文字母表示矩阵. 例如, 记号 A 或者 $A_{m\times n}$ 表示一个矩阵. 注意这里 $A_{m\times n}$ 用于提示 A 的型号.
- 也用下面的记号表示 A 的型号: $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$

矩阵相等

- 记号 $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$ 或者 $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}$.
- 常用大写英文字母表示矩阵. 例如, 记号 A 或者 $A_{m\times n}$ 表示一个矩阵. 注意这里 $A_{m\times n}$ 用于提示 A 的型号.
- 也用下面的记号表示 A 的型号: $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $B\in\mathbb{C}^{m\times n}$.

矩阵相等

- 记号 $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ 或者 $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n}$.
- 常用大写英文字母表示矩阵. 例如, 记号 A 或者 $A_{m\times n}$ 表示一个矩阵. 注意这里 $A_{m\times n}$ 用于提示 A 的型号.
- 也用下面的记号表示 A 的型号: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$.

两个矩阵什么情况下是相等?

设 A, B 是两个矩阵. 若 A, B 同型号, 且对应元素(什么叫对应元素)都相等, 则称 A, B 相等, 记作 $A = B$.

特殊矩阵

特殊型号矩阵.

- 称 $n \times n$ 型矩阵为 n 阶方阵(简称方阵).

特殊矩阵

特殊型号矩阵.

- 称 $n \times n$ 型矩阵为 n 阶方阵(简称方阵).
- 称 $1 \times n$ 型矩阵为 n 维行向量(简称行向量, 在不引起歧义的情况下也可以简称向量).

特殊矩阵

特殊型号矩阵.

- 称 $n \times n$ 型矩阵为 n 阶方阵(简称方阵).
- 称 $1 \times n$ 型矩阵为 n 维行向量(简称行向量, 在不引起歧义的情况下也可以简称向量).
- 称 $n \times 1$ 型矩阵为 n 维列向量(简称列向量, 在不引起歧义的情况下也可以简称向量).

特殊矩阵

特殊型号矩阵.

- 称 $n \times n$ 型矩阵为 n 阶方阵(简称方阵).
- 称 $1 \times n$ 型矩阵为 n 维行向量(简称行向量, 在不引起歧义的情况下也可以简称向量).
- 称 $n \times 1$ 型矩阵为 n 维列向量(简称列向量, 在不引起歧义的情况下也可以简称向量).

- 对于 n 阶方阵, 也经常用这样的记号: $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

特殊矩阵

- 对于 n 阶向量, 也经常用希腊字母或小写字母(或者小写字母黑体):

特殊矩阵

- 对于 n 阶向量, 也经常用希腊字母或小写字母(或者小写字母黑体):
- 例如 $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$,

特殊矩阵

- 对于 n 阶向量, 也经常用希腊字母或小写字母(或者小写字母黑体):
- 例如 $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$,
- 又如 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$,

特殊矩阵

- 对于 n 阶向量, 也经常用希腊字母或小写字母(或者小写字母黑体):
- 例如 $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$,
- 又如 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$,
- 又如 $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ 等.

特殊矩阵

两个特殊矩阵

- 零矩阵(零向量), 记号 $O_{m\times n}$, O.

特殊矩阵

两个特殊矩阵

- 零矩阵(零向量), 记号 $O_{m\times n}$, O.
- 零向量, $\mathbf{0}$.

特殊矩阵

两个特殊矩阵

- 零矩阵(零向量), 记号 $O_{m\times n}$, O.
- 零向量, $\mathbf{0}$.
- 单位矩阵 I_n ：指的是 n 阶方阵, 且对角线(什么是对角线)上元素为 1, 其余元素全部为 0. 简记作 I. (有的教材上用记号 E_n, E.)

特殊矩阵

两个特殊矩阵

- 零矩阵(零向量), 记号 $O_{m\times n}$, O.
- 零向量, $\mathbf{0}$.
- 单位矩阵 I_n : 指的是 n 阶方阵, 且对角线(什么是对角线)上元素为 1, 其余元素全部为 0. 简记作 I. (有的教材上用记号 E_n, E.)

注意:

- 单位矩阵一定是方阵.

特殊矩阵

两个特殊矩阵

- 零矩阵(零向量), 记号 $O_{m\times n}$, O.
- 零向量, $\mathbf{0}$.
- 单位矩阵 I_n : 指的是 n 阶方阵, 且对角线(什么是对角线)上元素为 1, 其余元素全部为 0. 简记作 I. (有的教材上用记号 E_n, E.)

注意:

- 单位矩阵一定是方阵.
- 问: $I_1 =?$.

特殊矩阵

其它的一些特殊矩阵:

- 对角矩阵.

特殊矩阵

其它的一些特殊矩阵:

- 对角矩阵.
- 上三角矩阵.

特殊矩阵

其它的一些特殊矩阵:

- 对角矩阵.
- 上三角矩阵.
- 下三角矩阵.

特殊矩阵

其它的一些特殊矩阵:

- 对角矩阵.
- 上三角矩阵.
- 下三角矩阵.
- 全一矩阵.

