Télécom Paris 9 novembre 2021 Année 2021-2022 – P1

Corrigé du contrôle de connaissances de MDI 210

Durée : 3 h.
Documents autorisés : deux feuilles recto verso (soit quatre pages), format A4 ; dictionnaire autorisé pour les élèves dont le français n'est pas la langue maternelle.
Les calculatrices et les ordinateurs sont interdits, ainsi que tout objet permettant de communiquer avec l'extérieur.
Un résultat non justifié pourra ne pas être considéré comme juste. Un résultat obtenu autrement que par les méthodes indiquées dans l'énoncé et plus généralement par des méthodes autres que celles du cours pourra ne pas être considéré comme juste.
On détaillera les calculs effectués, même si cela n'est pas demandé explicitement.
Le barème, sur 40, n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié.

Exercice 1 (11 points)

Soit ε un réel strictement positif. On considère la matrice $A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+2\varepsilon \end{pmatrix}$. On note $\mathbf{R}$ l'ensemble des réels. On considère le système linéaire S_ε défini dans $\mathbf{R}^2$ par $A_\varepsilon X = (a, b)^t$ où $X = (x_1, x_2)^t$ est le vecteur des inconnues et où a et b sont des réels donnés.

1. (1 point) À l'aide de la méthode de Gauss, donner la décomposition LU de A_ε.

Corrigé

Pour éliminer le 1 situé en deuxième ligne et première colonne, il suffit de soustraire la première ligne à la seconde, ce qui donne ici la matrice triangulaire inférieure L de la décomposition LU : $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Le résultat de cette soustraction est une matrice triangulaire supérieure égale à $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2\varepsilon \end{pmatrix}$; c'est la matrice U de la décomposition.

Fin de corrigé

2. (2 points) À l'aide de la décomposition LU de A_ε, résoudre S_ε.

Corrigé

Le système $A_\varepsilon X = (a, b)^t$ est équivalent aux deux systèmes $L\,Y = (a, b)^t$ et $U\,X = Y$. La solution du système $L\,Y = (a, b)^t$, obtenue par l'application de la méthode de remontée, vaut $Y = (a, b - a)^t$. Celle du système $U\,X = Y$, obtenue par une autre application de la méthode de remontée, vaut $X = \begin{pmatrix} a - \dfrac{b-a}{2\varepsilon} \\ \dfrac{b-a}{2\varepsilon} \end{pmatrix}$.

Fin de corrigé

3. (1 point) En déduire l'inverse de A_ε.

Corrigé

On remarque d'abord que le déterminant de A_ε vaut 2ε et n'est donc pas nul : A_ε est bien inversible. Son inverse est obtenue en considérant les solutions de S_ε pour $a = 1$ et $b = 0$, laquelle vaut $\begin{pmatrix} 1+\frac{1}{2\varepsilon} \\ \frac{-1}{2\varepsilon} \end{pmatrix}$, puis pour a = 0 et b = 1, ce qui donne $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2\varepsilon} \\ \frac{1}{2\varepsilon} \end{pmatrix}$. D'où $A_\varepsilon^{-1} = \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{2\varepsilon} & -\frac{1}{2\varepsilon} \\ -\frac{1}{2\varepsilon} & \frac{1}{2\varepsilon} \end{pmatrix}$, ou encore $A_\varepsilon^{-1} = \frac{1}{2\varepsilon}\begin{pmatrix} 2\varepsilon+1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Fin de corrigé

4. (2 points) À l'aide de la méthode de Jacobi, déterminer les valeurs propres de A_ε (il n'est pas demandé de calculer les vecteurs propres de A_ε) ; on détaillera les calculs.

Corrigé

La méthode de Jacobi s'applique à des matrices symétriques, ce qui est bien le cas de A_ε. On veut annuler les termes non diagonaux. Avec les notations du cours, on a donc p = 1 et q = 2. On pose $x = (a_{qq} - a_{pp})/(2a_{pq}) = \varepsilon$; on résout l'équation $t^2 + 2xt - 1 = 0$: la bonne racine (celle de valeur absolue inférieure à 1) vaut $t = \sqrt{\varepsilon^2+1} - \varepsilon$. On applique les formules de Jacobi : $b_{11} = a_{11} - t.a_{12} = 1 - t = 1+\varepsilon-\sqrt{\varepsilon^2+1}$ et $b_{22} = a_{22} + t.a_{12} = 1+\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+1}$. Une itération de la méthode de Jacobi suffit pour obtenir une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont b_{11} et b_{22}. Les valeurs propres de A_ε sont donc $1+\varepsilon-\sqrt{\varepsilon^2+1}$ et $1+\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+1}$.

