Examen de l'UE Représentations des signaux TSIA201

Roland Badeau, Marco Cagnazzo

Mercredi 31 octobre 2018

Durée : 1h30
Tous les documents sont autorisés. En revanche les appareils électroniques (dont les calculatrices) sont interdits.

◊◊◊

Avant propos

Le correcteur accordera le plus grand prix à la qualité de la rédaction, que ce soit la présentation matérielle ou le raisonnement.

Rappels et notations

Formulaire

Dans tout ce qui suit, nous utiliserons les notations et définitions suivantes :

— Transformée de Fourier à Temps Continu (TFTC) d'un signal analogique $x_a(t)$:

$$X_a(f) = \int_{\mathbb{R}} x_a(t) e^{-2i\pi f t} dt$$

— TFTC inverse : $x_a(t) = \int_{\mathbb{R}} X_a(f) e^{+2i\pi f t} df$

— Transformée de Fourier à Temps Discret (TFTD) d'un signal discret $x(n)$:

$$X(e^{2i\pi\nu}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n) e^{-2i\pi\nu n}$$

— TFTD inverse : $x(n) = \int_{-1/2}^{1/2} X(e^{2i\pi\nu}) e^{+2i\pi\nu n} d\nu$

— Transformée de Fourier Discrète (TFD) d'ordre M d'un signal discret fini $x_M(n)$:

$$X_M(k) = \sum_{n=0}^{M-1} x_M(n) e^{-2i\pi \frac{k}{M} n}$$

— TFD inverse : $x_M(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X_M[k] e^{+2i\pi \frac{k}{M} n}$

— Transformée en Z d'un signal discret $x(n)$:

$$X(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n) z^{-n}$$

— Formule d'échantillonnage : si $\forall n \in \mathbb{Z}$, $x_e(n) = x_a(nT)$ où $T \in \mathbb{R}_+^*$, alors

$$X_e(e^{2i\pi\nu}) = \frac{1}{T} \sum_{k\in\mathbb{Z}} X_a\left(\frac{\nu + k}{T}\right) \tag{1}$$

Bancs de filtres à deux voies

Les conditions de reconstruction parfaite pour un BDF à 2 voies sont :

$$\begin{aligned} F_0(z)H_0(z) + F_1(z)H_1(z) &= 2z^{-\ell} && \text{Condition de non distorsion (CND)} \\ F_0(z)H_0(-z) + F_1(z)H_1(-z) &= 0 && \text{Condition de non repliement (CNR)} \end{aligned}$$

On considère le cas de Conjugate Quadrature Filters / Alternating Flip (CQF/AF) :

$$\begin{aligned} H_1(z) &= -z^{-(N-1)}H_0(-z^{-1}) \\ F_0(z) &= H_1(-z) \\ F_1(z) &= -H_0(-z) \end{aligned}$$

Pour les CQF/AF, nous avons vu que le filtre à demi-bande $P(z)$ peut s'écrire comme $P(z) = H_0(z)H_0(z^{-1})$. Nous savons également que $p(n) = p(-n)$ et que $p(2n) = \delta(n)$.

Exercice 1 (Synthèse de filtres : filtre dérivateur) *On considère un signal $x(t)$ à temps continu à l'entrée d'un filtre de fonction de transfert $H(f)$ (où f est la fréquence exprimée en Hz). On note $y(t)$ le signal en sortie. Connaissant $H(f)$, on se propose de déterminer un filtre à temps discret de fonction de transfert $H_e(e^{i2\pi\nu})$ (où ν est la fréquence réduite) qui, ayant en entrée les échantillons $x_e(n) = x(nT)$, aurait pour sortie les échantillons $y_e(n) = y(nT)$ (voir la figure 1).*