矩阵的运算:

矩阵的加法、减法[前提同型号]

设 $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}$，$B=(b_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}$. 则定义 $A+B$, $A-B$ 分别为

矩阵的运算:

矩阵的加法、减法[前提同型号]

设 $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}$，$B=(b_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}$. 则定义 $A+B$, $A-B$ 分别为

$$A+B=(a_{i,j}+b_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}$$

与

$$A-B=(a_{i,j}-b_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}.$$

矩阵的运算:

矩阵的加法、减法[前提同型号]

设 $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}$, $B=(b_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}$. 则定义 $A+B$, $A-B$ 分别为

$$A+B=(a_{i,j}+b_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}$$

与

$$A-B=(a_{i,j}-b_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}.$$

注意:

- 不同型号的矩阵不能做加法和减法!

矩阵的运算:

矩阵的乘法[前提要求是什么?]

设 $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant t}$, $B=(b_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant t,1\leqslant j\leqslant n}$. 则定义 $A\times B$ (常常简记为 AB)为

矩阵的运算:

矩阵的乘法[前提要求是什么?]

设 $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant t}$, $B=(b_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant t,1\leqslant j\leqslant n}$. 则定义 $A\times B$ (常常简记为 AB)为

$$AB=\left(\sum_{k=1}^{t} a_{i,k}b_{k,j}\right)_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}.$$

矩阵的运算:

矩阵的乘法[前提要求是什么?]

设 $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant t}$, $B=(b_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant t,1\leqslant j\leqslant n}$. 则定义 $A\times B$ (常常简记为 AB)为

$$AB=\left(\sum_{k=1}^{t}a_{i,k}b_{k,j}\right)_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}.$$

即令 $c_{i,j}=\sum\limits_{k=1}^{t}a_{i,k}b_{k,j}$. 则

$$AB=(c_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}.$$

矩阵的运算:

矩阵的乘法[前提要求是什么?]

设 $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant t}$, $B=(b_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant t,1\leqslant j\leqslant n}$. 则定义 $A\times B$ (常常简记为 AB)为

$$AB=\left(\sum_{k=1}^{t}a_{i,k}b_{k,j}\right)_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}.$$

即令 $c_{i,j}=\sum\limits_{k=1}^{t}a_{i,k}b_{k,j}$. 则

$$AB=(c_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}.$$

注意:

- 不符号型号要求的矩阵不能做乘法!

矩阵的运算:

- 设 $\alpha = (1,2,3,4,5)$, $\beta = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

矩阵的运算:

- 设 $\alpha = (1,2,3,4,5)$, $\beta = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.
- 问 $\alpha\beta$ 是否有意义? 如果没有, 为什么? 如果有, 乘积是什么?

矩阵的运算:

- 设 $\alpha=(1,2,3,4,5)$, $\beta=\begin{pmatrix}3\\1\\5\\2\\-4\end{pmatrix}$.
- 问 $\alpha\beta$ 是否有意义? 如果没有, 为什么? 如果有, 乘积是什么?
- 问 $\beta\alpha$ 是否有意义? 如果没有, 为什么? 如果有, 乘积是什么?

矩阵的运算：例子

例 1

设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & -3 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -2 & -5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$.

分别计算:

(1) $A + B$,

(2) $B + A$,

(3) $(A + B) + C$,

(4) $A + (B + C)$.

矩阵的运算：例子

例 2

设 $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 6\\ 5 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 2 & -3\\ -2 & -7\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ -1 & 1 & 2 & -2\end{pmatrix}$.

分别计算 $(A+B)C$ 与 $AC+BC$.

例 3

设 $A=\begin{pmatrix}3&2\\4&6\\5&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6&3\\2&-3\\-2&-7\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\end{pmatrix}$.

分别计算 $C(A+B)$ 与 $CA+CB$.

矩阵的运算：例子

例 4

设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$. 分别计算 AB 与 BA.

矩阵的运算：例子

例 5

设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\\1&0\end{pmatrix}$. 分别计算 AB 与 BA.

矩阵的运算：例子

例 6

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. 分别计算 AB 与 BA.

矩阵的运算：例子

例 7

设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 2\end{pmatrix}$. 分别计算 AB 与 BA.

矩阵的运算：例子

例 8

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

分别计算 $(AB)C$ 与 $A(BC)$.

矩阵的运算：例子

例 9

设

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

计算 $A\mathbf{x}$.

矩阵的运算：例子

例 10

设

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

(1) 分别计算 $O_{t\times m}A$ 与 $AO_{n\times s}$

(2) 分别计算 AI_n 与 I_mA.

矩阵的运算

总结

关于矩阵的运算, 特别是乘法, 你能总结出哪些结论?

矩阵的运算

运算律

在运算有意义的前提下, 以下关于矩阵的运算律成立.

- (1) $A+B=B+A$;

矩阵的运算

运算律

在运算有意义的前提下，以下关于矩阵的运算律成立.

- (1) $A+B=B+A$;
- (2) $(A+B)+C=A+(B+C)$;

矩阵的运算

运算律

在运算有意义的前提下，以下关于矩阵的运算律成立.

