Corrigé du contrôle de connaissances de MDI 210

Durée : 3 h.
Documents autorisés : deux feuilles recto verso (soit quatre pages), format A4 ;
dictionnaire autorisé pour les élèves dont le français n'est pas la langue maternelle.
Les calculatrices et les ordinateurs sont interdits,
ainsi que tout objet permettant de communiquer avec l'extérieur.
Un résultat non justifié pourra ne pas être considéré comme juste. Un résultat obtenu autrement que par les méthodes indiquées dans l'énoncé et plus généralement par des méthodes autres que celles du cours pourra ne pas être considéré comme juste.
On détaillera les calculs effectués, même si cela n'est pas demandé explicitement.
Le barème, sur 40, n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié.

Exercice 1 (15 points)

1. (7,5 points) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -2\sqrt{5} \\ 6 & 8 & \sqrt{5} \\ -2\sqrt{5} & \sqrt{5} & -4 \end{pmatrix}$. À l'aide de la méthode de Jacobi classique (autrement dit, on considère à chaque itération le terme non diagonal de plus grande valeur absolue), déterminer les valeurs propres et une base orthonormée de vecteurs propres de A ; on détaillera les calculs.

Corrigé

La méthode de Jacobi s'applique à des matrices symétriques, ce qui est bien le cas de A. On veut annuler les termes non diagonaux. On commence par le terme non diagonal de plus grande valeur absolue, ici 6. Avec les notations du cours, on a donc $p = 1$ et $q = 2$. On pose $x = (a_{qq} - a_{pp})/(2a_{pq}) = (8 + 1)/12 = 3/4$. On résout l'équation $t^2 + 2xt - 1 = 0$: la bonne racine (celle de valeur absolue inférieure à 1) vaut $t = 1/2$ (l'autre racine étant –2). On en déduit le cosinus $c = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ et le sinus $s = tc = \frac{1}{\sqrt{5}}$. On applique les formules de Jacobi pour obtenir la nouvelle matrice, appelée $B = (b_{ij})$ ci-dessous :

* $b_{13} = ca_{13} - sa_{23} = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \left(-2\sqrt{5}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}} \times \sqrt{5} = -5$,
* $b_{23} = sa_{13} + ca_{23} = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \left(-2\sqrt{5}\right) + \frac{2}{\sqrt{5}} \times \sqrt{5} = 0$,
* $b_{11} = a_{11} - t.a_{12} = -1 - 6/2 = -4$,
* $b_{22} = a_{22} + t.a_{12} = 8 + 6/2 = 11$,
* le dernier terme ne change pas : $b_{33} = a_{33} = -4$.

D'où $B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -5 \\ 0 & 11 & 0 \\ -5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. La matrice de passage appelée Ω_1 dans le cours vaut

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On recommence de façon à annuler b_{13} : $p = 1$ et $q = 3$. On obtient $x = (a_{qq} - a_{pp})/(2a_{pq}) = 0$ puis $t = 1$, $c = s = \frac{1}{\sqrt{2}}$. On applique les formules de Jacobi pour obtenir la nouvelle matrice, appelée $D = (d_{ij})$ ci-dessous :

* $d_{12} = cb_{12} - sb_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \times 0 = 0$,
* $d_{23} = sb_{12} + cb_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \times 0 = 0$,
* $d_{11} = b_{11} - t.b_{13} = -4 + 5 = 1$,
* $d_{33} = b_{33} + t.b_{13} = -4 - 5 = -9$,
* le dernier terme ne change pas : $d_{22} = b_{22} = 11$.

On obtient donc $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$ et la matrice de passage Ω_2 vaut $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. La matrice D est diagonale, la méthode de Jacobi est terminée. Les valeurs propres de A sont les termes diagonaux de D. De plus, une base orthonormée de vecteurs propres de A est donnée par les colonnes de $\Omega_1\Omega_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ forment ainsi une base orthonormée de vecteurs propres, associés respectivement aux valeurs propres 1, 11 et –9.

Fin de corrigé

2. (4,5 points) On considère des matrices 3×3 symétriques non diagonales $A = (a_{jk})_{1 \le j \le 3,\ 1 \le k \le 3}$. On appelle $B = (b_{jk})_{1 \le j \le 3,\ 1 \le k \le 3}$ la matrice obtenue en appliquant une itération de la méthode de Jacobi à A.

