第一章 第一次作业解答

✍ **练习 1.1** 解下列线性方程组:

$$(1)\quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$

解 (1)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - 5r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4 \leftarrow r_4 + 7r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_4 \leftarrow r_4 + 2r_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

自由变量为 $x_4 = t$ $(t \in \mathbb{R})$, 解为:

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = -8, \\ x_2 = 3 + t, \\ x_3 = 6 + 2t, \\ x_4 = t. \end{cases}}$$

(2)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \leftarrow r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - 4r_1,\ r_4 \leftarrow r_4 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & -5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - 3r_2,\ r_4 \leftarrow r_4 + r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 9 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 12 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_4 \leftarrow r_4 + \frac{1}{3} r_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 9 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

自由变量为 $x_5 = t$ （$t \in \mathbb{R}$），解为：

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = \frac{7}{6}t, \\ x_2 = \frac{5}{6}t, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = \frac{1}{3}t, \\ x_5 = t. \end{cases}}$$

✍ **练习 1.2** 当 a 为何值时，下列线性方程组有解？有解时求出它的通解.

$$(1)\ \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -3 \\ ax_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 = a \end{cases}$$

解 (1) 方程组：

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -3 \\ ax_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

考虑其增广矩阵并进行行变换：

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \\ a & -2 & 2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ a & -2 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - 3r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & 7 & 11 \\ a & -2 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 - ar_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & 7 & 11 \\ 0 & a-2 & 2+2a & 6+3a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 - \frac{a-2}{5}r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & \frac{3a+24}{5} & \frac{4a+52}{5} \end{array}\right)$$

当 $\frac{3a+24}{5} \neq 0$ 即 $a \neq -8$ 时，方程组有唯一解；当 $a = -8$ 时，第三行变为 $0 = 4$，矛盾，方程组无解。综上所述，当 $a \neq -8$ 时，方程组有唯一解。此时解为：

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = \frac{4}{a+8}, \\ x_2 = \frac{a-20}{3(a+8)}, \\ x_3 = \frac{4(a+13)}{3(a+8)}. \end{cases}}$$

(2) 方程组：

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 = a \end{cases}$$

考虑其增广矩阵并进行行变换：

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & -1 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 7 & a \end{array}\right) \xrightarrow{r_2+r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 7 & a \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{r_3-3r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 1 & a+3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{array}\right)$$

当 $a+1=0$ 即 $a=-1$ 时，方程组有解；当 $a \neq -1$ 时，第三行变为 $0=1$，矛盾，方程组无解。综上所述，当 $a=-1$ 时，方程组有无穷多解。此时方程组化简为：

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ 7x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

令 $x_3 = t$ （$t \in \mathbb{R}$ 为任意常数），解得：

$$\boxed{\begin{cases} x_2 = \dfrac{2-t}{7}, \\ x_1 = \dfrac{1}{7} - \dfrac{18}{7}t. \end{cases}}$$

或写成向量形式：

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{18}{7} \\ -\frac{1}{7} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.}$$

✍ **练习 1.3** 求三次多项式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$，使 $y = f(x)$ 的图象经过以下 4 个点：

$$A(1,2), B(-1,3), C(3,0), D(0,2).$$

解 将点代入多项式，得方程组：

$$\begin{cases} a+b+c+d=2 \\ -a+b-c+d=3 \\ 27a+9b+3c+d=0 \\ d=2 \end{cases}$$

代入 $d=2$ 后化简为：

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ -a+b-c=1 \\ 27a+9b+3c=-2 \end{cases}$$

增广矩阵及行变换：

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-27r_1]{r_2+r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -18 & -24 & -2 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{r_3+9r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -24 & 7 \end{array}\right)$$

解得:

$$\begin{cases} -24c = 7 \implies c = -\dfrac{7}{24} \\ 2b = 1 \implies b = \dfrac{1}{2} \\ a + \dfrac{1}{2} - \dfrac{7}{24} = 0 \implies a = -\dfrac{5}{24} \end{cases}$$

故三次多项式为:

$$\boxed{f(x) = -\frac{5}{24}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{24}x + 2.}$$

练习 1.4 求三次多项式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 满足

$$f(0) = 1, f(1) = 2, f'(0) = 1, f'(1) = -1.$$

解 由条件得:

$$\begin{cases} f(0) = d = 1 \\ f'(0) = c = 1 \\ f(1) = a + b + c + d = 2 \\ f'(1) = 3a + 2b + c = -1 \end{cases}$$

代入 $c = 1$, $d = 1$ 后化简为:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 3a + 2b = -2 \end{cases}$$

增广矩阵及行变换:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_4 - 3r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 \times (-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

回代得:

$$\begin{cases} d = 1 \\ c = 1 \\ b + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 7 \implies b = 2 \\ a + 2 + 1 + 1 = 2 \implies a = -2 \end{cases}$$

故三次多项式为:

$$\boxed{f(x) = -2x^3 + 2x^2 + x + 1}$$

练习 1.5 给定平面直角坐标系中的 5 个点: $A = (-2, -2), B = (1, -1), C = (2, 0), D = (0, 2)$, $E = (-1, 1)$. 求一条二次代数曲线 $G(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ 通过以上各点.