- (1) $A + B = B + A$;
- (2) $(A + B) + C = A + (B + C)$;
- (3) $(AB)C = A(BC)$;

矩阵的运算

运算律

在运算有意义的前提下，以下关于矩阵的运算律成立.

- (1) $A + B = B + A$;
- (2) $(A + B) + C = A + (B + C)$;
- (3) $(AB)C = A(BC)$;
- (4) $(A + B)C = AC + BC$; $C(A + B) = CA + CB$.

矩阵的运算

运算律

在运算有意义的前提下, 以下关于矩阵的运算律成立.

- (1) $A+B=B+A$;
- (2) $(A+B)+C=A+(B+C)$;
- (3) $(AB)C=A(BC)$;
- (4) $(A+B)C=AC+BC$; $C(A+B)=CA+CB$.

注意: 矩阵乘法一般意义下并无乘法交换律!

例 11

设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ 都是 m 维列向量.

- (1) $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ 与 $B = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ 是什么型号的矩阵?

例 11

设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ 都是 m 维列向量.

- (1) $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ 与 $B = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ 是什么型号的矩阵?
- (2) $A + B = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$ 是否成立?

例 12

设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 都是 t 维行向量, 而 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ 都是 t 维列向量.

- (1) $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$ 与 $B = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ 是什么型号的矩阵?

例 12

设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 都是 t 维行向量, 而 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ 都是 t 维列向量.

- (1) $A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}$ 与 $B=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$ 是什么型号的矩阵?
- (2) $AB=$

例 12

设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 都是 t 维行向量, 而 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ 都是 t 维列向量.

- (1) $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$ 与 $B = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ 是什么型号的矩阵?
- (2) $AB = (\alpha_i \beta_j)_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n}$ 是否成立?

分块矩阵的运算

- 分块矩阵的运算和注意事项！

数乘

数乘

设 $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}$. 设 λ 是一个数. 则定义 λA (或者 $A\lambda$)为

数乘

数乘

设 $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}$. 设 λ 是一个数. 则定义 λA (或者 $A\lambda$)为

$$\lambda A=(\lambda a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}.$$

数乘

设 $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}$. 设 λ 是一个数. 则定义 λA (或者 $A\lambda$)为

$$\lambda A=(\lambda a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}.$$

- 数乘一般都写成: λA

数乘

数乘

设 $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}$. 设 λ 是一个数. 则定义 λA (或者 $A\lambda$)为

$$\lambda A=(\lambda a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}.$$

- 数乘一般都写成：λA
- λA, $(\lambda I_n)A$, $A(\lambda I_m)$ 有什么区别和联系？

数乘

数乘

设 $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}$. 设 λ 是一个数. 则定义 λA (或者 $A\lambda$)为

$$\lambda A=(\lambda a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}.$$

- 数乘一般都写成: λA
- λA, $(\lambda I_n)A$, $A(\lambda I_m)$ 有什么区别和联系?
- 称 λI_n 为数量矩阵.

数乘

例 13

- 设 $\alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\beta = (1, 2, 4, 5)$.

数乘

例 13

- 设 $\alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\beta = (1, 2, 4, 5)$.
- 求 $\alpha\beta\alpha\beta\alpha\beta$.

例 14

- 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 6 & -9 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$.

数乘

例 14

- 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 6 & -9 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$.
- 求 A^6.

数乘

例 14

- 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 6 & -9 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$.
- 求 A^6. 求 A^n.

例题-矩阵的方幂

例 15

设 $A=\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$. 求 A^{10}.

例题-矩阵的方幂

例 16

- 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

例题-矩阵的方幂

例 16

- 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 求 $A^{10} - 2A^9$.

目录

- 第 0 节: 矩阵的概念和运算初步
- 第 1 节: 行列式的定义
- 第 2 节: 行列式的性质
- 第 3 节: 行列式的完全展开
- 第 4 节: 克莱姆法则
- 第 5 节: 例题

行列式的定义[定义3.1.1]

设 $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$

行列式的定义[定义3.1.1]

设 $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$.

- 当 $n=1$ 时, 称 $a_{1,1}$ 为 A 的行列式. (行列式记号为 $\det(A)$.)

行列式的定义[定义3.1.1]

设 $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$.

- 当 $n = 1$ 时, 称 $a_{1,1}$ 为 A 的行列式. (行列式记号为 $\det(A)$.)
- 当 $n \geqslant 2$ 时, A 的行列式

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,1}(-1)^{i+1}M_{i,1},$$

其中, $M_{i,j}$ 表示删除 A 的第 i 行和第 j 列得到的 $n-1$ 阶方阵的行列式.

行列式的定义

记号

- 上述 $M_{i,j}$ 叫做余子式.

行列式的定义

记号

- 上述 $M_{i,j}$ 叫做余子式.
- 令 $A_{i,j} = (-1)^{i+j}M_{i,j}$, 称为代数余子式.