Indication pour les questions suivantes : en appelant p et q les indices du terme de la matrice A qu'on cherche à annuler avec la méthode de Jacobi, on notera i le « troisième indice » (de façon à avoir $\{i, p, q\} = \{1, 2, 3\}$) et on considérera les formules donnant les termes b_{ip} et b_{iq}.

a. On suppose que a_{12}, a_{13} et a_{23} sont tous les trois non nuls. Montrer que B n'est pas diagonale.

b. On suppose qu'un et un seul des trois termes a_{12}, a_{13} et a_{23} est nul. Montrer que B contient exactement un terme b_{jk} sur-diagonal ($j < k$) nul.
c. On suppose que deux des trois termes a_{12}, a_{13} et a_{23} sont nuls. Que peut-on dire de B ?
Corrigé
Soient p et q les indices du terme que l'on veut annuler à l'aide de l'itération considérée, avec $p < q$. Soit i le troisième indice : $\{i, p, q\} = \{1, 2, 3\}$. Soient t, $c = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ et $s = tc$ respectivement la tangente, le cosinus et le sinus associés à cette itération. Remarquons que le terme t ne peut être nul, puisqu'il est solution d'une équation de la forme $t^2 + 2xt - 1 = 0$, ni par conséquent s (ni c). Enfin, rappelons certaines formules de la méthode de Jacobi, en posant $A = (a_{jk})$:
* $b_{pi} = b_{ip} = ca_{pi} - sa_{iq}$,
* $b_{qi} = b_{iq} = sa_{pi} + ca_{iq}$.
a. Par hypothèse, a_{pi} et a_{iq} sont non nuls. Il en découle que b_{pi} et b_{qi} ne sont pas tous les deux nuls ; en effet, la matrice du système précédent ayant pour déterminant $c^2 + s^2 = 1$, elle est inversible ; les termes b_{pi} et b_{qi} sont donc nuls si et seulement si a_{pi} et a_{iq} le sont aussi, ce qui est contraire à l'hypothèse. Par conséquent, B n'est pas diagonale.
b. Maintenant, un seul des trois termes a_{pi}, a_{iq} et a_{pq} est nul ; ce ne peut être a_{pq} puisque c'est ce terme que l'on cherche à annuler ; on a par conséquent ($a_{pi} = 0$ et $a_{iq} \neq 0$) ou ($a_{pi} \neq 0$ et $a_{iq} = 0$). Dans les deux cas, les termes c et s étant non nuls, ni $b_{pi} = b_{ip}$ ni $b_{qi} = b_{iq}$ ne peuvent être nuls : le seul terme sur-diagonal nul est, par construction, b_{pq}.
c. Si deux des trois termes a_{pi}, a_{iq} et a_{pq} sont nuls, il s'agit nécessairement de a_{pi} et a_{iq}. Les formules précédentes montrent qu'on a alors $b_{pi} = b_{ip} = b_{qi} = b_{iq} = 0$. Comme en plus on s'est arrangé pour avoir, par construction, $b_{pq} = b_{qp} = 0$, on en conclut que B est diagonale.
Fin de corrigé

3. (3 points) On s'intéresse à la convergence de la méthode de Jacobi pour des matrices 3×3 symétriques non diagonales $A = (a_{jk})_{1 \leq j \leq 3,\ 1 \leq k \leq 3}$. Que peut-on dire, en fonction du nombre de termes non nuls parmi a_{12}, a_{13} et a_{23}, du nombre d'itérations effectuées par la méthode de Jacobi quand on l'applique à A ?
Corrigé
Soit k le nombre de termes sur-diagonaux non nuls : on a $1 \leq k \leq 3$ par hypothèse.
* $k = 1$: deux termes sur-diagonaux sont nuls ; d'après la question 2.c, une seule itération suffit pour obtenir une matrice diagonale ;
* $k = 2$: un terme sur-diagonal est nul ; d'après la question 2.b et par une récurrence immédiate, chaque itération de la méthode de Jacobi produit une matrice ayant un seul terme sur-diagonal nul ; on n'obtient donc jamais une matrice diagonale en un nombre fini d'itérations et le nombre d'itérations est infini ;
* $k = 3$; on sait que la première itération de la méthode de Jacobi fait apparaître au moins un terme sur-diagonal nul et, d'après la question 2.a, au plus deux ; on est ensuite ramené aux deux cas précédents ; plus précisément, si la première itération fait apparaître un seul terme sur-diagonal nul, la méthode de Jacobi nécessite un nombre infini d'itérations pour converger vers une matrice diagonale, sinon, elle nécessite deux itérations (c'est le cas de la question 1).
Fin de corrigé