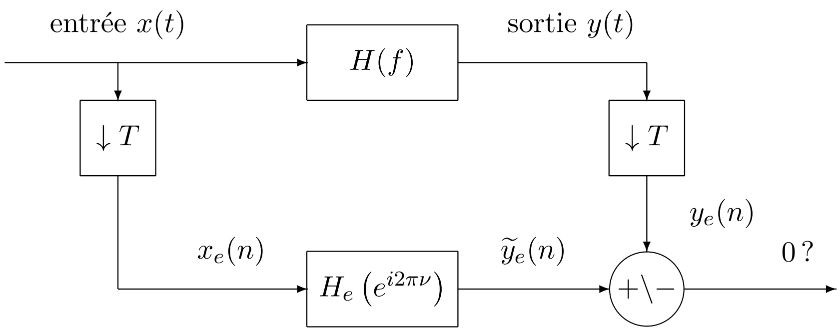

Figure 1 – Comparaison des sorties aux instants d'échantillonnage

1. *En utilisant la formule (1) page 1, exprimer les TFTD $Y_e(e^{i2\pi\nu})$ et $\widetilde{Y}_e(e^{i2\pi\nu})$ des signaux à temps discret $y_e(n)$ et $\widetilde{y}_e(n)$.*
2. *Démontrer que le filtre discret, défini par la relation $H_e(e^{i2\pi\nu}) = H\left(\frac{\nu}{T}\right)$ pour tout $\nu \in \left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$, est tel que pour tout signal $x(t)$ à bande limitée $\left[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}\right]$, $\widetilde{y}_e(n) = y_e(n)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.*
3. *On souhaite à présent synthétiser un filtre dérivateur. On suppose que $x(t)$ est une fonction sommable ($x \in L^1(\mathbb{R})$) de classe $\mathcal{C}^1$, dont la dérivée $x'(t)$ est également sommable. Prouver que $\lim\limits_{t\to\pm\infty} x(t) = 0$, et calculer la transformée de Fourier de $x'(t)$.*
4. *En déduire que la dérivation peut être vue comme un filtre de réponse en fréquence $H(f) = i2\pi f$, et exprimer le gain complexe $H_e(e^{i2\pi\nu})$ du filtre linéaire à temps discret correspondant.*
5. *En déduire, par la méthode de la fenêtre, les coefficients d'un filtre RIF à phase linéaire de type III qui réalise l'approximation d'un filtre dérivateur.*

6. *Comment pourrait-on obtenir un filtre dérivateur à phase linéaire de type IV ? (indication : considérer le filtre de réponse en fréquence $H_e(e^{i2\pi\nu})\, e^{-i\pi\nu}$). Calculer les coefficients d'un filtre RIF qui réalise l'approximation de ce filtre dérivateur.*

Exercice 2 (Conversion de fréquence CD/DAT)

On cherche à réaliser la conversion de fréquence d'échantillonnage de signaux issus d'un lecteur de Compact Disc (CD) vers un magnétophone numérique (DAT). Les normes de fréquence d'échantillonnage sont les suivantes : 44.1 kHz pour le CD, 48 kHz pour le DAT.

1. *A quelle fréquence d'échantillonnage intermédiaire est-on obligé d'interpoler les signaux issus d'un CD ? (on remarquera que $441 = 3 \times 147$ et que $480 = 3 \times 160$)*
2. *Dessiner le schéma (sans implémentation efficace) des opérations de cette conversion de fréquence. Indiquer en particulier les différentes fréquences d'échantillonnage des signaux, et les caractéristiques du filtre, incluant sa fréquence de coupure (en fréquence absolue et en fréquence normalisée) et son amplitude en bande passante.*
3. *A-t-on perdu de la qualité en effectuant cette opération ?*
4. *Si l'on cherchait à effectuer la conversion inverse (DAT vers CD), le résultat serait-il le même qu'à la question 3 ? Justifier votre réponse.*

Exercice 3 (Implémentations efficaces)

On veut implémenter un sous-échantillonnage d'ordre 3 d'un signal $x(n)$.

1. *Dessiner le schéma (sans implémentation efficace) des opérations à réaliser. On précisera notamment les caractéristiques du filtre utilisé.*
2. *Dessiner ensuite le schéma d'une implémentation efficace de ce sous-échantillonnage, en utilisant les composantes polyphases du filtre.*

Exercice 4 (Bancs de filtres : filtres de Daubechies)

Les filtres de Daubechies constituent un cas de CQF/AF (voir les rappels page 2) avec filtres orthogonaux et $N/2$ moments nuls. On peut montrer que la solution non-normalisée est :

$$\bar{P}(z) = \left(\frac{1+z}{2}\right)^b \left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right)^b \sum_{k=0}^{b-1} \binom{b+k-1}{k} \left(\frac{1-z}{2}\right)^k \left(\frac{1-z^{-1}}{2}\right)^k$$

Questions :

1. *Pour $b = 1$*
   (a) *Calculez $\bar{P}(z)$*
   (b) *Comme $\bar{P}(z) = \bar{H}_0(z)\bar{H}_0(z^{-1})$, déduisez $\bar{H}_0$*
   (c) *Écrivez les coefficients du filtre H_0 obtenu après normalisation : $h(n) = \bar{h}(n)/\sqrt{\sum_k \bar{h}^2(k)}$*
2. *Pour $b = 2$*
   (a) *Calculez $\bar{P}(z)$*
   (b) *On a encore $\bar{P}(z) = \bar{H}_0(z)\bar{H}_0(z^{-1})$. Pour trouver $\bar{H}_0$, observez que si z_0 est une racine de $-z + 4 + z^{-1}$, alors z_0^{-1} est l'autre racine.*
   (c) *Écrivez les coefficients du filtre $\bar{h}_0$ et de h_0 en termes de z_0 et $\|\bar{h}_0\|$*
