Télécom Paris 9 novembre 2021 Année 2021-2022 – P1

Contrôle de connaissances de MDI 210

Durée : 3 h.
Documents autorisés : deux feuilles recto verso (soit quatre pages), format A4 ;
dictionnaire autorisé pour les élèves dont le français n'est pas la langue maternelle.
Les calculatrices et les ordinateurs sont interdits,
ainsi que tout objet permettant de communiquer avec l'extérieur.
Un résultat non justifié pourra ne pas être considéré comme juste. Un résultat obtenu autrement que par les méthodes indiquées dans l'énoncé et plus généralement par des méthodes autres que celles du cours pourra ne pas être considéré comme juste.
On détaillera les calculs effectués, même si cela n'est pas demandé explicitement.
Le barème, sur 40, n'est donné qu'à titre indicatif et pourra être modifié.

Exercice 1 (11 points)

Soit ε un réel strictement positif. On considère la matrice $A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+2\varepsilon \end{pmatrix}$. On note **R** l'ensemble des réels. On considère le système linéaire S_ε défini dans $\mathbf{R}^2$ par $A_\varepsilon X = (a, b)^t$ où $X = (x_1, x_2)^t$ est le vecteur des inconnues et où a et b sont des réels donnés.

1. (1 point) À l'aide de la méthode de Gauss, donner la décomposition LU de A_ε.

2. (2 points) À l'aide de la décomposition LU de A_ε, résoudre S_ε.

3. (1 point) En déduire l'inverse de A_ε.

4. (2 points) À l'aide de la méthode de Jacobi, déterminer les valeurs propres de A_ε (il n'est pas demandé de calculer les vecteurs propres de A_ε) ; on détaillera les calculs.

5. (2 points) Quelles sont les valeurs de ε pour lesquelles on peut appliquer la méthode de Cholesky à A_ε ? Pour ces valeurs de ε, appliquer la méthode de Cholesky à A_ε.

6. (2 points) Déterminer le conditionnement de A_ε pour les normes matricielles 1, 2 et infinie.

7. (1 point) Que peut-on dire du conditionnement de A_ε pour chacune de ces normes quand ε tend vers 0 ? Le système S_ε est-il bien conditionné quand ε est petit ?

Exercice 2 (12 points)

Soit a un paramètre réel. On considère le problème (P_a) suivant :

$$\text{Maximiser } z_a = 8x_1 + ax_2 \quad \text{avec les contraintes} \quad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 16 & (1) \\ x_1 + x_2 \le 5 & (2) \\ -x_1 + x_2 \le 3 & (3) \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

1. (4 points) Dans cette question, on considère $a = 7$.

a. Résoudre (P_7) à l'aide de l'algorithme du simplexe sous la forme des dictionnaires.

b. En déduire toutes les valeurs de a pour lesquelles la solution déterminée à la question 1.a reste optimale.

2. (2 points) Donner l'expression du problème dual (D_a) de (P_a).

3. (2 points) On revient dans cette question au cas $a = 7$.

a. Déduire de la résolution de la question 1.a une solution optimale de (D_7) ; on précisera comment on obtient cette solution.

b. Dans les contraintes (1), (2) et (3), on remplace 16, 5 et 3 respectivement par $16 + \alpha$, $5 + \beta$ et $3 + \gamma$ où α, β et γ sont des réels donnés. De combien la valeur optimale de z_7 varie-t-elle en fonction de α, β et γ si on suppose que les valeurs absolues de ces paramètres sont suffisamment petites ?

4. (2 points) En appliquant le théorème des écarts complémentaires, indiquer les valeurs de a pour lesquelles (4, 1) est solution optimale de (P_a).

5. (2 points) On considère enfin le cas $a = 8$. À l'aide de ce qui précède, que peut-on dire de l'ensemble des solutions optimales de (P_8) ?

Exercice 3 (6 points)

On se place dans le contexte de la seconde séance de travaux pratiques. Plus précisément, on considère un problème consistant à minimiser une fonction $f(x, y)$ à deux variables x et y avec deux contraintes affines $g_1(x, y) \leq 0$ et $g_2(x, y) \leq 0$. On suppose que les droites associées aux deux contraintes se coupent en un point I.

Pour chacune des deux questions ci-dessous, on distinguera clairement les différents cas.

1. (2,5 points) On considère un point réalisable P saturant g_1 et non g_2. À l'aide d'un dessin, indiquez toutes les directions et le sens que ∇f peut avoir pour que le point P satisfasse les conditions de Karush, Kuhn et Tucker. Si ces conditions ne sont pas satisfaites, indiquez sur un ou plusieurs dessins la direction et le sens que va suivre une méthode de descente admissible de plus grande pente à partir de P.

2. (3,5 points) On suppose maintenant que l'on se trouve au point d'intersection I. À l'aide de dessins, indiquez toutes les directions et le sens que ∇f peut avoir pour que le point I satisfasse les conditions de Karush, Kuhn et Tucker. Si ces conditions ne sont pas satisfaites, indiquez sur un ou plusieurs dessins la direction et le sens que va suivre une méthode de descente admissible de plus grande pente à partir de I. On traitera le cas où l'angle fait par les deux droites pour définir le domaine réalisable en I est aigu et celui où cet angle est obtus.

Exercice 4 (11 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}^2$ par :

$$f(x, y) = 5x^2 + y^2 + 2xy - 12x - 4y\,.$$

1. (2 points) Montrer que f admet un unique minimum global sur $\mathbf{R}^2$ que l'on déterminera.

2. (2 points) Appliquer une itération de la méthode de plus forte descente à pas optimal à partir du point (1, 0). On appelle A le point obtenu.

3. (1 point) Peut-on, sans faire de calcul supplémentaire, prédire quelle serait la direction suivie à partir de A si on effectuait une autre itération de la méthode de plus forte descente à pas optimal ? Si oui, indiquer cette direction.

On considère maintenant le problème suivant :

$$\text{Minimiser } f(x, y) \text{ avec les contraintes } \begin{cases} g_1(x, y) = 8 - x - y \leq 0 \\ g_2(x, y) = -x \leq 0 \\ g_3(x, y) = -y \leq 0 \end{cases}$$

4. (1 point) En quels points du domaine réalisable les contraintes sont-elles qualifiées ?

5. (5 points) En utilisant la condition de Karush, Kuhn et Tucker, indiquer si le point (0, 8) peut être solution optimale du problème. Si ce n'est pas le cas, résoudre le problème en appliquant la méthode de descente admissible de plus grande pente à pas optimal vue en cours à partir du point (0, 8). On indiquera les coordonnées du point de minimum, on prouvera qu'il s'agit bien d'un minimum, on indiquera la valeur de ce minimum.