Exercice 2 (25 points)
On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}^2$ par $f(x, y) = 2\pi\, x \cos(y) + y^2$.
1. (3 points)
a. Déterminer, s'il en existe, les points de $\mathbf{R}^2$ où la matrice hessienne de f est positive et ceux où elle est définie positive.
b. Que peut-on en déduire pour les points de $\mathbf{R}^2$ qui pourraient être des minima locaux de f ?
Corrigé
a. On a $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2\pi\cos y \\ -2\pi x\sin y + 2y \end{pmatrix}$ et $\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi\sin y \\ -2\pi\sin y & -2\pi x\cos y + 2 \end{pmatrix}$. La matrice $\nabla^2 f(x,y)$ est positive (resp. définie positive) si ses deux valeurs propres sont positives ou nulles (resp. positives). Or, on a $\det\left(\nabla^2 f(x,y)\right) = -4\pi^2 \sin^2 y$, ce qui est toujours négatif ou nul ; par conséquent, $\nabla^2 f(x,y)$ n'est jamais définie positive. Pour $\sin y \neq 0$, le déterminant de $\nabla^2 f(x,y)$, égal au produit des valeurs propres, est strictement négatif : les deux valeurs propres sont de signes opposés et $\nabla^2 f(x,y)$ n'est pas positive. Pour $\sin y = 0$, au moins une valeur propre est nulle. Appelons λ l'autre valeur propre ; elle est égale à la trace de $\nabla^2 f(x,y)$, égale à la somme des valeurs propres, c'est-à-dire à $-2\pi x\cos y + 2$. Or, $\sin y = 0$ équivaut à $y = 2k\pi$ ou $y = (2k + 1)\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$. Pour $y = 2k\pi$, $\cos y$ vaut 1 et λ vaut $-2\pi x + 2$: λ est positive ou nulle si et seulement si on a $x \leq 1/\pi$. Pour $y = (2k + 1)\pi$, $\cos y$ vaut -1 et λ vaut $2\pi x + 2$: λ est positive ou nulle si et seulement si on a $x \geq -1/\pi$.
Conclusion : $\nabla^2 f(x,y)$ est positive pour les points (x, y) avec $x \leq 1/\pi$ et $y = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ ou avec $x \geq -1/\pi$ et $y = (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; $\nabla^2 f(x,y)$ n'est jamais définie positive.
b. Une condition nécessaire pour qu'un point (x^*, y^*) soit un minimum local est que $\nabla^2 f(x^*, y^*)$ soit positive. Les minima locaux de f, s'il en existe, sont donc de la forme (x, y) avec $x \leq 1/\pi$ et $y = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ ou avec $x \geq -1/\pi$ et $y = (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
Fin de corrigé

2. (2 points) Déterminer, s'il en existe, les points de $\mathbf{R}^2$ où f atteint un minimum ; on précisera alors s'il s'agit d'un minimum local ou global.
Corrigé
Des conditions nécessaires de minimalité locale sont d'une part l'annulation du gradient et d'autre part la positivité de la matrice hessienne, c'est-à-dire le fait que f soit localement convexe. Soit (x, y) un minimum local, s'il en existe. On doit donc avoir $\begin{pmatrix} 2\pi\cos y \\ -2\pi x\sin y + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ce qui entraîne $y = \pi/2 + k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$. Mais, d'après la question précédente, cette forme n'est pas compatible avec la positivité de $\nabla^2 f(x,y)$. Il n'y a donc aucun minimum local ni, *a fortiori*, aucun minimum global.
Remarque. On peut facilement voir qu'il n'existe pas de minimum global en constatant que f tend vers $-\infty$ quand x tend aussi vers $-\infty$ avec $y = 0$.
Fin de corrigé

Dans toute la suite, on considère le problème Q suivant :

$$\text{Minimiser } f(x, y) \text{ avec les contraintes } \begin{cases} -1 \le x \le 0 \\ 0 \le y \le 4 \end{cases}.$$

3. (1 point) Déterminer, s'il en existe, les points du domaine où les contraintes sont qualifiées.

