Télécom Paris 8 novembre 2022 Année 2022-2023 – P1

# Contrôle de connaissances de MDI210

*Durée : 3 h.*
*Documents autorisés : deux feuilles recto verso (soit quatre pages), format A4.*
*Les calculatrices et les ordinateurs sont interdits,*
*ainsi que tout objet permettant de communiquer avec l'extérieur.*
*Un résultat non justifié pourra ne pas être considéré comme juste. Un résultat obtenu autrement que par les méthodes indiquées dans l'énoncé et plus généralement par des méthodes autres que celles du cours pourra ne pas être considéré comme juste.*
*On détaillera les calculs effectués, même si cela n'est pas demandé explicitement.*
*Le barème, sur 40, n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié.*

**Exercice 1** (15 points)

**1.** (7,5 points) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -2\sqrt{5} \\ 6 & 8 & \sqrt{5} \\ -2\sqrt{5} & \sqrt{5} & -4 \end{pmatrix}$. À l'aide de la méthode de Jacobi classique (autrement dit, on considère à chaque itération le terme non diagonal de plus grande valeur absolue), déterminer les valeurs propres et une base orthonormée de vecteurs propres de $A$ ; on détaillera les calculs.

**2.** (4,5 points) On considère des matrices $3\times3$ symétriques non diagonales $A = (a_{jk})_{1\le j\le 3,\ 1\le k\le 3}$. On appelle $B = (b_{jk})_{1\le j\le 3,\ 1\le k\le 3}$ la matrice obtenue en appliquant une itération de la méthode de Jacobi à $A$.

*Indication pour les questions suivantes* : en appelant $p$ et $q$ les indices du terme de la matrice $A$ qu'on cherche à annuler avec la méthode de Jacobi, on notera $i$ le « troisième indice » (de façon à avoir $\{i, p, q\} = \{1, 2, 3\}$) et on considérera les formules donnant les termes $b_{ip}$ et $b_{iq}$.

**a.** On suppose que $a_{12}$, $a_{13}$ et $a_{23}$ sont tous les trois non nuls. Montrer que $B$ n'est pas diagonale.

**b.** On suppose qu'un et un seul des trois termes $a_{12}$, $a_{13}$ et $a_{23}$ est nul. Montrer que $B$ contient exactement un terme $b_{jk}$ sur-diagonal ($j < k$) nul.

**c.** On suppose que deux des trois termes $a_{12}$, $a_{13}$ et $a_{23}$ sont nuls. Que peut-on dire de $B$ ?

**3.** (3 points) On s'intéresse à la convergence de la méthode de Jacobi pour des matrices $3\times3$ symétriques non diagonales $A = (a_{jk})_{1\le j\le 3,\ 1\le k\le 3}$. Que peut-on dire, en fonction du nombre de termes non nuls parmi $a_{12}$, $a_{13}$ et $a_{23}$, du nombre d'itérations effectuées par la méthode de Jacobi quand on l'applique à $A$ ?

**Exercice 2** (25 points)

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbf{R}^2$ par $f(x, y) = 2\pi\, x \cos(y) + y^2$.

**1.** (3 points)

**a.** Déterminer, s'il en existe, les points de $\mathbf{R}^2$ où la matrice hessienne de $f$ est positive et ceux où elle est définie positive.

**b.** Que peut-on en déduire pour les points de $\mathbf{R}^2$ qui pourraient être des minima locaux de $f$ ?

**2.** (2 points) Déterminer, s'il en existe, les points de $\mathbf{R}^2$ où $f$ atteint un minimum ; on précisera alors s'il s'agit d'un minimum local ou global.

Dans toute la suite, on considère le problème $Q$ suivant :

$$\text{Minimiser } f(x, y) \text{ avec les contraintes } \begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}.$$

**3.** (1 point) Déterminer, s'il en existe, les points du domaine réalisable où les contraintes sont qualifiées.

**4.** (6 points)

**a.** Déterminer, s'il en existe, les points de la forme $(x, 0)$ avec $-1 \leq x \leq 0$ où les conditions de Karush, Kuhn et Tucker sont satisfaites.

**b.** Que peut-on en déduire pour les points de la forme $(x, 0)$ avec $-1 \leq x \leq 0$ qui pourraient être des minima locaux de $f$ ?

**5.** (1,5 points) On envisage d'appliquer au point $(0, \pi)$ une méthode de descente dans laquelle on choisit de suivre la direction admissible de plus grande descente au point $(0, \pi)$. À l'aide d'un dessin, déterminer cette direction en expliquant brièvement la démarche suivie (on fera en sorte que le dessin soit clair et non ambigu).

**6.** (1,5 points) On adopte en fait comme direction de descente au point $(0, \pi)$ une direction $d = (d_1, d_2)^t$ qui est solution du problème $P$ suivant :

$$\text{Minimiser } d^t.\nabla f(0, \pi) \quad \text{avec les contraintes } \begin{cases} \|d\|_\infty \leq 1 \\ d_1 \leq 0 \end{cases},$$

où $\|d\|_\infty$ désigne la norme infinie de $d$. On note $d^*$ cette direction.

Montrer que $P$ peut s'exprimer sous la forme du problème d'optimisation linéaire suivant :

$$\text{Maximiser } z = -u_1 - u_2 + u_3 \quad \text{avec les contraintes } \begin{cases} u_1 \leq 1 \\ u_2 - u_3 \leq 1 \\ -u_2 + u_3 \leq 1 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0 \end{cases}$$

**7.** (3 points) Résoudre le problème $P$ à l'aide de l'algorithme du simplexe sous la forme des dictionnaires. En déduire la direction $d^*$ de la question 6.

**8.** (2,5 points) Donner l'expression du problème dual $D$ de $P$. Déduire de la résolution de la question 7 une solution optimale de $D$ ; on précisera la façon dont on obtient cette solution optimale.

**9.** (2,5 points) Soient $a$, $b$ et $c$ trois réels. On considère le problème $P(a, b, c)$ défini par

$$\text{Maximiser } z(a,b,c) = a u_1 + b u_2 + c u_3 \quad \text{avec les contraintes } \begin{cases} u_1 \leq 1 \\ u_2 - u_3 \leq 1 \\ -u_2 + u_3 \leq 1 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0 \end{cases}$$

À l'aide du théorème des écarts complémentaires, déterminer les valeurs de $a$, $b$ et $c$, s'il en existe, pour lesquelles $(0, 0, 1)$ est solution optimale de $P(a, b, c)$.

**10.** (2 points) On revient à la résolution du problème $Q$. Appliquer une itération de la méthode de descente à partir du point $(0, \pi)$ selon la direction $d^*$ obtenue à la question 7 et avec un pas optimal que l'on déterminera.

*Remarque :* si on a résolu la question 5 mais non la question 7, on prendra comme direction celle obtenue à la question 5.