

Tọa độ  $(x, y)$  tại thời điểm  $t (t > 0)$  của một điểm  $P$  chuyển động trên mặt phẳng tọa độ  $xy$  được biểu diễn bởi  $x = t^2 \cos t$ ,  $y = t^2 \sin t$ . Gọi  $O$  là gốc tọa độ và gọi  $\vec{v}$  là vector vận tốc của  $P$  tại thời điểm  $t$ .

- (1) Gọi góc giữa  $\overrightarrow{OP}$  và  $\vec{v}$  là  $\theta(t)$ . Tính giới hạn  $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t)$ .
- (2) Trong các giá trị của  $t (t > 0)$  sao cho  $\vec{v}$  song song với trục  $y$  thì giá trị nhỏ nhất là  $t_1$ , giá trị nhỏ tiếp theo là  $t_2$ . Chứng minh bất đẳng thức  $t_2 - t_1 < \pi$

Lời giải:

- (1) Với  $P(x, y)$  và  $x = t^2 \cos t$ ,  $y = t^2 \sin t$  ta có:  $\overrightarrow{OP} = t^2 (\cos t, \sin t)$

$$\frac{dx}{dt} = 2t \cos t - t^2 \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = 2t \sin t + t^2 \cos t$$

$$\text{Khi đó } \vec{v} = t(2 \cos t - t \sin t, 2 \sin t + t \cos t)$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{OP} \cdot \vec{v} = t^3 (2 \cos^2 t - t \cos t \sin t + 2 \sin^2 t + t \sin t \cos t) = 2t^3$$

$$|\overrightarrow{OP}| = t^2, \quad |\vec{v}| = t \sqrt{(2 \cos t - t \sin t)^2 + (2 \sin t + t \cos t)^2} = t \sqrt{t^2 + 4}$$

Với  $\theta(t)$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) là góc tạo bởi  $\overrightarrow{OP}$  và  $\vec{v}$  ta có:

$$\cos \theta(t) = \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \vec{v}}{|\overrightarrow{OP}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{2t^3}{t^3 \sqrt{t^2 + 4}} = \frac{2}{\sqrt{t^2 + 4}}$$

Như vậy, khi  $t \rightarrow \infty$  thì  $\cos \theta(t) \rightarrow 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \frac{\pi}{2}$

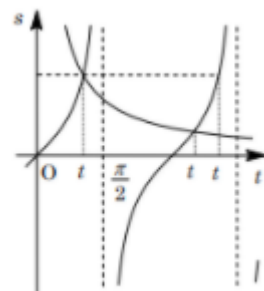
- (2) Với  $t > 0$ ,  $\vec{v}$  và trục  $y$  song song với nhau khi  $\frac{dy}{dt} = 0$ ,  $2 \cos t - t \sin t = 0$ . Có nghĩa là:

$$2 \cos t = t \sin t \text{ nên với } \cos t \neq 0 \text{ ta có: } \tan t = \frac{2}{t} \quad (*)$$

Nghiệm của phương trình  $(*)$  được biểu diễn dưới dạng tọa độ

$t$  là giao điểm của  $s = \tan t$  và  $s = \frac{2}{t}$ . Giá trị nhỏ nhất là  $t_1$ , giá trị nhỏ tiếp theo là  $t_2$  đều mang giá trị dương và được biểu diễn như hình vẽ bên.

Ta thấy  $t_3 = t_1 + \pi$  và  $t_2 < t_3$  nên  $t_2 - t_1 < t_3 - t_1 = \pi$



[Giải thích]

Trên đây là bài toán cơ bản về vector vận tốc. Câu (2) có rất nhiều phương pháp giải tuy nhiên lời giải trên đây mang tính cảm tính nhất.