

SU(5) 大統一理論における 15 表現ヒッグスを用いたモデルの拡張

金沢大学大学院 自然科学研究科数物科学専攻 (物理学コース) 修士課程 2 年

学籍番号 2315011026 名列番号 216

高村 泰時

2025 年 2 月 20 日

目次

第 1 章	記法	1
1.1	場の量子論に関する記法	1
1.2	SU(5) 大統一理論	1
第 2 章	素粒子標準模型	2
2.1	概観	2
2.2	ローレンツ代数とスピノール表現	2
2.3	ゲージ粒子	3
2.4	クォーク, レプトン	4
2.5	ヒッグス機構	5
2.6	フェルミオン質量の獲得	7
2.7	標準模型のラグランジアン	9
2.8	標準模型の抱える問題	9
2.9	ニュートリノ質量	10
第 3 章	場の理論における繰り込みと結合定数	17
3.1	走るゲージ結合定数	17
3.2	Callan-Symanzik 方程式	17
3.3	ゲージ結合定数のエネルギー依存性	20
第 4 章	SU(5) 大統一理論	22
4.1	フェルミオンの表現	22
4.2	ゲージ粒子の表現	23
4.3	対称性の破れ	26
4.4	フェルミオン質量	28
4.5	SU(5) 大統一理論による予言と問題点	29
第 5 章	SU(5) 大統一理論の拡張模型	34
5.1	最小 SU(5) 大統一理論の課題	34
5.2	45 表現ヒッグスを用いた拡張	34
5.3	15 表現ヒッグスを用いた拡張	35
付録 A	群論	38
A.1	群	38
A.2	Lie 群	38
A.3	表現	38

付録 B	標準模型でのくりこみ群方程式の係数の計算	39
参考文献		42

概要

素粒子標準模型とは, $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ群によって素粒子の相互作用を記述する理論であり, 素粒子がもたらす実験や観測を非常によく説明する. ところが標準模型では説明できない現象も数多く存在する. 例えば, 標準模型ではニュートリノには質量が存在しないが, カミオカンデでニュートリノ振動が観測され, ニュートリノに質量が存在することが明らかにされた. 他にも様々な側面から標準模型を超えた理論への拡張が迫られており, 大統一理論はその候補の一つとして挙げられる.

大統一理論とは, 標準模型のゲージ群を部分群として含む単純群によって構成され, 物質粒子やゲージ粒子を統一的に記述する. 標準模型では陽子と電子の電荷が量子化されていないことを理論的に説明することができないが, 大統一理論によって理論的な説明がなされるため, 大統一理論を研究する大きな動機となる. 相互作用が統一的に記述されるため, 高いエネルギースケールでは相互作用の大きさも統一されるべきと考えるが, H.Georgi と S.L.Glashow によって初めて考案された $SU(5)$ 大統一模型はゲージ結合定数の統一は叶わず, また標準模型でも課題であったニュートリノ質量を説明することはできなかった. そのため, $SU(5)$ 大統一理論を実現するためには $SU(5)$ ゲージ群の枠組みの中で理論を拡張することで, 標準模型の課題を解決できる整合性の取れた理論にする必要がある. 本論文では初めに標準模型のレビューを行い, 実験的にどのような課題が存在するのかをまとめた. また, 標準模型を大統一理論へ拡張するために $SU(5)$ 大統一理論の一般的な構築を行った. 最後に, 最小 $SU(5)$ 模型ではゲージ結合定数の大きさが統一することができないことを受け, I.Dorsner らが行った最小 $SU(5)$ 大統一理論に対して **15** 表現ヒッグスを拡張する模型を再現した. これによりゲージ結合定数の大きさが大統一スケールで近づくことを確認した.

第 1 章

記法

この本で用いる記法については次のものにしたがう.

1.1 場の量子論に関する記法

計量テンソル

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad (1.1)$$

パウリ行列

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

1.2 SU(5) 大統一理論

5 表現フェルミオン

$$\psi_{\bar{\mathbf{5}}} = \begin{pmatrix} d_1^c \\ d_2^c \\ d_3^c \\ l \\ -\nu_l \end{pmatrix}_L = \left(\bar{\mathbf{3}}, 1, \frac{1}{3} \right) \oplus \left(1, 2, -\frac{1}{2} \right) \quad (1.3)$$

10 表現フェルミオン

$$\psi_{\mathbf{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & u_3^c & -u_2^c & u_1 & d_1 \\ -u_3^c & 0 & u_1^c & u_2 & d_2 \\ u_2^c & -u_1^c & 0 & u_3 & d_3 \\ -u_1 & -u_2 & -u_3 & 0 & e^c \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -e^c & 0 \end{pmatrix}_L = (3, 2, \frac{1}{6}) \oplus (\bar{\mathbf{3}}, 1, -\frac{2}{3}) \oplus (1, 1, 1) \quad (1.4)$$

第2章

素粒子標準模型

この章では素粒子物理学における標準模型についてまとめた。素粒子標準模型は現在の高エネルギー実験をほぼ説明することができるものであるが、標準模型だけでは説明できない事実が存在する。大統一理論はそれらを解決するための理論の一つであるが、そもそも標準模型がどのような理論であるのかをここで振り返る。

2.1 概観

素粒子標準模型は量子場の理論により記述される。素粒子の相互作用は Yang-Mills による理論によって、数学的にリー群に属する局所非可換ゲージ変換のもとで不変になるようにラグランジアン密度を記述することができる。具体的には、次のようなゲージ対称性を持つ理論である。

$$\mathcal{G}_{\text{SM}} = \text{SU}(3)_c \times \text{SU}_L(2) \times \text{U}(1)_Y \quad (2.1)$$

それぞれゲージ群の添字は量子数に対応している。“C” はカラー量子数, “L” は左巻きのカイラリティ, “Y” は超電荷である。SU(3)_c 群は核子に作用する強い相互作用を記述する群であり、量子色力学 (QCD) によって記述される。[1–3] 一方で SU(2)_L × U(1)_Y は弱い相互作用と電磁相互作用を統一的に記述する電弱理論を記述する群である。[4–6]

ゲージ対称性の他に、理論に現れる粒子がどのようなものであるのか、標準模型のゲージ対称性の中でどのような対称性を持つ粒子であるのかを決めることにより、理論を具体的に決定することができる。他にも、ラグランジアン密度に含める項は、繰り込み可能であり、ローレンツ対称性を満足するものを決めることで全て書き下すことができる。ここからは標準模型に現れる粒子と、その対称性について考える。

2.2 ローレンツ代数とスピノール表現

物質場の基本的な構成をするために、スピノール場を簡単に導入する。スピノール場はローレンツ群 $SL(2, \mathbb{C})$ の変換をうける。

はじめに、ローレンツ群の表現行列は

$$D(\Lambda) = \exp \left(-\frac{i}{2\hbar} \omega^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} \right) \quad (2.2)$$

と表される。 $\omega_{\alpha\beta}$ はローレンツ群の無限小のパラメータである。スピノールの表現は次のように変換される。基本表現の場合は

$$\psi'_\alpha = U_\alpha^\beta \psi_\beta \quad (2.3)$$

と変換を受ける。一方、複素表現は

$$\bar{\chi}'_{\dot{\alpha}} = U_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}*} \bar{\chi}_{\dot{\beta}} \quad (2.4)$$

と変換される。スピノールはローレンツ群の表現により変換を受ける。

また、スピノールは 2×2 の完全反対称テンソルを用いて

$$\varepsilon^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = -\varepsilon_{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \quad (2.5)$$

となる。

2.3 ゲージ粒子

量子場の理論は量子力学と特殊相対論を組み合わせたものである。素粒子の反応を記述することは量子場の理論のみではできないが、ゲージ対称性を理論に課することにより相互作用を記述することができる。物質粒子どうしの相互作用を媒介する粒子はゲージ粒子と呼ばれ、スピン 1 のボーズ粒子である。素粒子標準模型では強い相互作用を媒介するグルーオン (g)、弱い相互作用を媒介する (W, Z) ボゾン、電磁相互作用を記述する光子 (γ) がある。これらはゲージ原理によって理論のラグランジアンに含まれることになる。

2.3.1 ゲージ原理

ゲージ原理とは、局所変換と呼ばれる時空の各点で独立なゲージ変換を行ったとしても、物理法則が不変でなければならない主導原理である。

ゲージ粒子は、このゲージ原理によって理論に導入することができる。先に述べたが、量子場の理論にゲージ対称性を課することで相互作用を記述することができる。この対称性は数学的にリー群によって記述される。ゲージ原理の一般的な説明のために、以下では物質場 $\Psi(x)$ がリー群 G に属し、 r 重項を成しているとする。

リー群の要素は一般的に $\exp(i \sum_{a=1}^n \theta^a T^a)$ と書かれる。 θ^a は実定数であり、 $n = \dim(G)$ はリー群の次元である。ここで、 T^a はリー群の生成子であり、交換関係

$$[T^a, T^b] = i f_{abc} T^c \quad (2.6)$$

を満たす。ここで f^{abc} はリー群の構造定数である。

ここで、ゲージ原理を用いてリー群の対称性によって局所変換のもとで不変な理論を考える。物質場 $\Psi(x)$ の局所変換を次のように考える。

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi(x)' = \exp(i\theta^a(x)T^a(\mathbf{r}))\Psi(x) \equiv U(x)\Psi(x) \quad (2.7)$$

このとき、 $\theta^a(x)$ は積分可能な実関数、 $T^a(\mathbf{r})$ は \mathbf{r} 次元のリー群の表現行列である。非可換ゲージ場 $A_\mu^a(x)$ と共変微分 $D_\mu \equiv \partial_\mu + igA_\mu^a(x)T^a(x)$ を導入するここで定数 g はゲージ結合定数である。この共変微分を導入したことによりゲージ場と物質場の相互作用を記述している。

物質場の共変性からゲージ場の変換を考えることができる。物質場の共変性は、局所変換の変換性のもとで

$$D_\mu \Psi(x) \rightarrow D'_\mu \Psi'(x) = U(x)D_\mu \Psi(x) \quad (2.8)$$

と変換することである。このことから、ゲージ場の変換は

$$\begin{aligned} A_\mu^a(x)T^a(\mathbf{r}) &\rightarrow A'^a_\mu(x)T^a(\mathbf{r}) \\ &= U(x)A_\mu^a T^a(\mathbf{r})U^{-1}(x) - \frac{i}{g}U(x)\partial_\mu U^{-1}(x) \end{aligned} \quad (2.9)$$

となる。ここからゲージ場の強さを定義することができる。共変微分の交換関係は $[D_\mu, D_\nu] = igF_{\mu\nu}^a(x)T^a(\mathbf{r})$ であり、この $F_{\mu\nu}^a$ は

$$F_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) - gf^{abc}A_\mu^b(x)A_\nu^c(x) \quad (2.10)$$

と表され、場の強さテンソルとして定義される物理量となる。ここで用いた場の強さテンソル $F_{\mu\nu}^a$ は理論のゲージ対称性によりそれぞれ異なる。非可換ゲージ場のローレンツ不変性とゲージ不変性を要求すると、運動項は

$$F_{\mu\nu}^a = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \quad (2.11)$$

となる。ここでは一般的なリー群に基づいたゲージ変換を考えたが、 $SU(2), SU(3)$ 群を考えることで弱い相互作用と強い相互作用を記述することができる。また、ここで述べたものは非可換ゲージ理論であるが、電磁相互作用を記述する $U(1)$ 対称性はこれらの記述を可換なものとして扱えば良い。その場合、式 (2.10) の第 3 項は存在しない。

以上を踏まえて、標準模型に現れるゲージ粒子を表 2.3.1 にまとめた。 $SU(3)_c$ に対応するゲージ場が G_μ^a ($a = 1, \dots, 8$), $SU(2)_L$ に対応するゲージ場が W_μ^i ($i = 1, 2, 3$), $U(1)_Y$ ゲージ場に対応するゲージ場は B_μ である。また量子数は $(SU(3)_c, SU(2)_L, U(1)_Y)$ に対応するように示している。弱超電荷 Y は I_3 を $SU(2)_L$ のアイソスピンの第 3 成分であり、電荷が $Q = I_3 + Y$ を満たすように定めた。

ゲージ場	量子数
G_μ^a	$(\mathbf{8}, \mathbf{1}, 0)$
W_μ^i	$(\mathbf{1}, \mathbf{3}, 0)$
B_μ	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0)$

表 2.1 標準模型に存在する粒子とその量子数の対応

2.3.2 ゲージ粒子のラグランジアン

これまで述べたことを踏まえて、 $B_{\mu\nu}$ を電磁相互作用を記述する $U(1)$ ゲージ場、 $W_{\mu\nu}^i$ ($i = 1, 2, 3$) を弱い相互作用を記述する $SU(2)$ ゲージ場、 $G_{\mu\nu}^a$ ($a = 1, \dots, 8$) を強い相互作用を記述する $SU(3)$ ゲージ場の場の強さテンソルとする。素粒子標準模型に現れる場の強さテンソルは式 (2.10) より次のように表される。

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (2.12)$$

$$W_{\mu\nu}^i = \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i + g_2 \epsilon^{ijk} W_\mu^j W_\nu^k \quad (2.13)$$

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_3 f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c \quad (2.14)$$

ここでは、 g_3, g_2 はそれぞれ $SU(3)_c, SU(2)_L$ ゲージ群の結合定数ある。また、後述されるが $U(1)_Y$ ゲージ場によって現れる B_μ ゲージボソンの結合定数を g_Y とする。 f^{abc}, ϵ_{ijk} はそれぞれの構造定数を表す。また、標準模型のゲージ場の運動項は式 (2.11) より

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^i W^{i\mu\nu} - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \quad (2.15)$$

と表せる。

2.4 クォーク, レプトン

標準模型粒子ではクォーク, レプトンは物質粒子という枠組みで説明され、スピンの $\frac{1}{2}$ のフェルミ粒子である。

標準模型では物質粒子は世代と呼ばれる構造をもつ。現在の標準模型は 3 世代模型として考えられており、弱い相互作用での CP 対称性の破れに重要な役割を果たす。[7, 8]

物質粒子はカイラリティと呼ばれる右巻き粒子と左巻き粒子の状態によって区別される。ディラックスピノール場 ψ_D について、射影演算子 $P_L = \frac{1 - \gamma^5}{2}$, $P_R = \frac{1 + \gamma^5}{2}$ を用いて次のように表される。

$$\psi_R = P_R \psi_D, \quad \psi_L = P_L \psi_D \quad (2.16)$$

ここで、 $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ とし、 γ^μ は

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (2.17)$$

を満たす。

はじめに、クォークのもつゲージ対称性を考える。クォークは $SU(3)_c$ 対称性について赤 (r), 青 (b), 緑 (g) と呼称される量子数を持つ。より正確に述べると、クォークは $SU(3)_c$ 対称性の基本表現である **3** 表現で表されている。 $SU(2)_L$ 対称性について、左巻きクォークは $SU(2)_L$ の基本表現である **2** 表現で表され、二重項をなす。一方で右巻きのカイラリティを持つ u_R と d_R は $SU(2)_L$ ゲージ変換の対称性を持たない。したがって、一重項で書かれている。

$$Q_L^i = \begin{pmatrix} u^r & u^b & u^g \\ d^r & d^b & d^g \end{pmatrix}_{iL} = \left(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \frac{1}{6} \right) \quad (2.18)$$

$$u_{iR} = (u^r \ u^b \ u^g)_i = \left(\mathbf{3}, \mathbf{1}, \frac{2}{3} \right), \quad d_{iR} = (d^r \ d^b \ d^g)_i = \left(\mathbf{3}, \mathbf{1}, -\frac{1}{3} \right) \quad (2.19)$$

ここで $i = 1, 2, 3$ は世代を表す。これによりクォークの構成を表すことができた。

次に、レプトンを構成する。レプトンは強い相互作用をしない。また、左巻きのカイラリティを持つもののみ弱い相互作用と電磁相互作用を行う。右巻きのカイラリティはクォークと同様に電磁相互作用のみ記述される。したがって、次のようになる。

$$L_{iL} = \begin{pmatrix} \nu_l \\ l \end{pmatrix}_{iL} = \left(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2} \right), \quad l_{iR} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, -1) \quad (2.20)$$

レプトンもクォークと同じく 3 つの世代で構造される。

以上より、標準模型は 1 つの世代に 5 つのカイラルスピノールによって記述される。世代構造を考慮すると 15 個のカイラルスピノールによって構成される。カイラルスピノールの自由場とゲージ相互作用はディラック方程式によって表すことができる。

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu D_\mu \Psi, \quad (\Psi \in \{Q_L^i, u_{iR}, d_{iR}, L_L, l_{iR}\}) \quad (2.21)$$

ここで、共変微分 D_μ は次のように定義される。

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - ig_3 G_\mu^a \frac{1}{2} \lambda^a - ig_2 W_\mu^i \frac{1}{2} \sigma^i - ig_Y Y B_\mu \quad (2.22)$$

2.5 ヒッグス機構

標準模型はゲージ対称性により記述される理論で大きな成功をおさめた。ところが、この対称性が破れない場合、次のような問題が残る。

- 短距離力である弱い相互作用を記述するゲージボソンは質量を持つ必要がある。ところがゲージボソンが局所対称性を維持してしまうと、質量を持つ項を書くことができない。
- クォークやレプトンの質量項を考えると、右巻きフェルミオンは $SU(2)_L$ 一重項に属するため、ゲージ不変な質量項を書くことが許されない。

