Universidad de los Andes
Colombia

INCERTIDUMBRE Y PROPAGACIÓN DE ERROR

Confiabilidad en Reportes

Cifras Significativas

- Toda **medición** tiene asociada una **incertidumbre**, y todo cálculo aporta error. Entonces, ¿cómo nos aproximamos a una medida **confiable**?

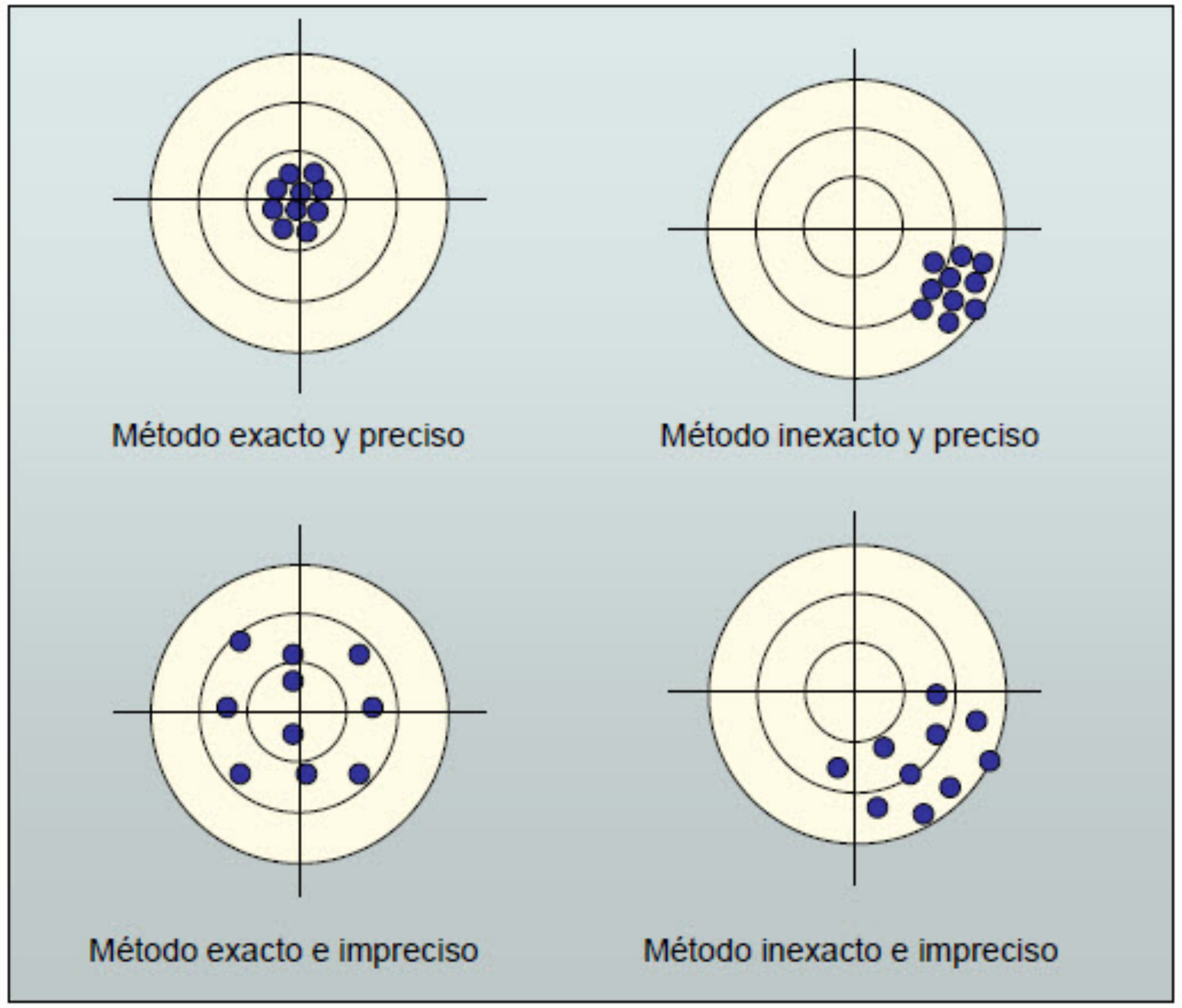
- Las **cifras significativas** *[más información aquí]* dan confiabilidad respecto a la inexactitud que está presente en la medición; es la manera fácil de rastrear incertidumbres.

