# Challenge Problems - Part 1

仇羿彤

2025 年 10 月 14 日

**此解答尚未完工，7，8 两题会补充其他解法。**

1. 鼓励进行讨论。若你的解答得益于与他人的讨论，请在提交时明确列出所有合作讨论者的姓名。
2. 允许查阅参考资料。任何非原创的内容（包括但不限于定理，性质，甚至是题目的直接解答）均须清晰注明来源，并明确标识引用部分。
3. 严禁使用任何生成式 AI 工具（如 ChatGPT, Gemini, Deepseek 等）。
4. 第八题难度稍大，完成前两问即可获得该题全部分数。

## 1 题目

**题目 1**

设 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, 它的 $(i, j)$ 元的代数余子式记作 $A_{ij}$。把 $\boldsymbol{A}$ 的每个元素都加上同一个数 $t$, 得到的矩阵记作 $\boldsymbol{A}(t) = (a_{ij} + t)$。证明:

$$|\boldsymbol{A}(t)| = |\boldsymbol{A}| + t \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij}$$

**解答**

设矩阵 $A$ 的列向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ，即

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

令 $j$ 为所有元素都为 1 的 $n$ 维列向量，即 $j = (1, 1, \ldots, 1)^T$ 。根据题意，矩阵 $A(t) = (a_{ij} + t)$ 的第 $k$ 个列向量可以表示为 $\alpha_k + tj$ 。因此，矩阵 $A(t)$ 可以写作：

$$A(t) = (\alpha_1 + tj, \alpha_2 + tj, \ldots, \alpha_n + tj)$$

我们要计算的行列式就是

$$|A(t)| = |\alpha_1 + tj, \alpha_2 + tj, \ldots, \alpha_n + tj|$$

行列式对其每一列都是线性的。我们可以逐列应用这个性质，将 $|A(t)|$ 展开成 $2^n$ 个行列式的和。展开后的每一项都是从原行列式的第 $k$ 列选择 $\alpha_k$ 或 $tj$ 组合而成的。我们可以根据 $t$ 的幂次来对这些展开项进行分类：

1. $t^0$ 的项（常数项）这对应于展开时，每一列都选择 $\alpha_k$ 的情况。这种情况只有一项：

$$|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n| = |A|$$

2. $t^1$ 的项（一次项）这对应于展开时，有且仅有一列选择 $tj$ ，而其他 $n-1$ 列都选择 $\alpha_k$ 的情况。我们将 $t$ 从行列式中提出来，并将所有这些项相加：

$$t\sum_{k=1}^{n}|\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1},j,\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_n|$$

现在，我们来计算其中的任意一项 $|\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1},j,\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_n|$ 。这个行列式表示的是将矩阵 $A$ 的第 $k$ 列替换为全 1 向量 $j$ 后得到的矩阵的行列式。我们对这个行列式按第 $k$ 列进行代数余子式展开。由于第 $k$ 列的元素全都是 1 ，其展开式为：

$$\sum_{i=1}^{n}1\cdot A_{ik}=\sum_{i=1}^{n}A_{ik}$$

其中 $A_{ik}$ 是原始矩阵 $A$ 的元素 $(i,k)$ 的代数余子式。因此，$t^1$ 的所有项加起来的总和为：

$$t\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}A_{ik}\right)=t\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{ik}$$

3. $t^k$ 的项（当 $k\geq 2$ 时）这对应于展开时，至少有两列选择了 $tj$ 的情况。例如，对于 $t^2$ 的项，我们选择了第 $j_1$ 列和第 $j_2$ 列 $(j_1\neq j_2)$ 为 $tj$ 。该项的形式为 $t^2|\ldots,j,\ldots,j,\ldots|$ 。根据行列式的一个基本性质，若一个行列式中有两列（或两行）完全相同，则该行列式的值为 0 。由于在这些项中，都至少包含两个相同的列向量 $j$ ，所以这些行列式的值全部为 0 。因此，所有 $t^k$（当 $k\geq 2$ ）的项的系数都为 0 。