行列式的定义

记号

- 上述 $M_{i,j}$ 叫做余子式.
- 令 $A_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$, 称为代数余子式.
- 用代数余子式的记号, 定义也可以写成

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,1} A_{i,1}.$$

行列式的定义

记号

- 上述 $M_{i,j}$ 叫做余子式.
- 令 $A_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$, 称为代数余子式.
- 用代数余子式的记号, 定义也可以写成

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,1} A_{i,1}.$$

- 定义中的式子也称为"按第一列展开".

行列式的记号

行列式的记号

设 $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$.

- 则 A 的行列式 $\det(A)$ 也记作: $|A|$,

行列式的记号

设 $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$.

- 则 A 的行列式 $\det(A)$ 也记作：$|A|$,
- 或者

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

行列式的计算

例 1[例 3.1.1]

求

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

行列式的计算

例 1[例 3.1.1]

求

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

例 2[例 3.1.3]

求

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

行列式的计算

例 3

求

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & -2 & 7 \end{vmatrix}.$$

例 3

求
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & -2 & 7 \end{vmatrix}.$$

例 4

求
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{以及} \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

行列式的计算

例 5

求
$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{vmatrix}.$$

行列式的计算

例 5

求

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{vmatrix}.$$

例 6

求

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

目录

行列式的计算(按任意列展开):

§3.2 行列式的性质

行列式的计算(按任意列展开):

定理[定理 3.1.1]

设 $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$. 则对 $1 \leqslant k \leqslant n$ 都有

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k}(-1)^{i+k} M_{i,k}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} A_{i,k}.$$

行列式的计算(按行展开)

定理[定理 3.1.2]

设 $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$. 则对 $1 \leqslant k \leqslant n$ 都有

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}(-1)^{k+j} M_{k,j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} A_{k,j}. \end{aligned}$$

行列式的基本性质

引入 A 的转置 A^T 如下:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{n,2} \\ \vdots & & & \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

行列式的基本性质

引入 A 的转置 A^T 如下:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{n,2} \\ \vdots & & & \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

性质 1

记号如上.

$$\det(A^T) = \det(A).$$

行列式的基本性质

性质 2

- 交换两行, 行列式互为相反数. (交换两不同行!)

行列式的基本性质

性质 2

- 交换两行, 行列式互为相反数. (交换两不同行!)
- 交换两列, 行列式互为相反数. (交换两不同列!)

行列式的基本性质

性质 2

- 交换两行, 行列式互为相反数. (交换两不同行!)
- 交换两列, 行列式互为相反数. (交换两不同列!)

性质 3

将方阵 A 的某一行乘以数 λ 变成方阵 B. 则

$$\det(B) = \lambda \det(A).$$

行列式的基本性质

性质 4

设 A, B, C 除了第 i 行, 其余行对应相同, 并且 C 的第 i 行行向量等于 A 与 B 的第 i 行行向量之和. 则

$$|C| = |A| + |B|.$$

行列式的基本性质

性质 4

设 A, B, C 除了第 i 行，其余行对应相同，并且 C 的第 i 行行向量等于 A 与 B 的第 i 行行向量之和. 则

$$|C| = |A| + |B|.$$

性质 5

- 若两行成比例，则行列式为零. (两不同行!)

行列式的基本性质

性质 4

设 A, B, C 除了第 i 行, 其余行对应相同, 并且 C 的第 i 行行向量等于 A 与 B 的第 i 行行向量之和. 则

$$|C| = |A| + |B|.$$

性质 5

- 若两行成比例, 则行列式为零. (两不同行!)
- 若两列成比例, 则行列式为零. (两不同列!)

行列式的基本性质

性质 4

设 A, B, C 除了第 i 行, 其余行对应相同, 并且 C 的第 i 行行向量等于 A 与 B 的第 i 行行向量之和. 则

$$|C| = |A| + |B|.$$

性质 5

- 若两行成比例, 则行列式为零. (两不同行!)
- 若两列成比例, 则行列式为零. (两不同列!)

性质 6

将某一行乘以数 λ 加到另一行上. 则行列式不变.

例 1

设

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 & 6 \\ -11 & 2 & -3 & 5 \\ 9 & 1 & 3 & 6 \\ -6 & 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

求

$$M_{1,1} + M_{2,1} + M_{3,1} + M_{4,1} = ?$$

例 2

设

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 11 & 2 & 6 \\ 13 & 12 & -2 & 5 \\ -11 & 3 & 2 & 6 \\ -5 & -4 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

求

$$M_{1,1} + M_{2,1} + M_{3,1} + M_{4,1} = ?$$

例 3

设

$$A=\begin{pmatrix} 9 & 11 & 2 & 6 \\ 13 & 12 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -5 & -4 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

求

$$A_{2,1}+2A_{2,2}+3A_{2,4}=?$$

例 4

设

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 11 & 2 & 6 \\ 13 & 12 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ -5 & -4 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

求

$$M_{2,1} + 2M_{2,2} + 3M_{2,4} = ?$$

例 5

设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \qquad \text{求 } |A| = ?.$$

行列式的计算

例 5

设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{pmatrix}\qquad 求\ |A|=?.$$

例 6

设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & & & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{pmatrix}.$$

求 $|A|$.

例 7

设

$$A=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}.$$

求 $|A|$.