- El resultado de una operación matemática debe contener **tantas cifras significativas como el número con la menor cantidad** de cifras significativas.

$$0.882 + 2.01 = 2.892 \approx 2.90$$

Precisión y Exactitud

- **Precisión:** Qué tan cercano está un conjunto de medidas **entre sí**.
- **Exactitud:** Qué tan cerca está el promedio de un conjunto de medidas **al valor real**.



Tipos de Error

Error Sistemático

Error Sistemático

- El error sistemático (también llamado ***bias***) depende de la **resolución del instrumento** de medición.

- El error sistemático siempre se repite si la medición o experimento se realiza de la misma manera. Es decir, es **el mismo para todos los datos** tomados.

- **Resolución:** La unidad legible **más pequeña**; depende del diseño del instrumento de medición.

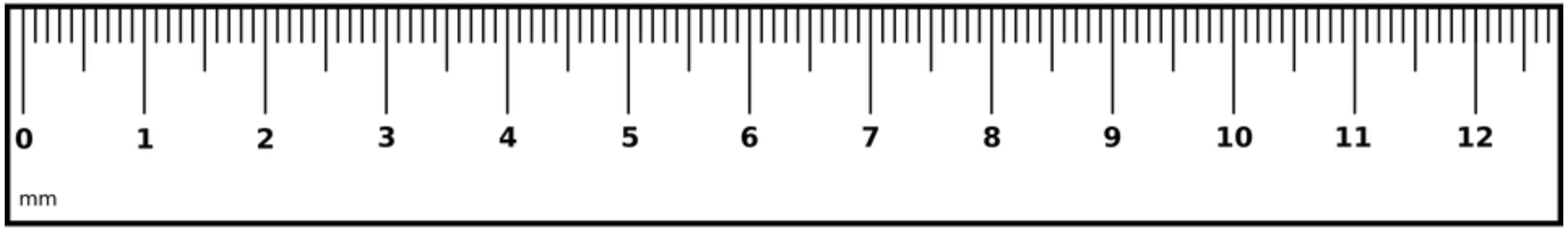
Instrumento **análogo**.

$$\mu_{sis} = \frac{resolucion}{2}$$

Instrumento **digital**.

$$\mu_{sis} = resolucion$$

Resolución (Análogo)



Resolución: 1 mm.

Resolución: 2 A.

Resolución (Digital)

Resolución: 0.01 V.

Error Aleatorio

Error Aleatorio

- El error aleatorio (también llamado ***de precisión***) se da por variables difíciles de controlar: ambiente y/o persona.

- El error aleatorio se puede reducir al ajustar las variables, pero no se puede eliminar. Es decir, es **diferente para todos los datos** tomados.

- Para las fuentes de error aleatorias, se debe estimar un **intervalo de confianza** del 95% según la distribución de probabilidad correspondiente (e.g., **Normal** o **t-Student**).

Distribución **Normal**.