将以上所有项相加，我们得到 $|A(t)|$ 的完整表达式：

$$|A(t)|=|A|+t\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}$$

**题目 2**

给定整数 $n\geq 2$，令 $T$ 为所有元素取自集合 $S=\{1,2,\ldots,2025\}$ 的 $n\times n$ 矩阵的集合。求

$$\sum_{A\in T}\det(A).$$

**解答**

一个 $n\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$ 的行列式定义：

$$\det(A)=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{i,\sigma(i)}$$

其中 $S_n$ 是集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ 上的所有置换的集合，$\operatorname{sgn}(\sigma)$ 是置换 $\sigma$ 的逆序数（对于偶置换为 +1，对于奇置换为 -1）。我们要求的总和是 $\sum_{A\in T}\det(A)$ 。将行列式公式代入，得到：

$$\sum_{A\in T}\left(\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{i,\sigma(i)}\right)$$

由于这两个和都是有限和，我们可以交换求和的顺序：

$$\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\left(\sum_{A\in T}\prod_{i=1}^{n}a_{i,\sigma(i)}\right)$$

现在，我们来分析内部的和，对于一个固定的置换 $\sigma$ ：

$$\sum_{A\in T}\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

这个和是对集合 $T$ 中所有可能的矩阵 $A$ 进行的。一个矩阵 $A$ 由其 $n^2$ 个元素 $a_{ij}$ 定义，其中每个元素都独立地从集合 $S=\{1,2,\ldots,2025\}$ 中选取。因此，我们可以将对所有矩阵 $A$ 的求和分解为对每个矩阵元素 $a_{ij}$ 的独立求和：

$$\sum_{a_{11}\in S}\sum_{a_{12}\in S}\cdots\sum_{a_{nn}\in S}\left(\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}\right)$$

在这个表达式中，乘积 $\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$ 只涉及 $n$ 个特定的矩阵元素：$a_{1,\sigma(1)},a_{2,\sigma(2)},\ldots,a_{n,\sigma(n)}$ 。而其他的 $n^2-n$ 个矩阵元素并没有出现在这个乘积中。我们可以把和式重新分组，将与乘积相关的项和无关的项分开：

$$\left(\sum_{a_{1,\sigma(1)}\in S}\cdots\sum_{a_{n,\sigma(n)}\in S}\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}\right)\times\left(\sum_{\text{其他}a_{ij}\in S}1\right)$$

由于涉及的 $n$ 个元素 $a_{i,\sigma(i)}$ 的求和是相互独立的，第一部分可以写成：

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{a_{i,\sigma(i)}\in S} a_{i,\sigma(i)}\right)$$

令 $K=\sum_{s\in S} s=1+2+\cdots+2025$ 。这是一个等差数列的和。

$$K=\frac{2025\times(2025+1)}{2}=2025\times1013$$

因此，第一部分的值是 $K\times K\times\cdots\times K$（共 $n$ 次），即 $K^n$ 。对于第二部分，它包含了对所有不属于乘积项的 $n^2-n$ 个元素的求和。对每一个这样的元素 $a_{ij}$ ，$\sum_{a_{ij}\in S}1=|S|=2025$ 。因为有 $n^2-n$ 个这样的元素，所以第二部分的值是 $2025^{n^2-n}$ 。将两部分相乘，我们得到对于任何一个固定的置换 $\sigma$ ，内部和的值都是：

$$\sum_{A\in T}\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}=K^n\cdot 2025^{n^2-n}$$

现在我们回到交换顺序后的总和表达式：

$$\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\left(K^n\cdot 2025^{n^2-n}\right)=\left(K^n\cdot 2025^{n^2-n}\right)\left(\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\right)$$

由于偶置换的数量是 $\frac{n!}{2}$ ，奇置换的数量也是 $\frac{n!}{2}$ 。因此，

$$\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)=\left(\frac{n!}{2}\right)\times(+1)+\left(\frac{n!}{2}\right)\times(-1)=\frac{n!}{2}-\frac{n!}{2}=0$$