Fin de corrigé

5. (2 points) Quelles sont les valeurs de ε pour lesquelles on peut appliquer la méthode de Cholesky à A_ε ? Pour ces valeurs de ε, appliquer la méthode de Cholesky à A_ε.

Corrigé

La méthode de Cholesky s'applique à des matrices symétriques définies positives. Les deux valeurs propres de A_ε, égales à $1+\varepsilon-\sqrt{\varepsilon^2+1}$ et $1+\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+1}$ étant strictement positives pour toute valeur strictement positive de ε, A_ε est définie positive (et symétrique). On peut donc appliquer la méthode de Cholesky à A_ε pour tout réel ε > 0.

Pour cela, cherchons $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ vérifiant $BB^t = A_\varepsilon$ avec $a > 0$ et $c > 0$. On obtient $a^2 = 1$, d'où $a = 1$, $ab = 1$, d'où $b = 1$, et $b^2 + c^2 = 1 + 2\varepsilon$, d'où $c = \sqrt{2\varepsilon}$. D'où $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2\varepsilon} \end{pmatrix}$.

Fin de corrigé

6. (2 points) Déterminer le conditionnement de A_ε pour les normes matricielles 1, 2 et infinie.

Corrigé

Pour une norme $\| \ \|$ donnée, le conditionnement d'une matrice A relativement à cette norme vaut $\|A\| \, \|A^{-1}\|$.

Rappelons les formules des normes 1 et infinie d'une matrice $n \times n$ $A = (a_{ij})$ quelconque : $\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ et $\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$. Les conditionnements 1 et infini de A_ε valent donc, d'après la question 3 : $cond_1(A_\varepsilon) = cond_\infty(A_\varepsilon) = \frac{(1+\varepsilon)^2}{\varepsilon}$.

Pour une matrice symétrique (ou plus généralement normale) et inversible A, le conditionnement pour la norme 2 est donné par le rapport entre la plus grande valeur absolue des valeurs propres de A et la plus petite valeur absolue des valeurs propres de A. Pour A_ε, on obtient donc $cond_2(A_\varepsilon) = \frac{1+\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+1}}{1+\varepsilon-\sqrt{\varepsilon^2+1}}$.

Fin de corrigé

7. (1 point) Que peut-on dire du conditionnement de A_ε pour chacune de ces normes quand ε tend vers 0 ? Le système S_ε est-il bien conditionné quand ε est petit ?

Corrigé

Le conditionnement de A_ε pour chacune de ces normes tend vers l'infini quand ε tend vers 0 ; le système (S_ε) est mal conditionné quand ε est petit.

Fin de corrigé

Exercice 2 (12 points)

Soit a un paramètre réel. On considère le problème (P_a) suivant :

$$\text{Maximiser } z_a = 8x_1 + ax_2 \quad \text{avec les contraintes} \quad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 16 & (1) \\ x_1 + x_2 \le 5 & (2) \\ -x_1 + x_2 \le 3 & (3) \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

1. (4 points) Dans cette question, on considère $a = 7$.

a. Résoudre (P_7) à l'aide de l'algorithme du simplexe sous la forme des dictionnaires.

Corrigé

Introduisons les variables d'écart pour obtenir le premier dictionnaire :

$$\begin{array}{l} x_3 = 16 - 3\,x_1 - 4x_2 \\ x_4 = 5 - x_1 - x_2 \\ x_5 = 3 + x_1 - x_2 \\ \hline z_7 = 8x_1 + 7x_2 \end{array}$$

Chacune des deux variables x_1 et x_2 est candidate pour entrer en base. Faisons entrer x_1, qui est ici à la fois la variable pourvue du plus grand coefficient dans z_7 et celle qui fait le plus croître z_7. On constate que la croissance est limitée par la positivité de x_4, qui sort donc de la base. On obtient le dictionnaire suivant :

$$\begin{array}{l} x_1 = 5 - x_2 - x_4 \\ x_3 = 1 - x_2 + 3x_4 \\ x_5 = 8 - 2x_2 - x_4 \\ \hline z_7 = 40 - x_2 - 8x_4 \end{array}$$

Les coefficients de x_2 et de x_4 étant négatifs ou nuls, la solution courante est optimale. Celle-ci vaut donc (5, 0) et le maximum de z_7 vaut 40.