行列式的计算

例 8

设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x_5^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 & x_5^3 \\ x_1^5 & x_2^5 & x_3^5 & x_4^5 & x_5^5 \end{pmatrix}.$$

求 $|A|$.

例 9

设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x_5^2 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 & x_5^4 \\ x_1^5 & x_2^5 & x_3^5 & x_4^5 & x_5^5 \end{pmatrix}.$$

求 $|A|$.

目录

§3.3 行列式的完全展开

- 设 $s_1 < s_2 < \cdots < s_n$ 都是正整数.
- 称 $(s_1 s_2 \cdots s_n)$ 是顺序排列. (可记为 $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$, 在不引起歧义的情况下可省略逗号)
- 对换的定义.

§3.3 行列式的完全展开

- 设 $s_1 < s_2 < \cdots < s_n$ 都是正整数.
- 称 $(s_1 s_2 \cdots s_n)$ 是顺序排列. (可记为 $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$, 在不引起歧义的情况下可省略逗号)
- 对换的定义.

定义[奇排列、偶排列]

设 $(s_1 s_2 \cdots s_n)$ 的一个排列 $(s_1' s_2' \cdots s_n')$ 经过 m 次对换可变成顺序排列.

- (1) 若 m 是奇数, 则称排列 $(s_1' s_2' \cdots s_n')$ 是一个奇排列.
- (2) 若 m 是偶数, 则称排列 $(s_1' s_2' \cdots s_n')$ 是一个偶排列.

奇排列、偶排列

特殊情形的奇、偶排列

设 $(t_1t_2\cdots t_n)$ 是 $(1,2,\cdots,n)$ 的一个排列, 且经过 m 次对换可变成顺序排列 $(1,2,\cdots,n)$.

- (1) 若 m 是奇数, 则称排列 $(t_1t_2\cdots t_n)$ 是一个奇排列.
- (2) 若 m 是偶数, 则称排列 $(t_1t_2\cdots t_n)$ 是一个偶排列.

奇排列、偶排列

特殊情形的奇、偶排列

设 $(t_1t_2\cdots t_n)$ 是 $(1,2,\cdots,n)$ 的一个排列, 且经过 m 次对换可变成顺序排列 $(1,2,\cdots,n)$.

- (1) 若 m 是奇数, 则称排列 $(t_1t_2\cdots t_n)$ 是一个奇排列.
- (2) 若 m 是偶数, 则称排列 $(t_1t_2\cdots t_n)$ 是一个偶排列.

- 思考: 上述定义与 m 的选取是否有关.

奇排列、偶排列

令

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\prod_{1\leqslant j<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

奇排列、偶排列

令

$$f(x_1,\dots,x_n)=\prod_{1\leqslant j<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

- 设 $(t_1t_2\cdots t_n)$ 是 $(1,2,\cdots,n)$ 的一个排列.

奇排列、偶排列

令

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\prod_{1\leqslant j<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

- 设 $(t_1t_2\cdots t_n)$ 是 $(1,2,\cdots,n)$ 的一个排列.
- 问: $f(t_1,\ldots,t_n)=?$.

奇排列、偶排列

令

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\prod_{1\leqslant j<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

- 设 $(t_1t_2\cdots t_n)$ 是 $(1,2,\cdots,n)$ 的一个排列.
- 问: $f(t_1,\ldots,t_n)=?$.
- 设 $(t_1't_2'\cdots t_n')$ 是 $t_1t_2\cdots t_n$ 经过一次对换而来.
  问 $f(t_1',\ldots,t_n')$ 与 $f(t_1,\ldots,t_n)$ 有什么关系?

奇排列、偶排列

引理 1

设 $(t_1t_2\cdots t_n)$ 是 $(1,2,\cdots,n)$ 的一个排列, 且经过 m 次对换可变成顺序排列 $(1,2,\cdots,n)$.

- (1) 若 m 是奇数, 则 $f(t_1,\ldots,t_n)=-f(1,\ldots,n)$.
- (2) 若 m 是偶数, 则 $f(t_1,\ldots,t_n)=f(1,\ldots,n)$.

奇排列、偶排列

- 设 $\mathbf{e}_j(1 \leqslant j \leqslant n)$ 是第 j 个分量为 1, 其余分量为 0 的列向量.

奇排列、偶排列

- 设 $\mathbf{e}_j (1 \leqslant j \leqslant n)$ 是第 j 个分量为 1, 其余分量为 0 的列向量.
- 设 $(t_1 t_2 \cdots t_n)$ 是 $(1, 2, \cdots, n)$ 的一个排列.

奇排列、偶排列

- 设 $\mathbf{e}_j (1 \leqslant j \leqslant n)$ 是第 j 个分量为 1, 其余分量为 0 的列向量.
- 设 $(t_1 t_2 \cdots t_n)$ 是 $(1, 2, \cdots, n)$ 的一个排列.
- 问: $\det(\mathbf{e}_{t_1}, \ldots, \mathbf{e}_{t_n}) = ?$.