これらの問題を解決するためにはゲージ対称性を自発的に破る必要がある。

素粒子標準模型において、ヒッグス場は $SU(2)_L$ の複素二重項として次のように書く。

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

ヒッグス場のラグランジアン密度は

$$\mathcal{L}_H = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi) \quad (2.24)$$

となる。第2項はヒッグス場のスカラーポテンシャルであり、

$$V(\Phi) = -\mu^2(\Phi^\dagger \Phi) + \lambda(\Phi^\dagger \Phi)^2, \quad (\mu^2, \lambda > 0) \quad (2.25)$$

である。ヒッグス場のポテンシャルは

$$(\Phi^\dagger \Phi) = \frac{\mu^2}{2\lambda}$$

のときに最小の値をとる。真空期待値は一般的に

$$\langle 0 | \Phi | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

のように取ることができるので、真空期待値は

$$v^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}$$

となる。

ヒッグス場を真空期待値の周りで次のように展開する

$$\Phi(x) = \exp \left(i \frac{\pi(x)}{v} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h(x)) \end{pmatrix}, \quad \left(\pi(x) = \sum_{a=1}^3 \pi^a(x) \frac{\sigma^a}{2} \right) \quad (2.27)$$

ただし、 $\pi(x)$ は南部・ゴールドストーンボゾンであり、ユニタリーゲージを取るとゲージ変換で取り除くことができる非物理的自由度である。一方で、 $h(x)$ が実ヒッグス粒子として考えられる。 $\pi^a(x)$, ($a = 1, 2, 3$) の3つの自由度のうち、2つが W^\pm ボゾンに吸収され、1つが Z^0 ボゾンに吸収されることで、それぞれのゲージボゾンが質量を獲得する。

ここから、ゲージ粒子の質量の獲得について考える。ヒッグス場のラグランジアン密度は式 (2.24) で与えられており、ヒッグス粒子の運動項には

$$\mathcal{L}_H \supset \frac{1}{4} \left((g_2 W_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} + g_Y B_\mu) \Phi \right)^\dagger \left((g_2 W^{a\mu} \frac{\sigma^a}{2} + g_Y B^\mu) \Phi \right) \quad (2.28)$$

という項が含まれている。ここで g_Y は $U(1)_Y$ ゲージボゾン B_μ のゲージ結合定数である。これによりゲージ対称性は

$$SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow SU(3)_c \times U(1)_{em} \quad (2.29)$$

のように自発的に破れる。したがって、(2.28) から

$$\mathcal{L}_H \supset \frac{v^2}{8} \left[(g_2^2 (W_\mu^1 W^{1\mu} + W_\mu^2 W^{2\mu}) + (g_2 W_\mu^3 - g_Y B_\mu)(g_2 W^{3\mu} - g_Y B^\mu)) \right] \quad (2.30)$$

となる．ここで，ゲージ場 W_μ^a と B_μ を次の様に再定義する．

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2) \quad (2.31)$$

$$\begin{pmatrix} Z_\mu^0 \\ A_\mu \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g_Y^2 + g_2^2}} \begin{pmatrix} g_2 W_\mu^3 - g_Y B_\mu \\ g_Y W_\mu^3 - g_2 B_\mu \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta_W W_\mu^3 - \sin \theta_W B_\mu \\ \sin \theta_W W_\mu^3 + \cos \theta_W B_\mu \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

ただし，この混合角 θ_W は

$$\cos \theta_W = \frac{g_2}{\sqrt{g_Y^2 + g_2^2}}, \quad \sin \theta_W = \frac{g_Y}{\sqrt{g_Y^2 + g_2^2}}$$

で定義され，ワインバーグ角と呼ばれる．実験によりこの値は $\sin^2 \theta_W \simeq 0.23$ となる．式 (2.30) から W^\pm ボゾンと Z^0 ボゾンの質量は

$$m_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A_\mu & Z_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_Z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^\mu \\ Z^\mu \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

さらに，

$$m_W = \frac{1}{2} g_2 v, \quad m_Z = \frac{1}{2} \sqrt{g_Y^2 + g_2^2} v$$

となる．これらも質量は

$$m_W \simeq 80.4 [\text{GeV}], \quad m_Z \simeq 91.2 [\text{GeV}]$$

と観測されている．また，式 (2.32), (2.33) に表れる A_μ は質量がないことがわかり， $U(1)_{em}$ ゲージ場の相互作用をする光子であることがわかる．

ヒッグス場の真空期待値の値は，4 体フェルミ相互作用の観測によって，フェルミ結合定数 ($G_F \simeq 1.166 \times 10^{-5} [\text{GeV}]^{-2}$) から導かれた．場の理論の計算によれば

$$2\sqrt{2}G_F = \frac{g_2^2}{2m_W^2} = \frac{2}{v^2}$$

と与えられるので， $v \simeq 246 [\text{GeV}]$ と定めることができる．2012 年に発見されたヒッグス粒子は $h(x)$ であると考えられており，その質量は $m_H = \sqrt{2\lambda}v \simeq 125 [\text{GeV}]$ と明らかになり，ヒッグス場の結合定数が $\lambda \simeq 0.13$ と決まった．

2.6 フェルミオン質量の獲得

素粒子標準模型において，クォークやレプトンは 3 つの世代構造を持ち，右巻き及び左巻きの 2 つのカイラリティを持つ．フェルミオンの質量はディラック質量項で書かれる．ディラックフェルミオン ψ をカイラルフェルミオン (ψ_L, ψ_R) として $\psi = \psi_L + \psi_R$ と分解して考える．フェルミオンの質量項は

$$\mathcal{L}_{\text{Mass}} = -m\bar{\psi}\psi = -m(\bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R)$$

と書かれる．一方で，カイラリティが左巻きのフェルミオンは $SU(2)_L$ 二重項である一方，右巻きのフェルミオンは $SU(2)_R$ 一重項であるため，その積は $SU(2)_L$ 変換の下で不変ではない．そのためラグランジアンに含めることは許されない．

ヒッグス場によってゲージ対称性を破ることが説明され，ゲージボゾンのみならずクォークやレプトンに対しても質量を与えることが可能となる． $i = 1, 2, 3$ を世代数として，図 2.2 のようにまとめられる．

表 2.2 標準模型粒子と量子数

クォーク場	量子数	レプトン場	量子数
$Q_i \equiv \begin{pmatrix} u_i \\ d_i \end{pmatrix}_L$	$\left(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \frac{1}{6} \right)$	$L_i \equiv \begin{pmatrix} \nu_i \\ l_i \end{pmatrix}_L$	$\left(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2} \right)$
u_{iR}	$\left(\mathbf{3}, \mathbf{1}, \frac{2}{3} \right)$	l_{iR}	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, -1)$
d_{iR}	$\left(\mathbf{3}, \mathbf{1}, -\frac{1}{3} \right)$		

2.6.1 クォーク, レプトンの質量生成と CKM 行列

はじめにレプトンの質量について考える. レプトン場とヒッグス場からなる \mathcal{G}_{SM} 不変な湯川相互作用は

$$\mathcal{L}_Y \supset -Y_l^{ij} \bar{L}_i \Phi l_{jR} + \text{h.c.} \quad (2.34)$$

と表される. ヒッグス場が真空期待値を (2.26) のようにとることで質量項を書くことができる.

$$\mathcal{L}_{\text{Mass}} \supset -m_e \bar{e} e - m_\mu \bar{\mu} \mu - m_\tau \bar{\tau} \tau$$

このとき, M_l を 3×3 の正方行列として

$$M_l = Y_l \frac{v}{\sqrt{2}} \quad (2.35)$$

のように表し, これを質量行列と呼ぶ. クォーク場に於いてもレプトン場と同様にヒッグス場からなる \mathcal{G}_{SM} 不変な湯川相互作用は

$$\mathcal{L}_Y \supset -Y_d^{ij} \bar{Q}_i \Phi d_{jR} - Y_u^{ij} \bar{Q}_i i\sigma^2 \Phi u_{jR} + \text{h.c.} \quad (2.36)$$

と表せる. これにより質量行列は

$$M_d = Y_d \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad M_u = Y_u \frac{v}{\sqrt{2}} \quad (2.37)$$

と表すことができる.

ここまで導入された質量行列 (2.35), (2.37) は一般には複素行列であり, 対角化されていない. これは素粒子の相互作用を表す固有状態と物理的質量を記述する固有状態が異なることを表しており, 前者を弱固有状態と呼び, 後者を質量固有状態と呼ぶ. このことは Cabibbo [7] により初めて指摘され, クォークには 2 つの固有状態が存在し, さらに世代と呼ばれる構造があることを示した. さらに小林, 益川 [8] の 2 名によってこの世代構造が 3 世代以上の場合であれば弱い相互作用は CP 対称性を破ることを説明できることを指摘した. これらは次のように説明される.

クォーク場 q に対して弱固有状態を記述する基底を q' と表すと, 質量固有状態 q とはユニタリ行列を用いて

$$\begin{aligned} (d'_L)^i &= (U_{dL})^i_j d_L^j, & (d'_R)^i &= (U_{dR})^i_j d^j, \\ (u'_L)^i &= (U_{uL})^i_j u_L^j, & (u'_R)^i &= (U_{uR})^i_j u^j, \\ (L'_L)^i &= (U_{LL})^i_j L_L^j, & (L'_R)^i &= (U_{LR})^i_j L^j. \end{aligned}$$

と関係づけられる.

双ユニタリー変換により

$$M_d \text{diag} = U_{dL}^\dagger M_u U_{dR}, \quad M_u \text{diag} = U_{uL}^\dagger M_d U_{uR}$$

と対角化される. この変換によって対角化された行列の成分はすべて実数となる.

この変換によって弱い相互作用において W^\pm ボゾンとの相互作用では世代間混合が起こる. いま W^\pm ボゾンとの相互作用によるチャージを j_W^μ とすると

$$\begin{aligned} j_W^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_L \gamma^\mu l_L + \bar{u}_L \gamma^\mu d_L) + \text{h.c.} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_L \gamma^\mu l_l + \bar{u}_L V_{\text{CKM}} \gamma^\mu d_L) + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (2.38)$$

となり, 第 2 項が示すように W^\pm ボゾンとの弱い相互作用は世代間混合を起こしている. ここで新しく定義された

$$V_{\text{CKM}} \equiv U_{uL}^\dagger U_{dL} \quad (2.39)$$

はカビボ-小林-益川 (CKM) 行列と呼ばれ, 世代構造に重要な量となる.

CKM 行列は 3×3 成分の行列であるから 9 つのパラメータを持つ. CKM 行列はユニタリ行列であることや, クォーク u_L, d_L の場を再定義することで自由度を取り除くことができる. このことから, 4 つの自由度 $\{\theta_{ij}(=\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}), \delta\}$ で CKM 行列を書くことができる. ここで $c_{ij} \equiv \cos \theta_{ij}$, $s_{ij} \equiv \sin \theta_{ij}$ とすると

$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

となる. θ_{ij} は 3 つの世代の混合角であり, θ が弱い相互作用における CP 対称性を破る複素位相である.

弱い相互作用が CP 対称性を破る可能性は J. W. Cronin, V. L. Fitch により K 中間子を用いた観測により指摘されていた [9]. CKM 行列の複素位相により CP 対称性の破れを理論的に説明できたこととなる.

2.7 標準模型のラグランジアン

これまでの内容を踏まえて, 標準模型のラグランジアンは次のように表される^{*1}.

$$\mathcal{L}_{\text{SM}} = \mathcal{L}_{\text{gauge}} + \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_Y \quad (2.41)$$

ヒッグス粒子のラグランジアンを除くと場の量子論とゲージ理論によって記述された簡潔な表現がされている. 素粒子実験の結果を極めて精度良く説明できる理論である.

2.8 標準模型の抱える問題

素粒子標準模型は高エネルギー物理学の実験をほぼ正確に予言することができるため, 大きな成功を収めた. 特に 2012 年に CERN にある大型ハドロン衝突型加速器 (Large Hadron Collider; LHC) が標準模型に現れる Higgs 粒子を発見したことにより, 標準模型は揺るぎないものとなった. しかし, 次のような課題があり, 理論の拡張が迫られている.

^{*1} ゲージ固定項とそれにより生じるゲージファースト=ポポフゴーストのラグランジアンは省略した

- ニュートリノ質量, およびニュートリノ振動
標準模型ではニュートリノは質量を持たない粒子として存在する。しかし 1998 年にニュートリノ振動がスーパーカミオカンデで観測されたことにより, ニュートリノは質量を持つことが示唆されたため, 標準模型を何かしら拡張する必要があると考えられている。
- 重力相互作用
粒子の持つ相互作用のうち, 重力相互作用は他の相互作用と異なり, 一般相対論で記述されるものであり, これを量子化しようとするときくりこみができない問題が生じる。
- 真の統一理論
標準模型はゲージ対称性を $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ とした理論であるが, 直積としてゲージ群が記述されていることは群の操作は独立に行われていることを意味しており, 真の統一理論とは言えない。
- 電荷の量子化
素粒子の電荷は単位電荷の整数倍の値を持つ。非可換群の固有値であれば量子化が実現できるが, ハイパーチャージ Y は可換群である $U(1)$ 対称性における無限小演算子であり, 固有値 Y の量子化は行えない。したがって標準模型で電荷 Q は $Q = I^3 + \frac{Y}{2}$ という関係に基づいて決定されるが, この電荷が量子化される根拠は標準模型に存在しない。
- 階層性問題
標準模型の典型的なエネルギースケールは $M_W \simeq 80\text{GeV}$ である。プランクスケール M_{Pl} や大統一スケール M_{GUT} に至れば理論が標準模型と入れ替わると考えられているが, エネルギースケールに大きな隔たりがあり, この階層性を如何にして自然と説明できるかは重要な問題である。階層性問題は大統一理論を実現するスケールや, 自発的に対称性を破るヒッグス粒子とも深く関わる。そのため次章で大統一理論による問題点に注目して改めて述べる。
- 予言できないパラメーターの数
素粒子標準模型はゲージ相互作用と量子場の理論で構成される。唯一のスカラー場であるヒッグス粒子は標準模型には相互作用を規定する主導原理は存在せず, クォークやレプトンとの湯川相互作用やヒッグス粒子の自己相互作用は理論の中では任意の値をとることが可能であり, 予言することができない。そのため標準模型には表 2.3 に挙げたように 20 近くの任意のパラメータが存在することになるが, これらを理論的に求めることはできていない。
- 暗黒物質
標準模型に存在する粒子のみを考えた場合, 観測事実として宇宙全体のエネルギーに対して 4% のみしか説明することができず, 残りの 96% のうち 23% は暗黒物質と考えられている。ここで言う暗黒物質とは, 物質粒子との相互作用が極めて弱いものの重力相互作用を微弱に持つものであると考えられているが, そのような粒子は素粒子標準模型のみでは説明することができない。
- 暗黒エネルギー
先に述べた暗黒物質を考えた場合であっても, およそ 73% は未知のエネルギーとして考えられており, これは暗黒エネルギーと呼ばれる。暗黒エネルギーは初期宇宙においてインフレーションと呼ばれる加速膨張を引き起こした宇宙項と関係があると考えられている。

2.9 ニュートリノ質量

素粒子標準模型では, ニュートリノが質量を持つことは禁止されている。これは, レプトンセクターにおいてニュートリノは $SU(2)_L$ 二重項のみが存在し, カイラルパートナーである右巻きニュートリノが存在しないため, クォークや荷電レプトンのようにヒッグス機構を考えることができないためである。ところが, カミ

パラメータ	値
結合定数	
g_1	0.461
g_2	0.652
g_3	1.21
ヒッグス	
v	246 [GeV]
λ	0.13
湯川定数	
y_e	2.94×10^{-6}
y_μ	6.07×10^{-4}
y_τ	1.02×10^{-2}
y_u	1.24×10^{-5}
y_c	7.11×10^{-3}
y_t	9.92×10^{-1}
y_d	2.70×10^{-5}
y_s	5.36×10^{-4}
y_b	2.41×10^{-2}
CKM 行列	
θ_{12}	1.66×10^{-5}
θ_{13}	3.10×10^{-4}
θ_{23}	1.65×10^{-2}
δ	1.14
世代数	
n_f	3
QCD の θ パラメータ	
θ	$ \theta < 10^{-10}$

表 2.3 標準模型に内在するパラメータ

オカンデによる観測により、ニュートリノ振動と呼ばれるニュートリノのフレーバーが変化する現象が発見された [10–12]. これはニュートリノに質量が無い限り起こり得ない現象である [13, 14] ため、何らかの機構でニュートリノにも質量があると考えなければならない.