Fin de corrigé

b. En déduire toutes les valeurs de a pour lesquelles la solution déterminée à la question 1.a reste optimale.
Corrigé
On peut écrire z_a sous la forme :

$$z_a = z_7 + (a-7)x_2 = 40 - x_2 - 8x_4 + (a-7)x_2 = 40 + (a-8)x_2 - 8x_4.$$

La solution courante (5, 0) reste optimale si et seulement si les coefficients de x_2 et de x_4 restent négatifs ou nuls, autrement dit si et seulement si on a $a \leq 8$.
Fin de corrigé
2. (2 points) Donner l'expression du problème dual (D_a) de (P_a).
Corrigé
Le problème (P_a) étant sous forme standard, l'expression de (D_a) vient immédiatement :

$$\text{Minimiser } w_a = 16y_1 + 5y_2 + 3y_3$$

$$\text{avec les contraintes } \begin{cases} 3y_1 + y_2 - y_3 \geq 8 \\ 4y_1 + y_2 + y_3 \geq a \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Fin de corrigé

3. (2 points) On revient dans cette question au cas $a = 7$.
a. Déduire de la résolution de la question 1.a une solution optimale de (D_7) ; on précisera comment on obtient cette solution.
Corrigé
On sait qu'une solution optimale de (D_7) est donnée par l'opposé des coefficients de x_3, x_4 et x_5 dans le dernier dictionnaire de la résolution de (P_7). On obtient donc ici (0, 8, 0) comme solution optimale de (D_7) (on peut d'ailleurs facilement vérifier que cette solution est réalisable pour $a = 7$ et donne à w_7 la valeur 40).
Fin de corrigé

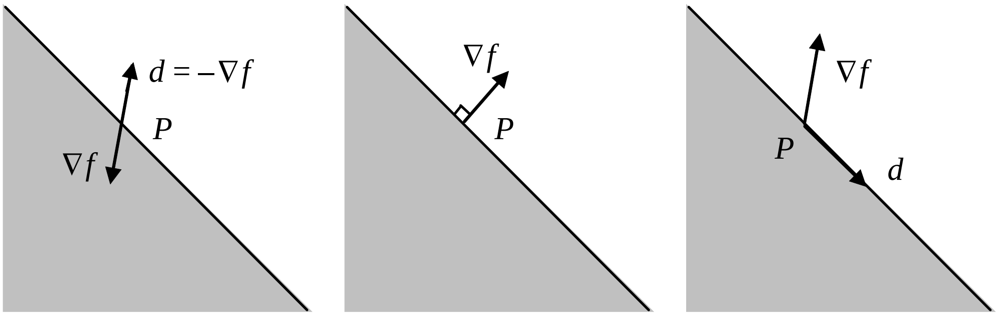
b. Dans les contraintes (1), (2) et (3), on remplace 16, 5 et 3 respectivement par $16 + \alpha$, $5 + \beta$ et $3 + \gamma$ où α, β et γ sont des réels donnés. De combien la valeur optimale de z_7 varie-t-elle en fonction de α, β et γ si on suppose que les valeurs absolues de ces paramètres sont suffisamment petites ?
Corrigé
En reprenant les notations du cours, on sait qu'une petite variation δb de b entraîne une variation de z_7 égale à $\delta b.Y$, où Y est une solution optimale de (D_7). D'après ce qui précède, on a ici $Y = (0, 8, 0)$. La variation de z_7 vaut donc 8β.
Fin de corrigé

4. (2 points) En appliquant le théorème des écarts complémentaires, indiquer les valeurs de a pour lesquelles (4, 1) est solution optimale de (P_a).
Corrigé
On constate d'abord que (4, 1) est bien une solution réalisable de (P_a). On cherche donc trois réels y_1, y_2 et y_3 vérifiant l'énoncé du théorème des écarts complémentaires.
La contrainte (3) n'étant pas saturée par (4, 1), on doit avoir $y_3 = 0$.