奇排列、偶排列

- 设 $\mathbf{e}_j (1 \leqslant j \leqslant n)$ 是第 j 个分量为 1, 其余分量为 0 的列向量.
- 设 $(t_1 t_2 \cdots t_n)$ 是 $(1, 2, \cdots, n)$ 的一个排列.
- 问: $\det(\mathbf{e}_{t_1}, \ldots, \mathbf{e}_{t_n}) = ?$.
- 设 $(t_1' t_2' \cdots t_n')$ 是 $(t_1 t_2 \cdots t_n)$ 经过一次对换而来.
  问 $\det(\mathbf{e}_{t_1'}, \ldots, \mathbf{e}_{t_n'})$ 与 $\det(\mathbf{e}_{t_1}, \ldots, \mathbf{e}_{t_n})$ 有什么关系?

引理 2

设 $(t_1t_2\cdots t_n)$ 是 $(1,2,\cdots,n)$ 的一个排列, 且经过 m 次对换可变成顺序排列 $(1,2,\cdots,n)$.

- (1) 若 m 是奇数, 则 $\det(\mathbf{e}_{t_1},\ldots,\mathbf{e}_{t_n}) = -\det(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)$.
- (2) 若 m 是偶数, 则 $\det(\mathbf{e}_{t_1},\ldots,\mathbf{e}_{t_n}) = \det(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)$.

奇排列、偶排列

引理 3

设 $(t_1 t_2 \cdots t_n)$ 是 $(1, 2, \cdots, n)$ 的一个排列, 且经过 m 次对换可变成顺序排列 $(1, 2, \cdots, n)$.
设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 是 n 维列向量. 则

- (1) 若 m 是奇数, 则 $\det(\alpha_{t_1}, \ldots, \alpha_{t_n}) = -\det(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.
- (2) 若 m 是偶数, 则 $\det(\alpha_{t_1}, \ldots, \alpha_{t_n}) = \det(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

行列式的完全展开

引理 4

设 $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. 则

$$\det(A)=\sum_{t_1,t_2,\ldots,t_n\in\{1,2,\ldots,n\}} a_{t_1,1}a_{t_2,2}\cdots a_{t_n,n}\det(\mathbf{e}_{t_1},\ldots,\mathbf{e}_{t_n}).$$

引理 4

设 $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. 则

$$\det(A)=\sum_{t_1,t_2,\ldots,t_n\in\{1,2,\ldots,n\}} a_{t_1,1}a_{t_2,2}\cdots a_{t_n,n}\det(\mathbf{e}_{t_1},\ldots,\mathbf{e}_{t_n}).$$

设 S_n 表示所有 $1,2,\ldots,n$ 的排列构成的集合.

行列式的完全展开

引理 4

设 $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. 则

$$\det(A)=\sum_{t_1,t_2,\ldots,t_n\in\{1,2,\ldots,n\}} a_{t_1,1}a_{t_2,2}\cdots a_{t_n,n}\det(\mathbf{e}_{t_1},\ldots,\mathbf{e}_{t_n}).$$

设 S_n 表示所有 $1,2,\ldots,n$ 的排列构成的集合.

引理 5

设 $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. 则

$$\det(A)=\sum_{(t_1,t_2,\ldots,t_n)\in S_n} a_{t_1,1}a_{t_2,2}\cdots a_{t_n,n}\det(\mathbf{e}_{t_1},\ldots,\mathbf{e}_{t_n}).$$

行列式的完全展开

引理 6

设 $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. 则

$$\det(A)=\sum_{(t_1,t_2,\ldots,t_n)\in S_n} a_{1,t_1}a_{2,t_2}\cdots a_{n,t_n}\det(\mathbf{e}_{t_1},\ldots,\mathbf{e}_{t_n}).$$

行列式的完全展开

引理 6'

设 $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. 则

$$\det(A)=\sum_{(t_1,t_2,\ldots,t_n)\in S_n}\operatorname{sign}(t_1,t_2,\ldots,t_n)a_{1,t_1}a_{2,t_2}\cdots a_{n,t_n},$$

其中

$$\operatorname{sign}(t_1,t_2,\ldots,t_n)=\begin{cases}1 & \text{若 }(t_1,t_2,\ldots,t_n)\text{ 是偶排列}\\ -1 & \text{若 }(t_1,t_2,\ldots,t_n)\text{ 是奇排列}\end{cases}$$

排列的逆序数

- 什么是排列的逆序数?

排列的逆序数

- 什么是排列的逆序数?
- $(1,2,7,4,5,6,3,8)$ 的逆序数是多少?

排列的逆序数

- 什么是排列的逆序数?
- $(1,2,7,4,5,6,3,8)$ 的逆序数是多少?
- $(n,1,2,3,\cdots,n-2,n-1)$ 的逆序数是多少?

排列的逆序数

- 什么是排列的逆序数?
- $(1, 2, 7, 4, 5, 6, 3, 8)$ 的逆序数是多少?
- $(n, 1, 2, 3, \cdots, n-2, n-1)$ 的逆序数是多少?
- $(n, n-1, \cdots, 3, 2, 1)$ 的逆序数是多少?