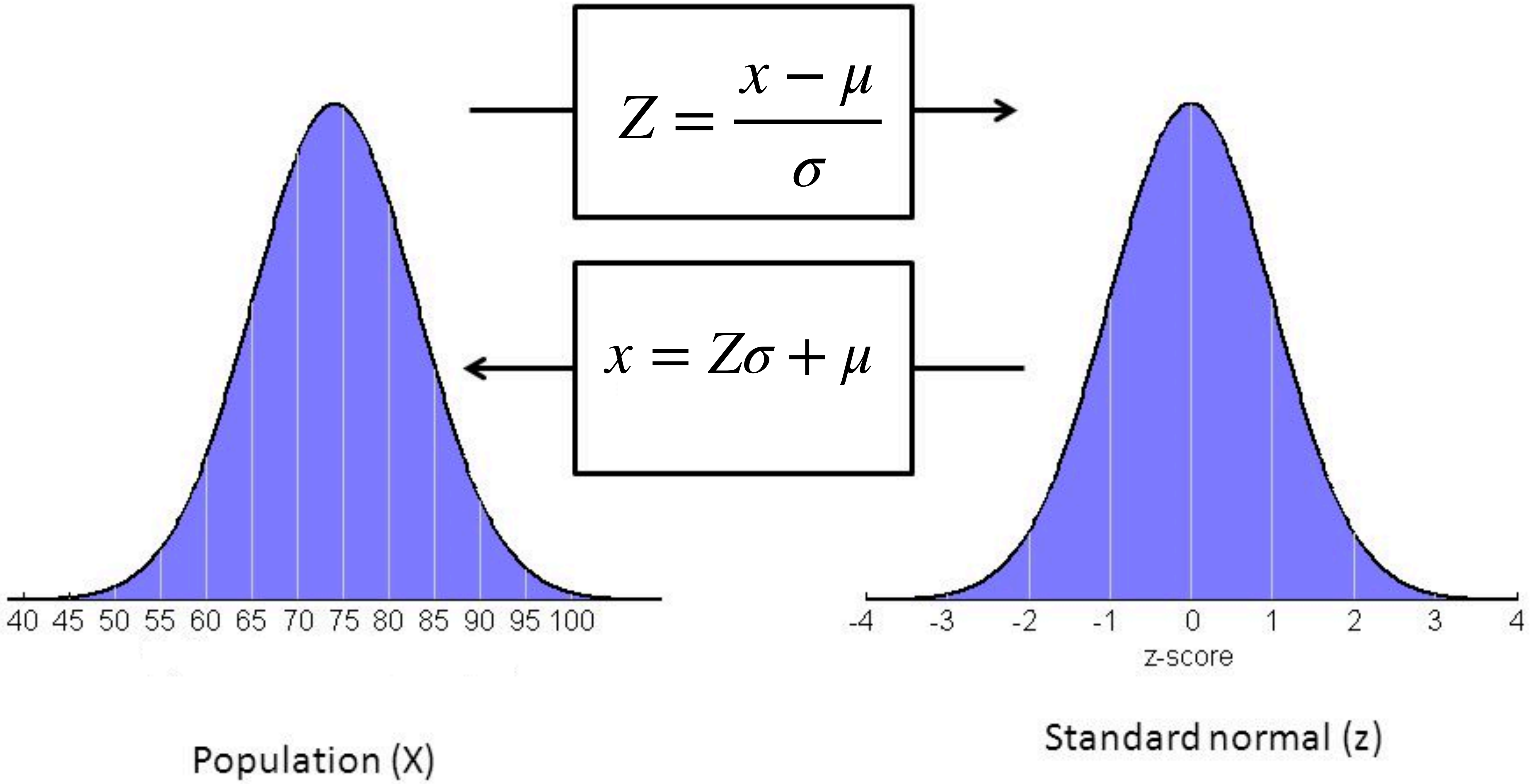
$$\mu_{ale} = Z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Distribución **t-Student**.