Par ailleurs, x_1 et x_2 étant non nulles dans la solution proposée, les deux contraintes duales doivent être saturées : $\begin{cases} 3y_1 + y_2 - y_3 = 8 \\ 4y_1 + y_2 + y_3 = a \end{cases}$. Avec $y_3 = 0$, il vient $y_1 = a - 8$ et $y_2 = 32 - 3a$. Ces valeurs devant être positives ou nulles, on conclut que a doit vérifier $8 \leq a \leq 32/3$ pour que (4, 1) soit solution optimale de (P_a).
Fin de corrigé

5. (2 points) On considère enfin le cas $a = 8$. À l'aide de ce qui précède, que peut-on dire de l'ensemble des solutions optimales de (P_8) ?
Corrigé
Ce qui précède montre que $S_1 = (5, 0)$ et $S_2 = (4, 1)$ sont deux solutions optimales de (P_8). Or, d'après le fonctionnement de l'algorithme du simplexe, ces points sont deux sommets du polygone des solutions réalisables. On en déduit que l'ensemble des solutions optimales de (P_8) est exactement le segment $[S_1, S_2]$: on est dans le cas pour lequel la fonction objectif z_8 est parallèle à un côté du polygone des solutions réalisables, côté par lequel « on sort » quand on fait croître z_8.
Fin de corrigé

Exercice 3 (6 points)
On se place dans le contexte de la seconde séance de travaux pratiques. Plus précisément, on considère un problème consistant à minimiser une fonction $f(x, y)$ à deux variables x et y avec deux contraintes affines $g_1(x, y) \leq 0$ et $g_2(x, y) \leq 0$. On suppose que les droites associées aux deux contraintes se coupent en un point I.
Pour chacune des deux questions ci-dessous, on distinguera clairement les différents cas.
1. (2,5 points) On considère un point réalisable P saturant g_1 et non g_2. À l'aide d'un dessin, indiquez toutes les directions et le sens que ∇f peut avoir pour que le point P satisfasse les conditions de Karush, Kuhn et Tucker. Si ces conditions ne sont pas satisfaites, indiquez sur un ou plusieurs dessins la direction et le sens que va suivre une méthode de descente admissible de plus grande pente à partir de P.
Corrigé
La situation sur un bord est illustrée par les dessins suivants, où le domaine réalisable est la partie du plan non grisée.

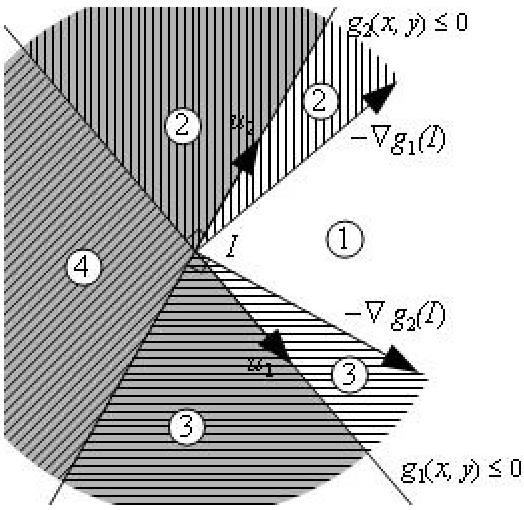


1^er^ cas — 2^e^ cas — 3^e^ cas

- 1^er^ cas : ∇f en P est dirigé vers l'extérieur du domaine. Alors $d = -\nabla f$ est une direction admissible et de descente, ce qui montre que les conditions de Karush, Kuhn et Tucker ne sont pas satisfaites ; la direction suivie par la méthode de descente admissible de plus grande pente à partir de P est $-\nabla f$.