2.9.1 マヨラナフェルミオンと質量項

ここでは、ニュートリノの質量項を導入するためにマヨラナ場を導入する. 量子場の理論では、質量を持った粒子は 4 成分のディラックスピノール場を用いて記述されていた. このディラックスピノール場を ψ_D とする. ディラックスピノールとカイラルスピノールには射影演算子 $P_L = \frac{1 - \gamma^5}{2}$, $P_R = \frac{1 + \gamma^5}{2}$ を用いて次のように示される.

$$\psi_R = P_R \psi, \quad \psi_L = P_L \psi$$

4成分スピノール場 ψ は2つのカイラルスピノールの和で書くことができる.

$$\begin{aligned}\psi &= \psi_L + \psi_R \\ &= \frac{1+\gamma^5}{2}\psi + \frac{1-\gamma^5}{2}\psi \\ &= P_L\psi + P_R\psi\end{aligned}\tag{2.42}$$

ここから, γ 行列はカイラル基底をとる. これによってカイラルスピノールを2成分のスピノールとして扱うことができる. 具体的には, パウリ行列 σ^i ($i=1,2,3$) に対して

$$\begin{aligned}\sigma^\mu &= (I, \sigma^i) \\ \bar{\sigma}^\mu &= (I, -\sigma^i)\end{aligned}$$

と定義すると, γ 行列は

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}\tag{2.43}$$

と書くことができる. このことから, カイラルスピノールは

$$\begin{aligned}\psi_L &= \begin{pmatrix} \eta_\alpha \\ 0 \end{pmatrix}; (\alpha=1,2) \\ \psi_R &= \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}; (\dot{\alpha}=1,2)\end{aligned}\tag{2.44}$$

となり, それぞれ2成分の複素ベクトルで表すことができる. また, ローレンツ群の生成子 $\sigma^{\mu\nu}$ は

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sigma^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^{\mu\nu} \end{pmatrix}, \quad (\sigma^{\mu\nu} \equiv \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu, \quad \bar{\sigma}^{\mu\nu} \equiv \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \quad (\mu \neq \nu))\tag{2.45}$$

となり, ローレンツ変換の下で異なるカイラリティを持つ場が混合しない. 数学的には群 $SL(2, \mathbb{C})$ の既約表現を成すことが明確になる.

カイラル基底では C 変換は $C = i\gamma^0\gamma^2$ と行列で表すことができた. これよりカイラルフェルミオンは

$$\begin{aligned}(\psi_L)^c &= C\bar{\psi}_L^t = -i\gamma^2(\psi_L)^* \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{2.46}$$

と異なるカイラリティを持つカイラルフェルミオンを構成することができる.

これまでで, ディラックスピノールは

$$\psi_D = \psi_L + \psi_R = \begin{pmatrix} \eta_\alpha \\ \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}\tag{2.47}$$

と表せる. さらに, C 変換はカイラリティを変化させることから, ある左巻きのカイラルフェルミオンとその反粒子でスピノールを構成することが可能であることがわかる.

$$\psi_{ML} = \psi_L + (\psi_L)^c = \begin{pmatrix} \eta_\alpha \\ \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}\tag{2.48}$$

あるいは右巻きのカイラルフェルミオンを用いると

$$\psi_{MR} = \psi_R + (\psi_R)^c = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}\tag{2.49}$$

のように, スピノールを構成することが可能となる. このようにして構成されたスピノールはマヨラナスピノールと呼ばれる.

マヨラナスピノールの重要な点として、P 変換と C 変換を 2 回施すと元の状態に戻る。以上のことから、マヨラナスピノールは粒子と反粒子の区別がない中性のフェルミオンを表す。

ここで、数学的な側面に言及する。 $\eta, \bar{\xi}$ はローレンツ群 $SL(2, \mathbb{C})$ の基本表現とその反表現としての振る舞いをする。これらは Levi-Civita テンソルを用いて

$$\bar{\eta}^{\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\beta} \bar{\eta}_{\dot{\beta}} \quad (2.50)$$

となり、Levi-Civita テンソルが計量としての役割を持つ。

ここで、任意の 2 つの左巻きスピノール η, χ の縮約を考える。

$$\eta_{\alpha} \chi^{\alpha} = \epsilon^{\alpha\beta} \eta_{\alpha} \chi_{\beta}$$

は $SL(2, \mathbb{C})$ 変換のもとで不変であるから、ローレンツ不変量であることがわかる。これは $SU(2)$ 群において基本表現の 2 重項を反対称に組むことによって 1 重項を成し、 $SU(2)$ 不変量を成すことを表している。^{*2}

マヨラナスピノールの構成を行ったことにより、マヨラナ型の質量項を構成することができる。

$$-m_L \overline{\psi_{ML}} \psi_{ML} = -m_L (\bar{\nu}_L^c \nu_L + \text{h.c.}) = m_L (\eta^{\alpha} \eta_{\alpha} + \text{h.c.}) \quad (2.51)$$

$$-m_R \overline{\psi_{MR}} \psi_{MR} = -m_R (\bar{\nu}_R^c \nu_R + \text{h.c.}) = m_R (\xi^{\alpha} \xi_{\alpha} + \text{h.c.}) \quad (2.52)$$

一方で、左巻きニュートリノのカイラルパートナーとして右巻きのニュートリノを理論に含めたことにより、他のフェルミオンと同じようにディラック型の質量項を考えることができる。

$$-m_D \bar{\psi}_D \psi_D = -m_D (\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L) \quad (2.53)$$

これらをまとめると、ニュートリノの質量項は式 (2.51), (2.52), (2.53) を用いて、一般的に

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = -\frac{1}{2} m_L (\bar{\nu}_L^c \nu_L + \text{h.c.}) - \frac{1}{2} m_R (\bar{\nu}_R^c \nu_R + \text{h.c.}) - m_D (\bar{\nu}_L \nu_R + \bar{\nu}_R \nu_L) \quad (2.54)$$

と表すことができる。

ここで、式 (2.54) を行列でまとめる。

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \overline{(\nu_L)^c} & \bar{\nu}_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ (\nu_R)^c \end{pmatrix} + \text{h.c.} \quad (2.55)$$

一般的に質量行列は複素行列である。このとき、複素対称行列はユニタリー行列とその転地行列により対角化することができる。

$$\begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} = U^T \begin{pmatrix} m_a & 0 \\ 0 & m_s \end{pmatrix} U \quad (2.56)$$

このとき、対角化行列 U , ν_L と $(\nu_R)^c$ の混合角 θ_{ν} はそれぞれ

$$U = \begin{pmatrix} -i \cos \theta_{\nu} & \sin \theta_{\nu} \\ i \sin \theta_{\nu} & \cos \theta_{\nu} \end{pmatrix}, \quad \tan 2\theta_{\nu} = \frac{2m_D}{m_R - m_L} \quad (2.57)$$

となる。質量固有状態とカイラル固有状態は

$$\begin{pmatrix} \nu_a \\ \nu_s \end{pmatrix} = U^{\dagger} \begin{pmatrix} \nu_L \\ (\nu_R)^c \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

という関係となる。

^{*2} これは時空をミンコフスキー的ではなくユークリッド的のすると、ローレンツ変換が $SO(4) \simeq SU(2) \times SU(2)$ となり、独立な $SU(2)$ で記述できることと対応している。

以上により 2 つの質量固有値 m_a, m_s とそれぞれの質量固有状態 ν_a, ν_s を得ることができる.

$$\begin{aligned} m_a &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2} - (m_R + m_L) \right] \\ m_s &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2} + (m_R + m_L) \right] \\ \nu_a &= i(\nu_L \cos \theta_\nu - (\nu_R)^c \sin \theta_\nu) \\ \nu_s &= \nu_L \sin \theta_\nu + (\nu_R)^c \cos \theta_\nu \end{aligned}$$

質量固有状態 ν_a と ν_s によって, 1 つの世代から独立な 2 つのマヨラナフェルミオンの質量項を書くことができる,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} m_s \bar{\nu}_s \nu_s - \frac{1}{2} m_a \bar{\nu}_a \nu_a + \text{h.c.} \quad (2.59)$$

となる. ここまでマヨラナフェルミオンとディラックフェルミオンからニュートリノの質量項を一般的に導くことを行った. ニュートリノが質量を持つ機構についてはいくつか考えられており, 主に

- ディラック型 ... マヨラナ質量を持たずにディラック型の質量項のみを考える.
- シーソー機構 ... ディラック質量より非常に大きなマヨラナ質量が存在する.
- 擬ディラック・ニュートリノ ... ディラック質量より非常に小さなマヨラナ質量が存在する.

が提案されている. この中でもシーソー機構はニュートリノが他のフェルミオンに比べて非常に小さな質量を持つことを自然に説明することができる.

2.9.2 シーソー機構

シーソー機構は大きく質量が異なるマヨラナニュートリノの存在により, 小さなニュートリノ質量の説明を行うものである. はじめに, 質量に次のような階層があると仮定する.

$$m_L \ll m_D \ll m_R \quad (2.60)$$

このとき, 混合角は

$$\theta \simeq \frac{m_D}{m_R} \ll 1 \quad (2.61)$$

と近似できる. 同じように ν_a, ν_s についても

$$\begin{aligned} \nu_a &\simeq i((\nu_L) - (\nu_R)^c \theta_\nu) \\ \nu_s &\simeq \nu_L \theta_\nu + (\nu_R)^c \end{aligned}$$

となるから,

$$m_a \simeq \frac{m_D^2}{m_R} - m_L, \quad m_s \simeq \frac{m_D^2}{m_R} + m_R$$

と質量を表せる. 質量の階層性の仮定である式 (2.60) から m_a, m_s の質量の大きな階層性を導いた. ここまで, 左巻きニュートリノの質量 m_L について詳細を述べていないが, 実際に $m_L \neq 0$ とマヨラナ質量があることを考えるためには $SU(2)$ 三重項ヒッグスを理論に含める必要がある. これは左巻きニュートリノのマヨラナ質量項

$$-\frac{1}{2} m_L \bar{\nu}_L^c \nu_L + \text{h.c.}$$

に含まれる ν_L は $SU(2)_L$ 不変性を持たないため、もしこの項をゲージ不変な形で実現するためには三重項ヒッグスで考えることになる。そのため $m_L = 0$ という仮定をおく。すると

$$m_a \simeq \frac{m_D^2}{m_R} \ll m_D, \quad m_s \simeq m_R$$

となり、マヨラナニュートリノは

$$\nu_a \simeq i(\nu_L - (\nu_L)^c), \quad \nu_s \simeq \nu_R + \nu_R^c \quad (2.62)$$

となる。

2.9.3 Type-II seesaw 機構

新しいスカラー 3 重項を導入する。

$$\vec{\Delta} = (\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$$

このとき、 $SU(2)$ 三重項は

$$\Delta \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{\sigma} \cdot \vec{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Delta_3 & \Delta_1 - i\Delta_2 \\ \Delta_1 + i\Delta_2 & \Delta_3 \end{pmatrix}$$

となる。これによって $SU(2)$ 不変なラグランジアンを構成することが可能になる。左巻きニュートリノの質量を生成するラグランジアンは

$$\mathcal{L}_Y^{II} \supset -(Y_\Delta)_{\alpha\beta} \psi_{\alpha L}^T C i \sigma_2 \Delta \psi_{\beta L} + \text{h.c.} \quad (2.63)$$

と書くことができる。ここで、新しく加えた $SU(2)$ 三重項ヒッグスによる湯川結合定数を Y_Δ とした。 C は荷電協約変換の演算子である。

新たに加えた粒子 Δ の電荷について、ラグランジアンに於ける電荷の保存から決めることができる。具体的に計算すると

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y^{II} \supset & -(Y_\Delta)_{\alpha\beta} \left[\overline{\nu_{\alpha L}^c} \frac{\Delta_1 + i\Delta_2}{\sqrt{2}} \nu_{\beta L} + \overline{l_{\alpha L}^c} \frac{-\Delta_3}{\sqrt{2}} \nu_L \right] \\ & - (Y_\Delta)_{\alpha\beta} \left[\overline{\nu_{\alpha L}^c} \frac{-\Delta_3}{\sqrt{2}} l_{\beta L} + \overline{l_{\alpha L}^c} \frac{-\Delta_1 + i\Delta_2}{\sqrt{2}} l_{\beta L} \right] \end{aligned} \quad (2.64)$$

となるから、電荷は

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \Delta^+ \\ \frac{\Delta_1 + i\Delta_2}{\sqrt{2}} &= \Delta^0 \\ \frac{\Delta_1 - i\Delta_2}{\sqrt{2}} &= \Delta^{++} \end{aligned}$$

となる。改めて Δ を書くと

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Delta^+ & \sqrt{2}\Delta^{++} \\ \sqrt{2}\Delta^0 & -\Delta^+ \end{pmatrix}$$

である。これらの粒子による相互作用は

$$\mathcal{L}_Y^{II} = (Y_\Delta)_{\alpha\beta} \overline{l_{\alpha L}^c} l_{\beta L} \Delta^{++} + \sqrt{2} (Y_\Delta)_{\alpha\beta} \overline{\nu_{\alpha L}^c} l_{\beta L} - (Y_\Delta)_{\alpha\beta} \overline{\nu_{\alpha L}^c} \nu_{\beta L} \Delta^0 + \text{h.c.} \quad (2.65)$$

となる。式 (2.65) にある第 3 項目によって左巻きのカイラリティを持つニュートリノの質量を生成する。

SU(3) 三重項スカラーポテンシャルと最小値

新しいスカラー場である Δ を理論に加えたことによって、標準模型に存在するヒッグス粒子との相互作用を考えることができる。このことを考える。

スカラー場のラグランジアンは

$$\mathcal{L} \supset (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) + (D_\mu \Delta)^\dagger (D^\mu \Delta) - V \quad (2.66)$$

となる。ここで新しく加わった $SU(3)$ 三重項の共変微分は

$$D_\mu \Delta \equiv \partial_\mu \Delta - i \frac{g}{2} [\sigma^i W_\mu^i, \Delta] - ig_Y B_\mu \Delta$$

である。新たにスカラーポテンシャル V を定義したが、これは

$$V = V(\Phi) + V(\Delta) + V(\Phi, \Delta)$$

と標準模型のヒッグス Φ のみの相互作用, Δ のみの相互作用, Φ と Δ の相互作用を考えることができる。ポテンシャルは

$$V(\Phi) = -\mu_H (\Phi^\dagger \Phi) + \lambda_H (\Phi^\dagger \Phi)^2$$

$$V(\Delta) = M_\Delta^2 \text{Tr}(\Delta^\dagger \Delta) + \frac{\lambda_2}{2} ((\text{Tr}(\Delta^\dagger \Delta))^2 - \text{Tr}(\Delta^\dagger \Delta)^2) \quad (2.67)$$

$$V(\Phi, \Delta) = \lambda_4 (\Phi^\dagger \Phi) \text{Tr}(\Delta^\dagger \Delta) + \lambda_5 \Phi^\dagger [\Delta^\dagger, \Delta] \Phi \\ + \left[\mu_\Delta \Phi^T i \sigma^2 \Delta^\dagger \Phi + \frac{\lambda_6}{M_p} (\Phi^T i \sigma^2 \Delta^\dagger \Phi) (\Phi^\dagger \Phi) + \frac{\lambda'_6}{M_p} (H^T i \sigma^2 \Delta^\dagger \Phi) (\Delta^\dagger \Delta) + \dots + \text{h.c.} \right]$$

次に見るように、新しく μ_Δ は Δ が真空期待値を持つときの値に関係する量となる。ここでは議論しないが、繰り込み不可能な項はインフレーション理論において重要な役割を果たすと考えられている。また、これらの係数 λ_i は $\lambda_i > 0$ となるように考える。これにより新たなスカラー粒子 Δ の対称性は標準模型と変わらないようにとることができる。

ここから、標準模型の二重項と新たな粒子 Δ が対称性を破ることを考える。ここでは2つのスカラー粒子を真空期待値の周りで展開して考える。

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \frac{v_H + \phi + i\chi}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \Delta = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Delta^+ & \sqrt{2}\Delta^{++} \\ v_\Delta + \delta + i\eta & -\Delta^+ \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

真空期待値は中性成分でもつため

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_H \end{pmatrix}, \quad \langle \Delta \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_\Delta & 0 \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

となる。

第 3 章

場の理論における繰り込みと結合定数

3.1 走るゲージ結合定数

場の量子論に基づけば、理論に現れる発散を繰り込みという手法を用いて取り除くことが可能である。繰り込みにはいくつかの手法があるが、いずれの方法であってもエネルギースケールへ依存性がある。しかし理論はエネルギーの変化に対して不変でなければならないため、ラグランジアンに存在するパラメータはエネルギースケールの変化を打ち消すように変化する。これによってエネルギースケールに依存する繰り込まれた理論が得られる。

3.2 Callan-Symanzik 方程式

繰り込まれた量子場の理論ではラグランジアンは制限が与えられ、質量次元が 4 次の項のみ許される。繰り込まれた場の理論のパラメータは、繰り込み条件の組みで決定され、この条件が繰り込みスケールを決定している。異なるエネルギースケールであっても同様の理論を考えることができる。

繰り込み条件を考えると、繰り込みを行うスケール M は任意である。したがって、同じ理論を異なったスケール M' でも定義することができる。このことを以下で考える。

ある理論のグリーン関数が

$$\langle T\phi_0(x_1)\cdots\phi_0(x_n)\rangle \quad (3.1)$$

で与えられるとする。この理論では、量子効果を考えない裸の結合定数 λ_0 や、運動量カットオフが Λ によって与えられるものであり、エネルギースケール M には依存していない。エネルギースケール依存性は、このグリーン関数にあるのではなく、場をリスケリングし裸の結合定数 λ_0 を消して繰り込まれた結合定数 λ で書くことでカットオフ依存性を取り除いたときにのみ現れる。繰り込まれたグリーン関数と裸のグリーン関数は、リスケリング因子の Z に至るまでは数値的に同じになる。場の繰り込みは場の強さの繰り込み因子である Z を用いて次のように定義される。

$$\phi(x) = Z^{-\frac{1}{2}}\phi_0(x) \quad (3.2)$$

これにより繰り込まれた n 点の相関関数は、裸の相関関数と次のように関係付けられる。

$$\langle T\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle = Z^{-\frac{n}{2}}\langle T\phi_0(x_1)\cdots\phi_0(x_n)\rangle \quad (3.3)$$

式 (3.3) の左辺は繰り込まれたグリーン関数と呼ばれる。この関数は右辺のグリーン関数とは異なる別のエネルギースケールである M' で定義されており、結合定数は λ' 、リスケリング因子は Z' で定義される。

ここから、エネルギースケール M を無限小だけシフトした場合の影響を考える。はじめに $G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$

を繰り込まれた摂動論において計算される連結 n 点関数とする.

