第二章　线性方程组

线性方程组的例子

例 2.1.1

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

线性方程组的例子

例 2.1.2

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 19x_4 = 6 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 - 24x_4 = 7 \end{cases}$$

线性方程组的例子

例 2.1.3

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

线性方程组的一些问题

- 是否存在解?

线性方程组的一些问题

- 是否存在解? (如有解, 有多少解?)

线性方程组的一些问题

- 是否存在解? (如有解, 有多少解?)
- 如何求线性方程组的解?

线性方程组的一些问题

- 是否存在解? (如有解, 有多少解?)
- 如何求线性方程组的解?
- 解的公式?

线性方程组的一些问题

- 是否存在解? (如有解, 有多少解?)
- 如何求线性方程组的解?
- 解的公式?
- 解的结构.

线性方程组的一些问题

- 是否存在解? (如有解, 有多少解?)
- 如何求线性方程组的解?
- 解的公式?
- 解的结构.
- 是否符合实际需要?

初等变换

三个初等变换

- 交换两个方程.

初等变换

三个初等变换

- 交换两个方程.
- 某个方程乘以一个非零常数.

初等变换

三个初等变换

- 交换两个方程.
- 某个方程乘以一个非零常数.
- 把某个方程乘以一个常数加到另一方程上.

初等变换

三个初等变换

- 交换两个方程.
- 某个方程乘以一个非零常数.
- 把某个方程乘以一个常数加到另一方程上.

书中记号: $(i) \leftrightarrow (j)$; $\lambda(i)$; $\lambda(i) \to (j)$.

初等变换

三个初等变换

- 交换两个方程.
- 某个方程乘以一个非零常数.
- 把某个方程乘以一个常数加到另一方程上.

书中记号: $(i) \leftrightarrow (j)$; $\lambda(i)$; $\lambda(i) \to (j)$.

思考一个问题:

原线性方程组与经过初等变换后的线性方程组是否有相同的解?

线性方程组的增广矩阵

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

线性方程组的增广矩阵

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

上述线性方程组的增广矩阵是:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix}$$

增广矩阵和系数矩阵

上述线性方程组的系数矩阵是:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

增广矩阵和系数矩阵

上述线性方程组的系数矩阵是:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

三个初等行变换

- 交换两行.

增广矩阵和系数矩阵

上述线性方程组的系数矩阵是:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

三个初等行变换

- 交换两行.
- 某行乘以一个非零常数.

增广矩阵和系数矩阵

上述线性方程组的系数矩阵是:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

三个初等行变换

- 交换两行.
- 某行乘以一个非零常数.
- 把某行乘以一个常数加到另一行上.

阶梯形矩阵的最简形式或标准形式

目标:

什么是阶梯形矩阵的最简形式或标准形式?

阶梯形矩阵的最简形式或标准形式

目标:

什么是阶梯形矩阵的最简形式或标准形式?

增广矩阵在行变换下的“最简形式”：

$$\begin{pmatrix} \color{red}{c_{1,1}} & \cdots & c_{1,j_2} & \cdots & c_{1,j_3} & \cdots & c_{1,j_r} & \cdots & c_{1,n} & d_1 \\ 0 & \cdots & \color{red}{c_{2,j_2}} & \cdots & c_{2,j_3} & \cdots & c_{2,j_r} & \cdots & c_{2,n} & d_2 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \color{red}{c_{3,j_3}} & \cdots & c_{3,j_r} & \cdots & c_{3,n} & d_3 \\ \vdots & & & & & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \color{red}{c_{r,j_r}} & \cdots & c_{r,n} & d_r \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \color{blue}{d_{r+1}} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \end{pmatrix}.$$

如何从最简形式判断解的情况

定理 2.3.1

设线性方程组的增广矩阵的最简形式如前所述.

- Case 1. 当 $d_{r+1} \neq 0$ 时, 原线性方程组无解.

如何从最简形式判断解的情况

定理 2.3.1

设线性方程组的增广矩阵的最简形式如前所述.

- Case 1. 当 $d_{r+1} \neq 0$ 时, 原线性方程组无解.
- Case 2. 当 $d_{r+1} = 0$ 时, 原线性方程组有解.

如何从最简形式判断解的情况

定理 2.3.1

设线性方程组的增广矩阵的最简形式如前所述.

- Case 1. 当 $d_{r+1} \neq 0$ 时, 原线性方程组无解.
- Case 2. 当 $d_{r+1} = 0$ 时, 原线性方程组有解.
- Case 2.1. 当 $d_{r+1} = 0$ 且 $r = n$ 时, 原线性方程组有唯一解.

如何从最简形式判断解的情况

定理 2.3.1

设线性方程组的增广矩阵的最简形式如前所述.

- Case 1. 当 $d_{r+1} \neq 0$ 时, 原线性方程组无解.
- Case 2. 当 $d_{r+1} = 0$ 时, 原线性方程组有解.
- Case 2.1. 当 $d_{r+1} = 0$ 且 $r = n$ 时, 原线性方程组有唯一解.
- Case 2.2. 当 $d_{r+1} = 0$ 且 $r < n$ 时, 原线性方程组有无穷多解.

齐次线性方程组的解

- 齐次线性方程组的非零解指的是变量不全为零 的解.

推论 2.3.2

对于齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = 0 \end{cases}.$$

若 $m < n$, 则该齐次线性方程组一定有非零解.

例题

例 2.3.1

当 λ 为何值时, 下面的线性方程组有解, 并求其通解.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \lambda \end{cases}$$

例题

例

当 a 为何值时, 下面的线性方程组无解? 当 a 为何值时, 下面的线性方程组有唯一解?

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - ax_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$$

最简形式中的 r 是否唯一

- 同一增广矩阵在不同初等行变换下的最简形式中的 r 是否唯一?

最简形式中的 r 是否唯一

- 同一增广矩阵在不同初等行变换下的最简形式中的 r 是否唯一?

定理

同一增广矩阵在不同初等行变换下的最简形式中的 r 是唯一的.

最简形式中的 r 是否唯一

- 同一增广矩阵在不同初等行变换下的最简形式中的 r 是否唯一?

定理

同一增广矩阵在不同初等行变换下的最简形式中的 r 是唯一的.

- 上述结论, 目前解释起来略有麻烦. 以后会解释清楚.