$$\mu_{ale} = t\frac{s}{\sqrt{n}}$$

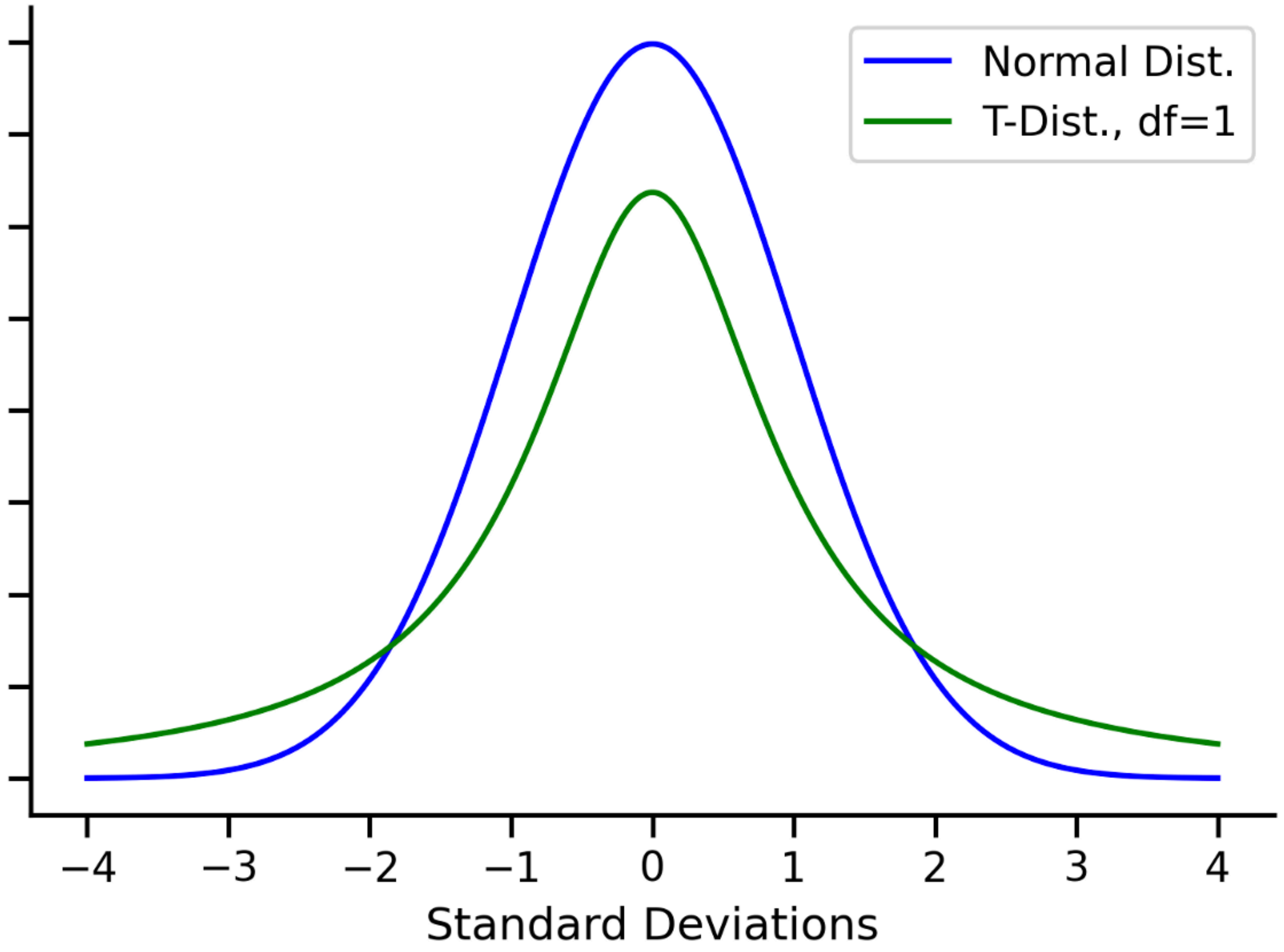
Distribución de Probabilidad (Normal)

- Si la cantidad de datos $n > 30$, se utiliza la **distribución Normal** (también conocida como **Gaussiana**).
- Para utilizar la ecuación de error aleatorio, debemos encontrar el valor de Z ***[más información aquí]***.