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \langle T\phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \rangle_{\text{connected}} \quad (3.4)$$

繰り込まれていない裸の相関関数は, 繰り込まれていないパラメータである (ϕ_0, λ_0, m_0) とカットオフ Λ に依存している. 一方で, 繰り込まれた相関関数 (式 (3.4)) には繰り込まれたパラメータである (ϕ, λ, m) と繰り込みスケール μ に依存している. このことから, 繰り込まれていない裸の相関関数 $G_0^{(n)}$ は繰り込みスケール μ に依存せず, 繰り込みスケールの変化があった場合でも変化することがないので

$$\frac{dG_0^{(n)}}{d\mu} = 0 \quad (3.5)$$

が満たされる. 一方で, 繰り込まれた相関関数は繰り込みスケールが変化することで影響を受ける. 繰り込みスケールを無限小だけシフトする.

$$\mu \rightarrow \mu + \delta\mu \quad (3.6)$$

このとき, 繰り込みスケールの変化に伴って λ と ϕ は次のように変化する.

$$\lambda \rightarrow \lambda + \delta\lambda \quad (3.7)$$

$$\phi \rightarrow \phi + \delta\phi \equiv (1 + \delta\eta)\phi \quad (3.8)$$

場の変換については無次元のシフトを $\delta\eta = \frac{\delta\phi}{\phi}$ とした. 式 (3.2) から

$$Z^{\frac{1}{2}} = 1 - \delta\eta \quad (3.9)$$

が言えるので, 式 (3.5) から繰り込みされた相関関数は

$$G^{(n)} \rightarrow (1 + n\delta\eta)G^{(n)} \quad (3.10)$$

と変化することがわかる. これらを踏まえて, 繰り込みされた相関関数の微小変化を考えると, 式 (3.5) から

$$\frac{d}{d\mu} Z^{\frac{n}{2}} G^{(n)} = \frac{\partial G^{(n)}}{\partial \mu} + \frac{\partial G^{(n)}}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} - n \frac{\partial \eta}{\partial \mu} G^{(n)} = 0 \quad (3.11)$$

がわかるので, これを整理して

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial \lambda} - n \mu \frac{\partial \eta}{\partial \mu} \right) G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; \mu, \lambda) = 0 \quad (3.12)$$

となる. ここで無次元の量である β と γ を

$$\beta = \mu \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \quad (3.13)$$

$$\gamma = -\mu \frac{\partial \eta}{\partial \mu} \quad (3.14)$$

と定義すると, 次の関係式が得られる.

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} + n\gamma \right) G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; \mu, \lambda) = 0 \quad (3.15)$$

式 (3.15) は Callan-Symanzik 方程式と呼ばれる. [15–17]

Callan-Symanzik 方程式に現れる β, γ の 2 つの関数はカットオフスケールの Λ に依存し, 繰り込みスケール μ に依存しない. つまり, この β, γ の 2 つの関数は次元を持たない繰り込まれた結合定数である λ の関数であることが言える. これらは $G^{(n)}$ にのみ繰り込みが行われているからである.

ここで新しく定義された β, γ の2つの関数是不変的な関数であり、繰り込み定数と場の強さの変化にのみ依存しており、これらが変化したときの繰り込みスケール μ の変化を補うように変化が起こる。そのため β 関数は繰り込みスケールが μ への結合定数の依存性を表し、一方で γ 関数は場を繰り込みスケール μ への依存性を表している

次に Callan-Symanzik 方程式に現れた新たな関数 γ をを一般化し、摂動との関係を考える。 $\delta\eta$ は式 (3.8) で定義されていた。したがって、

$$\begin{aligned}\delta\eta &= \frac{Z^{-\frac{1}{2}}(\mu + \delta\mu) - 1}{Z^{-\frac{1}{2}}(\mu)} \\ &= \frac{Z^{-\frac{1}{2}}(\mu + \delta\mu) - Z^{-\frac{1}{2}}(\mu)}{Z^{-\frac{1}{2}}(\mu)}\end{aligned}\quad (3.16)$$

となる。この両辺を $\delta\mu$ で割り、 $\delta\mu \rightarrow 0$ とすると

$$\frac{\partial\eta}{\partial\mu} = -\frac{1}{2} \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial\mu} \quad (3.17)$$

一方で γ は式 (3.14) で定義されているので、

$$\gamma = \frac{1}{2} \frac{\mu}{Z} \frac{\partial Z}{\partial\mu} \quad (3.18)$$

と γ の表し方を変えることができる。ここから摂動論の関係を見ることができる。摂動論を考えているとき、場の強さ Z は

$$Z = 1 + \delta Z \quad (3.19)$$

と微小量 $\delta Z \ll 1$ を用いて書くことができる。これより

$$\gamma \simeq \frac{1}{2} \mu \frac{\partial \delta Z}{\partial\mu} + \mathcal{O}((\delta Z)^2) \quad (3.20)$$

となる。このことから摂動論が有効な理論であれば、 δZ が判明すれば 相殺項から体系的に β 関数を求めることができることがわかる。

ここまでは Callan-Symanzik 方程式をスカラー場の理論として式 (3.1) から導出した。一般にフェルミオン場が存在した場合でも成り立つ。 n 個のフェルミオン場、 m 個のスカラー場が存在し、両方の結合定数が λ の場合を考える。このとき、場のくりこみを同じように考えると、繰り込まれたグリーン関数は

$$G_0^{(n,m)}(\{x_i\}, \lambda_0) = Z_\psi^{\frac{n}{2}} Z_\phi^{\frac{m}{2}} G^{(n,m)}(\{x_i\}, \lambda, \mu) \quad (3.21)$$

となる。したがって、式 (3.5) と同じように考えて

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial\mu} + \beta \frac{\partial}{\partial\lambda} + n\gamma_\psi + m\gamma_\phi \right) G^{(n,m)}(\{x_i\}, \mu, \lambda) = 0 \quad (3.22)$$

となる。ここでは

$$\gamma_\psi = \frac{n}{2} \frac{\mu}{Z_\psi} \frac{\partial Z_\psi}{\partial\mu}, \quad \gamma_\phi = \frac{m}{2} \frac{\mu}{Z_\phi} \frac{\partial Z_\phi}{\partial\mu} \quad (3.23)$$

とした。

これらより、式 (3.13)

$$\beta \equiv \mu \frac{\partial}{\partial\mu} \lambda$$

の β からゲージ結合定数 λ のエネルギー依存性を求めることができる。この β は摂動論において相殺項や繰り込まれたグリーン関数から求めることができ、非可換ゲージ理論や湯川結合、スカラー場の理論など一般的な場の理論で同様に求めることができる。[18–24]

3.3 ゲージ結合定数のエネルギー依存性

式 (3.13) により, ゲージ結合定数のエネルギー依存性を β 関数によって導くことができることが明らかにされた. 理論に現れる相殺項を求めることで β -関数の具体的な形を求めることができるが, 群論の対称性を用いることで一般的な β -関数の係数は導出されている. 摂動の δZ の 1 次の影響まで考えた場合,

$$\beta = -\frac{g^3}{(4\pi)^2} \left[\frac{11}{3}C_2(G) - \frac{4}{3}\kappa S(F) - \frac{1}{6}\eta S(S) \right] \quad (3.24)$$

となる. ^{*1} [1, 2]

多重項は群 G の表現 R によって変換される. ここではフェルミオン多重項であれば群 G の表現 F によって, ボゾン多重項は群 G の表現 S によって変換する. ここでは, $C_2(R)$ は κ , η はそれぞれ

$$\kappa = \begin{cases} 1 & \text{ディラックフェルミオン} \\ \frac{1}{2} & \text{ワイルフェルミオン} \end{cases}, \quad \eta = \begin{cases} 1 & \text{実スカラー場} \\ 2 & \text{複素スカラー場} \end{cases}$$

と対応づけられる. また, $S_2(F), S_2(S)$ はそれぞれフェルミオン表現とスカラー表現の Dynkin 指数である. 群 G の生成子の表現行列を T^a とする. これは交換関係 (2.6) を満たす. この表現行列 T^a は次の関係を満たす.

$$T^a T^a = C_2(R)I \\ \text{Tr}[T^a T^b] = S_2(R)\delta^{ab}$$

ここで I は単位行列である. $C_2(R)$ はカシミヤ演算子と呼ばれ, 群 G の生成子と交換する.

$$d(G)S_2(R) = d(R)C_2(R) \quad (3.25)$$

ここで, $d(R)$ は R の次元であり, $d(G)$ はゲージ群 G の随伴表現の次元である. 随伴表現の次元は群の次元と等しい.

ここで b_i を

$$b_i = -\frac{11}{3}C_2(G) + \frac{4}{3}\kappa S_2(F) + \frac{1}{6}\eta S_2(S)$$

とし, $i = 1, 2, 3$ はそれぞれ $U(1)_Y, SU(2)_L, SU(3)_c$ ゲージ群と対応する. また, 後述される式 (4.48) によって $U(1)_Y$ ゲージ結合定数は $g_1^2 \equiv \sqrt{\frac{5}{3}}g_Y$ と規格化される. 標準模型では

$$(b_1, b_2, b_3) = \left(\frac{41}{10}, -\frac{19}{6}, -7 \right)$$

と係数を求めることができる^{*2}. ここから実際に数値的にゲージ結合定数の大きさについて, エネルギー依存性を見る. α_i は $\alpha_i(\mu) = \frac{g_i(\mu)}{4\pi}$ として, 式 (3.13) に代入し,

$$\frac{d\alpha_i^{-1}(\mu)}{d\ln\mu} = -\frac{1}{2\pi}b_i \quad (3.26)$$

^{*1} 本論文では扱わないが, 2 次までの摂動の計算をすると次のようになる. [25–27]

$$\begin{aligned} \beta = & -\frac{g^3}{(4\pi)^2} \left[\frac{11}{3}C_2(G) - \frac{4}{3}\kappa S_2(F) - \frac{1}{6}\eta S_2(S) \right] \\ & - \frac{g^5}{(4\pi)^4} \left[\frac{34}{3}[C_2(G)]^2 - \kappa \left(4C_2(F) + \frac{20}{3}C_2(G) \right) S_2(F) - \left(2C_2(S) + \frac{1}{3}C_2(G) \right) \eta S_2(S) \right] \end{aligned}$$

^{*2} 求め方は付録 B に掲載した

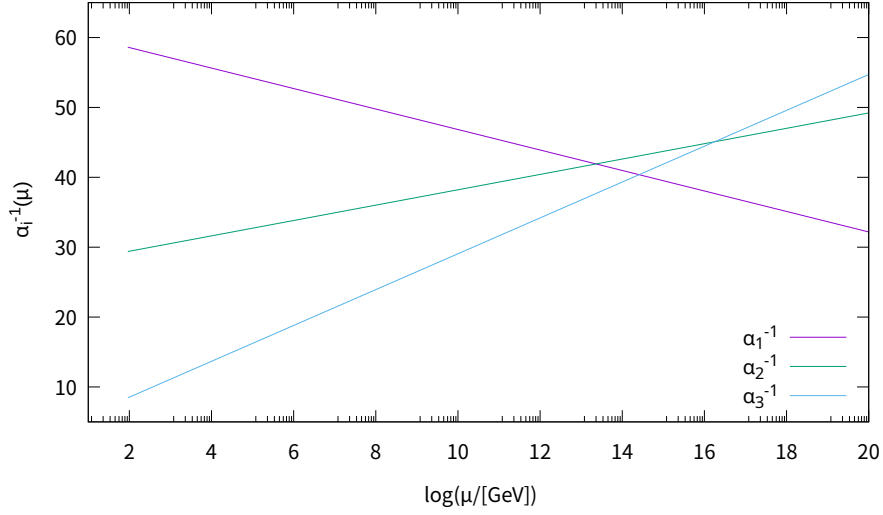


図 3.1 標準模型粒子のみで繰り込み群方程式を解いた図

とする．電弱スケール $M_Z = 91.1880 [\text{GeV}]$ におけるゲージ結合定数の値は

$$\begin{aligned} g_1(M_Z) &= 0.461 \\ g_2(M_Z) &= 0.652 \\ g_3(M_Z) &= 1.22 \end{aligned}$$

であり [28], これらを初期条件として数値的に解いたものが図 3.1 となる．図 3.1 を見ると明らかであるが, 高エネルギースケールでゲージ結合定数の大きさは近づくものの, 完全には一致しない．しかし, いずれの相互作用の大きさもプランクスケールである $M_{pl} \sim 10^{19} [\text{GeV}]$ よりも下で近づくため, 3つの相互作用は重力相互作用よりも先に統一される可能性は残されている．

第 4 章

SU(5) 大統一理論

大統一理論は H.Georgi と S.L.Glashow により 1974 年に提唱された [29]. 大統一理論では重力を除いた 3 つの相互作用を 1 つに統一することを目的としている. したがって, ゲージ対称性は単純群によって記述されることが考えられており, 標準模型のゲージ群である $G_{\text{SM}} = SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ を部分群として内包する群を考える. このことから, 前節で述べられている標準模型の問題点のうち,

- 電荷の量子化
- 予言できないパラメータの数

は大統一理論によって解決される可能性がある.

大統一理論にも様々な単純群を考えることが可能であり, $SU(5)$ や $SO(10)$, E_6 などの模型を考えることが可能であるが, このノートでは最小模型である $SU(5)$ について取り扱い, 理論の拡張を試みる.

はじめに, $SU(5)$ 大統一理論が最小模型である理由を考える. 標準模型のゲージ対称性である $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ は, 群の階数が $\text{rank} = 4$ であり, これを内包できる群を考える必要がある. その中で考えられる単純群は, $O(8)$, $O(9)$, $Sp(8)$, F_4 , そして $SU(5)$ である. このうち, $SU(3)$ のもつ 3 重項をもち, $SU(2)$ がもつ 2 重項の複素表現をもつという性質は $SU(5)$ 群を用いて記述することができるため, 最小模型として $SU(5)$ 群を考えて理論を構築することが可能となる.

4.1 フェルミオンの表現

ここでは $SU(5)$ 群において標準模型に現れるフェルミオンがどのように当てはめられるのか考える.

ゲージ群を決定すると, ラグランジアンに導入する場の既約表現を指定すれば理論を定めることができる. $SU(5)$ の基本表現は $\mathbf{5}$ 表現であり, $\mathbf{5}$ 表現か, その複素表現である $\bar{\mathbf{5}}$ を用いることですべての表現を構成することができる. $SU(5)$ 群の階数は 4 であるから, 生成演算子を $L_i (i = 1, \dots, 24)$ のうち対角化可能なものが 4 つ存在する. $SU(3)_c$ の対角化可能な生成演算子を λ_3, λ_8 , $SU(2)$ のものを I_3 (アイソスピン), $U(1)$ の超電荷を Y に対応させて考えることができる.

次にフェルミオンの次元を $SU(3)$, $SU(2)$ の表現次元, $U(1)$ の超電荷 Y で $(1, 2, -1)$ のように表し, どのように $SU(5)$ 模型に当てはめられるか考える.