Corrigé

Pour revenir à la forme du cours, mettons les contraintes sous la forme $g_i(x, y) \le 0$ pour $1 \le i \le 4$ puisqu'il y a quatre contraintes d'inégalité. On pose donc :

$$g_1(x, y) = -x - 1 \,;\; g_2(x, y) = x \,;\; g_3(x, y) = -y \,;\; g_4(x, y) = y - 4.$$

Ces quatre contraintes sont affines, donc convexes. De plus, l'intérieur strict du domaine réalisable est non vide puisque par exemple (–1/2, 2) appartient à cet intérieur. On en déduit que les contraintes sont qualifiées en tout point du domaine réalisable.

Fin de corrigé

4. (6 points)

a. Déterminer, s'il en existe, les points de la forme $(x, 0)$ avec $-1 \le x \le 0$ où les conditions de Karush, Kuhn et Tucker sont satisfaites.

b. Que peut-on en déduire pour les points de la forme $(x, 0)$ avec $-1 \le x \le 0$ qui pourraient être des minima locaux de f ?

Corrigé

a. On distingue le cas des deux coins ($x = 0$ ou $x = -1$) du cas du bord ($-1 < x < 0$).

* En (0, 0), les contraintes g_2 et g_3 sont saturées. Les conditions de Karush, Kuhn et Tucker sont satisfaites si et seulement s'il existe deux réels positifs ou nuls λ_2 et λ_3 vérifiant $\nabla f(0, 0) = -\lambda_2 \nabla g_2(0, 0) - \lambda_3 \nabla g_3(0, 0)$, c'est-à-dire $\begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \end{pmatrix} = -\lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Mais cette égalité entraîne $\lambda_2 < 0$: les conditions de Karush, Kuhn et Tucker ne sont donc pas satisfaites en (0, 0).

* En (–1, 0), les contraintes g_1 et g_3 sont saturées. Les conditions de Karush, Kuhn et Tucker sont satisfaites si et seulement s'il existe deux réels positifs ou nuls λ_1 et λ_3 vérifiant $\nabla f(-1, 0) = -\lambda_1 \nabla g_1(-1, 0) - \lambda_3 \nabla g_3(-1, 0)$, c'est-à-dire $\begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \end{pmatrix} = -\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, ce qui donne $\lambda_1 = 2\pi$ et $\lambda_3 = 0$. Ces réels étant positifs ou nuls, les conditions de Karush, Kuhn et Tucker sont satisfaites en (–1, 0).

* Pour $-1 < x < 0$, seule la contrainte g_3 est saturée. Les conditions de Karush, Kuhn et Tucker sont satisfaites si et seulement s'il existe un réel positif ou nul λ_3 vérifiant $\nabla f(x, 0) = -\lambda_3 \nabla g_3(x, 0)$, c'est-à-dire $\begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \end{pmatrix} = -\lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, ce qui est impossible. Les conditions de Karush, Kuhn et Tucker ne sont donc pas satisfaites en $(x, 0)$ avec $-1 < x < 0$.

Conclusion : sur le bord défini par les points $(x, 0)$ avec $-1 \le x \le 0$, les conditions de Karush, Kuhn et Tucker ne sont satisfaites qu'au coin (–1, 0).

b. Une condition nécessaire pour qu'un point (x^*, y^*) soit un minimum local est que les conditions de Karush, Kuhn et Tucker soient satisfaites. Par conséquent, le seul point de la forme $(x, 0)$ avec $-1 \le x \le 0$ qui puisse éventuellement être un minimum local de f est le coin (–1, 0).

Fin de corrigé

5. (1,5 points) On envisage d'appliquer au point $(0, \pi)$ une méthode de descente dans laquelle on choisit de suivre la direction admissible de plus grande descente au point $(0, \pi)$. À l'aide d'un dessin, déterminer cette direction en expliquant brièvement la démarche suivie (on fera en sorte que le dessin soit clair et non ambigu).

Corrigé

La direction de plus grande descente, non nécessairement admissible, au point $(0, \pi)$ est donnée par $-\nabla f(0, \pi) = (2\pi, -2\pi)^t$. Cette direction n'est pas admissible, comme le montre la figure 1 ci-dessous (dans laquelle $\nabla f(0, \pi)$ n'est pas à l'échelle ; le domaine réalisable est la partie non hachurée). Celle-ci permet en effet de constater que les directions admissibles au point $(0, \pi)$ sont de la forme $d = (d_1, d_2)^t$ avec $d_1 \leq 0$; ces directions sont celles décrivant le demi-cercle de la figure 1. La direction admissible de plus grande descente est la direction de la forme $(d_1, d_2)^t$ avec $d_1 \leq 0$ qui fait le plus grand angle avec $\nabla f(0, \pi)$. On voit grâce à la figure 1 qu'il s'agit de la direction $d^* = (0, -1)^t$, qui est bien de norme 1.