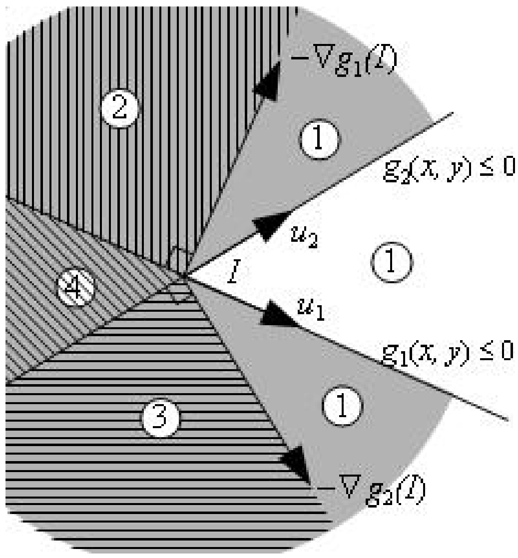
- 2[e] cas : ∇f en P est dirigé vers l'intérieur du domaine et est perpendiculaire au bord. Les conditions de Karush, Kuhn et Tucker sont satisfaites ; il n'y a pas de direction à la fois de descente et admissible.
- 3[e] cas : ∇f en P est dirigé vers l'intérieur du domaine mais n'est pas perpendiculaire au bord. Les conditions de Karush, Kuhn et Tucker ne sont pas satisfaites. Les directions admissibles sont celles qui appartiennent au demi-plan non grisé. Les directions de descente sont les directions qui font un angle supérieur à $\pi/2$ avec ∇f. La direction admissible de plus grande pente descendante à partir de P est la direction du demi-plan non grisé qui fait le plus grand angle avec ∇f. C'est une direction qui suit la droite associée à la contrainte saturée. Elle est représentée par d dans la figure ci-dessus.
Fin de corrigé

2. (3,5 points) On suppose maintenant que l'on se trouve au point d'intersection I. À l'aide de dessins, indiquez toutes les directions et le sens que ∇f peut avoir pour que le point I satisfasse les conditions de Karush, Kuhn et Tucker. Si ces conditions ne sont pas satisfaites, indiquez sur un ou plusieurs dessins la direction et le sens que va suivre une méthode de descente admissible de plus grande pente à partir de I. On traitera le cas où l'angle fait par les deux droites pour définir le domaine réalisable en I est aigu et celui où cet angle est obtus.
Corrigé
On considère d'abord le cas où l'angle intérieur au domaine en I est obtus. Le secteur réalisable est sur fond blanc, hachuré ou non.



- 1[er] cas : ∇f en I se trouve dans la région 1. Alors la condition de Karush, Kuhn et Tucker est vérifiée, il n'y a pas de direction à la fois de descente et admissible.
- 2[e] cas : ∇f en I se trouve dans la région 2, dans la partie réalisable ou non. La condition de Karush, Kuhn et Tucker n'est pas vérifiée : il existe des directions à la fois admissibles et de descente. La direction admissible de plus grande pente est u_1.
- 3[e] cas : ∇f en I se trouve dans la région 3, dans la partie réalisable ou non. La condition de Karush, Kuhn et Tucker n'est pas vérifiée : il existe des directions à la fois admissibles et de descente. La direction admissible de plus grande pente est u_2.
- 4[e] cas : ∇f en I se trouve dans la région 4. La condition de Karush, Kuhn et Tucker n'est pas vérifiée : il existe des directions à la fois admissibles et de descente. Le vecteur $d = -\nabla f$ donne la direction à suivre.

On considère maintenant le cas où l'angle intérieur au domaine en I est aigu. Le secteur réalisable est sur fond blanc.



- 1^er cas : ∇f en I se trouve dans la région 1, grisée ou non. Alors la condition de Karush, Kuhn et Tucker est vérifiée, il n'y a pas de direction à la fois de descente et admissible.
- 2^e cas : ∇f en I se trouve dans la région 2. La condition de Karush, Kuhn et Tucker n'est pas vérifiée : il existe des directions à la fois admissibles et de descente. La direction admissible de plus grande pente est u_1.
- 3^e cas : ∇f en I se trouve dans la région 3. La condition de Karush, Kuhn et Tucker n'est pas vérifiée : il existe des directions à la fois admissibles et de descente. La direction admissible de plus grande pente est u_2.
- 4^e cas : ∇f en I se trouve dans la région 4. La condition de Karush, Kuhn et Tucker n'est pas vérifiée : il existe des directions à la fois admissibles et de descente. Le vecteur $d = -\nabla f$ donne la direction à suivre.

Fin de corrigé

Exercice 4 (11 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}^2$ par :

$$f(x, y) = 5x^2 + y^2 + 2xy - 12x - 4y .$$

1. (2 points) Montrer que f admet un unique minimum global sur $\mathbf{R}^2$ que l'on déterminera.