		多重度
$(u, d)_L$	$(3, 2, \frac{1}{6})$	6
d_L^c	$(3^*, 1, \frac{1}{3})$	3
u_L^c	$(3^*, 1, -\frac{2}{3})$	3
$(\nu, e)_L$	$(1, 2, -\frac{1}{2})$	2
e_L^c	$(1, 1, 1)$	1
ν_L^c	$(1, 1, 0)$	1

基本表現をこの中から選ぶことで

$$(q_L^c, \nu_L, e_L) = (3^*, 1, Y) \oplus \left(1, 2, -\frac{1}{2}\right) = \bar{5} \quad (4.1)$$

と考えられる。ここではまだ q の正体が u, d クォークのどちらかは定かではないが、 $SU(5)$ 群のトレースは 0 でなければならないため、 Q を電荷とすると上記の電荷は

$$\sum_{a=1}^5 Q_a = 3Q_{qc} + Q_\nu + Q_e$$

$$\therefore Q_q = -Q_{qc} = -\frac{1}{3} \quad (4.2)$$

となる。したがって、 $q = d$ と選択することにより、次のように **5** 表現を決めることができる。

$$\psi_{\bar{5}} = \begin{pmatrix} d_1^c \\ d_2^c \\ d_3^c \\ l \\ -\nu_l \end{pmatrix} = \left(3^*, 1, \frac{1}{3}\right) \oplus \left(1, 2, -\frac{1}{2}\right) \quad (4.3)$$

これによりクォークの電荷が荷電レプトンの $\frac{1}{3}$ の整数倍となっていることが説明できる。残りのフェルミオンを次元の大きい表現に当てはめることを考える。基本表現よりも大きな表現は、すべて基本表現の積で表すことができる。**10** 表現は

$$\mathbf{5} \otimes \mathbf{5} = \mathbf{15} \oplus \mathbf{10}$$

として構成することができる。この **10** 表現は $\mathbf{10} \rightarrow (3^*, 1, -\frac{2}{3}) \oplus (3, 2, \frac{1}{6}) \oplus (1, 1, 1)$ と分解できるので、次のように当てはめることができる。

$$\psi_{\mathbf{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & u_3^c & -u_2^c & u_1 & d_1 \\ -u_3^c & 0 & u_1^c & u_2 & d_2 \\ u_2^c & -u_1^c & 0 & u_3 & d_3 \\ -u_1 & -u_2 & -u_3 & 0 & e^c \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -e^c & 0 \end{pmatrix} = u^c \left(3^*, 1, -\frac{2}{3}\right) \oplus q \left(3, 2, \frac{1}{6}\right) \oplus e^c (1, 1, 1) \quad (4.4)$$

ただし、 x^c は x を同じカイラリティで荷電共役したものを表している。この x の例として、左巻きの電子 e_L^- を考える。 e_L^- に対して荷電共役変換を行った $(e_L^-)^c$ を考える。これは右巻きの電子 e_R^- となるが、左巻きの陽電子である e_L^+ と同じである。

4.2 ゲージ粒子の表現

ゲージ粒子を $SU(5)$ 大統一理論で考えるために、群の生成子について考える。一般に $SU(n)$ ゲージ群の変換は、

$$U = \exp \left(-i \sum_{i=1}^{n^2-1} \beta_i L_i \right) = \exp(-\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{L}) \quad (4.5)$$

で表される。ここで、 L_i は群の生成子であり、エルミート性があり、トレースレス ($\text{tr} L_i = 0$) である。これにより U はユニタリーであり、 $\det U = 1$ を満たす。 L_i は

$$\text{tr}(L_i L_j) = \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad (4.6)$$

と規格化する。ここで、表現行列を昇降演算子との類推で今後のために

$$(L_b^a)_d^c \equiv \delta_b^c \delta_d^a - \frac{1}{n} \delta_b^a \delta_d^c, \quad ((L_b^a)^\dagger = L_a^b) \quad (4.7)$$

と定義する。交換関係は

$$[L_b^a, L_d^c] = \delta_b^a L_d^c - \delta_b^c L_d^a \quad (4.8)$$

を満たす。これまで n 表現について考えたが、共役な表現 \bar{n} を考えた場合、

$$L_b^a(\bar{n}) = -L_b^{aT} = -L_a^b \quad (4.9)$$

を満たす。

ここから具体的にゲージ場について考える。 $SU(n)$ ゲージ理論では、 $n^2 - 1$ 個のゲージ場が存在する。これらは随伴表現で表される。 $SU(5)$ 群の生成演算子をこれまでのように $[L_i]_b^a$ ($i = 1, \dots, 24, a, b = 1, \dots, 5$) として構成する。基本表現である 5 表現の類推からは $a, b = 1, 2, 3$ はカラー量子数、 $a, b = 4, 5$ がアイソスピン量子数と考えられる。そのため $i = 1, \dots, 8$ を $SU(3)$ 部分、 $i = 9, 10, 11$ を $SU(2)$ の部分群として考えると

$$L_i(i = 1, \dots, 8) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{2}\lambda_i & & & 0 & 0 & \\ & & & 0 & 0 & \\ & & & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & 0 \end{array} \right), \quad L_i(i = 9, 10, 11) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & 0 & \\ & & & 0 & 0 & \\ & & & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \frac{1}{2}\sigma_j \end{array} \right) \quad (4.10)$$

ただし、 $\sigma_{j=i-8}$ ($j = 1, 2, 3$) である。

対角行列は L_3, L_8, L_{11} にそれぞれ $SU(3), SU(2)$ 群の対角行列を対応させる。残りの 1 つは L_{12} であり、 $U(1)_Y$ の超電荷を対応させる。基本表現である 5 表現の超電荷を対応させ、規格化条件である式 (4.6) を用いることで

$$L_{12} = \frac{1}{2\sqrt{15}} \text{diag}(-2, -2, -2, 3, 3)$$

と決めることができる。

24 個のゲージボソンは随伴表現として存在し、次のように分解できる。

$$\mathbf{24} = G(8, 1, 0) \oplus W(1, 3, 0) \oplus B(1, 1, 0) \oplus \bar{X}(3, \bar{2}, -\frac{5}{6}) \oplus X(\bar{3}, 2, +\frac{5}{6}) \quad (4.11)$$

ゲージボソンを V_μ とすると、

$$\frac{1}{\sqrt{2}} V_\mu = \sum_{i=1}^{24} \frac{1}{2} V_\mu^i L_i \quad (4.12)$$

$$V_\mu = \begin{pmatrix} G_1^1 - \frac{2B}{\sqrt{30}} & G_2^1 & G_3^1 & \bar{X}_1 & \bar{Y}_1 \\ G_1^2 & G_2^2 - \frac{2B}{\sqrt{30}} & G_3^2 & \bar{X}_2 & \bar{Y}_2 \\ G_1^3 & G_2^3 & G_3^3 - \frac{2B}{\sqrt{30}} & \bar{X}_3 & \bar{Y}_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 & \frac{W^3}{\sqrt{2}} + \frac{3B}{\sqrt{30}} & W^+ \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & W^- & -\frac{W^3}{\sqrt{2}} + \frac{3B}{\sqrt{30}} \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

ただし, $SU(3)$ ゲージ場の部分は G^i ($i = 1, \dots, 8$) をグルーオン場として

$$\begin{aligned} G_2^1 &= G^1, & G_1^2 &= G^2, & G_1^3 &= G^5, & G_3^2 &= G^6, & G_2^3 &= G^7 \\ G_1^1 &= \frac{G^3}{\sqrt{2}} + \frac{G^8}{\sqrt{6}}, & G_2^2 &= -\frac{G^3}{\sqrt{2}} + \frac{G^8}{\sqrt{6}}, & G_3^3 &= -\frac{2G^8}{\sqrt{6}} \end{aligned}$$

であり, $SU(2)$ ゲージ場は

$$W^\pm = \frac{W^1 \mp iW^2}{\sqrt{2}}$$

である. ここで, $SU(5)$ ゲージ粒子として新しく X, Y ボゾンが導入される. これらは

$$X, Y = \left(\bar{3}, 2, \frac{5}{3} \right) \quad (4.14)$$

という量子数をもつ.

ここまででゲージ場を導入できたので, $SU(5)$ ゲージ群のラグランジアンを書くことができる. はじめに共変微分を考える. n 表現, \bar{n} 表現の共変微分は

$$\begin{aligned} (D_\mu \psi)^a &= \left[\partial_\mu \delta_b^a - \frac{ig}{\sqrt{2}} (V_\mu)_b^a \right] \psi^b \\ (D_\mu \chi)_a &= \left[\partial_\mu \delta_a^b + \frac{ig}{\sqrt{2}} (V_\mu)_a^b \right] \chi^b \end{aligned}$$

と表せる. また, $\frac{n(n-1)}{2}$ 表現の場合

$$(D_\mu \psi)^{ab} = \partial_\mu \psi^{ab} - \frac{ig}{\sqrt{2}} (V_\mu)_c^a \psi^{cb} - \frac{ig}{\sqrt{2}} (V_\mu)_d^b \psi^{ad}$$

となる. 場の強さを

$$(F_{\mu\nu})_b^a = \partial_\mu (A_\nu)_b^a - \frac{ig}{\sqrt{2}} (A_\mu)_c^a (A_\nu)_b^c - (\mu \leftrightarrow \nu) \quad (4.15)$$

とすると, ゲージ場の運動項は

$$\mathcal{L}_K = -\frac{1}{4} \text{Tr}(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) = -\frac{1}{4} (F^{\mu\nu})_b^a (F_{\mu\nu})^b_a \quad (4.16)$$

となる. また $\psi_{\bar{5}}$ について

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{5K} &= i\bar{\psi}_{\bar{5}} \gamma^\mu D_\mu \psi_{\bar{5}} \\ &= i\bar{\psi}_{\bar{5}a} \gamma^\mu \left(\delta_b^a \partial_\mu + \frac{ig}{\sqrt{2}} (V_\mu)_b^a \right) \psi_{\bar{5}}^b \end{aligned}$$

さらに ψ_{10} について

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{10K} &= i\bar{\psi}_{10ab} \gamma^\mu (D_\mu \psi_{10})^{ab} \\ &= i\bar{\psi}_{10ab} \gamma^\mu \left(\delta_c^a \partial_\mu + \frac{2ig}{\sqrt{2}} (V_\mu)_c^a \right) \psi_{10}^{cb} \end{aligned}$$

となる.

4.3 対称性の破れ

$SU(5)$ 模型は X, Y ゲージボゾンの存在を予言する．これらの粒子はクォークとレプトンの相互作用を引き起こすため、陽子崩壊が起こる．陽子は標準模型では安定である．現在の実験データと矛盾させないためには大統一スケールが十分大きくなければならない．*1 したがって、大統一スケールで対称性が

$$SU(5) \rightarrow SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y \quad (4.17)$$

と自発的に破れると考えられている．標準模型ではゲージボゾンは 12 個存在していた． $SU(5)$ 模型にある 24 個のゲージボゾンのうち、標準模型には現れない残りの 12 個の粒子が質量をもつ必要がある．そのため少なくとも 12 個の南部・ゴールドストーンボゾンが存在しなければならない．また、自発的対称性の破れは、式 (4.17) のようにゲージ群を単純群から直積の群へ破るものである．このときに群のランクを保存するものでなければならない．したがって、そのような対称性の破れを行うものは随伴表現である．最小模型では 24 表現ヒッグス ϕ_{24} を用いる．ゲージ粒子と同じように、

$$(\phi_{24})_a^b \equiv \sum_{i=1}^{24} \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_{24}^i L_i \quad (4.18)$$

となる．ゲージ場との結合は

$$\mathcal{L}_K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{24} [D_\mu \phi_{24}]^\dagger [D^\mu \phi_{24}]$$

となる．共変微分を具体的に求める．24 表現は $24 \oplus 1 = 5 \otimes \bar{5}$ であるため、

$$\phi_{24b}^a = \psi_5^a \psi_{\bar{5}b} - \frac{1}{5} \delta_b^a \psi_5^c \psi_{\bar{5}c} \quad (4.19)$$

と構成されている．それぞれの表現の変換は

$$\begin{aligned} \psi_5^a &\rightarrow \psi_5^a + \delta \psi_5^a = \psi_5^a - i \frac{g}{2} \varepsilon^i L_{ic}^a \psi_5^c \\ \psi_{\bar{5}a} &\rightarrow \psi_{\bar{5}a} + \delta \psi_{\bar{5}a} = \psi_{\bar{5}a} + i \frac{g}{2} \varepsilon^i L_{ia}^c \psi_{\bar{5}c} \end{aligned}$$

となるから、 ϕ_{24} は

$$\phi_{24b}^a \rightarrow \phi_{24b}^a - i \frac{g}{2} [L_i, \phi_{24}]_b^a \quad (4.20)$$

と変換を受ける．したがって共変微分は

$$(D_\mu \phi_{24})_b^a = \partial_\mu \phi_{24a}^b - \frac{ig}{\sqrt{2}} [V_\mu, \phi_{24}]_a^b \quad (4.21)$$

となる．ヒッグスの運動項は

$$\mathcal{L}_K = \text{Tr}[(D_\mu \phi_{24})^\dagger (D^\mu \phi_{24})] \quad (4.22)$$

とまとめることができる．ゲージボゾンの質量は 24 表現ヒッグスの真空期待値を $\Sigma = \langle 0 | \phi_{24} | 0 \rangle$ としたとき

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M &= \text{Tr}[(D_\mu \phi_{24})^\dagger (D^\mu \phi_{24})] |_{\phi_{24}=\Sigma} \\ &= \frac{g^2}{2} \text{Tr}([V_\mu, \Sigma]^\dagger [V^\mu, \Sigma]) = m_{ij}^2 V_\mu^{i\dagger} V^{\mu j} \end{aligned} \quad (4.23)$$

*1 これについては次の小区分で詳細を述べる．

これによりポテンシャルは

$$V(\phi_{\mathbf{24}}) = -\frac{\mu^2}{2}\text{Tr}(\phi_{\mathbf{24}}^2) + \frac{1}{4}a(\text{Tr}(\phi_{\mathbf{24}}^2))^2 + \frac{1}{2}b\text{Tr}(\phi_{\mathbf{24}}^4) + \frac{1}{3}c\text{Tr}\phi_{\mathbf{24}}^3$$

となる。簡単のために \mathbb{Z}_2 対称性を課すと, $c = 0$ となる。真空期待値は次のようなとり方が考えられる。

$$\Sigma = v \text{diag}(1, 1, 1, 1, -4), \quad (b < 0) \quad (4.24)$$

$$\Sigma = v \text{diag}\left(1, 1, 1, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right), \quad (b > 0) \quad (4.25)$$

式 (4.24) の場合, ゲージ対称性は $SU(4) \times U(1)$ に破れ, 式 (4.25) の場合は $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ に破れる。したがって, 後者の場合を考える。この場合のポテンシャルの最小値は $b > 0$, $a > -7b/15$ の条件のもとで

$$\left. \frac{\partial V(\phi_{\mathbf{24}})}{\partial \phi_{\mathbf{24}}} \right|_{\phi_{\mathbf{24}}=\Sigma} = 0 \quad (4.26)$$

より求められ,

$$v^2 = \frac{2\mu^2}{15a + 7b}$$

となる。ゲージボゾンの質量は 24 表現ヒッグスに真空期待値をもたせると

$$[V_\mu, \Sigma] \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & & & -\frac{5}{2}\bar{X}_1 & -\frac{5}{2}\bar{Y}_1 \\ & & & -\frac{5}{2}\bar{X}_2 & -\frac{5}{2}\bar{Y}_2 \\ & & & -\frac{5}{2}\bar{X}_3 & -\frac{5}{2}\bar{Y}_3 \\ \hline \frac{5}{2}X_1 & \frac{5}{2}X_2 & \frac{5}{2}X_3 & & \\ \frac{5}{2}Y_1 & \frac{5}{2}Y_2 & \frac{5}{2}Y_3 & & \\ & & & 0 & \end{array} \right) \quad (4.27)$$

となる。これにより X, Y ボゾンの質量は

$$m_X^2 = m_Y^2 = \frac{25}{8}g^2v^2 \quad (4.28)$$

となる。

標準模型で表れるヒッグス粒子 Ψ は 5 表現に属する。

$$\phi_{\mathbf{5}} = \begin{pmatrix} T^1 \\ T^2 \\ T^3 \\ \phi^+ \\ -\phi^0 \end{pmatrix} = T\left(\mathbf{3}, 1, -\frac{1}{3}\right) \oplus H_2\left(1, \mathbf{2}, \frac{1}{2}\right) \quad (4.29)$$

真空期待値は

$$\langle \phi_{\mathbf{5}} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}v_0\delta_5^a, \quad (v_0 \sim 246 [\text{GeV}]) \quad (4.30)$$

のようにして, 標準模型と同じ値を取る。もし 24 表現ヒッグスと 5 表現ヒッグスに交わりがない場合, ポテンシャルは

$$V(\phi_{\mathbf{5}}) = -\frac{\mu_5^2}{2}\phi_{\mathbf{5}}^\dagger\phi_{\mathbf{5}} + \frac{\lambda}{4}(\phi_{\mathbf{5}}^\dagger\phi_{\mathbf{5}})^2 \quad (4.31)$$

である.*2このとき、 $v_0^2 = \frac{2\mu_5^2}{\lambda}$ となり、標準模型に表れるゲージボソンは

$$m_W^2 = \frac{g^2 v_0^2}{4} \quad (4.32)$$

と質量を持つことになる。

4.3.1 階層性問題

ここまでで標準模型よりも高い対称性を持つ理論を構築した場合、どのように対称性を破り、標準模型の対称性を実現するのかをみた。ところが、大統一理論を考えた場合、一般的にエネルギースケールの階層性が問題となる。ここでは大統一理論に存在する階層性問題について触れる。

素粒子標準模型は電弱スケールである $M_W \sim 100 [\text{GeV}]$ まで高エネルギー加速器実験結果を説明することができる。一方で標準模型を超えた物理 (Beyond the Standard Model; BSM) が加速器実験で検証されるには電弱スケールよりも高いエネルギーにより、その実験を検証することが可能となる。

この見方を変えると、現在の標準模型はこのような BSM の有効理論であると考えられる。したがって素粒子標準模型の理論の適用範囲は何らかのエネルギースケールである Λ まで有効であり、 Λ 以上のエネルギーでは別の理論へ移り変わると考えられている。

大統一理論や重力が含まれる理論では、このカットオフは $\Lambda \sim M_{\text{GUT}}$ や $\Lambda \sim M_{\text{pl}}$ 程度であるとそれぞれ考えられており、 M_W に比べて 13 桁程度の乖離が存在する。

標準模型に登場する粒子はヒッグス粒子の真空期待値に比例するため、これらは電弱スケールに質量が存在することとなる。これらはゲージ理論により説明されるが、ヒッグス粒子の質量を説明できる主導原理は標準模型に存在しない。標準模型に表れるヒッグス粒子の質量を m_h とした場合、いかにして $m_h \ll \Lambda$ を保つかが大きな問題となっている。

4.3.2 Doublet-triplet splitting problem

ここでは $SU(5)$ 大統一理論を考える。 $SU(5)$ 大統一理論では、5 表現ヒッグスと 24 表現ヒッグスを考えることができた。それぞれ H_2, ϕ_{24} とおく。これらのヒッグス粒子によるポテンシャルを考える。 \mathbb{Z}_2 対称性を課すと、

$$V(H, \Phi) = -\frac{1}{2}\nu^2 H_2^\dagger H_2 + \frac{\lambda}{4}(H_2^\dagger H_2)^2 + H_2^\dagger [\alpha \text{Tr}(\phi_{24}^2) + \beta(\Phi_{24}^2)] H_2 \quad (4.33)$$

となる。ここで、 ϕ_{24} の最小化は式 (4.33) の第 3 項の内部のみで行われていると考える。これは式 (4.33) は階層性のもとでは、多項式全体の最小化の影響よりも、十分影響を与えるためである。

ただし、このように真空期待値を取った場合、 Y ボソンに質量を与えうる H_2^α と ϕ_{245}^α という 2 つのカラー三重項ヒッグス場が存在したとしても片方のヒッグス場のみ質量を与え、もう一方は質量がないままとなる。

4.4 フェルミオン質量

フェルミオンの質量項は $\bar{\psi}_R \chi_L + \text{h.c.}$ で書かれる。カイラリティを顕にすると

$$\psi_L C \chi_L + \text{h.c.} = \chi_L^T C \psi_L + \text{h.c.} \equiv \bar{\psi}_R^c \chi_L \quad (4.34)$$

*2 第 2 章のポテンシャルの規格化とは異なる

と書かれる。\$C\$ は荷電共役変換の演算子である。このとき、直積表現は

$$\bar{\mathbf{5}} \otimes \bar{\mathbf{5}} = \bar{\mathbf{10}} \oplus \bar{\mathbf{15}} \quad (4.35)$$

$$\bar{\mathbf{5}} \otimes \mathbf{10} = \mathbf{5} \oplus \mathbf{45} \quad (4.36)$$

$$\mathbf{10} \otimes \mathbf{10} = \bar{\mathbf{5}} \oplus \mathbf{45} \oplus \mathbf{50} \quad (4.37)$$

と分解されるため、\$\mathbf{5}\$ 表現か \$\mathbf{45}\$ 表現に属するスカラー場とのみ結合することがわかる。既に見たように、(4.29) のように標準模型で現れるヒッグス粒子を考えることができた。そのため標準模型で現れる質量の関係を得るためには \$\mathbf{5}\$ 表現ヒッグスを用いることで記述することができる。また、\$SU(5)\$ 対称性を破る随伴表現ヒッグスはこれらのフェルミオンと結合しないため、大統一スケールとフェルミオンの質量スケールを離して考えることが自然と可能となる。

はじめに \$\bar{\mathbf{5}} \otimes \mathbf{10}\$ の場合を考える。

$$\mathcal{L}_Y \supset Y_5^{mn} (\psi_{\bar{\mathbf{5}}mL}^T)_a C(\psi_{\mathbf{10}nL})^{ab} (\phi_{\mathbf{5}})_b^\dagger + \text{h.c.} \quad (4.38)$$

ここで、\$Y_5\$ は世代ごとの湯川結合を行列で表したものであり、\$\{m, n = 1, 2, 3\}\$ である。ヒッグスに真空期待値を式 (4.30) のように持たせると、

$$Y_5^{mn} (\psi_{\bar{\mathbf{5}}mL}^T)_a C(\psi_{\mathbf{10}nL})^{ab} (\phi_{\mathbf{5}})_b^\dagger + \text{h.c.} \rightarrow -\frac{v_0}{2} Y_5^{mn} \left(\overline{d_{mR}} d_{nL} + \overline{e_{mR}^+} e_{nL}^+ \right) + \text{h.c.} \quad (4.39)$$

となり、下系列クォークと荷電レプトンの質量を導くことができ、

$$\begin{aligned} \frac{v_0}{\sqrt{2}} Y_5^{mn} &= \text{diag}(m_d, m_s, m_b) \quad (= M_d) \\ &= \text{diag}(m_e, m_\mu, m_\tau) \quad (= M_e) \end{aligned} \quad (4.40)$$

となる。一方で、\$\mathbf{10} \otimes \mathbf{10}\$ の場合は

$$\mathcal{L}_Y \supset Y_{10}^{mn} \varepsilon_{abcde} (\psi_{\bar{\mathbf{5}}mL}^T)^{ab} C(\psi_{\mathbf{10}nL})^{cd} \phi_{\mathbf{5}}^e \quad (4.41)$$

となる。ここで \$\varepsilon_{abcde} = 1\$ を満たす完全反対称テンソルである。上系列クォークの質量は \$d = 4\$ の時に得ることができる。真空期待値を式 (4.30) のようにとると、式 (4.41) は

$$\begin{aligned} Y_{10}^{mn} \varepsilon_{abcde} (\psi_{\bar{\mathbf{5}}mL}^T)^{ab} C(\psi_{\mathbf{10}nL})^{cd} \phi_{\mathbf{5}}^e &\rightarrow 4Y_{10}^{mn} \varepsilon_{abc45} (\psi_{\bar{\mathbf{5}}mL}^T)^{ab} C(\psi_{\mathbf{10}nL})^{cd} \frac{v_0}{\sqrt{2}} + \text{h.c.} \\ &= 4Y_{10}^{mn} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} (\psi_{\bar{\mathbf{5}}mL}^T)^{\alpha\beta} C(\psi_{\mathbf{10}nL})^{\gamma 4} \frac{v_0}{\sqrt{2}} + \text{h.c.} \\ &= \frac{4}{\sqrt{2}} v_0 Y_{10}^{mn} \overline{u_{mR}} u_{nL} + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (4.42)$$

と表すことができる。ここで述べた質量はいずれも大統一のエネルギースケールで成立するものである。そのため電弱スケールでの実験値と比較するためには繰り込み群方程式を解くことによってエネルギー依存性を含めて考える必要がある。

4.5 \$SU(5)\$ 大統一理論による予言と問題点

\$SU(5)\$ 大統一理論では、素粒子標準模型に現れる粒子を \$SU(5)\$ 群の \$\bar{\mathbf{5}}\$ 表現や \$\mathbf{10}\$ 表現、随伴表現の \$\mathbf{24}\$ 表現に当てはめて考えた。これにより素粒子標準模型には存在しない現象が予言される。

4.5.1 陽子崩壊

$SU(5)$ 大統一理論では式 (4.14) で見たように, 新たに X, Y ゲージボゾンの存在が予言される. ゲージ相互作用は次のような形をとる.

$$\mathcal{L}_{Int} = -\frac{g_5}{\sqrt{2}} \left[\bar{X}_\mu^i (\bar{d}_{iR} \gamma^\mu e_R^c + \bar{d}_{iL} \gamma^\mu e_L^c - \varepsilon_{ijk} \bar{u}_L^c \gamma^\mu u_L^k) + \bar{Y}_\mu^i (-\bar{d}_{iR} \gamma^\mu \nu_R^c - \bar{u}_{iL} \gamma^\mu e_L^c + \varepsilon_{ijk} \bar{u}_L^c \gamma^\mu d_L^j) \right] \quad (4.43)$$

これらの項により, 標準模型では存在しないクォークとレプトンの相互作用が起こる. 図 4.1 は X, Y ボゾンによる相互作用をファインマン図を用いて表したものである.

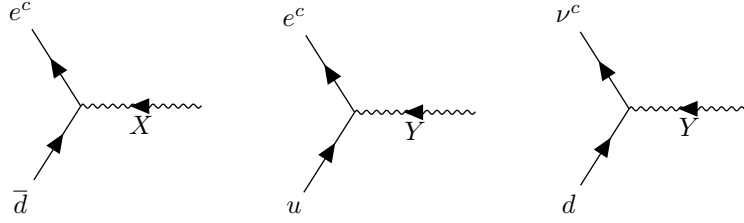


図 4.1 X ボゾン, Y ボゾンによるクォークとレプトンの相互作用.

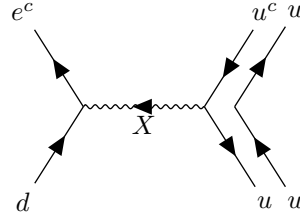


図 4.2 X ボゾンを介した陽子崩壊のファインマン図

ここで陽子の崩壊率を導く. まず, ゲージボゾン X の質量項は式 (4.43) から

$$\mathcal{M}_X = -\frac{M_X^2}{2} (\bar{X}_\mu)_a^\alpha (X^\mu)_\alpha^a \quad (4.44)$$

となる. 式 (4.44) にて導入した $(\bar{X}_\mu)_a^\alpha$ と $(X^\mu)_\alpha^a$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} (\bar{X}_\mu)_a^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{g_5}{M_X^2} \left[(\bar{d}^c)^\alpha \gamma_\mu \epsilon_{ab} L^d - \bar{e}^c \epsilon_{ba} \gamma_\mu q^{\alpha b} + \bar{q}_{\beta a} \gamma_\mu \epsilon^{\alpha \beta \gamma} u_\gamma^c \right] \\ (X^\mu)_\alpha^a &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{g_5}{M_X^2} \left[(\bar{L})_b \epsilon^{ba} \gamma_\mu d_\alpha^c - \bar{q}_{b\alpha} \gamma_\mu \epsilon^{ab} e^c + \epsilon_{\gamma \beta \alpha} (\bar{u}^c)^\gamma \gamma_\mu q^{a\beta} \right] \end{aligned}$$

となる. これらを式 (4.43) に代入し, 次元 6 の陽子崩壊を導くラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{d=6} = \frac{g_5^2}{M_X^2} \epsilon_{\alpha \beta \gamma} (\bar{u}^c)^\alpha \gamma_\mu q^{a\beta} \{ \bar{e}^c \epsilon_{ab} \gamma^\mu q^{\gamma b} + (\bar{d}^c)^\gamma \gamma^\mu \epsilon_{ab} L^b \} + \text{h.c.} \quad (4.45)$$

となる.

陽子崩壊の崩壊パターンの可能性は様々なものがあるが, 図 4.2 で示されている

$$p \longrightarrow \pi^0 + e^c$$

の例を取り上げる。

これらの崩壊を引き起こす演算子は

$$O^I = \frac{g_5^2}{M_X^2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} (\bar{u}^c)^\alpha \gamma_\mu u^\beta \bar{e}^c \gamma^\mu d^\gamma,$$

$$O^{II} = \frac{g_5^2}{M_X^2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} (\bar{u}^c)^\alpha \gamma_\mu u^\beta \gamma^\mu d$$

の2つを考えることができる。Nath らにより [30] これらの演算子による崩壊率は計算されているが、おおよそ

$$\Gamma(p \rightarrow \pi^0 e^+) \sim \alpha_5 \frac{m_p^5}{M_X^4} \quad (4.46)$$

である。このことから X, Y ボゾンによる陽子の崩壊率はそれぞれのボゾンの質量の4乗の項によりおおよそ決められる。

典型的な大統一スケールや結合定数の値を考えると

$$\tau(p \rightarrow \pi^0 e^+) \sim 4 \times 10^{29} [\text{yr}] \quad (4.47)$$

となる。一方で、スーパーカミオカンデでは陽子崩壊の候補となるようなシグナルは発見されていないため、陽子の寿命の下限が定められる [31].

$$\tau(p \rightarrow \pi^0 e^+) \sim 2.4 \times 10^{34} [\text{yr}]$$

これは理論的に導かれた式 (4.47) の寿命の予想を上回るため、 $SU(5)$ 大統一理論は観測の制限と整合性が取れないことがわかる。

4.5.2 ワインバーグ角

標準模型に現れるフェルミオンやゲージ粒子が、 $SU(5)$ 大統一理論でどのように当てはめられるのかを見てきた。ゲージ結合定数が大統一スケールで g_5 と統一されたことにより、理論的にワインバーグ角を決定することができる。それを見るために $U(1)_Y$ ゲージ群の結合定数を $SU(5)$ の中で規格化する。フォトン場を A_μ 、中性弱ボゾンを Z_μ とすると

$$\begin{aligned} D_\mu &\supset \partial_\mu - i \frac{g_5}{2} [W^0 L_{11} + B L_{12}] \\ &= \partial_\mu - i \frac{g_5}{2} [(\sin \theta_W L_{11} + \cos \theta_W L_{12}) A_\mu + (\cos \theta_W L_{11} - \sin \theta_W L_{12}) Z_\mu] \\ &\equiv \partial_\mu - i [e Q A_\mu + g' Q_Z Z_\mu] \end{aligned}$$

となる。このとき、電荷を表す演算子 Q は、

$$eQ = \frac{g_5}{2} (\sin \theta_W L_{11} + \cos \theta_W L_{12})$$

と関係する。一方で電荷演算子はアイソスピン $I_3 = L_{11}$ と超電荷 $Y = \sqrt{\frac{5}{3}} L_{12}$ を用いると

$$Q = L_{11} + \sqrt{\frac{5}{3}} L_{12}$$

とかける。これらを比較することで、

$$\begin{aligned} e &= g_5 \sin \theta_W \\ g_Y &= \frac{e}{\cos \theta_W} = \sqrt{\frac{3}{5}} g_5 = g_5 \tan \theta_W \\ \sin \theta_W &= \sqrt{\frac{3}{8}} \end{aligned} \quad (4.48)$$

と大統一スケールでの値を预言することができる。 $\sin \theta_W$ は標準模型では値を预言することはできなかったが、大統一理論では $\sin \theta_W$ を预言ができることが示された。

これらの予想は $SU(5)$ ゲージ群において成り立つものである。そのため大統一スケールよりも低いエネルギースケールでどのような値を取るかはくりこみ群方程式を解くことによって導く必要がある。量子補正を1次まで含めた式 (3.26) は、ワインバーグ角と結合定数の規格化を行った式 (4.48) を含めると

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha_3(\mu)} &= \frac{1}{\alpha_{\text{GUT}}} + \frac{1}{2\pi} \left(11 - \frac{4}{3}n_f \right) \ln \left(\frac{\mu}{M_{\text{GUT}}} \right) \\ \frac{1}{\alpha_2(\mu)} &= \frac{\sin^2 \theta_W}{\alpha_Y} = \frac{1}{\alpha_{\text{GUT}}} + \frac{1}{2\pi} \left(22 - \frac{4}{3}n_f - \frac{n_H}{6} \right) \ln \left(\frac{\mu}{M_{\text{GUT}}} \right) \\ \frac{1}{\alpha_1(\mu)} &= \frac{3 \cos^2 \theta_W}{5 \alpha_Y} = \frac{1}{\alpha_{\text{GUT}}} - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{4}{3}n_f + \frac{1}{10}n_f \right) \ln \left(\frac{\mu}{M_{\text{GUT}}} \right)\end{aligned}$$

と表すことができる。ただし、 n_f, n_H はそれぞれ世代数とヒッグス二重項の数である。

これを $\sin^2 \theta_W$ について解く。 $n_f = 3, n_H = 1$ として

$$\begin{aligned}\sin^2 \theta_W &= \frac{3}{8} \left(1 - \frac{109}{18\pi} \alpha_Y(\mu) \ln \left(\frac{M_{\text{GUT}}}{\mu} \right) \right) \\ \frac{\alpha_Y(\mu)}{\alpha_3(\mu)} &= \frac{3}{8} \left(1 - \frac{67}{6\pi} \ln \left(\frac{M_{\text{GUT}}}{\mu} \right) \right)\end{aligned}\tag{4.49}$$

となる。

式 (4.49) について $\mu = M_Z$ の場合を考え、 α の値を決めると

$$\begin{aligned}\alpha_{\text{GUT}} &= 0.0244 \pm 0.0002 \\ \sin^2 \theta_W &= 0.214 \pm 0.004\end{aligned}$$

と導かれる。[32] 一方で、最新の実験値は

$$\sin^2 \theta_W = 0.23129 \pm 0.00004\tag{4.50}$$

と与えられるため、 $SU(5)$ 大統一理論が预言するワインバーグ角は電弱スケールでの測定値と合わない。

4.5.3 フェルミオン質量の関係

$SU(5)$ 大統一模型では、標準模型に存在するヒッグス粒子を **5** 表現に当てはめて考えた。湯川結合は式 (4.38) と式 (4.41) で書くことができ、前者の下系列クォークと荷電レプトンについては、

$$M^d = M^e = \frac{v_0}{\sqrt{2}} Y_5^{mn}\tag{4.51}$$

となる。このことから

$$m_d = m_e, \quad m_s = m_\mu, \quad m_b = m_\tau\tag{4.52}$$

と下系列クォークと荷電レプトンの質量が大統一スケールでは等しくなることが示されている。湯川結合定数もくりこみ群方程式によりエネルギー依存性を導けるため、これを用いて低エネルギースケールでどのような预言がされるのか考える必要がある。これによると [32, 33]

$$\ln \left[\frac{m_d(\mu_1)}{m_e(\mu_1)} \right] = \ln \left[\frac{m_d(\mu_2)}{m_e(\mu_2)} \right] + \frac{4}{11 - \frac{2n_q}{3}} \ln \left[\frac{\alpha_3(\mu_1)}{\alpha_5(\mu_2)} \right] + \frac{3}{2n_q} \ln \left[\frac{\alpha_1(\mu)}{\alpha_5(\mu_2)} \right]\tag{4.53}$$

と質量比を導くことができる．ここで n_q はクォークの質量 m が $m < \mu_1$ を満たすものの数である．式 (4.53) は他の世代のフェルミオンに対しても導くことができる．これまでの実験でクォークは 6 種類は存在することが明かされている． m_τ の測定値を代入することによって

$$m_b = 5 - 5.5 [\text{GeV}], \quad (50 [\text{MeV}] \leq \Lambda_{\overline{MS}} \leq 500 [\text{MeV}]) \quad (4.54)$$

となる．さらに高次の影響を含めた計算を行うと

$$m_b = 5.3 [\text{GeV}] \quad (4.55)$$

と見積もられ、実験値である $m_b = 4.9 [\text{GeV}]$ と等しいオーダーとなる．また、 n_q による依存性があり、もし 3 世代よりも大きな世代構造があるとすれば、実験値から離れることが明らかにされている [32, 34]．

一方で、先程述べているように式 (4.53) はすべての世代で成り立つ．同じように m_s を導くと

$$m_s = 500 [\text{MeV}] \quad (4.56)$$

となる．ところが実験では $m_s = 93.5 [\text{MeV}]$ であるため、オーダーも異なってしまう．

さらに、式 (4.52) から

$$\frac{m_d}{m_s} = \frac{m_e}{m_\mu} \quad (4.57)$$

となる．ここで、測定から $\frac{m_e}{m_\mu} = \frac{1}{207}$ であることが明らかにされているが、一方で異なる実験から $\frac{m_d}{m_s} = \frac{1}{24}$ となるため、この関係は式 (4.57) を満足しない [35–39]．これらはクォークの持つ質量が小さく、非摂動効果が大きいためであると考えられるが、詳細は十分に明らかにされていない．

第 5 章

SU(5) 大統一理論の拡張模型

ここまでで $SU(5)$ 大統一理論について見る事ができた。電荷の量子化を理論に基づいて自然と説明されることは $SU(5)$ 大統一理論の魅力的な点である。一方で、陽子崩壊やワインバーグ角など現在の実験と整合性の合わない事実も残される。さらに標準模型の課題を $SU(5)$ 大統一理論によってすべて解決することができない。そのため、高いエネルギースケールで 3 つの相互作用が統一されるべきという立場を取るならば、大統一理論を拡張し、標準模型を超えた物理を探索することが必要となる。

したがって、ここまで見てきた H.Georgi, S.L.Glashow による $SU(5)$ 大統一模型を最小 $SU(5)$ 模型と呼び、最小 $SU(5)$ 模型の課題と、その拡張方法として高次元のヒッグス粒子を仮定する例を考える。

5.1 最小 $SU(5)$ 大統一理論の課題

最小 $SU(5)$ 大統一理論について、予言と課題については前節で述べた。ここでは、標準模型のもつ理論の課題と、大統一理論の課題について両方の立場でどのように考えられるかを簡単に述べる。

- ゲージ結合定数の統一

くりこみ群方程式を解くことにより、ゲージ結合定数の大きさのエネルギー依存性を求めることができた。大統一理論は高いエネルギースケールではゲージ結合定数は 1 つに統一されるべきであると考えるところが図 3.1 で見たように、最小 $SU(5)$ 大統一理論ではゲージ結合定数の大きさは統一されない。

- ニュートリノ質量

標準模型を拡張して重たい場を加えてニュートリノ質量を導く方法はあるが、大統一理論はそのような拡張よりも高いエネルギースケールで成り立つ理論である。そのため、大統一スケールであればそのような拡張を自然と含んだ模型である必要がある。最小 $SU(5)$ 大統一理論は標準模型粒子の他に、 $T(\in \phi_5)$ ヒッグスと X, Y ボソンを含むが、右巻きのカイラリティを持つニュートリノ ν_R を含まないため、ニュートリノのディラック型質量項を表すことができない。

場の量子論に基づくと、ゲージ対称性により許される表現は理論に加えることが可能である。ここでは高次元表現で表される粒子による拡張を与え、それらが現象論的にどのような予言をもたらすのか次節から考える。

5.2 45 表現ヒッグスを用いた拡張

大統一理論において、式 (4.36) のように基本表現である 5 表現から 45 表現を構成することができる。この表現を用いた 45 表現ヒッグス (ϕ_{45}) を考え、最小 $SU(5)$ 模型で予言された下系列クォークと荷電レプトンの質量比についての予言 $M_d = M_e$ に修正を行うことができる [40, 41]。 45 表現ヒッグスは

$$(\phi_{45})_k^{ij} = -(\phi_{45})_k^{ji}, \quad (\phi_{45})_i^{ij} = 0 \quad (i, j, k = 1, \dots, 5)$$

とまた, ϕ_{45} は次のように分解される.

$$\begin{aligned}\phi_{45} = & \varphi_8 \left(\mathbf{8}, \mathbf{2}, \frac{1}{2} \right) \oplus \varphi_{\bar{6}} \left(\bar{\mathbf{6}}, \mathbf{3}, -\frac{1}{3} \right) \oplus \varphi_3^T \left(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{3}, -\frac{1}{3} \right) \\ & \oplus \varphi_3^D \left(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{2}, -\frac{7}{6} \right) \oplus \varphi_3^S \left(\mathbf{3}, \mathbf{1}, -\frac{1}{3} \right) \oplus \varphi_{\bar{3}}^S \left(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \frac{4}{3} \right) \oplus H_2 \left(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \frac{1}{2} \right)\end{aligned}$$

湯川結合は次のようになる.

$$(\psi_{\bar{\mathbf{5}}La}^T)_a C(\psi_{\mathbf{10}L})^{bc} (\phi_{45}^\dagger)_{bc}^a + \text{h.c.} \quad (5.1)$$

$$\varepsilon_{abcfe} (\psi_{\mathbf{10}L})^{ab} C(\psi_{\mathbf{10}L})^{cd} (\phi_{45})_d^{ef} + \text{h.c.} \quad (5.2)$$

45 表現ヒッグスは真空期待値を

$$\langle (\phi_{45})_i^{j5} \rangle = v_{45} \left(\delta_i^j - 4\delta_4^j \delta_i^4 \right), \quad (i, j = 1, \dots, 4) \quad (5.3)$$

と取ることにより, ゲージ対称性を $SU(3)_c \times U(1)_{em}$ へ破る. このとき, 式 (5.1)(5.2) より質量行列が

$$M_{45}^e = -3M_{45}^d \quad (5.4)$$

となり, **5** 表現ヒッグスとは異なる結果となる.

5.3 15 表現ヒッグスを用いた拡張

ニュートリノ質量を生成する機構はいくつか考えられている. その中で, タイプ II シーソー機構によってニュートリノ質量を説明するためには $SU(2)_L$ 三重項のスカラー粒子が理論に含まれている必要がある.

$SU(5)$ 対称性において, ヒッグス粒子を **15** 表現で導入した場合, ラグランジアンに $SU(2)_L$ 三重項のスカラー粒子を含めることができる [42, 43]. **15** 表現ヒッグスを ϕ_{15} と書き, 次のように分解することができる^{*1}.

$$\phi_{15} = \Delta(\mathbf{1}, \mathbf{3}, 1) \oplus \widetilde{R}_2 \left(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \frac{1}{6} \right) \oplus S \left(\bar{\mathbf{6}}, \mathbf{1}, -\frac{2}{3} \right) \quad (5.5)$$

一般的に行列で表した場合は

$$\phi_{15} = \begin{pmatrix} S & \widetilde{R}_2 \\ \widetilde{R}_2^T & \Delta \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

となる. **15** 表現ヒッグスはフェルミオンと次のように湯川結合をする.

$$\Delta \mathcal{L}_Y = \overline{\psi_{\bar{\mathbf{5}}}} Y_{15} \phi_{15} \overline{\psi_{\mathbf{5}}} \quad (5.7)$$

ここで, Δ が真空期待値 v_Δ を持つとすると, シーソー機構のラグランジアンは

$$-M_\Delta^2 \text{Tr}(\Delta^\dagger \Delta) + Y_{15} L \Delta L + c \phi_{\mathbf{5}} \Delta^\dagger \phi_{\mathbf{5}} + \text{h.c.}$$

これは通常のタイプ II シーソー機構と同じラグランジアンである. 真空期待値をとることで

$$m_\nu \simeq \frac{Y_{15}}{M_\Delta^2} v_{15}^2$$

とニュートリノ質量を与える.

15 表現ヒッグスに含まれる S はレプトクォークであり, 次のような相互作用項が含まれる.

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = d^c Y_{15} S L$$

したがって, この相互作用によって陽子崩壊が起こるため, 大統一スケールよりも低いエネルギースケールに存在してしまうと頻繁に陽子が崩壊してしまう. そのため, このスカラー粒子 S が存在するエネルギースケールは任意であることを用いて, 大統一スケールよりも高いスケールに存在すると仮定することが多い.

^{*1} この記法は [44] を参考にした.

5.3.1 15 表現ヒッグスを用いた大統一

ここで実際に新たな粒子を仮定して繰り込み群方程式を解くことを考える. **15** 表現ヒッグスが持つくりこみ群方程式の係数 $b_i = (b_1, b_2, b_3)$ は

$$b_i^\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_i^{\widetilde{R}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 30 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b_i^S = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 5 \\ 15 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

である.

先に述べてあるようにレプトクォーク S は低いエネルギースケールに存在すると陽子崩壊を頻繁に起こしてしまうため, S は大統一スケール以上に存在すると仮定する. 一方で, 電弱スケールと大統一スケールの間には Δ, \widetilde{R}_2 の2つの粒子が存在すると仮定する. また, 2つの粒子が階層性を持つことを仮定することで大統一をよりよく行えるようにする. 図 5.1 は実際に繰り込み群方程式を 1 次の量子補正まで含めて解いた図である.

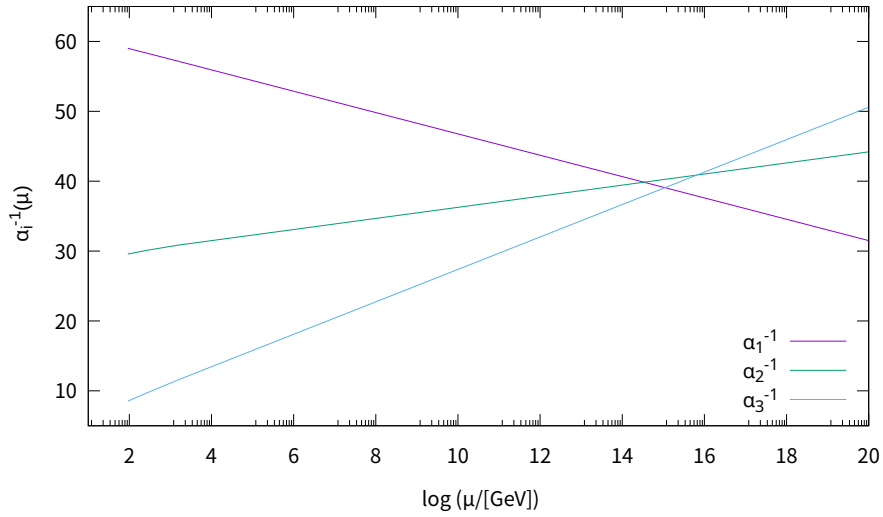


図 5.1 **15** 表現ヒッグスを加えた場合の走る結合定数. $M_\Delta = 1.54 [\text{TeV}]$, $M_{\widetilde{R}_2} = 250 [\text{GeV}]$

標準模型粒子のみ用いた図 3.1 は大統一スケール付近では結合定数は統一されなかった. **15** 表現ヒッグスに対して行った階層性の仮定を, $M_\Delta = 1.54 [\text{TeV}]$, $M_{\widetilde{R}_2} = 250 [\text{GeV}]$ とすることで, 標準模型よりもよりゲージ結合定数の大きさが近づくことがわかる.

結論

本論文では素粒子標準模型がどのような理論体型であったのか確認し、さらに標準模型では説明できない物理現象を簡単にまとめた。その中でも場の理論による繰り込みという手法を用いることで、ゲージ結合定数の大きさはエネルギー依存性をもち、3つのゲージ結合定数の大きさは高いエネルギーになるにつれて近づくことがわかった。

標準模型ではゲージ対称性によって相互作用が記述される。大統一理論はそのゲージ対称性を高いものへ拡張し、標準模型を部分的に含むことによって理論を構築するものであり、非常に自然な拡張だと考えられる。

最小 $SU(5)$ 大統一理論は陽子崩壊が観測されていないため実験的に排除されてしまっているが、単純群で標準模型を含むアイデアは画期的なものであり、拡張の余地がある。

本論文では $\mathbf{15}$ 表現ヒッグスを加えることでくりこみ群方程式の係数が実際に変化し、ゲージ結合定数が統一される様子を確認できた。このように電弱スケールと大統一スケールの間に粒子が存在する場合、最小 $SU(5)$ 模型では叶わなかったゲージ結合定数の大きさを統一する可能性が高まる。しかし、そのような中間スケールに粒子の存在する場合、新粒子の性質によっては陽子の崩壊を非常に早めてしまう可能性もある。本論文ではそのような解析まで行えていないが、低スケールに $\mathbf{15}$ 表現ヒッグスのレプトクォーク成分が存在しているため、既にこの模型も実験的に棄却され始めている [31]。

一方で、ニュートリノが質量を持つことは実験的に揺るぎないものであり、タイプ II 型のシーソー機構を含むような拡張を標準模型に施すのであればスカラー三重項を理論に加える必要がある。そのような拡張を有効演算子として加える場合であっても、高いゲージ対称性を持つ大統一理論がそのような粒子を含む必要があるため、 $SU(5)$ 大統一理論に対して $\mathbf{15}$ 表現ヒッグスを加えた拡張を行い研究を行うことは意義があると考えられる。

今後の研究では $\mathbf{15}$ 表現ヒッグスが $SU(5)$ 大統一理論に拡張され、陽子崩壊の制限を回避し、ニュートリノ質量が観測事実と整合性のとれた説明ができるモデルの探索を行う。本論文で述べたように $SU(5)$ 大統一模型が持つ問題点はニュートリノ質量以外にもいくつか存在していた。それらを解決できるようなモデルを考案することを今後の研究としたい。

付録 A

群論

この章では、大統一理論に必要な数学の内容を非常に簡単にまとめた。本文でもほとんど触れられているが、数学の部分のみを取り出してまとめている。次のことを認め、話を進める。

X を集合とする。写像 $\phi: X \times X \rightarrow X$ のことを集合 X 上の演算と言う。これ以降では $a, b \in X$ に対する写像を $\phi(a, b)$ の代わりに ab と書く。

A.1 群

群とは次の性質を持つものである。

Definition 1 (群). G を空ではない集合とする。集合 G 上で演算が定義されており、次の性質を満たすとき、 G を群と言う。

1. 単位元と呼ばれる $e \in G$ が存在し、全ての $a \in G$ に対して $ae = ea = a$ となる。
2. すべての $a \in G$ に対し、 $b \in G$ が存在し、 $ab = ba = e$ となる。この元 b は a の逆元と呼ばれ、 a^{-1} と書く。
3. すべての $a, b, c \in G$ に対して、 $(ab)c = a(bc)$ が成り立つ。

特に、性質 3. は結合法則と呼ばれている。群の元 $a, b \in G$ に対して $ab = ba$ が成り立つとき、 a, b は可換である。 G の任意の元 a, b が可換なら、 G を可換群 (Abel 群) と呼ぶ。

A.2 Lie 群

Lie 群は連続なパラメータにより特徴づけられる群であり、生成子 t^a によって

$$g(\alpha) = \exp(i\alpha^a t^a) \quad (\text{A.1})$$

となる。この生成子 t^a は、リー括弧によって

$$[t^a, t^b] = if^{abc}t^c \quad (\text{A.2})$$

を満たす。ここで、 f^{abc} はリー代数の構造定数である。

A.3 表現

表現とは、群を行列に対応させる写像である。この写像は $\mathcal{R}: G \rightarrow GL(n)$ で定義される。表現の次元は行列の次元と等しい。

付録 B

標準模型でのくりこみ群方程式の係数の計算

ここではゲージ結合定数に関するくりこみ群方程式を、標準模型粒子でどのように b_i を計算したか記録する [45] ここでは量子補正の 1 次の項までのみを考えている。

Dynkin 指数 $S(R)$ は既約表現を用いて次のように定義される。

$$\text{Tr}[S^a S^a] = S(R_i) \delta^{ab} \quad (\text{B.1})$$

$SU(N)$ 群における基本表現に対して、一般的に $S(R) = \frac{1}{2}$ と規格化される。また、カシミア演算子 $C_2(R)$ と Dynkin 指数については

$$d(G)S(R) = d(R)C_2(R) \quad (\text{B.2})$$

と対応付けられる。ここで、 $d(R)$ は表現 R の時点であり、 $d(G)$ はゲージ群 G の随伴表現の次元である。

ここから標準模型の場合どのような計算がされるか実際に見る。

$$\begin{aligned} C_R^3(i) &= \begin{cases} \frac{4}{3} & \Psi = Q, \bar{u}, \bar{d} \\ 0 & \Psi_i L, \bar{e}, H \end{cases} \\ C_R^2(i) &= \begin{cases} \frac{3}{4} & \Psi = Q, L, H \\ 0 & \Psi_i = \bar{u}, \bar{d}, \bar{e} \end{cases} \\ C_R^3(i) &= \frac{3Y_i^2}{5} \quad \text{超電荷の値を加える。} \end{aligned}$$