Distribución de Probabilidad (t-Student)

- Si la cantidad de datos $n \leq 30$, se utiliza la **distribución t-Student**.
- Para utilizar la ecuación de error aleatorio, debemos encontrar el valor de t ***[más información aquí]***.



$$t = \frac{x - \mu}{s/\sqrt{\sigma}}$$

Desviación Estándar

- Medida estadística que se utiliza para **cuantificar la variación o la dispersión** de un conjunto de datos numéricos.

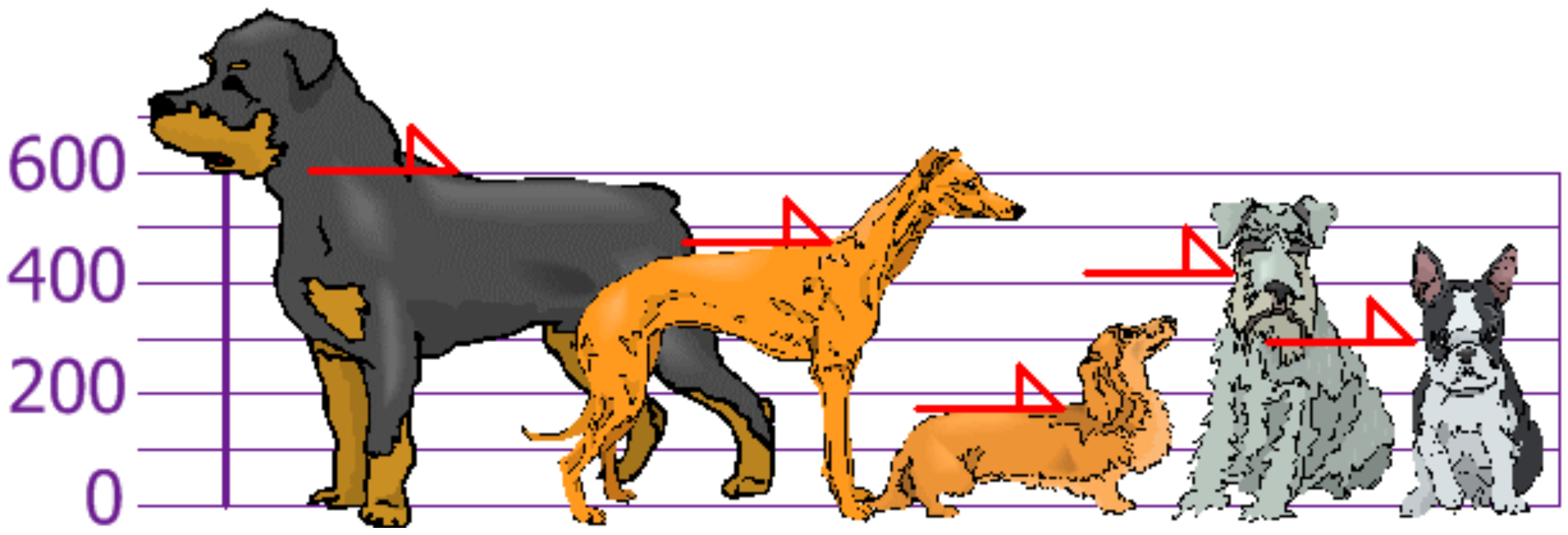
- En Excel se calcula con la función `DESVEST()` y en Python con `numpy.std()`.

Población.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}}$$

Muestra.

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}}$$



Intervalo de Confianza (IC)

- Un intervalo de confianza nos indica el nivel de seguridad en que **una medida se encuentre entre un rango de valores** (a, b) *[más información aquí]*.
- Típicamente, el intervalo de confianza más utilizado (y aceptado) es del **95% (** $IC = 0.95$ **)**.
- El intervalo de confianza está asociado con el valor de Z y t.