所以最终答案也是 0。

**题目 3**

令 $s_k=\sum_{i=1}^n x_i^k$ ，求如下矩阵的行列式：

$$S=\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} \end{pmatrix}$$

**解答**

首先，我们观察矩阵 $S$ 的任意一个元素 $S_{ij}$（第 $i$ 行，第 $j$ 列）。根据矩阵的构造，$S_{ij}=s_{i+j-2}$ 。根据 $s_k$ 的定义，我们有：

$$S_{ij}=s_{i+j-2}=\sum_{k=1}^n x_k^{i+j-2}$$

我们可以将指数拆开：

$$S_{ij}=\sum_{k=1}^n x_k^{i-1}\cdot x_k^{j-1}$$

这个求和的形式强烈暗示了矩阵乘法。让我们定义一个 $n\times n$ 的范德蒙德矩阵 $V$ 如下：

$$V=V\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

这个矩阵的元素可以表示为 $V_{ij}=x_i^{j-1}$ 。现在，我们来看它的转置矩阵 $V^T$ ：

$$V^T=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

这个矩阵的元素可以表示为 $\left(V^T\right)_{ij}=V_{ji}=x_j^{i-1}$ 。那么简单的计算可以得到：

$$\left(V^TV\right)_{ij}=\sum_{k=1}^n\left(x_k^{i-1}\right)\left(x_k^{j-1}\right)=\sum_{k=1}^n x_k^{i-1+j-1}=\sum_{k=1}^n x_k^{i+j-2}$$

从而 $S=V^TV$，那么：

$$\det(S)=\left(\prod_{1\le i<j\le n}\left(x_j-x_i\right)\right)^2=\prod_{1\le i<j\le n}\left(x_j-x_i\right)^2$$

这个结果也被称为与变量 $x_1,\ldots,x_n$ 相关的判别式（Discriminant）。

**题目 4**

设 $S_1, S_2, \ldots, S_{2^n-1}$ 为集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的所有非空子集（按某种顺序排列），令 $M$ 为 $(2^n-1)\times(2^n-1)$ 矩阵，其 $(i,j)$ 元素定义为

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & 若 S_i \cap S_j = \emptyset \\ 1 & 若 S_i \cap S_j \neq \emptyset \end{cases}$$

计算 $M$ 的行列式。

**解答**

首先，我们注意到矩阵 $M_n$ 的定义不依赖于子集 $S_i$ 的具体排列顺序。改变子集的顺序相当于对矩阵的行和列应用相同的置换，因此行列式的值与子集的排列顺序无关。这允许我们为了方便计算而选择一个特定的顺序。

接下来我们使用数学归纳法，这要求我们把 $M_n$ 与 $M_{n-1}$ 联系起来，我们对 $X_n$ 的非空子集进行如下划分：

1. A 类：$X_{n-1}$ 的所有非空子集。有 $N_{n-1} = 2^{n-1} - 1$ 个。
2. B 类：单元素集合 $\{n\}$ 。只有 1 个。
3. C 类：形如 $S' \cup \{n\}$ 的集合，其中 $S'$ 是 $X_{n-1}$ 的一个非空子集。有 $N_{n-1} = 2^{n-1} - 1$ 个。