また、Dynkin 指数についても

$$S_2(R) = \begin{cases} \frac{3}{5} Y_{\Psi_i}^2 & U(1) \\ \frac{1}{2} & SU(N) \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

となる．これを踏まえて実際に数を勘定すると次のようになる．

$$\begin{aligned}
b_1 &= 0 + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{\text{fermions}} \frac{3}{5} Y_{\text{fermions}}^2 \right) + \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot \left(\sum_{\text{scalars}} \frac{3}{5} Y_{\text{scalars}}^2 \right) \quad [\text{ただし } U(1), C_2(G) = 0] \\
&\stackrel{\text{Weyl fermion}}{=} \frac{2}{3} \cdot \sum_{\text{fermions}} \frac{3}{5} Y_{\text{fermions}}^2 + \frac{1}{3} \cdot \sum_{\text{scalars}} \frac{3}{5} Y_{\text{scalars}}^2 \\
&= \frac{2}{5} \left[\underbrace{(3 \cdot 2)}_{\text{Color}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)^2}_{\text{Doublet}} + (3 \cdot 1) \cdot \underbrace{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}_{\text{Doublet}} + (3 \cdot 1) \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^2}_{\text{Doublet}} + \underbrace{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2}_{\text{Doublet}} + \underbrace{1 \cdot 1^2}_{\text{Singlet}} \right] N_f + \frac{1}{5} \left[2 \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}_{\text{Doublet}} \right] N_H \\
&\stackrel{\text{Color}}{=} \frac{4}{3} N_f + \frac{1}{10} N_H
\end{aligned} \tag{B.4}$$

ただし, N_f はフェルミオンの世代数であり, N_H はヒッグス二重項の数である．同じように b_2 も計算すると次のようになる．

$$\begin{aligned}
b_2 &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} [(3 \cdot 1) + (1 \cdot 1)] N_f + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} (1 \cdot 1) N_H - \frac{11}{3} \cdot 2 \\
&= \frac{4}{3} N_f + \frac{1}{6} N_H - \frac{22}{3}.
\end{aligned} \tag{B.5}$$

最後に b_3 についても次のように計算される．

$$\begin{aligned}
b_3 &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} (2 + 1 + 1) N_f - \frac{11}{3} \cdot 3 \\
&= \frac{4}{3} N_f - 11,
\end{aligned} \tag{B.6}$$

謝辞

はじめに、指導教官の青木真由美教授には熱心に議論に付き合ってください感謝いたします。論文の読み方から書類の書き方、言葉のお作法、そして物理学に対する姿勢を根本から教えていただきました。また私の我儘にもかかわらず大統一理論を研究する機会をいただき、私が手探りで論文を読んでいく中でも辛抱強く議論にお付き合いいただいたことは本当に感謝しています。

また、武田教授や石渡准教授、齋川助教にはゼミや普段の議論にお付き合いいただきました。特に修士課程1年次に行ったすべてのゼミは、知識を自らのものにすることだけでなく、知識をどのように伝えて、また議論してゆくのかを身につけることができました。ゼミで培った能力は論文を読んだり、物理の議論をする上で何よりも大事な力であると実感しています。理論物理研究室だからこそ身につけられたような経験をどのような場面であっても活かしていきたいと思います。

理論物理学研究室の仲間の存在にも感謝しています。村岡先輩、相澤先輩、早崎先輩には異なる研究分野であるにもかかわらず、物理的な質問をされ、他の分野の立場からどのような疑問が湧き上がるのか、異なる視点に立つことを学べました。同期の宮岸君、澤入君、巾下君、佐藤君、高橋君、そして留学生の牛君、黄君にはゼミでお世話になりました。特に同じ学生部屋のメンバーは突発的に議論に付き合ってもらったりして、非常に助かりました。後輩の皆さんには、私が勝手に話しかけに行ったりしても話を聞いてくれたりしてくれて嬉しかったです。とても良い気分転換になりました*1。

最後に、私から相談したり心のうちを明かすことなく物理学を学ぶことを半ば勝手に決めたのにも拘らず、精神的にも経済的にも応援してくれた両親に感謝します。私が我儘をさせて頂いているのは両親のおかげです。本当にありがとうございました。

*1 迷惑でしたらごめんなさい

参考文献

- [1] David J. Gross and Frank Wilczek. Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories. *Physical Review Letters*, Vol. 30, No. 26, pp. 1343–1346, June 1973.
- [2] H. David Politzer. Reliable Perturbative Results for Strong Interactions? *Physical Review Letters*, Vol. 30, No. 26, pp. 1346–1349, June 1973.
- [3] Steven Weinberg. Non-Abelian Gauge Theories of the Strong Interactions. *Physical Review Letters*, Vol. 31, No. 7, pp. 494–497, August 1973.
- [4] Sheldon L. Glashow. Partial-symmetries of weak interactions. *Nuclear Physics*, Vol. 22, No. 4, pp. 579–588, February 1961.
- [5] Abdus Salam. Weak and Electromagnetic Interactions. *Conf. Proc. C*, Vol. 680519, pp. 367–377, 1968.
- [6] Steven Weinberg. A Model of Leptons. *Physical Review Letters*, Vol. 19, No. 21, pp. 1264–1266, November 1967.
- [7] Nicola Cabibbo. Unitary Symmetry and Leptonic Decays. *Physical Review Letters*, Vol. 10, No. 12, pp. 531–533, June 1963. Publisher: American Physical Society.
- [8] Makoto Kobayashi and Toshihide Maskawa. CP-Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction. *Progress of Theoretical Physics*, Vol. 49, No. 2, pp. 652–657, February 1973. Accepted: 2008-10-09T06:09:15Z Publisher: The Yukawa Institute for Theoretical Physics and the Physical Society of Japan.
- [9] J. H. Christenson, J. W. Cronin, V. L. Fitch, and R. Turlay. Evidence for the $\pi^0 \rightarrow \gamma \gamma$ Decay of the K^0 Meson. *Physical Review Letters*, Vol. 13, No. 4, pp. 138–140, July 1964.
- [10] S. N. O. Collaboration. Direct Evidence for Neutrino Flavor Transformation from Neutral-Current Interactions in the Sudbury Neutrino Observatory. *Physical Review Letters*, Vol. 89, No. 1, p. 011301, June 2002.
- [11] The Super-Kamiokande Collaboration and Y. Fukuda et al. Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos. *Physical Review Letters*, Vol. 81, No. 8, pp. 1562–1567, August 1998.
- [12] KamLAND Collaboration. First Results from KamLAND: Evidence for Reactor Anti-Neutrino Disappearance. *Physical Review Letters*, Vol. 90, No. 2, p. 021802, January 2003.
- [13] B. Pontecorvo. Neutrino Experiments and the Problem of Conservation of Leptonic Charge. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, Vol. 53, pp. 1717–1725, 1967.
- [14] Ziro Maki, Masami Nakagawa, and Shoichi Sakata. Remarks on the Unified Model of Elementary Particles. *Progress of Theoretical Physics*, Vol. 28, No. 5, pp. 870–880, November 1962.
- [15] Curtis G. Callan. Broken Scale Invariance in Scalar Field Theory. *Physical Review D*, Vol. 2, No. 8, pp. 1541–1547, October 1970.
- [16] K. Symanzik. Small distance behaviour in field theory and power counting. *Communications in Mathematical Physics*, Vol. 18, No. 3, pp. 227–246, September 1970.

- [17] K. Symanzik. Small-distance-behaviour analysis and Wilson expansions. *Communications in Mathematical Physics*, Vol. 23, No. 1, pp. 49–86, March 1971.
- [18] T. P. Cheng, E. Eichten, and Ling-Fong Li. Higgs phenomena in asymptotically free gauge theories. *Physical Review D*, Vol. 9, No. 8, pp. 2259–2273, April 1974.
- [19] Marie E. Machacek and Michael T. Vaughn. Fermion and Higgs masses as probes of unified theories. *Physics Letters B*, Vol. 103, No. 6, pp. 427–432, August 1981.
- [20] Marie E. Machacek and Michael T. Vaughn. Two-loop renormalization group equations in a general quantum field theory: (I). Wave function renormalization. *Nuclear Physics B*, Vol. 222, No. 1, pp. 83–103, July 1983.
- [21] Marie E. Machacek and Michael T. Vaughn. Two-loop renormalization group equations in a general quantum field theory (II). Yukawa couplings. *Nuclear Physics B*, Vol. 236, No. 1, pp. 221–232, April 1984.
- [22] Marie E. Machacek and Michael T. Vaughn. Two-loop renormalization group equations in a general quantum field theory: (III). Scalar quartic couplings. *Nuclear Physics B*, Vol. 249, No. 1, pp. 70–92, January 1985.
- [23] Ernest Ma and Sandip Pakvasa. Variation of mixing angles and masses with $\{q\}^2$ in the standard six-quark model. *Physical Review D*, Vol. 20, No. 11, pp. 2899–2902, December 1979.
- [24] Michael T. Vaughn. Renormalization group constraints on unified gauge theories. *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, Vol. 13, No. 2, pp. 139–146, June 1982.
- [25] William E. Caswell. Asymptotic Behavior of Non-Abelian Gauge Theories to Two-Loop Order. *Physical Review Letters*, Vol. 33, No. 4, pp. 244–246, July 1974.
- [26] D. R. T. Jones. Two-loop diagrams in Yang-Mills theory. *Nuclear Physics B*, Vol. 75, No. 3, pp. 531–538, June 1974.
- [27] D. R. T. Jones. The Two Loop beta Function for a $G(1) \times G(2)$ Gauge Theory. *Physical Review D*, Vol. 25, No. 2, pp. 581–582, January 1982.
- [28] S. Navas, et al. Review of particle physics. *Phys. Rev. D*, Vol. 110, No. 3, p. 030001, 2024.
- [29] Howard Georgi and S. L. Glashow. Unity of all elementary-particle forces. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 32, pp. 438–441, Feb 1974.
- [30] Pran Nath and Pavel Fileviez Perez. Proton stability in grand unified theories, in strings, and in branes. *Physics Reports*, Vol. 441, No. 5-6, pp. 191–317, April 2007.
- [31] Super-Kamiokande Collaboration, A. Takenaka, K. Abe, C. Bronner, Y. Hayato, M. Ikeda, S. Imaizumi, H. Ito, J. Kameda, Y. Kataoka, Y. Kato, Y. Kishimoto, Ll Marti, M. Miura, S. Moriyama, T. Mochizuki, Y. Nagao, M. Nakahata, Y. Nakajima, S. Nakayama, T. Okada, K. Okamoto, A. Orii, G. Pronost, H. Sekiya, M. Shiozawa, Y. Sonoda, Y. Suzuki, A. Takeda, Y. Take-moto, H. Tanaka, T. Yano, R. Akutsu, S. Han, T. Kajita, K. Okumura, T. Tashiro, R. Wang, J. Xia, D. Bravo-Berguno, L. Labarga, P. Fernandez, B. Zaldivar, F. d M. Blaszczyk, E. Kearns, J. L. Raaf, J. L. Stone, L. Wan, T. Wester, B. W. Pointon, J. Bian, N. J. Giskevich, W. R. Kropp, S. Locke, S. Mine, M. B. Smy, H. W. Sobel, V. Takhistov, P. Weatherly, K. S. Ganezer, J. Hill, J. Y. Kim, I. T. Lim, R. G. Park, B. Bodur, K. Scholberg, C. W. Walter, A. Coffani, O. Drapier, S. El Hedri, A. Gi-ampaolo, M. Gonin, Th A. Mueller, P. Paganini, B. Quilain, T. Ishizuka, T. Nakamura, J. S. Jang, J. G. Learned, S. Matsuno, L. H. V. Anthony, R. P. Litchfield, A. A. Sztuc, Y. Uchida, V. Berardi, M. G. Catanesi, E. Radicioni, N. F. Calabria, L. N. Machado, G. De Rosa, G. Collazuol, F. Iacob, M. Lamoureux, N. Ospina, L. Ludovici, Y. Nishimura, S. Cao, M. Friend, T. Hasegawa, T. Ishida,

- M. Jakkapu, T. Kobayashi, T. Matsubara, T. Nakadaira, K. Nakamura, Y. Oyama, K. Sakashita, T. Sekiguchi, T. Tsukamoto, M. Hasegawa, Y. Isobe, H. Miyabe, Y. Nakano, T. Shiozawa, T. Sugimoto, A. T. Suzuki, Y. Takeuchi, S. Yamamoto, A. Ali, Y. Ashida, J. Feng, S. Hirota, A. K. Ichikawa, M. Jiang, T. Kikawa, M. Mori, KE Nakamura, T. Nakaya, R. A. Wendell, K. Yasutome, N. McCauley, P. Mehta, A. Pritchard, K. M. Tsui, Y. Fukuda, Y. Itow, H. Menjo, T. Niwa, K. Sato, M. Taani, M. Tsukada, P. Mijakowski, K. Frankiewicz, C. K. Jung, G. Santucci, C. Vilela, M. J. Wilking, C. Yanagisawa, D. Fukuda, M. Harada, K. Hagiwara, T. Horai, H. Ishino, S. Ito, Y. Koshio, W. Ma, N. Piplani, S. Sakai, M. Sakuda, Y. Takahira, C. Xu, Y. Kuno, G. Barr, D. Barrow, L. Cook, C. Simpson, D. Wark, F. Nova, T. Boschi, F. Di Lodovico, S. Molina Sedgwick, S. Zsoldos, J. Y. Yang, S. J. Jenkins, J. M. McElwee, M. D. Thiesse, L. F. Thompson, H. Okazawa, Y. Choi, S. B. Kim, I. Yu, K. Nishijima, M. Koshiha, K. Iwamoto, N. Ogawa, M. Yokoyama, A. Goldsack, K. Martens, M. R. Vagins, M. Kuze, M. Tanaka, T. Yoshida, M. Inomoto, M. Ishitsuka, R. Matsumoto, K. Ohta, M. Shinoki, J. F. Martin, C. M. Nantais, H. A. Tanaka, T. Towstego, M. Hartz, A. Konaka, P. de Perio, N. W. Prouse, S. Chen, B. D. Xu, M. Posiadala-Zezula, B. Richards, B. Jamieson, J. Walker, A. Minamino, K. Okamoto, G. Pintaudi, and R. Sasaki. Search for proton decay via $p \rightarrow e^+ + \pi^0$ and $p \rightarrow M^+ + \pi^0$ with an enlarged fiducial volume in Super-Kamiokande I-IV. *Physical Review D*, Vol. 102, No. 11, p. 112011, December 2020.
- [32] A. J. Buras, J. Ellis, M. K. Gaillard, and D. V. Nanopoulos. Aspects of the grand unification of strong, weak and electromagnetic interactions. *Nuclear Physics B*, Vol. 135, No. 1, pp. 66–92, March 1978.
- [33] Michael S. Chanowitz, John Ellis, and Mary K. Gaillard. The price of natural flavour conservation in neutral weak interactions. *Nuclear Physics B*, Vol. 128, No. 3, pp. 506–536, October 1977.
- [34] D. V. Nanopoulos and D. A. Ross. Limits on the number of flavours in grand unified theories from higher-order corrections to fermion masses. *Nuclear Physics B*, Vol. 157, No. 2, pp. 273–284, September 1979.
- [35] C. A. Dominguez. Determination of quark mass ratios from K_{l3} decay. *Physics Letters B*, Vol. 86, No. 2, pp. 171–174, September 1979.
- [36] C. A. Domínguez. Zero-Mass Quarks and the $U(1)$ Problem. *Physical Review Letters*, Vol. 41, No. 9, pp. 605–607, August 1978.
- [37] Paul Langacker and Heinz Pagels. Light-quark mass spectrum in quantum chromodynamics. *Physical Review D*, Vol. 19, No. 7, pp. 2070–2079, April 1979.
- [38] Paul Langacker. Quark mass differences and ρ - ω mixing. *Physical Review D*, Vol. 20, No. 11, pp. 2983–2985, December 1979.
- [39] S. WEINBERG. A Festschrift for I.I. Rabi. *Trans, N. Y. Acad. Sci., Ser. II*, Vol. 38, p. 185, 1977.
- [40] P. H. Frampton, S. Nandi, and J. J. G. Scanio. Estimate of flavor number from $SU(5)$ grand unification. *Physics Letters B*, Vol. 85, No. 2, pp. 225–228, August 1979.
- [41] Howard Georgi and C. Jarlskog. A new lepton-quark mass relation in a unified theory. *Physics Letters B*, Vol. 86, No. 3, pp. 297–300, October 1979.
- [42] Ilja Dorsner, Pavel Fileviez Perez, and Ricardo Gonzalez Felipe. Phenomenological and Cosmological Aspects of a Minimal GUT Scenario. *Nuclear Physics B*, Vol. 747, No. 1-2, pp. 312–327, July 2006. arXiv:hep-ph/0512068.
- [43] Ilja Dorsner and Pavel Fileviez Perez. Unification without supersymmetry: neutrino mass, proton decay and light leptoquarks, April 2005. arXiv:hep-ph/0504276.

- [44] I. Doršner, S. Fajfer, A. Greljo, J. F. Kamenik, and N. Košnik. Physics of leptoquarks in precision experiments and at particle colliders. *Physics Reports*, Vol. 641, pp. 1–68, June 2016.
- [45] Joydeep Roy. Calculating β -function coefficients of Renormalization Group Equations, July 2019.