**Potęgi**

[Arytmetyka, Algebra – szkoła podstawowa – łatwe – bardzo przydatne]

Kwadrat i sześcian liczby

W powyższych przykładach zostały przedstawione pudełka ustawione obok siebie. Łatwo zauważyć, że w każdym rzędzie jest tyle samo pudełek, co w każdej kolumnie. Ilość pudełek w przedstawionych grupach możemy opisać kolejno jako:

22

33

44

66

Mamy do czynienia z mnożeniem dwóch jednakowych liczb. Do zapisania tego typu działania, czyli gdy mnożymy kilka identycznych czynników, używa się zazwyczaj **potęgowania**. Przykłady te zostałyby zapisane za pomocą potęg następująco:

W tych przykładach liczby 2, 3, 4 i 6 stanowią mnożone przez siebie liczby, a mała dwójka w prawym górnym rogu tych liczb oznacza, że są one mnożone przez siebie dokładnie dwa razy.

Na powyższych obrazkach widoczne są stosy pudełek, w których ich ilość w każdej warstwie poziomej jest taka sama, jak w każdej pionowej i taka sama, jak w każdej warstwie frontowej. Ilość tych pudełek wynosi odpowiednio:

W tych przykładach trzy razy mnożymy przez siebie takie same czynniki. Podobnie jak w poprzednim przypadku, iloczyny te możemy zapisać jako potęgi:

Przykłady te demonstrują, że działanie, w którym mnożymy przez siebie kilkakrotnie pewną liczbę, da się zapisać w postaci potęgi, w której mała liczba u góry oznacza, ile razy ją mnożymy.

Liczby, które mnożymy kilkakrotnie, stanowią **podstawę potęgi**, a mała liczba zapisana w indeksie górnym podstaw to **wykładnik potęgi**. Tak zapisane liczby, np. , odczytujemy: dwanaście podniesione do potęgi drugiej albo po prostu dwanaście do drugiej.

Liczby podniesione do drugiej potęgi, czyli pomnożone przez siebie dwukrotnie, nazywamy kwadratami tych liczb, a podniesione do trzeciej potęgi – sześcianami tych liczb.

Aby sprawnie obliczać potęgi i poruszać się w bardziej złożonym świecie matematyki, warto znać na pamięć kwadraty pierwszych dwudziestu oraz sześciany pierwszych dziesięciu liczb naturalnych.

Oto kwadraty oraz sześciany pierwszych trzydziestu liczb:

Potęga o wykładniku naturalnym

Kwadraty i sześciany liczb to tylko podstawowe działania związane z potęgowaniem. Każdą liczbę możemy podnieść do potęgi będącej dowolną liczbą. Jeśli wykładnikiem potęgi będzie liczba 5, to jej podstawę mnożymy przez siebie pięciokrotnie, jeśli 7 – siedmiokrotnie itd.

Przykłady potęgowania:

2401

Dwa powyższe przykłady pokazują, że podnosząc liczbę 10 do jakiejś potęgi, otrzymamy wynik mający tyle zer, ile wynosi wykładnik potęgi. Można także zauważyć, że:

Wynikiem podnoszenia dowolnej liczby do potęgi pierwszej jest ta liczba

ponieważ wykładnik potęgi wynosi 1, co oznacza, że mnożymy ją 1 raz. Nasuwa się na myśl, że elementem neutralnym potęgowania jest więc liczba 1.

A także:

Liczba jeden podniesiona do dowolnej potęgi wynosi 1

co wynika z tego, że mnożąc przez siebie wielokrotnie liczbę 1, która jest z resztą elementem neutralnym działania, nie otrzymamy wartości innej niż właśnie 1.

W podobny sposób:

Zero podniesione do dowolnej potęgi wynosi 0.

W formalny sposób potęgowanie określa się w następująco:

Co rozumiemy jako: „*a* do *n*oznacza iloczyn liczb *a*, gdzie wszystkich czynników jest *n*”. Jest to definicja potęgowania zapisana wzorem. Dlaczego użyto właśnie takich oznaczeń? Literę „n” stosuje się do oznaczania liczby naturalnej. Używanie tej litery do oznaczania pewnej ilości będzie dosyć częste, podobnie jak użyteczność litery „a” do oznaczania pospolitej, dowolnej liczby.

Własności potęg

Tak jak na każdych liczbach, na potęgach można wykonywać wszystkie działania. Aby uprościć wykonywanie niektórych obliczeń i nie zmuszać za każdym razem do obliczania potęgi przed wykonaniem działania, ustalono pięć własności potęg. Są one bardzo pożyteczne i użyteczne.

Własność I

Dotyczy ona mnożenia potęg o takich samych podstawach. Oprzyjmy się na przykładach. Kiedy upraszczamy działanie nie musimy sprowadzać go do postaci . Możemy rozpisać to w następujący sposób:

3 5 h

Zauważamy, że otrzymaliśmy mnożenie większej ilości jednakowych czynników:

które możemy zapisać jako jedną potęgę:

Zatem:

Wykonując mnożenie dwóch potęg po prostu dodaliśmy ich wykładniki.

Spróbujmy rozpisać w ten sposób jeszcze jedno działanie:

1 + 2 + 9

Zauważamy już zapewne wyłaniającą się regułę. Uogólnijmy wiec tego rodzaju działanie:

I własność potęg:

Litery „m” używa się, gdy we wzorze użyto już litery „n”, a oznaczana liczba ma takie samo znaczenie. Liter „n” i „m” można by więc używać przemiennie, lecz litery „n” używa się jako pierwszej.

Własność II

Jest ona bardzo podobna, jak I własność, ponieważ dotyczy dzielenia potęg.

Działanie także możemy rozpisać:

Otrzymujemy ułamek, który łatwo da się skrócić:

Więc:

Zauważamy, że dzieląc dwie potęgi odjęliśmy ich wykładniki.

Sprawdźmy to na jeszcze jednym przykładzie:

Uogólniając:

II własność potęg: lub inaczej

Własność III

Ta własność dotyczy z kolei potęgowania potęgi. Przykładowo działanie: możemy rozpisać, mnożąc przez siebie czterokrotnie wyrażenie :

Teraz możemy rozpisać każdą z tych potęg osobno:

Korzystając z łączności mnożenia możemy zdjąć nawiasy:

po czym zapisać działanie w postaci jednej potęgi:

Czyli

Zauważamy, że potęgując potęgę, pomnożyliśmy wykładniki.

Sprawdźmy to na kolejnym przykładzie:

Podsumowując:

III własność potęg:

Do zapisu został zastosowany nawias, ponieważ jego brak mógłby być mylący i oznaczać , oznaczające podniesienie wykładnika do potęgi , co mogłoby dać ogromną liczbę.

Własność IV

Pierwsze trzy własności dotyczyły działań na potęgach o jednakowych podstawach (). Pozostałe dwie dotyczą własności potęg o jednakowych wykładnikach. Spróbujmy rozpisać działanie :

Ponieważ mnożenie jest przemienne, możemy zamienić kolejność czynników:

Z kolei ten zapis oznacza trzykrotne pomnożenie przez siebie wyrażenia , czyli podniesienie go do trzeciej potęgi:

Zatem:

Mnożąc potęgi o tych samych wykładnikach, wymnożyliśmy ich podstawy, nie zmieniając wykładnika.

Sprawdźmy to na jeszcze jednym działaniu:

Przyjmując oznaczenia literowe otrzymamy:

IV własność potęg: