大統一模型模型研究ノート

金沢大学大学院 自然科学研究科数物科学専攻 (物理学コース) 修士課程 2 年
学籍番号 2315011026　　名列番号 216
高村 泰時

2024 年 11 月 27 日

目次

これは $SU(5)$ 大統一理論の研究のノートです.

第 1 章

素粒子標準模型

この章では素粒子物理学における標準模型についてまとめた.

1.1 標準模型

1.1.1 ヒッグス機構

第 2 章

素粒子標準模型の問題点

2.1 標準模型の抱える問題

素粒子標準模型は高エネルギー物理学の実験をほぼ正確に予言することができるため, 大きな成功を収めた. 特に 2011 年に CERN にある大型ハドロン衝突型加速器 (Large Hadron Corrider; LHC) が標準模型に現れる Higgs 粒子を発見したことにより, 標準模型は揺るぎないものとなった. しかし, 次のような課題があり, 理論の拡張が迫られている.

- ニュートリノ質量, およびニュートリノ振動
  標準模型ではニュートリノは質量を持たない粒子として存在する. しかし 1998 年にニュートリノ振動がスーパーカミオカンデで観測されたことにより, ニュートリノは質量を持つことが示唆されたため, 標準模型を何かしら拡張する必要があると考えられている.
- 重力相互作用
  粒子の持つ相互作用のうち, 重力相互作用は他の相互作用と異なり, 一般相対論で記述されるものであり, これを量子化しようとするとくりこみができない問題が生じる.
- 真の統一理論
  標準模型はゲージ対称性を $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ とした理論であるが, 直積としてゲージ群が記述されていることは群の操作は独立に行われていることを意味しており, 真の統一理論とは言えない.
- 電荷の量子化
  素粒子の電荷は単位電荷の整数倍の値を持つ. 非可換群の固有値であれば量子化が実現できるが, ハイパーチャージ Y は可換群である $U(1)$ 対称性における無限小演算子であり, 固有値 Y 量子化は行えない. したがって標準模型で電荷 Q は $Q = I^3 + \frac{Y}{2}$ という関係に基づいて決定されるが, この電荷が量子化される根拠は標準模型に存在しない.
- 階層性問題
  標準模型の典型的なエネルギースケールは $M_W \simeq 80\mathrm{GeV}$ である. プランクスケール M_{pl} や大統一スケール M_{GUT} に至れば理論が標準模型と入れ替わると考えられているが, エネルギースケールに大きな隔たりがあり, この階層性を如何にして自然と説明できるかは重要な問題である.
- 予言できないパラメーターの数
  素粒子標準模型はゲージ相互作用と量子場の理論で構成されるが, 唯一のスカラー場であるヒッグス粒子は標準模型であっても相互作用を規定する主導原理は存在せず, クォークやレプトンとの湯川相互作用やヒッグス自身の自己相互作用は理論の中では任意の値をとることが可能であり, 予言することができない.
- 暗黒物質

標準模型に存在する粒子のみを考えた場合, 観測事実として宇宙全体のエネルギーに対して 4% のみしか説明することができず, 残りの 96% のうち 23% は暗黒物質と考えられている. ここで言う暗黒物質とは, 物質粒子との相互作用が極めて弱いものの重力相互作用を微弱に持つものであると考えられているが, そのような粒子は素粒子標準模型のみでは説明することができない.

- 暗黒エネルギー
  先に述べた暗黒物質を考えた場合であっても, およそ 73% は未知のエネルギーとして考えられており, これは暗黒エネルギーと呼ばれれる. 暗黒エネルギーは初期宇宙においてインフレーションと呼ばれる加速膨張を引き起こした宇宙項と関係があると考えられている

2.2 階層性問題

大統一理論や超弦理論を考えた場合, 一般的にエネルギースケールの階層性が問題となる. ここでは大統一理論に表れる階層性に集中してこの問題について取り扱う.

2.2.1 階層性問題とは

素粒子標準模型は電弱スケールである $M_W \sim 100\,[\mathrm{GeV}]$ まで高エネルギー加速器実験結果を説明することができる. 一方で標準模型を超えた物理 (Beyond the Standard Model; BSM) が加速器実験で検証されるには電弱スケールよりも高いエネルギーにより, その実験を検証することが可能となる.

この見方を変えると, 現在の標準模型はこのような BSM の有効理論であると考えることができる. したがって素粒子標準模型の理論の適用範囲は何らかのエネルギースケールである Λ まで有効であり, Λ 以上のエネルギーでは別の理論へ移り変わると考えられている.

大統一理論や重力が含まれる理論では, このカットオフは $\Lambda \sim M_{\mathrm{GUT}}$ や $\Lambda \sim M_{\mathrm{pl}}$ 程度であるとそれぞれ考えられており, M_W に比べて 13 桁程度の乖離が存在する.