Corrigé

Montrons que la fonction f est strictement convexe. La matrice hessienne de cette fonction est :

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de $\nabla^2 f(x, y)$ vaut 16 : le produit des valeurs propres (égal au déterminant) est strictement positif ; les valeurs propres sont de même signe et non nulles. La trace de $\nabla^2 f(x, y)$ vaut 12 ; la somme des valeurs propres (égale à la trace) est positive : les deux valeurs propres de $\nabla^2 f(x, y)$ sont donc strictement positives (on peut aussi les calculer numériquement et aboutir à la même conclusion), ce qui implique que f est une fonction strictement convexe ; donc tout minimum local est global. Un point est un minimum global si et seulement si en ce point le gradient de *f* est nul. Or :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 10x + 2y - 12 \\ 2x + 2y - 4 \end{pmatrix}.$$

Pour que (x, y) soit un minimum global, il faut et il suffit d'avoir :

$$\begin{cases} 10x + 2y - 12 = 0 \\ 2x + 2y - 4 = 0 \end{cases},$$

système qui a pour solution : $x = 1$, $y = 1$.
La fonction *f* admet donc un unique minimum global : le point (1, 1). La valeur minimum de *f* est –8.
Fin de corrigé

2. (2 points) Appliquer une itération de la méthode de plus forte descente à pas optimal à partir du point (1, 0). On appelle *A* le point obtenu.
Corrigé
Au point (1, 0), la direction de plus forte descente est la direction $-\nabla f(1, 0) = (2, 2)^t$. C'est dans cette direction et ce sens que l'on va se déplacer à partir du point (1, 0). On s'intéresse donc aux points de la forme $(1 + 2s, 2s)$. Posons $g(s) = f(1 + 2s, 2s) = 32s^2 - 8s - 7$. On cherche à minimiser *g*. L'étude des variations de *g* montre que son minimum est atteint par $s = 1/8$. Le point *A* obtenu est donc le point $(1 + 2s, 2s)$ pour $s = 1/8$, c'est-à-dire le point $A = (5/4, 1/4)$.
Fin de corrigé

3. (1 point) Peut-on, sans faire de calcul supplémentaire, prédire quelle serait la direction suivie à partir de *A* si on effectuait une autre itération de la méthode de plus forte descente à pas optimal ? Si oui, indiquer cette direction.
Corrigé
Le cours a montré que la méthode de plus forte descente présente une convergence en zigzag. Autrement dit, deux directions successives sont perpendiculaires. La direction de la première itération étant $(2, 2)^t$, la direction suivante sera $(-1, 1)^t$.
Remarque : comme cette direction, si on la suit depuis le point *A*, passe par le point (1, 1) qui est le minimum de *f* d'après la question 1, on peut subodorer que la seconde itération va conduire à ce minimum et que la méthode va s'arrêter là. C'est ce que confirment les calculs.
Fin de corrigé

On considère maintenant le problème suivant :

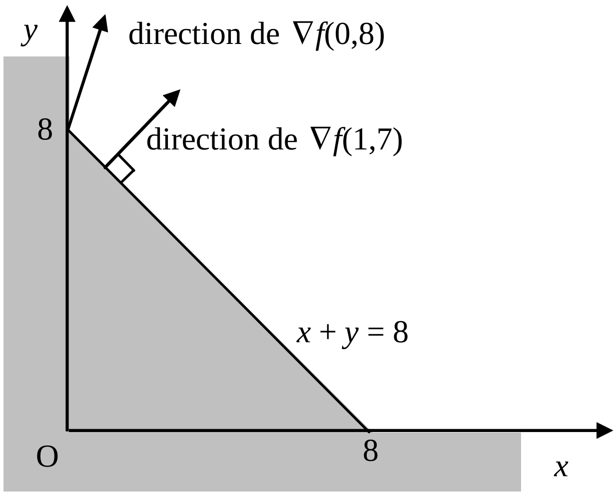
$$\text{Minimiser } f(x, y) \text{ avec les contraintes } \begin{cases} g_1(x, y) = 8 - x - y \leq 0 \\ g_2(x, y) = -x \leq 0 \\ g_3(x, y) = -y \leq 0 \end{cases}$$