解 给定五个点 $A = (-2, -2)$, $B = (1, -1)$, $C = (2, 0)$, $D = (0, 2)$, $E = (-1, 1)$, 将点代入二次曲线方程 $G(x, y) =$

$ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0$，得到以下线性方程组：

$$\begin{cases}4a+8b+4c-2d-2e+f=0\\a-2b+c+d-e+f=0\\4a+2d+f=0\\4c+2e+f=0\\a-2b+c-d+e+f=0\end{cases}$$

其系数矩阵为：

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}4&8&4&-2&-2&1&0\\1&-2&1&1&-1&1&0\\4&0&0&2&0&1&0\\0&0&4&0&2&1&0\\1&-2&1&-1&1&1&0\end{array}\right)$$

通过初等行变换化简：

$$\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{cccccc|c}1&-2&1&1&-1&1&0\\4&8&4&-2&-2&1&0\\4&0&0&2&0&1&0\\0&0&4&0&2&1&0\\1&-2&1&-1&1&1&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2-4r_1,\,r_5-r_1}\left(\begin{array}{cccccc|c}1&-2&1&1&-1&1&0\\0&16&0&-6&2&-3&0\\0&8&-4&-2&4&-3&0\\0&0&4&0&2&1&0\\0&0&0&-2&2&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-\frac{1}{2}r_2}\left(\begin{array}{cccccc|c}1&-2&1&1&-1&1&0\\0&16&0&-6&2&-3&0\\0&0&-4&1&3&-1.5&0\\0&0&4&0&2&1&0\\0&0&0&-2&2&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_4+r_3}\left(\begin{array}{cccccc|c}1&-2&1&1&-1&1&0\\0&16&0&-6&2&-3&0\\0&0&-4&1&3&-1.5&0\\0&0&0&1&5&-0.5&0\\0&0&0&-2&2&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_5+2r_4}\left(\begin{array}{cccccc|c}1&-2&1&1&-1&1&0\\0&16&0&-6&2&-3&0\\0&0&-4&1&3&-1.5&0\\0&0&0&1&5&-0.5&0\\0&0&0&0&12&-1&0\end{array}\right)$$

此时方程组等价于：

$$\begin{cases} a-2b+c+d-e+f=0 \\ 16b-6d+2e-3f=0 \\ -4c+d+3e-1.5f=0 \\ d+5e-0.5f=0 \\ 12e-f=0 \end{cases}$$

由第五式 $f=12e$，代入第四式得 $d=e$；代入第三式得 $c=-\frac{7}{2}e$；代入第二式得 $b=\frac{5}{2}e$；代入第一式得 $a=-\frac{7}{2}e$。因此，通解为：

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = e\begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} \\ -\frac{7}{2} \\ 1 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad e\in\mathbb{R}$$

为避免分数，令 $e=2k$（$k\in\mathbb{R}$），则通解为：

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -7 \\ 2 \\ 2 \\ 24 \end{pmatrix}, \quad k\in\mathbb{R}$$

取 $k=1$ 得特解：$a=-7, b=5, c=-7, d=2, e=2, f=24$。因此，所求二次曲线方程为：

$$\boxed{G(x,y): -7x^2+10xy-7y^2+2x+2y+24=0}$$

✍ **练习 1.6** 给定线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+4x_4=2 \\ 2x_1+5x_2-2x_3+x_4=1 \\ 3x_1+8x_2-x_3-2x_4=0 \end{cases}$$

将常数项改为零得到另一个方程组，求解这两个方程组，并研究这两个方程组解之间的关系．对其它方程组做类似的讨论.