標準模型に登場する粒子はヒッグス粒子の真空期待値に比例するため, これらは電弱スケールに質量が存在することとなる. これらはゲージ理論により説明されるが, ヒッグス粒子の質量を説明できる主導原理は標準模型に存在しない. 標準模型に表れるヒッグス粒子の質量を m_h とした場合, いかにして $m_h \ll \Lambda$ を保つかが大きな問題となっている.

2.2.2 Doublet-triplet splitting problem

ここでは $SU(5)$ 大統一理論を考える. $SU(5)$ 大統一理論では, 5 表現ヒッグスと 24 表現ヒッグスを考えることができた. それぞれ H, Φ とおく. これらのヒッグス粒子によるポテンシャルを考える. $\mathbb{Z}_2$ 対称性を課すと,

$$V(H, \Phi) = -\frac{1}{2}\nu^2 H^\dagger H + \frac{\lambda}{4}(H^\dagger H)^2 + H^\dagger[\alpha \mathrm{Tr}(\Phi^2) + \beta(\Phi^2)]H \tag{2.1}$$

となる. ここで, Φ の最小化は式 (2.1) の第 3 項の内部のみで行われていると考える. これは式 (2.1) は階層性のもとでは, 多項式全体の最小化の影響よりも, 十分影響を与えるためである.

ただし, このように真空期待値を取った場合, Y ボゾンに質量を与えうる H^α と Φ_5^α という 2 つのカラー三重項ヒッグス場が存在したとしても片方のヒッグス場のみ質量を与え, もう一方は質量がないままとなる.

第 3 章

大統一理論

3.1 大統一理論

大統一理論は H.Georgi と S.L.Glashow により 1974 年に提唱された [1]. 大統一理論では重力を除いた 3 つの相互作用を 1 つに統一することを目的としている. したがって, ゲージ対称性は単純群によって記述されると考えられている. このことから, 前節で述べられているような問題点はいくつか解決されることになる. 要修正: どの点で何が解決できているのかはじめに, $SU(5)$ 大統一理論が最小模型である理由は, 標準模型のゲージ対称性である $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ が, rank $= 4$ であり, これを内包できる最小の単純群が $SU(5)$ であるためである. 特に, $SU(3)$ のもつ 3 重項をもち, $SU(2)$ がもつ 2 重項の複素表現をもつ性質を考えると $SU(5)$ 群を用いて, 最小模型を構築する.

3.1.1 Georgi-Glashow モデル

ここから $SU(5)$ 群を考える. ゲージ群を決定すると, ラグランジアンに導入する場の既約表現を指定すれば理論を定めることができる. $SU(5)$ の基本表現は 5 表現であるから,

この模型では, 左巻きフェルミオンは世代ごとに次の二つの表現に当てはめて考える.

$$
\bar{\mathbf{5}} = \begin{pmatrix} d_1^c \\ d_2^c \\ d_3^c \\ l \\ -\nu_l \end{pmatrix}, \qquad \bar{\mathbf{10}} = \begin{pmatrix} 0 & u_3^c & -u_2^c & u_1 & d_1 \\ -u_3^c & 0 & u_1^c & u_2 & d_2 \\ u_2^c & -u_1^c & 0 & u_3 & d_3 \\ -u_1 & -u_2 & -u_3 & 0 & e^c \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -e^c & 0 \end{pmatrix} \tag{3.1}
$$

ただし, x^c は x を同じカイラリティで荷電共役したものを表している. この x の例として, 左巻きの電子 e_L^- を考える. 荷電共役変換である $(e_L^-)^c$ を考えると, これは右巻きの電子 e_R^- となるが, 左巻きの陽電子である e_L^+ と同じである.

第 4 章

群論

この章では, 大統一理論に必要な数学の内容をまとめている. 詳しい証明や例については数学の専門書を参考にすること. 次のことを認め, 話を進める.

X を集合とする. 写像 $\phi : X \times X \to X$ のことを集合 X 上の演算と言う. これ以降では $a, b, \in X$ に対する写像を $\phi(a, b)$ の代わりに ab と書く.

4.1 群

群とは次の性質を持つものである.

Definition 1 (群)**.** G を空ではない集合とする. 集合 G 上で演算が定義されており, 次の性質を満たすとき, G を群と言う.

1. 単位元と呼ばれる $e \in G$ が存在し, 全ての $a \in G$ に対して $ae = ea = a$ となる.
2. すべての $a \in G$ に対し, $b \in G$ が存在し, $ab = ba = e$ となる. この元 b は a の逆元と呼ばれ, a^{-1} と書く.
3. すべての $a, b, c \in G$ に対して, $(ab)c = a(bc)$ が成り立つ.

特に, 性質 3. は結合法則と呼ばれている. 群の元 $a, b \in G$ に対して $ab = ba$ が成り立つとき, a, b は可換である. G の任意の元 a, b が可換なら, G を可換群 (Abel 群) と呼ぶ.

4.2 Lie 群

4.3 表現

4.4 カルタン分類

参考文献

[1] H. Georgi and S. L. Glashow. Unity of all elementary-particle forces. *Phys. Rev. Lett.*, 32:438–441, Feb 1974.