我们按照 (A,B,C) 的顺序来排列 $X_n$ 的子集，以此来构建 $M_n$ 的分块矩阵形式。令 $N' = 2^{n-1} - 1$ 。

$$M_n = \begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{pmatrix}$$

现在我们分析每个分块：

1. A 块（$N' \times N'$）：$A_{ij} = 1 \iff S'_i \cap S'_j \neq \emptyset$（其中 $S'_i, S'_j$ 属于 A 类）。这正好是 $M_{n-1}$ 的定义。所以 $A = M_{n-1}$。
2. B 块（$N' \times 1$）：$B_{i1} = 1 \iff S'_i \cap \{n\} \neq \emptyset$。因为 $S'_i \subset X_{n-1}$，它不包含元素 $n$，所以交集永远是空集。因此 $B$ 是一个全零列向量 0。
3. C 块（$N' \times N'$）：$C_{ij} = 1 \iff S'_i \cap (S'_j \cup \{n\}) \neq \emptyset$。这个交集等于 $S'_i \cap S'_j$。所以这块也等于 $M_{n-1}$。$C = M_{n-1}$。
4. D 块（$1 \times N'$）：（B 类与 A 类）$D$ 是 $B$ 的转置，所以是全零行向量 $0^T$。
5. E 块（$1 \times 1$）：（B 类与 B 类）$E_{11} = 1 \iff \{n\} \cap \{n\} \neq \emptyset$。这为真，所以 $E = (1)$。
6. F 块（$1 \times N'$）：（B 类与 C 类）$F_{1j} = 1 \iff \{n\} \cap (S'_j \cup \{n\}) \neq \emptyset$。交集为 $\{n\}$，非空。所以 $F$ 是全一行向量 $1^T$。
7. G 块（$N' \times N'$）：（C 类与 A 类）$G$ 是 $C$ 的转置，$G = M_{n-1}^T = M_{n-1}$。
8. H 块（$N' \times 1$）：（C 类与 B 类）$H$ 是 $F$ 的转置，$H = 1$。
9. I 块（$N' \times N'$）：（C 类与 C 类）$I_{ij} = 1 \iff (S'_i \cup \{n\}) \cap (S'_j \cup \{n\}) \neq \emptyset$。这个交集是 $(S'_i \cap S'_j) \cup \{n\}$，它永远包含元素 $n$，所以永远非空。因此 $I$ 是全一矩阵，记为 $J$。

综上，我们得到分块矩阵：

$$M_n = \begin{pmatrix} M_{n-1} & \mathbf{0} & M_{n-1} \\ \mathbf{0}^T & 1 & \mathbf{1}^T \\ M_{n-1} & \mathbf{1} & J \end{pmatrix}$$

为了计算其行列式，我们进行行变换。将第一行（块）从第三行（块）中减去（即 $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$ ）：

$$\det(M_n) = \det \begin{pmatrix} M_{n-1} & \mathbf{0} & M_{n-1} \\ \mathbf{0}^T & 1 & \mathbf{1}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & J - M_{n-1} \end{pmatrix}$$

这是一个上三角分块矩阵，其行列式等于对角分块的行列式的乘积：

$$\det(M_n) = \det(M_{n-1}) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{1}^T \\ \mathbf{1} & J - M_{n-1} \end{pmatrix}$$

而

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{1}^T \\ \mathbf{1} & J - M_{n-1} \end{pmatrix} = \det(1) \cdot \det\left((J - M_{n-1}) - \mathbf{1}(1)^{-1}\mathbf{1}^T\right)$$

注意到 $\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T$ 正是全一矩阵 $J$ 。

$$= \det(J - M_{n-1} - J) = \det(-M_{n-1})$$

矩阵 $-M_{n-1}$ 的大小是 $N' \times N' = \left(2^{n-1} - 1\right) \times \left(2^{n-1} - 1\right)$ 。因此：

$$\det(-M_{n-1}) = (-1)^{2^{n-1}-1} \det(M_{n-1})$$

将此结果代回，我们得到一个递推关系：

$$\det(M_n) = \det(M_{n-1}) \cdot (-\det(M_{n-1})) = -\left(\det(M_{n-1})\right)^2$$

结合所有情况，我们得到最终答案：

$$\det(M) = \begin{cases} 1 & 若 n = 1 \\ -1 & 若 n \geq 2 \end{cases}$$

**题目 5**

方阵

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{s_1 - t_1} & \frac{1}{s_1 - t_2} & \cdots & \frac{1}{s_1 - t_n} \\ \frac{1}{s_2 - t_1} & \frac{1}{s_2 - t_2} & \cdots & \frac{1}{s_2 - t_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{s_n - t_1} & \frac{1}{s_n - t_2} & \cdots & \frac{1}{s_n - t_n} \end{pmatrix}$$