解 求解原始非齐次方程组，增广矩阵及行变换过程：

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 8 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2\leftarrow r_2-2r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & -3 \\ 3 & 8 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3\leftarrow r_3-3r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & -3 \\ 0 & 2 & 8 & -14 & -6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3\leftarrow r_3-2r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1\leftarrow r_1-2r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -11 & 18 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

该方程组有无穷多解，自由变量为 $x_3 = s$、$x_4 = t$（$s, t \in \mathbb{R}$）：

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = 8 + 11s - 18t \\ x_2 = -3 - 4s + 7t \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases}}$$

齐次方程组为：

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

增广矩阵及行变换过程（仅常数项不同，系数矩阵相同）：

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) &\xrightarrow{r_2 \leftarrow r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & 0 \\ 3 & 8 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - 3r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & -14 & 0 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - 2r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{r_1 \leftarrow r_1 - 2r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -11 & 18 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

齐次方程组的通解为：

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = 11s - 18t \\ x_2 = -4s + 7t \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases}}$$

其中 $s, t \in \mathbb{R}$ 是任意实数。

在求解非齐次线性方程组时，其通解可以表示成齐次方程组的通解 + 一个特解。具体而言，设原非齐次方程组为 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$，其对应的齐次方程组为 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$。若已知一个特解 $\mathbf{x}_p$ 是满足 $A\mathbf{x}_p = \mathbf{b}$ 的任意一个解，和齐次方程组的通解 $\mathbf{x}_h$，即 $A\mathbf{x}_h = \mathbf{0}$ 的所有解。则原非齐次方程组的通解可表示为：

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$$

例如，在本题中，我们通过行变换求得非齐次方程组的通解形式为：

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 11 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -18 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

其中：$\mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 是当 $s=0, t=0$ 时得到的一个特解，满足原非齐次方程组。$\mathbf{x}_h = s\begin{bmatrix} 11 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -18 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 是对应齐次方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的通解。

练习 1.7 计算 $\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ 1 & y & y^2 & \dots & y^n \\ 1 & z & z^2 & \dots & z^n \end{pmatrix}$ 右乘矩阵 $\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ 的结果

解 直接按照矩阵乘法定义展开，最终的结果是：

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n a_k x^k & \sum_{k=0}^n b_k x^k & \sum_{k=0}^n c_k x^k \\ \sum_{k=0}^n a_k y^k & \sum_{k=0}^n b_k y^k & \sum_{k=0}^n c_k y^k \\ \sum_{k=0}^n a_k z^k & \sum_{k=0}^n b_k z^k & \sum_{k=0}^n c_k z^k \end{pmatrix}$$

练习 1.8 计算

$$(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_m)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

解 从左到右依次计算，$1\times m$ 的行向量 $(x_1x_2\cdots x_m)$ 与 $m\times n$ 的矩阵相乘，得到一个 $1\times n$ 的行向量。该中间结果的第 j 个元素为 $\sum_{i=1}^m x_i a_{ij}$。这个 $1\times n$ 的行向量与 $n\times 1$ 的列向量 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ 相乘，得到一个标量：

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m x_i a_{ij}\right) y_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} y_j.$$

练习 1.9 举例求满足条件的 2 阶实方阵 A。

(1) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $A^3 = I$ 且 $A \neq I$

解 (1) 无实数解，由于 $\det(A^2)$ $=\det(A)^2 \geq 0$，而 $\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 < 0$，矛盾.

考虑二维平面中的旋转矩阵：

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

它表示绕原点逆时针旋转角度 θ 的线性变换。其 n 次幂对应旋转 $n\theta$ 的变换，即：

$$[R(\theta)]^n = R(n\theta).$$

利用这一性质，我们可以构造满足条件的矩阵。

(2) 注意到：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = R\left(\frac{3\pi}{2}\right),$$

因此，若取 $\theta=\frac{3\pi}{4}$，则有：

$$A=R\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\begin{pmatrix}\cos\frac{3\pi}{4} & -\sin\frac{3\pi}{4}\\ \sin\frac{3\pi}{4} & \cos\frac{3\pi}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}.$$

(3) 单位矩阵 $I=R(0)=R(2\pi)$，因此我们希望：

$$A^3=R(3\theta)=R(2\pi)\quad\Rightarrow\quad 3\theta\equiv 2\pi\pmod{2\pi}.$$

取 $\theta=\frac{2\pi}{3}$，则：

$$A=R\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\begin{pmatrix}\cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3}\\ \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

此外，取 $\theta=\frac{4\pi}{3}$（即 $k=2$）也满足：

$$A=R\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad A^3=R(4\pi)=I.$$

因此，所有满足条件的实矩阵为：

$$A=R\left(\frac{2k\pi}{3}\right),\quad k=1,2.$$

练习 1.10 求下列矩阵的 n 次幂，要求给出一般形式并给出证明：

1. $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix}1 & a & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix}a & 1 & & \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & a\end{pmatrix}_{n\times n}$
5. $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n\\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & a_nb_n\end{pmatrix}$