Distr. Normal (Z **)**

- Excel: `DISTR.NORM.ESTAND.INV(1-(α/2))`
- Python: `scipy.stats.norm.ppf(IC+(α/2))`

Distr. t-Student (t **)**

- Excel: `INV.T(IC+(α/2);n-1)`
- Python: `scipy.stats.t.ppf(IC+(α/2),n-1)`

$$\boxed{\alpha = 1 - IC}$$

Distr. Normal (Z)

- **PASO 1.** Buscar el valor de $IC + \alpha/2$.
- **PASO 2.** Ubicar el valor de la **columna índice**.
- **PASO 3.** Ubicar el valor de la **cabecera**.
- **PASO 4.** Sumar los valores de Paso 2 y Paso 3; este es el valor de Z.

STANDARD NORMAL DISTRIBUTION: Table Values Represent AREA to the LEFT of the Z score.

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
1.0	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361

$$Z = 1.96$$

Distr. t-Student (t)

- **PASO 1.** Buscar el valor de $IC + \alpha/2$ en la **cabecera**.
- **PASO 2.** Ubicar los grados de libertad $n - 1$ en la **columna índice**.
- **PASO 3.** El cruce de los valores del Paso 1 y Paso 2 es el valor de t .

t Table

cum. prob	$t_{.50}$	$t_{.75}$	$t_{.80}$	$t_{.85}$	$t_{.90}$	$t_{.95}$	$t_{.975}$	$t_{.99}$	$t_{.995}$	$t_{.999}$	$t_{.9995}$
one-tail	**0.50**	**0.25**	**0.20**	**0.15**	**0.10**	**0.05**	**0.025**	**0.01**	**0.005**	**0.001**	**0.0005**
two-tails	**1.00**	**0.50**	**0.40**	**0.30**	**0.20**	**0.10**	**0.05**	**0.02**	**0.01**	**0.002**	**0.001**
df											
1	0.000	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	318.31	636.62
2	0.000	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	0.000	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	0.000	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.000	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869

Incertidumbre

Incertidumbre

- A partir del error sistemático y error aleatorio estimamos la **incertidumbre de una medida**.
- La incertidumbre se representa como U.

$$U = \sqrt{\mu_{sis}^2 + \mu_{ale}^2}$$

$$real = medida \pm U$$

Propagación de Error

¿Propagación?

- En un experimento generalmente necesitamos realizar operaciones matemáticas en varios números, **cada uno de los cuales tiene cierta incertidumbre**.

- Típicamente deseamos conocer una variable $f(x, y, z)$, que sencillamente **no se puede medir directamente**.

- Sin embargo, sí podemos medir x, y y z. **Tip: Mínimo realizar 3 a 5 mediciones**.

- Entonces, ¿cuál sería la incertidumbre de $f(x, y, z)$?

Ecuación de Propagación

$$U_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 U_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 U_y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 U_z^2}$$

- Derivada parcial de la función $f(x, y, z)$ respecto a la variable x.
- Derivada parcial de la función $f(x, y, z)$ respecto a la variable y.
- Derivada parcial de la función $f(x, y, z)$ respecto a la variable z.

Derivadas Parciales

- Una derivada parcial es **la derivada con respecto a cada una de las variables manteniendo las otras como constantes** *[más información aquí]*.

- Para el caso base, una derivada $f'(x)$ se obtiene así:

$$f(x) = x^2$$

  - **PASO 1.** Tomar el exponente de la variable y multiplicarlo como un coeficiente.

$$\rightarrow f(x) = 2 \cdot x^2$$

  - **PASO 2.** Disminuirle una unidad al valor del exponente.

$$\rightarrow f(x) = 2 \cdot x^{(2-1)} \longrightarrow \boxed{f'(x) = 2x}$$

Derivadas Parciales (Anotaciones)

- Para facilidad al momento de hacer las derivadas parciales, podemos tener en cuenta que:

$$f(x,y) = \frac{x}{y}$$

$$\updownarrow$$

$$f(x,y) = xy^{-1}$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$\updownarrow$$

$$f(x) = x^{1/2}$$

$$f(x,y) = x + xy$$

$$\updownarrow$$

$$f(x,y) = xy^{0} + xy$$

$$\boxed{y^{0} = 1}$$

Derivadas Parciales (Ejemplo)