称为 Cauchy 方阵。计算 $C$ 的行列式。

**解答**

考虑将第 $j$ 列 $(C_j)$ 减去第 $n$ 列 $(C_n)$ ，其中 $j = 1, 2, \ldots, n-1$ 。行列式的值保持不变。新矩阵的元素

$C'_{ij}$ 为:

$$C'_{ij} = \frac{1}{s_i - t_j} - \frac{1}{s_i - t_n} = \frac{(s_i - t_n) - (s_i - t_j)}{(s_i - t_j)(s_i - t_n)} = \frac{t_n - t_j}{(s_i - t_j)(s_i - t_n)}$$

对于 $j = 1, 2, \ldots, n-1$。第 $n$ 列保持不变。现在行列式变为:

$$\det(C) = \begin{vmatrix} \frac{t_n - t_1}{(s_1 - t_1)(s_1 - t_n)} & \cdots & \frac{t_n - t_{n-1}}{(s_1 - t_{n-1})(s_1 - t_n)} & \frac{1}{s_1 - t_n} \\ \frac{t_n - t_1}{(s_2 - t_1)(s_2 - t_n)} & \cdots & \frac{t_n - t_{n-1}}{(s_2 - t_{n-1})(s_2 - t_n)} & \frac{1}{s_2 - t_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \frac{t_n - t_1}{(s_n - t_1)(s_n - t_n)} & \cdots & \frac{t_n - t_{n-1}}{(s_n - t_{n-1})(s_n - t_n)} & \frac{1}{s_n - t_n} \end{vmatrix}$$

提取公因式:

$$\det(C) = \left( \prod_{j=1}^{n-1} (t_n - t_j) \right) \left( \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{s_i - t_n} \right) \begin{vmatrix} \frac{1}{s_1 - t_1} & \cdots & \frac{1}{s_1 - t_{n-1}} & 1 \\ \frac{1}{s_2 - t_1} & \cdots & \frac{1}{s_2 - t_{n-1}} & 1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{s_n - t_1} & \cdots & \frac{1}{s_n - t_{n-1}} & 1 \end{vmatrix}$$

现在我们对行进行类似的操作,以简化最后一列。将第 $n$ 行($R_n$)减去其他各行($R_i$),其中 $i = 1, 2, \ldots, n-1$。这不会改变行列式的值。对于 $i = 1, \ldots, n-1$ ,新矩阵的元素 $C''_{ij}$ (对于 $j = 1, \ldots, n-1$ )为:

$$C''_{ij} = \frac{1}{s_i - t_j} - \frac{1}{s_n - t_j} = \frac{(s_n - t_j) - (s_i - t_j)}{(s_i - t_j)(s_n - t_j)} = \frac{s_n - s_i}{(s_i - t_j)(s_n - t_j)}$$

最后一列的元素(除了最后一个)都变为 $0$ 。行列式变为:

$$\begin{vmatrix} \frac{s_n - s_1}{(s_1 - t_1)(s_n - t_1)} & \cdots & \frac{s_n - s_1}{(s_1 - t_{n-1})(s_n - t_{n-1})} & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \frac{s_n - s_{n-1}}{(s_{n-1} - t_1)(s_n - t_1)} & \cdots & \frac{s_n - s_{n-1}}{(s_{n-1} - t_{n-1})(s_n - t_{n-1})} & 0 \\ \frac{1}{s_n - t_1} & \cdots & \frac{1}{s_n - t_{n-1}} & 1 \end{vmatrix}$$

继续提取公因式并与之前提出的因子合并:

$$\det(C) = \frac{\prod_{j=1}^{n-1} (t_n - t_j) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} (s_n - s_i)}{\prod_{i=1}^{n} (s_i - t_n) \cdot \prod_{j=1}^{n-1} (s_n - t_j)} \times \begin{vmatrix} C'_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{v} & 1 \end{vmatrix}$$