解

(1) 我们归纳证明：

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta & \sin n\theta\\ -\sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}$$

当 $n=1$ 时，显然成立，假设 $n=k$ 时成立，注意到

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ -\sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta)\\ -\sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}$$

显然 $n=k+1$ 时成立。故对任意正整数 n，结论成立。

(2) 我们先在实数域中计算。如果 $a^2+b^2\neq 0$，根据辅助角公式，令 $r=\sqrt{a^2+b^2},\theta=\arctan(b/a)$，则 $a=r\cos\theta, b=r\sin\theta$。原矩阵可表示为：

$$\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

由 (1) 知该矩阵的 n 次幂是：

$$\left(a^2+b^2\right)^{n/2}\begin{pmatrix}\cos n\theta & \sin n\theta\\ -\sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}$$

如果 $a^2+b^2=0$，问题平凡，答案是零矩阵。

笔记 这道题目中，若 a,b 为复数，事情会变的复杂一些，辅助角公式仍然可以使用，但是 arctan 会变成定义在

$\mathbb{C}$ 上的反正切函数。我们这里用一个其他的方法。我们可以将矩阵分解为：

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = aI + bJ$$

我们注意到 J 具有和复数单位 i 非常相似的性质：

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

由于 a 和 b 是复数，它们是标量，与任何矩阵都可交换。因此，aI 和 bJ 可以交换，我们可以应用二项式定理：

$$M^n = (aI + bJ)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (aI)^{n-k}(bJ)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k J^k$$

展开，即可得到计算结果为：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ -B_n & A_n \end{pmatrix}$$

其中 A_n 和 B_n 由以下公式给出：

$$A_n = \frac{(a+ib)^n + (a-ib)^n}{2}$$

$$B_n = \frac{(a+ib)^n - (a-ib)^n}{2i}$$

(3) 设原矩阵为 A，我们做分解 $A = I + N + M$, 其中 $M = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$。则经过运算，我们可以知道,$M^2 = 0, N^2 = 0, MN = NM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，这表明 I, M, N 三个矩阵两两可交换，多项式展开成立。从而我们有

$$A^n = (I + N + M)^n = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} \binom{n}{i}\binom{i}{j} N^j M^{i-j}$$

因 $N^2 = 0, M^2 = 0$ ，求和中的高次项全部为零矩阵，最后剩下需要计算的项是：

$$A^n = I + n(N + M) + n(n-1)MN$$

答案是：

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & na & n & n(n-1)a \\ 0 & 1 & 0 & n \\ 0 & 0 & 1 & na \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

(4) 先来看一个特殊矩阵:

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

我们可以证明：

$$J_n^k = \begin{cases} \begin{pmatrix} O & I_{n-k} \\ O & O \end{pmatrix}_{n\times n}, & k < n \\ 0_n, & k \geq n \end{cases}$$

从而，原式可写作：

$$(I_n + J_n)^k = \sum_{i=0}^{k} a^{k-i} J_n^i \binom{k}{i}$$

得：

$$\boxed{A^k = \begin{pmatrix} \binom{k}{0}a^k & \binom{k}{1}a^{k-1} & \binom{k}{2}a^{k-2} & \cdots & \binom{k}{n-1}a^{k-n+1} \\ 0 & \binom{k}{0}a^k & \binom{k}{1}a^{k-1} & \cdots & \binom{k}{n-2}a^{k-n+2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \binom{k}{0}a^k & \binom{k}{1}a^{k-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \binom{k}{0}a^k \end{pmatrix}}$$

其中 $\binom{k}{j} = \frac{k(k-1)\cdots(k-j+1)}{j!}$。如果 $j > k$，则规定 $\binom{k}{j} = 0$。

(5) 设原矩阵为 A，则 $A = I + N$，其中 $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，使用二项式定理展开有：

$$A^n = (I+N)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i I^{n-i} N^i = \sum_{i=0}^{n} C_n^i N^i$$

又因为 $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$N^3 = 0$，从而我们可以对原式只保留到 N 的二次项，高次项为都是零矩阵，也就是说 $A^n = I + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2$，结果为：