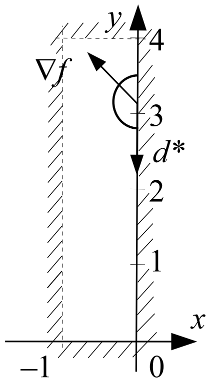

Figure 1.

Fin de corrigé

6. (1,5 points) On adopte en fait comme direction de descente au point $(0, \pi)$ une direction $d = (d_1, d_2)^t$ qui est solution du problème P suivant :

$$\text{Minimiser } d^t.\nabla f(0,\pi) \quad \text{avec les contraintes} \quad \begin{cases} \|d\|_\infty \leq 1 \\ d_1 \leq 0 \end{cases},$$

où $\|d\|_\infty$ désigne la norme infinie de d. On note d^* cette direction.

Montrer que P peut s'exprimer sous la forme du problème d'optimisation linéaire suivant :

$$\text{Maximiser } z = -u_1 - u_2 + u_3 \quad \text{avec les contraintes} \quad \begin{cases} u_1 \leq 1 \\ u_2 - u_3 \leq 1 \\ -u_2 + u_3 \leq 1 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0 \end{cases}$$

Corrigé

La norme infinie de $d = (d_1, d_2)^t$ étant égale à $\max(|d_1|, |d_2|)$, l'inégalité $\|d\|_\infty \leq 1$ équivaut aux inégalités $-1 \leq d_1 \leq 1$ et $-1 \leq d_2 \leq 1$, ce qui, compte tenu de l'inégalité $d_1 \leq 0$, se simplifie en $-1 \leq d_1 \leq 0$ et $-1 \leq d_2 \leq 1$. De plus, pour obtenir un problème dans lequel les variables seront toutes positives ou nulles, on pose $u_1 = -d_1 \geq 0$ et $d_2 = u_2 - u_3$ avec $u_2 \geq 0$ et $u_3 \geq 0$.

Comme $\nabla f(0,\pi)$ vaut $(-2\pi, 2\pi)^t$, minimiser $\nabla f(0,\pi).d^t$ revient à minimiser $-d_1 + d_2$, c'est-à-dire maximiser $d_1 - d_2 = -u_1 - u_2 + u_3$.

Quant aux contraintes :

- $-1 \leq d_1 \leq 0$ deviennent $u_1 \leq 1$ et $0 \leq u_1$;
- $-1 \leq d_2 \leq 1$ deviennent $-1 \leq u_2 - u_3 \leq 1$, soit $-u_2 + u_3 \leq 1$ et $u_2 - u_3 \leq 1$.

En ajoutant les contraintes de positivité relatives aux variables u_1, u_2 et u_3, on obtient bien la formulation proposée pour P dans l'énoncé.
Fin de corrigé

7. (3 points) Résoudre le problème P à l'aide de l'algorithme du simplexe sous la forme des dictionnaires. En déduire la direction d^* de la question 6.
Corrigé
On introduit trois variables d'écart notées u_4, u_5 et u_6 pour obtenir le premier dictionnaire :

$$\begin{array}{l} u_4 = 1 - u_1 \\ u_5 = 1 - u_2 + u_3 \\ u_6 = 1 + u_2 - u_3 \\ \hline z = -u_1 - u_2 + u_3 \end{array}$$

Seule la variable u_3 est entrante et seule u_6 est sortante. On obtient le dictionnaire suivant :

$$\begin{array}{l} u_3 = 1 + u_2 - u_6 \\ u_4 = 1 - u_1 \\ u_5 = 2 - u_6 \\ \hline z = 1 - u_1 - u_6 \end{array}$$

Les coefficients dans z des variables hors base u_1, u_2 et u_6 étant négatifs ou nuls, la solution courante est optimale. Celle-ci est donc donnée par $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ et $u_3 = 1$, le maximum de z valant 1.
On en déduit que la direction d^* de la question 6 vaut $(0, -1)^t$; on retrouve ici la direction admissible de plus grande descente de la question 5.
Fin de corrigé