其中 $C'_{n-1}$ 是一个 $(n-1) \times (n-1)$ 的矩阵,其元素为 $\frac{1}{s_i - t_j} (i, j = 1, \ldots, n-1)$ ,这正是一个 $(n-1)$ 阶的柯西矩阵。对这个分块矩阵的行列式进行展开,我们得到:

$$\det(C) = \frac{\prod_{j=1}^{n-1} (t_n - t_j) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} (s_i - s_n)}{\prod_{i=1}^{n} (s_i - t_n) \cdot \prod_{j=1}^{n-1} (t_j - s_n)} \cdot \det(C_{n-1})$$

根据归纳法可以得到:

$$\det(C) = \frac{\prod_{1 \le i < j \le n} (s_j - s_i)(t_j - t_i)}{\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} (s_i - t_j)}$$

**题目 6**

复数方阵

$$C=\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c_1 \\ c_1 & \cdots & c_{n-1} & c_0 \end{pmatrix}$$

称为循环方阵。计算 $\det(C)$ 。

**解答**

由循环矩阵第一行的元素 $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ ，定义多项式:

$$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_{n-1}x^{n-1}$$

令 $\omega=e^{2\pi i/n}$ 为本原 $n$ 次单位根，则所有 $n$ 次单位根为:

$$\omega^k=e^{2\pi ik/n}, \quad k=0,1,\ldots,n-1,$$

定义 $n\times n$ 范德蒙德矩阵 $V$ 如下:

$$V=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \cdots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \cdots & \left(\omega^{n-1}\right)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \cdots & \left(\omega^{n-1}\right)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

其第 $(i,j)$ 项为 $\omega^{(i-1)(j-1)}$ (行、列从 1 开始计数)。考虑矩阵乘积 $CV$ 的第 $(i,j)$ 项。由于 $C$ 是循环矩阵，其第 $i$ 行为 $(c_{-i+1}, c_{-i+2}, \ldots, c_{-i+n})$（下标模 $n$ ），因此:

$$(CV)_{ij}=\sum_{k=0}^{n-1} c_{(k-i+1) \bmod n}\cdot\omega^{(j-1)k}.$$

通过变量替换并利用 $\omega^n=1$ ，可得:

$$(CV)_{ij}=\omega^{(i-1)(j-1)}f\left(\omega^{j-1}\right).$$

因此，整个乘积矩阵为:

$$CV=\begin{pmatrix} f(1) & f(\omega) & \cdots & f\left(\omega^{n-1}\right) \\ f(1) & \omega f(\omega) & \cdots & \omega^{n-1}f\left(\omega^{n-1}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(1) & \omega^{n-1}f(\omega) & \cdots & \left(\omega^{n-1}\right)^{n-1}f\left(\omega^{n-1}\right) \end{pmatrix}.$$

注意到该矩阵可分解为:

$$CV=V\cdot D,$$

其中 $D$ 是对角矩阵:

$$D=\operatorname{diag}\left(f(1), f(\omega), f\left(\omega^2\right), \ldots, f\left(\omega^{n-1}\right)\right).$$

对等式 $CV=VD$ 两边取行列式，利用行列式的乘法性质:

$$\det(C)\cdot\det(V)=\det(V)\cdot\det(D)$$

由于范德蒙德矩阵 $V$ 的行列式为：

$$\det(V)=\prod_{0\le i<j\le n-1}\left(\omega^j-\omega^i\right)\neq 0,$$

故可两边同时除以 $\det(V)$，得到：

$$\det(C)=\det(D)=\prod_{k=0}^{n-1}f\left(\omega^k\right).$$

**题目 7**

设 $M$ 为如下定义的 $n\times n$ 阶系数矩阵：

$$M=\begin{pmatrix} c_{0,1} & c_{1,1} & \cdots & c_{n-1,1}\\ c_{0,2} & c_{1,2} & \cdots & c_{n-1,2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{0,n} & c_{1,n} & \cdots & c_{n-1,n}\end{pmatrix},$$

