

Cho số nguyên dương  $m$  nhỏ hơn hoặc bằng 2015. Hãy tìm  $m$  nhỏ nhất sao cho  ${}_{2015}C_m$  là số chẵn.

Lời giải:

Với số nguyên dương  $m$  nhỏ hơn hoặc bằng 2015 ta có:

$${}_{2015}C_m = \frac{{}_{2015}P_m}{m!} = \frac{2015}{1} \cdot \frac{2014}{2} \cdot \frac{2013}{3} \cdot \frac{2012}{4} \cdots \frac{2016-m}{m} \quad (*)$$

Giá trị của  $m$  nhỏ nhất sao cho  $(*)$  là số chẵn là khi “ $m$  là số chẵn và  $\frac{2016-m}{m} = \frac{2016}{m} - 1$  là số chẵn đầu tiên”. Có nghĩa là “ $m$  là số chẵn và  $\frac{2016}{m}$  là số lẻ đầu tiên”.

Ta thấy  $2016 = 2^5 \times 63$  nên giá trị  $m$  cần tìm là  $m = 2^5 = 32$

[Giải thích]

Trước hết, chúng tôi đã tiến hành một thử nghiệm và tập trung vào thừa số nguyên tố 2 ở tử số và mẫu số của  $(*)$ . Ví dụ như các trường hợp sau:

$$(2014, 2) \rightarrow (1, 1), (2012, 4) \rightarrow (2, 2), (2010, 6) \rightarrow (1, 1), (2008, 8) \rightarrow (3, 3)$$

Ta thấy sau đó khi các phân số này giảm đi, chúng đều là số lẻ. Ý tưởng ở đây là tìm  $m$  nhỏ nhất mà trạng thái đó bị phá vỡ. Để rõ ràng hơn, bạn có thể tạo một bảng gồm 16 cột và hiển thị nó theo giá trị...