

大統一模型模型研究ノート

金沢大学大学院 自然科学研究科数物科学専攻 (物理学コース) 修士課程 2 年
学籍番号 2315011026 名列番号 216
高村 泰時

2024 年 10 月 19 日

これは $SU(5)$ 大統一理論の研究のノートです.

第 1 章

素粒子標準模型

この章では素粒子物理学における標準模型についてまとめた.

1.1 標準模型

第 2 章

素粒子標準模型の問題点

2.1 標準模型の抱える問題

素粒子標準模型は高エネルギー物理学の実験をほぼ正確に予言することができるため、大きな成功を収めた。特に 2011 年に CERN にある大型ハドロン衝突型加速器 (Large Hadron Collider; LHC) が標準模型に現れる Higgs 粒子を発見したことにより、標準模型は揺るぎないものとなった。しかし、次のような課題があり、理論の拡張が迫られている。

- ニュートリノ質量, およびニュートリノ振動

標準模型ではニュートリノは質量を持たない粒子として存在する。しかし 1998 年にニュートリノ振動がスーパーカミオカンデで観測されたことにより、ニュートリノは質量を持つことが示唆されたため、標準模型を何かしら拡張する必要があると考えられている。

- 重力相互作用
- 真の統一理論
- 電荷の量子化

素粒子の電荷は単位電荷の整数倍の値を持つ。非可換群の固有値であれば量子化が実現できるが、ハイパーチャージ Y は可換群である $U(1)$ 対称性における無限小演算子であり、固有値 Y の量子化は行えない。したがって標準模型で電荷 Q は $Q = I^3 + \frac{Y}{2}$ という関係に基づいて決定されるが、この電荷が量子化される根拠は標準模型に存在しない。

- 階層性問題
- 予言できないパラメーターの数
- 暗黒物質
- 暗黒エネルギー

第 3 章

大統一理論

3.1 素粒子標準模型と大統一理論

大統一理論は H.Georgi と S.L.Glashow により 1974 年に提唱された [1].

第 4 章

階層性問題

大統一理論や超弦理論を考えた場合、一般的にエネルギースケールの階層性が問題となる。ここでは大統一理論に表れる階層性に集中してこの問題について取り扱う。

4.1 階層性問題とは

素粒子標準模型は電弱スケールである $M_W \sim 1000 [\text{GeV}]$ まで高エネルギー加速器実験結果を説明することができる。一方で標準模型を超えた物理 (Beyond the Standard Model; BSM) が加速器実験で検証されるには電弱スケールよりも高いエネルギーにより、その実験を検証することが可能となる。

この見方を変えると、現在の標準模型はこのような BSM の有効理論であると考えることができる。したがって素粒子標準模型の理論の適用範囲は何らかのエネルギースケールである Λ まで有効であり、 Λ 以上のエネルギーでは別の理論へ移り変わると考えられている。

大統一理論や重力が含まれる理論では、このカットオフは $\Lambda \sim M_{\text{GUT}}$ や $\Lambda \sim M_{\text{pl}}$ 程度であるとそれぞれ考えられており、 M_W に比べて 13 桁程度の乖離が存在する。

標準模型に登場する粒子はヒッグス粒子の真空期待値に比例するため、これらは電弱スケールに質量が存在することとなる。これらはゲージ理論により説明されるが、ヒッグス粒子の質量を説明できる主導原理は標準模型に存在しない。標準模型に表れるヒッグス粒子の質量を m_h とした場合、いかにして $m_h \ll \Lambda$ を保つかが大きな問題となっている。

4.2 Doublet-triplet splitting problem

ここでは $SU(5)$ 大統一理論を考える。 $SU(5)$ 大統一理論では、5 表現ヒッグスと 24 表現ヒッグスを考えることができた。それぞれ H, Φ とおく。これらのヒッグス粒子によるポテンシャルを考える。 \mathbb{Z}_2 対称性を課すと、

$$V(H, \Phi) = -\frac{1}{2}\nu^2 H^\dagger H + \frac{\lambda}{4}(H^\dagger H)^2 + H^\dagger[\alpha \text{Tr}(\Phi^2) + \beta(\Phi^2)]H \quad (4.1)$$

となる。ここで、 Φ の最小化は式 (4.1) の第 3 項の内部のみで行われていると考える。これは式 (4.1) は階層性のもとでは、多項式全体の最小化の影響よりも、十分影響を与えるためである。

ただし、このように真空期待値を取った場合、 Y ボゾンに質量を与えうる H^α と Φ_5^a という 2 つのカラー三重項ヒッグス場が存在したとしても片方のヒッグス場のみ質量を与え、もう一方は質量がないままとなる。

第 5 章

群論

この章では、大統一理論に必要な数学の内容をまとめている。詳しい証明や例については数学の専門書を参考にすること。次のことを認め、話を進める。

X を集合とする。写像 $\phi: X \times X \rightarrow X$ のことを集合 X 上の演算と言う。これ以降では $a, b \in X$ に対する写像を $\phi(a, b)$ の代わりに ab と書く。

5.1 群

群とは次の性質を持つものである。

Definition 1 (群). G を空ではない集合とする。集合 G 上で演算が定義されており、次の性質を満たすとき、 G を群と言う。

1. 単位元と呼ばれる $e \in G$ が存在し、全ての $a \in G$ に対して $ae = ea = a$ となる。
2. すべての $a \in G$ に対し、 $b \in G$ が存在し、 $ab = ba = e$ となる。この元 b は a の逆元と呼ばれ、 a^{-1} と書く。
3. すべての $a, b, c \in G$ に対して、 $(ab)c = a(bc)$ が成り立つ。

特に、性質 3. は結合法則と呼ばれている。群の元 $a, b \in G$ に対して $ab = ba$ が成り立つとき、 a, b は可換である。 G の任意の元 a, b が可換なら、 G を可換群 (Abel 群) と呼ぶ。

5.2 Lie 群

参考文献

- [1] H. Georgi and S. L. Glashow. Unity of all elementary-particle forces. *Phys. Rev. Lett.*, 32:438–441, Feb 1974.