其中对于 $i=0,1,\dots,n-1$ 且 $k=1,2,\dots,n$，有

$$c_{i,k}=\frac{1}{(i+1)(i+2)\cdots(i+k)}.$$

求 $M$ 的行列式。

**解答**

解法一（整理自吴宇轩同学的解答）：注意到 $c_{i,k}$ ：

$$\begin{aligned}|M|&=\begin{vmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n}\\ \frac{1}{1\cdot 2} & \frac{1}{2\cdot 3} & \cdots & \frac{1}{n\cdot(n+1)}\\ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} & \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} & \cdots & \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{1}{1\cdot 2\cdots n} & \frac{1}{2\cdot 3\cdots(n+1)} & \cdots & \frac{1}{n(n+1)\cdots(2n-1)}\end{vmatrix}\\ &=\frac{1}{(n-1)!}\begin{vmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n}\\ \frac{1}{1}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\\ \frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3} & \frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4} & \cdots & \frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{1}{1\cdot 2\cdots(n-1)}-\frac{1}{2\cdot 3\cdots n} & \cdots & \cdots & \frac{1}{n\cdots(2n-2)}-\frac{1}{(n+1)\cdots(2n-1)}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

观察这个公式，第 2 行及之后的行中的元素是两项相减，并且前面一项（被减数）恰好是该元素上方的元素，这意味着如果我们用 $k+1$ 行减去第 $k$ 行，就会留下剩下那一部分。于是，从最后一行开始，依次用该行减去它上面的那一行，得到：

$$|M|=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\begin{vmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{(n+1)}\\ \frac{1}{2\cdot 3} & \frac{1}{3\cdot 4} & \cdots & \frac{1}{(n+1)(n+2)}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{1}{2\cdot 3\cdots n} & \cdots & \cdots & \frac{1}{(n+1)\cdots(2n-1)}\end{vmatrix}$$

接下来，我们对从第三行开始的元素重复上述的过程，即裂项，提取公因式，相邻行相减，提取负号，最

后可以得到：

$$|M| = \frac{(-1)^{n-1}\cdot(-1)^{n-2}\cdots(-1)^1}{(n-1)!\cdot(n-2)!\cdots(1)!}\begin{vmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{vmatrix}$$

最后需要计算的方阵恰好是一个 Cauchy 方阵，直接使用结论可以得到：

$$|M| = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{\Pi_{k=0}^{n-1}(k!)^2}{\prod_{k=0}^{2n-1}(k!)}$$

**题目 8**

对于一个序列 $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ ，其第 $n$ 阶汉克尔矩阵（Hankel Matrix）$H_n$ 是一个 $n\times n$ 的方阵，其元素由 $(H_n)_{i,j} = a_{i+j}$ 给出（其中 $0\le i,j\le n-1$ ）。即：

$$H_n = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{2n-2} \end{pmatrix}$$

设 $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ 为第 $n$ 个卡特兰数。请解决如下几个问题：

1. 对于序列 $\{C_k\}_{k=0}^{\infty} = \{1,1,2,5,\ldots\}$，其任意 $n$ 阶汉克尔矩阵的行列式均为 1。
2. 对于“左移一位”的序列 $\{C_{k+1}\}_{k=0}^{\infty} = \{1,2,5,14,\ldots\}$，其任意 $n$ 阶汉克尔矩阵的行列式也均为 1。
3. 求所有满足以下两个条件的实数序列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ：
   (a) 对于任意整数 $n\ge 0$ ，由该序列生成的 $(n+1)\times(n+1)$ 阶汉克尔矩阵 $(a_{i+j})_{0\le i,j\le n}$ ，其行列式为 1。
   (b) 对于任意整数 $n\ge 1$ ，由序列 $\{a_{k+1}\}_{k=0}^{\infty}$（即原序列左移一位）生成的 $n\times n$ 阶汉克尔矩阵 $(a_{i+j+1})_{0\le i,j\le n-1}$ ，其行列式为 1 。