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

(6) 设原矩阵为 A，则 $A = uv^T$，其中 $u = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$，$v = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}^T$，则有：

$$A^n = (uv^T)^n = (uv^T)(uv^T)\cdots(uv^T) = u(v^Tu)(v^Tu)\cdots(v^Tu)v^T$$

又因为 uv^T 是 1×1 的矩阵，所以有 $(uv^T)^n = (u^Tv)^{n-1}uv^T$，

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}^n = \left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^{n-1} \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$$

笔记 这道题困扰了很多同学，对于这样的题目，方法很直接：

1. 矩阵可表示为列向量与行向量的乘积，高次幂可以用结合律先算中间（第 6 题）。

2. 矩阵可分解为 $A=I+N$，其中 N 是幂零矩阵（即存在 k 使得 $N^k=0$），使用二项式定理展开（第 4、5 题）。
3. 当上述方法不适用时，通过观察前几项规律后用数学归纳法，比如 1、2 两题。

练习 1.11 证明：n 个上 (下) 三角矩阵的乘积仍为上 (下) 三角矩阵.

解 根据数学归纳法原理，本题只需要做 $n=2$ 的情况, 不妨设 A,B 均为上三角矩阵, 则有 $A_{ij}=0, B_{ij}=0\ (i>j)$, 则

$$(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}B_{kj}$$

当 $i>j$ 时, 有

$$(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}B_{kj}=0$$

因此 AB 为上三角矩阵，下三角矩阵同理.

练习 1.12 证明: 与任意 n 阶方阵都乘法可交换的方阵一定是数量阵.

解 取任意 $i\neq j$，考虑标准基矩阵 E_{ij}（第 i 行第 j 列为 1，其余元素为 0）。由题设 A 与 E_{ij} 可交换，即：

$$AE_{ij}=E_{ij}A$$

计算 AE_{ij}：

$$(AE_{ij})_{k\ell}=\sum_{m=1}^{n}A_{km}\,(E_{ij})_{m\ell}=\begin{cases}A_{ki}, & \ell=j\\ 0, & \ell\neq j\end{cases}$$

即 AE_{ij} 的第 j 列等于 A 的第 i 列，其余列全为零。此外

$$(E_{ij}A)_{k\ell}=\sum_{m=1}^{n}(E_{ij})_{km}\,A_{m\ell}=\begin{cases}A_{j\ell}, & k=i\\ 0, & k\neq i\end{cases}$$

即 $E_{ij}A$ 的第 i 行等于 A 的第 j 行，其余行全为零。写成矩阵如下：

$$\begin{pmatrix}0 & \dots & a_{1i} & \dots & 0\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & \dots & a_{ni} & \dots & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \dots & 0\\ \vdots & & \vdots\\ a_{j1} & \dots & a_{jn}\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$$

比较一下，就会发现这两个矩阵相等需要 $a_{ii}=a_{jj}$，其他的项均是 0，由 i,j 的任意性，可以得到 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}$，非对角线项全都是 0，这就是数量矩阵。

练习 1.13 设 A,B 为同阶方阵，且满足 $AB=BA$，计算 $\begin{pmatrix}A & B\\ O & A\end{pmatrix}^n$。

解 设 $X=\begin{pmatrix}A & B\\ O & A\end{pmatrix}$, 则有

$$X^2=\begin{pmatrix}A & B\\ O & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ O & A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^2 & 2AB\\ O & A^2\end{pmatrix}$$

继续计算 X^3:

$$X^3=X^2X=\begin{pmatrix}A^2 & 2AB\\ O & A^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ O & A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^3 & 3A^2B\\ O & A^3\end{pmatrix}$$

我们可以猜测出:

$$X^n=\begin{pmatrix}A^n & nA^{n-1}B\\ O & A^n\end{pmatrix}$$

用归纳法直接可以证明即可，过程在此略去.

✍ **练习 1.14** 设 A 为 n 阶方阵,且满足 $A^3 = I_n$。计算 $\begin{pmatrix} O & I_n \\ A & O \end{pmatrix}^{2024}$。

解 依旧找规律，枚举发现:$X^2 = \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}$,$X^3 = \begin{pmatrix} O & A \\ A^2 & O \end{pmatrix}$,$X^4 = \begin{pmatrix} A^2 & O \\ O & A^2 \end{pmatrix}$,$X^5 = \begin{pmatrix} O & A^2 \\ I & O \end{pmatrix}$,$X^6 = \begin{pmatrix} I_n & O \\ O & I_n \end{pmatrix}$。由计算可知:

$$X^6 = I_{2n}$$

因此，X 的幂具有周期 6，即对任意正整数 k，有:

$$X^{k+6} = X^k$$

从而

$$X^{2024} = X^2 = \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}$$