4. (1 point) En quels points du domaine réalisable les contraintes sont-elles qualifiées ?
Corrigé
Les contraintes sont convexes puisque affines et l'intérieur strict du domaine réalisable est non vide puisqu'il contient par exemple le point (5, 5). On sait alors que les contraintes sont qualifiées en tout point du domaine réalisable.
Fin de corrigé

5. (5 points) En utilisant la condition de Karush, Kuhn et Tucker, indiquer si le point (0, 8) peut être solution optimale du problème. Si ce n'est pas le cas, résoudre le problème en appliquant la méthode de descente admissible de plus grande pente à pas optimal vue en cours à partir du point (0, 8). On indiquera les coordonnées du point de minimum, on prouvera qu'il s'agit bien d'un minimum, on indiquera la valeur de ce minimum.

Corrigé

On dessine le domaine réalisable pour y voir plus clair. Sur le dessin ci-dessous sont aussi représentées des directions utiles ultérieurement. Le domaine réalisable est la partie du plan non grisée.



Au point (0, 8), on a $g_1(x, y) = 0$, $g_2(x, y) = 0$ et $g_3(x, y) \neq 0$. En conséquence, la condition de Karush, Kuhn et Tucker consiste à chercher s'il existe λ_1 et λ_2, réels positifs ou nuls, avec :

$$\nabla f(0, 8) = -\lambda_1 \nabla g_1(0, 8) - \lambda_2 \nabla g_2(0, 8).$$

Or : $\nabla g_1(x, y) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x, y) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\nabla f(0, 8) = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$. Les réels λ_1 et λ_2 doivent donc vérifier :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 4 \\ \lambda_1 \quad = 12 \end{cases}$$

système dont la solution est $\lambda_1 = 12$ et $\lambda_2 = -8$. Cette dernière valeur étant négative, la condition de Karush, Kuhn et Tucker n'est pas vérifiée. Cela correspond au fait qu'il existe des directions de descente admissibles.

La direction de descente admissible de plus grande pente est celle qui fait le plus grand angle avec $\nabla f(0, 8)$ tout en ne sortant pas du domaine réalisable. Suivre la direction de plus grande pente consiste à suivre à partir du point (0, 8) la droite $x + y = 8$ en partant vers la droite, c'est-à-dire à suivre la direction et le sens donnés par le vecteur $(1, -1)^t$. Cherchons le minimum de la restriction de f au segment de cette droite d'abscisse comprise entre 0 et 8. Les points de ce segment peuvent s'écrire $(s, 8 - s)$, avec $0 \leq s \leq 8$. Posons $v(s) = f(s, 8 - s)$.

Sur ce segment, la fonction f vaut, pour s réel positif et $(s, 8 - s)$ réalisable :

$$v(s) = f(s, 8 - s) = 5s^2 + (8 - s)^2 + 2s(8 - s) - 12s - 4(8 - s)$$

$$v(s) = 4s^2 - 8s + 32\,.$$

D'où : $\quad v'(s) = 8s - 8\,.$

Par conséquent, $v(s)$ atteint son minimum pour $s = 1$, c'est-à-dire pour le point (1, 7) qui est sur le segment considéré.

Au point (1, 7), seule la contrainte $g_1(x, y) \geq 0$ est saturée. On constate graphiquement (voir la figure plus haut) qu'il n'y a plus de direction à la fois de descente et admissible car le gradient de f est perpendiculaire à la droite et orienté vers l'intérieur du domaine réalisable. La méthode de descente s'arrête donc.

Vérifions que la condition de Karush, Kuhn et Tucker est satisfaite en ce point. Pour cela, cherchons s'il existe λ_1, réel positif ou nul, vérifiant $\nabla f(1, 7) = -\lambda \nabla g_1(1, 7)$. Or, on a $\nabla f(1, 7) = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}$ et $\nabla g_1(1, 7) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; λ_1 vaut donc 12 ; comme il est positif, la condition de Karush, Kuhn et Tucker est vérifiée. Or, la fonction f étant convexe et les fonctions g_1, g_2 et g_3 étant aussi convexes, cette condition est suffisante pour affirmer qu'il s'agit d'un minimum global du problème. En conclusion, le minimum de f sur le domaine réalisable est atteint au point (1, 7) et vaut 28, valeur obtenue après remplacement des valeurs de x et y dans la définition de f.

Fin de corrigé