- Las derivadas parciales de la **masa** y la **velocidad** en la ecuación de **energía mecánica**:

$$E = mgh + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial m} = \left[1 \cdot m^{(1-1)}\right] gh + \frac{1}{2}\left[1 \cdot m^{(1-1)}\right] v^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial E}{\partial m} = gh + \frac{1}{2}v^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial v} = mgh\left[0 \cdot v^{(0-1)}\right] + \frac{1}{2}m\left[2 \cdot v^{(2-1)}\right] \quad \rightarrow \quad \frac{\partial E}{\partial v} = mv$$

Ejemplo de Propagación de Error

Ejemplo Práctico

- Se realizaron mediciones de voltaje y corriente para obtener la potencia eléctrica.

$$P = V \cdot I$$

- **Voltaje.** El ejercicio de incertidumbre reporta:

$$V = 5 \pm 0.1\ V$$

- **Corriente.** El ejercicio de incertidumbre reporta:

$$I = 10 \pm 0.01\ mA$$

Ejemplo Práctico

- Las derivadas parciales de la **voltaje** y la **corriente** en la ecuación de **potencia eléctrica**:

$$P = V \cdot I$$

$$\frac{\partial P}{\partial V} = \left[1 \cdot V^{(1-1)}\right] I$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\partial P}{\partial V} = I$$

$$\frac{\partial P}{\partial I} = V\left[1 \cdot I^{(1-1)}\right]$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\partial P}{\partial I} = V$$

Ejemplo Práctico

$$U_P = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)^2 U_V^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial I}\right)^2 U_I^2}$$

$$\boxed{U_P = \sqrt{(I)^2\, U_V^2 + (V)^2\, U_I^2}}$$

Ejemplo Práctico

$$U_P = \sqrt{(I)^2 U_V^2 + (V)^2 U_I^2}$$

$$U_P = \sqrt{\left(10 \cdot 10^{-3}\right)^2 0.1^2 + \left(5\right)^2 \left(0.01 \cdot 10^{-3}\right)^2}$$

$$\boxed{U_P = \sqrt{1 \cdot 10^{-6} + 2.5 \cdot 10^{-9}}}$$

Ejemplo Práctico

$$P = 0.05 \pm 1 \cdot 10^{-3}\ W$$

$$P = 50.0 \pm 1.0\ mW$$

Ejemplo en Python de Propagación de Error

Ejemplo Práctico (Python)

- **PASO 1.** En Python instalamos la librería `uncertainties`.
- **PASO 2.** Importamos la librería: `from uncertainties import ufloat`.
- **PASO 3.** Declaramos nuestras variables con la sintaxis `(medida, incertidumbre)`.
  - `V = ufloat(5, 0.1)`
  - `I = ufloat(10e-03, 0.1e-03)`
- **PASO 4.** Realizamos la operación matemática; como se observa, la incertidumbre es la misma a la que calculamos al propagar el error manualmente.
  - `P = V * I`