8. (2,5 points) Donner l'expression du problème dual D de P. Déduire de la résolution de la question 7 une solution optimale de D ; on précisera la façon dont on obtient cette solution optimale.
Corrigé
Le problème P est exprimé dans la question 6 sous forme standard. On en déduit immédiatement l'expression de D :

$$\text{Minimiser } w = v_1 + v_2 + v_3 \quad \text{avec les contraintes} \quad \begin{cases} v_1 \geq -1 \\ v_2 - v_3 \geq -1 \\ -v_2 + v_3 \geq 1 \\ v_1 \geq 0, v_2 \geq 0, v_3 \geq 0 \end{cases}$$

Une solution optimale de D est obtenue en considérant, dans le dernier dictionnaire de la résolution de P, l'opposé des coefficients dans z des variables d'écart. Ce qui donne ici $v_1 = 0$, $v_2 = 0$ et $v_3 = 1$ (on vérifie aisément que la valeur prise par w pour cette solution est bien égale au maximum de z, à savoir 1).
Fin de corrigé

9. (2,5 points) Soient a, b et c trois réels. On considère le problème $P(a, b, c)$ défini par

$$\text{Maximiser } z(a,b,c) = a u_1 + b u_2 + c u_3 \quad \text{avec les contraintes} \quad \begin{cases} u_1 \leq 1 \\ u_2 - u_3 \leq 1 \\ -u_2 + u_3 \leq 1 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0 \end{cases}$$

À l'aide du théorème des écarts complémentaires, déterminer les valeurs de a, b et c, s'il en existe, pour lesquelles (0, 0, 1) est solution optimale de $P(a, b, c)$.

Corrigé

On peut remarquer que l'on retrouve le problème P pour $a = b = -1$ et $c = 1$. Le problème dual D de P s'adapte facilement pour donner celui de $P(a, b, c)$, que nous noterons $D(a, b, c)$; on obtient :

$$\text{Minimiser } w = v_1 + v_2 + v_3 \quad \text{avec les contraintes} \quad \begin{cases} v_1 \geq a \\ v_2 - v_3 \geq b \\ -v_2 + v_3 \geq c \\ v_1 \geq 0, v_2 \geq 0, v_3 \geq 0 \end{cases}$$

La solution proposée (0, 0, 1) est bien réalisable pour $P(a, b, c)$. Les deux premières contraintes de $P(a, b, c)$ n'étant pas saturées par (0, 0, 1), l'application du théorème des écarts complémentaires nous amène à chercher une solution de $D(a, b, c)$ avec $v_1 = v_2 = 0$. Par ailleurs, la troisième valeur proposée étant non nulle, la troisième contrainte duale doit être saturée : $-v_2 + v_3 = c$. La seule solution envisageable pour $D(a, b, c)$ est donc $(0, 0, c)$. Elle doit de plus être réalisable, ce qui implique les relations $a \leq 0$, $b \leq -c$ et $c \geq 0$.

Conclusion : (0, 0, 1) est solution optimale de $P(a, b, c)$ si et seulement si on a $a \leq 0$, $b \leq -c$ et $c \geq 0$ (on constate que cela inclut bien les valeurs $a = b = -1$ et $c = 1$ pour lesquelles on retrouve P et sa solution optimale (0, 0, 1)).

Fin de corrigé

10. (2 points) On revient à la résolution du problème Q. Appliquer une itération de la méthode de descente à partir du point $(0, \pi)$ selon la direction d^* obtenue à la question 7 et avec un pas optimal que l'on déterminera.

Remarque : si on a résolu la question 5 mais non la question 7, on prendra comme direction celle obtenue à la question 5.

Corrigé

On a constaté plus haut que la direction obtenue à la question 5 est la même que celle obtenue à la question 7. Il n'y a donc pas lieu de distinguer les deux cas.

Soit s un réel positif ou nul. On s'intéresse aux points de la forme $(0, \pi - s)$. Posons $h(s) = f(0, \pi - s) = (\pi - s)^2$ et cherchons à minimiser h sans sortir du domaine. La fonction h atteint son minimum en $s = \pi$, ce qui correspond au point (0, 0), lequel est bien réalisable (mais n'est pas un minimum local d'après la question 4).

Fin de corrigé