排列的逆序数

- 什么是排列的逆序数?
- $(1,2,7,4,5,6,3,8)$ 的逆序数是多少?
- $(n,1,2,3,\cdots,n-2,n-1)$ 的逆序数是多少?
- $(n,n-1,\cdots,3,2,1)$ 的逆序数是多少?

引理 7

排列的逆序数的奇偶性与排列的奇偶性一致.

方阵的乘积

引理 8

- 设 $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
- 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 分别是 A 的第 1 列, 第 2 列, 直到第 n 列对应的 n 维列向量.
- 设 $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

则

$$AB = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n),$$

其中, $\gamma_1 = b_{1,1}\alpha_1 + b_{2,1}\alpha_2 + \cdots + b_{n,1}\alpha_n$,

$\gamma_2 = b_{1,2}\alpha_1 + b_{2,2}\alpha_2 + \cdots + b_{n,2}\alpha_n$,

$\ldots$, $\gamma_n = b_{1,n}\alpha_1 + b_{2,n}\alpha_2 + \cdots + b_{n,n}\alpha_n$.

引理 9

- 设 $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
- 设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 分别是 A 的第 1 列, 第 2 列, 直到第 n 列对应的 n 维列向量.
- 设 $B=(b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

则

$$\det(AB)=\sum_{t_1,t_2,\ldots,t_n\in\{1,2,\ldots,n\}} b_{t_1,1}b_{t_2,2}\cdots b_{t_n,n}\det(\alpha_{t_1},\ldots,\alpha_{t_n}).$$

进一步又可以写成

$$\det(AB) = \sum_{(t_1,t_2,\ldots,t_n)\in S_n} b_{t_1,1} b_{t_2,2} \cdots b_{t_n,n} \det(\alpha_{t_1}, \ldots, \alpha_{t_n}).$$

方阵的乘积

进一步又可以写成

$$\det(AB) = \sum_{(t_1,t_2,\ldots,t_n)\in S_n} b_{t_1,1}b_{t_2,2}\cdots b_{t_n,n}\det(\alpha_{t_1},\ldots,\alpha_{t_n}).$$

而此时,

$$\det(\alpha_{t_1},\ldots,\alpha_{t_n}) = \mathbf{sign}(t_1,t_2,\ldots,t_n)\times\det(\alpha_1,\ldots,\alpha_n).$$

进一步又可以写成

$$\det(AB) = \sum_{(t_1,t_2,\ldots,t_n)\in S_n} b_{t_1,1}b_{t_2,2}\cdots b_{t_n,n}\det(\alpha_{t_1},\ldots,\alpha_{t_n}).$$

而此时,

$$\det(\alpha_{t_1},\ldots,\alpha_{t_n}) = \mathbf{sign}(t_1,t_2,\ldots,t_n)\times\det(\alpha_1,\ldots,\alpha_n).$$

所以, 有

方阵的乘积

定理[方阵乘积的行列式]

- 设 A, B 都是 n 阶方阵.

则

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

定理[方阵乘积的行列式]

- 设 A, B 都是 n 阶方阵.

则

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

特别,

$$\det(AB) = \det(BA).$$

判断题

判断题

- 设 $A = A_{m\times n}, B = B_{n\times m}$.

则

$$\det(AB) = \det(BA).$$

例题

例 1

求下述行列式

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,m} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{m+1,1} & a_{m+1,2} & \cdots & a_{m+1,m} & a_{m+1,m+1} & a_{m+1,m+2} & \cdots & a_{m+1,n} \\ a_{m+2,1} & a_{m+2,2} & \cdots & a_{m+2,m} & a_{m+2,m+1} & a_{m+2,m+2} & \cdots & a_{m+2,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} & a_{n,m+1} & a_{n,m+2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

例题

例 2

设 D 为上页行列式. 则

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,m} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_{m+1,m+1} & a_{m+1,m+2} & \cdots & a_{m+1,n} \\ a_{m+2,m+1} & a_{m+2,m+2} & \cdots & a_{m+2,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,m+1} & a_{n,m+2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

目录

§3.4 克莱姆法则

定理[定理3.4.1]

设 $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. 则

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}A_{j,k}=\begin{cases}\det(A) & \text{若 } i=j\\ 0 & \text{若 } i\neq j\end{cases}.$$

同样也有,

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}A_{k,j}=\begin{cases}\det(A) & \text{若 } i=j\\ 0 & \text{若 } i\neq j\end{cases}.$$

克莱姆法则

定理[定理3.4.2]

设 $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. 设 $\det(A)\neq 0$. 则线性方程组

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\cdots+a_{1,n}x_n=b_1\\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+\cdots+a_{2,n}x_n=b_2\\ \qquad\vdots\\ a_{n,1}x_1+a_{n,2}x_2+\cdots+a_{n,n}x_n=b_n \end{cases}$$

有且仅有一组解. 并且该唯一解为

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\det(A)},\ \ldots\ ,x_n=\frac{\Delta_n}{\det(A)},$$

其中 Δ_j 是把系数矩阵 A 的第 j 列换成增广矩阵最后一列得到的 n 阶方阵的行列式.