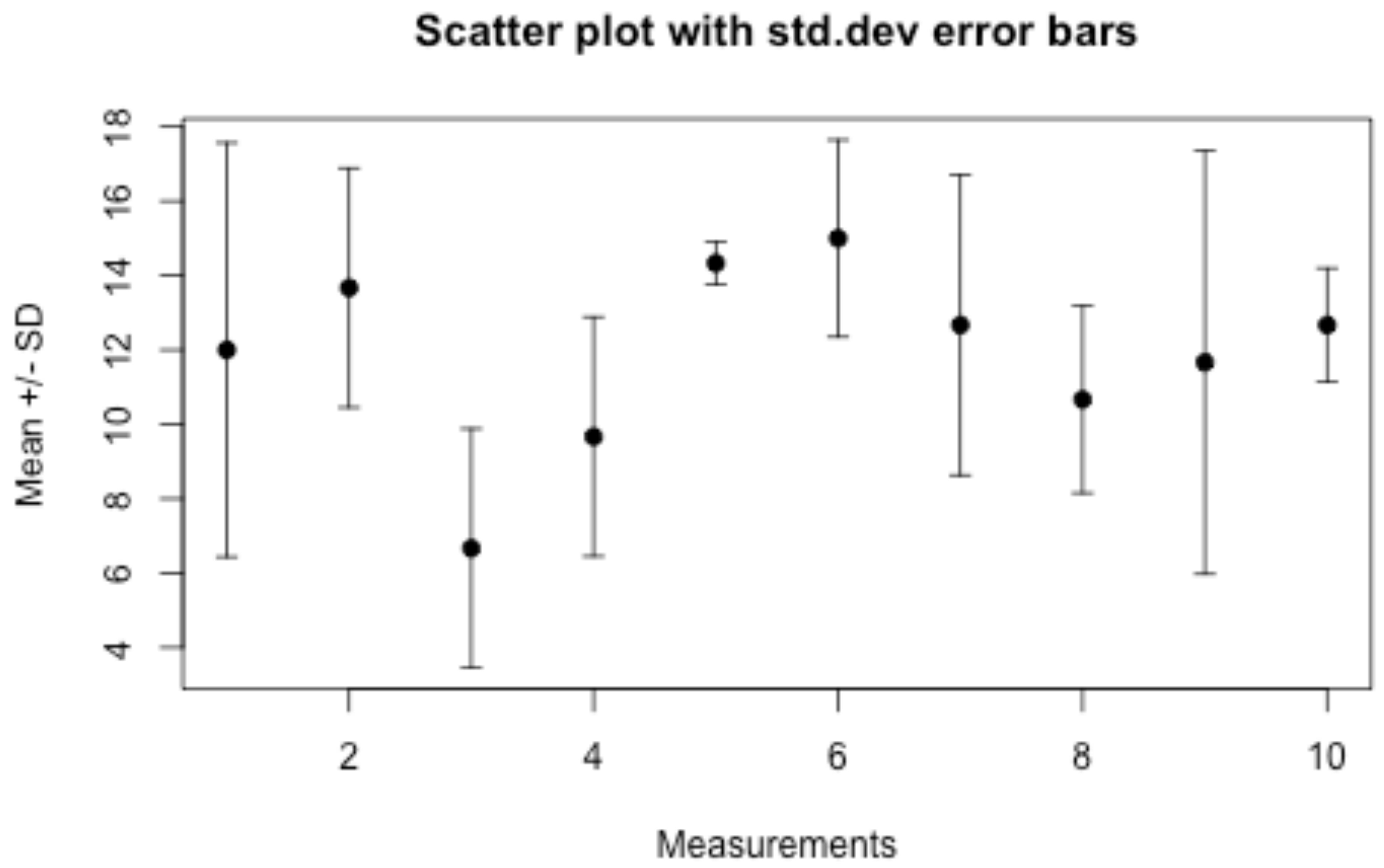
```
In [1]: from uncertainties import ufloat

In [2]: V = ufloat(5, 0.1)
        V

Out[2]: 5.0+/-0.1

In [3]: I = ufloat(10e-03, 0.01e-03)
        I

Out[3]: 0.01+/-1e-05

In [4]: P = V * I
        P

Out[4]: 0.05+/-0.0010012492197250392
```

Gráfica con Barras de Error

Barras de Error

- Es **importante** agregar en las gráficas las **barras que muestren las incertidumbres** para así tener una noción clara de **qué tan representativo** es el error.

- En Excel se agregan así: *[más información aquí]*; y en Python así: *[más información aquí]*.



Universidad de los Andes
Colombia

INCERTIDUMBRE Y PROPAGACIÓN DE ERROR