克莱姆法则

例[例 3.4.1]

用克莱姆法则解下面的方程组

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

伴随矩阵

定义[伴随矩阵]

设 $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. 设 $A_{i,j}$ 是对应的代数余子式. 令 A 的伴随矩阵如下:

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{1,1} & \color{red}{A_{2,1}} & \cdots & A_{n,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & \cdots & A_{n,2} \\ \vdots & & & \\ A_{1,n} & A_{2,n} & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

伴随矩阵

定义[伴随矩阵]

设 $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. 设 $A_{i,j}$ 是对应的代数余子式. 令 A 的伴随矩阵如下:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{1,1} & {\color{red}A_{2,1}} & \cdots & A_{n,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & \cdots & A_{n,2} \\ \vdots & & & \\ A_{1,n} & A_{2,n} & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

定理

设 $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. 设 A^* 是 A 的伴随矩阵. 则

$$AA^* = A^*A = \det(A)I_n.$$

目录

例 1

$$f(x)=\begin{vmatrix} x+1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 13 & x-2 & 31 & 14 & 7 & 9 \\ 5 & 2 & x+5 & 52 & 32 & 13 \\ 1 & 2 & 3 & x+4 & 5 & 6 \\ 42 & 2 & -11 & -4 & x+7 & -9 \\ -4 & -9 & -6 & 21 & 19 & x \end{vmatrix}$$

例 1

$$f(x)=\begin{vmatrix} x+1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 13 & x-2 & 31 & 14 & 7 & 9 \\ 5 & 2 & x+5 & 52 & 32 & 13 \\ 1 & 2 & 3 & x+4 & 5 & 6 \\ 42 & 2 & -11 & -4 & x+7 & -9 \\ -4 & -9 & -6 & 21 & 19 & x \end{vmatrix}$$

- 作为关于 x 的多项式, $f(x)$ 的次数是多少?

例 1

$$f(x)=\begin{vmatrix} x+1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 13 & x-2 & 31 & 14 & 7 & 9 \\ 5 & 2 & x+5 & 52 & 32 & 13 \\ 1 & 2 & 3 & x+4 & 5 & 6 \\ 42 & 2 & -11 & -4 & x+7 & -9 \\ -4 & -9 & -6 & 21 & 19 & x \end{vmatrix}$$

- 作为关于 x 的多项式, $f(x)$ 的次数是多少?
- $f(x)$ 的 x^6 项的系数是多少?

§3.5 例题

例 1

$$f(x)=\begin{vmatrix} x+1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 13 & x-2 & 31 & 14 & 7 & 9 \\ 5 & 2 & x+5 & 52 & 32 & 13 \\ 1 & 2 & 3 & x+4 & 5 & 6 \\ 42 & 2 & -11 & -4 & x+7 & -9 \\ -4 & -9 & -6 & 21 & 19 & x \end{vmatrix}$$

- 作为关于 x 的多项式, $f(x)$ 的次数是多少?
- $f(x)$ 的 x^6 项的系数是多少?
- $f(x)$ 的 x^5 项的系数是多少?

例 1

$$f(x)=\begin{vmatrix} x+1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 13 & x-2 & 31 & 14 & 7 & 9 \\ 5 & 2 & x+5 & 52 & 32 & 13 \\ 1 & 2 & 3 & x+4 & 5 & 6 \\ 42 & 2 & -11 & -4 & x+7 & -9 \\ -4 & -9 & -6 & 21 & 19 & x \end{vmatrix}$$

- 作为关于 x 的多项式, $f(x)$ 的次数是多少?
- $f(x)$ 的 x^6 项的系数是多少?
- $f(x)$ 的 x^5 项的系数是多少?
- $f(x)$ 的常数项是多少?

例题

例 2

- 设 A 为 4 阶方阵. 设 $B = 3A$.

例题

例 2

- 设 A 为 4 阶方阵. 设 $B = 3A$.
- 已知 $\det(A) = 2$. 则 $\det(B) = ?$

例题

例 2

- 设 A 为 4 阶方阵. 设 $B = 3A$.
- 已知 $\det(A) = 2$. 则 $\det(B) = ?$

例 3

- 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 都是 4 维列向量. 设 $\det(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_4) = 3$.

例题

例 2

- 设 A 为 4 阶方阵. 设 $B = 3A$.
- 已知 $\det(A) = 2$. 则 $\det(B) = ?$

例 3

- 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 都是 4 维列向量. 设 $\det(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_4) = 3$.
- 设 $B = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + 3\alpha_3, 2\alpha_1 - 3\alpha_3 + 4\alpha_4, -\alpha_1 + 5\alpha_2 + \alpha_4)$.

例题

例 2

- 设 A 为 4 阶方阵. 设 $B = 3A$.
- 已知 $\det(A) = 2$. 则 $\det(B) =?$

例 3

- 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 都是 4 维列向量. 设 $\det(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_4) = 3$.
- 设 $B = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + 3\alpha_3, 2\alpha_1 - 3\alpha_3 + 4\alpha_4, -\alpha_1 + 5\alpha_2 + \alpha_4)$.
- 求 $\det(B) =?$