

大統一模型模型研究ノート

金沢大学大学院 自然科学研究科数物科学専攻 (物理学コース) 修士課程 2 年
学籍番号 2315011026 名列番号 216
高村 泰時

2024 年 12 月 27 日

目次

第 I 部	教科書の部分	5
第 1 章	記法	7
第 2 章	素粒子標準模型	9
2.1	概観	9
2.2	ローレンツ代数とスピノール表現	9
2.3	ゲージ粒子	10
2.4	フェルミオン	10
2.5	ゲージ理論	10
2.6	ヒッグス機構	10
第 3 章	素粒子標準模型では説明できない物理	11
3.1	標準模型の抱える問題	11
3.2	階層性問題	12
3.3	ニュートリノ質量	13
第 4 章	大統一理論	15
4.1	Georgi-Glashow モデル	15
第 5 章	群論	17
5.1	群	17
5.2	Lie 群	17
5.3	表現	17
5.4	カルタン分類	17
第 II 部	研究の部分	19
	参考文献	21

これは $SU(5)$ 大統一理論の研究のノートです. 勉強のためにまとめた部分が第 1 部, 実際に論文として挙げられているものに対する議論は第 2 部にまとめています. 勉強したものであっても一度まとめておかないと, 後々忘れてしまうものですので冗長にまとめている部分もあります. 全部分の Notation はまだまとめていません.

第 I 部

教科書の部分

第 1 章

記法

この本で用いる記法については次のものにしたがう．随時更新すること．

第 2 章

素粒子標準模型

この章では素粒子物理学における標準模型についてまとめた。素粒子標準模型は現在の高エネルギー実験をほぼ説明することができるものであるが、標準模型だけでは説明できない事実が存在する。大統一理論はそれらを解決するための理論の一つであるが、そもそも標準模型がどのような理論であるのかをここで振り返る。

2.1 概観

素粒子標準模型は量子場の理論により記述される。素粒子の相互作用は Yang-Mills による理論によって、数学的にリー群に属する局所非可換ゲージ変換のもとで不変になるようにラグランジアン密度を記述することができる。具体的には、次のようなゲージ対称性を持つ理論である。

$$\mathcal{G}_{\text{SM}} = \text{SU}(3)_c \times \text{SU}_L(2) \times \text{U}(1)_Y \quad (2.1)$$

それぞれゲージ群の添字は量子数に対応している。“C” はカラー量子数, “L” は左巻きのカイラリティ, “Y” は超電荷である。SU(3)_c 群は核子に作用する強い相互作用を記述する群であり、量子色力学 (QCD) によって記述される。一方で SU(2)_L × U(1)_Y は弱い相互作用と電磁相互作用を統一的に記述する電弱理論を記述する群である。

ゲージ対称性の他に、理論に現れる粒子がどのようなものであるのか、標準模型のゲージ対称性の中でどのような対称性を持つ粒子であるのかを決めることにより、理論を具体的に決定することができる。他にも、ラグランジアン密度に含める項は、繰り込み可能であり、ローレンツ対称性を満足するものを決めることで全て書き下すことができる。ここからは標準模型に現れる粒子と、その対称性について考える。

2.2 ローレンツ代数とスピノール表現

物質場の基本的な構成をするために、スピノール場を定義する。スピノール場はローレンツ群 $SL(2, \mathbb{C})$ の変換をうける。

はじめに、ローレンツ群の表現行列は

$$D(\Lambda) = \exp \left(-\frac{i}{2\hbar} \omega^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} \right) \quad (2.2)$$

と表される。ω_{αβ} はに対して、基本表現は

$$\psi_{\alpha} \rightarrow U_{\alpha}^{\beta} \psi_{\beta} \quad (2.3)$$

2.3 ゲージ粒子

量子場の理論では、ゲージ対称性によって相互作用を記述することができる。この相互作用を媒介する粒子はゲージ粒子と呼ばれ、スピン 1 のボーズ粒子である。素粒子標準模型では強い相互作用を媒介するグルーオン (g)、弱い相互作用を媒介する (W, Z) ボゾン、電磁相互作用を記述する光子 (γ) がある。これらはゲージ原理によって理論にラグランジアンに含まれることになる。

2.3.1 ゲージ原理

2.3.2 ゲージ粒子のラグランジアン

ベクトル場は次のような場の強さテンソルで表される。

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (2.4)$$

$$W_{\mu\nu}^i = \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i + g_2 \varepsilon^{ijk} W_\mu^j W_\nu^k \quad (2.5)$$

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_3 f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c \quad (2.6)$$

ここでは、 g_2, g_3 はそれぞれ $SU(3)_c, SU(2)_L$ ゲージ群の結合定数ある。また、 $f^{abc}, \varepsilon_{ijk}$ はそれぞれの構造定数を表す。これより、標準模型のゲージ場の運動項は

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^i W^{i\mu\nu} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \quad (2.7)$$

と表せる。

2.4 フェルミオン

標準模型粒子ではクォーク、レプトンは物質粒子という枠組みで説明され、スピンが $\frac{1}{2}$ のフェルミ粒子である。

標準模型では物質粒子は世代と呼ばれる構造をもつ。現在の標準模型は 3 世代模型として考えられており、これは標準模型における弱い相互作用での CP 対称性の破れに重要な役割を果たす。[]

2.5 ゲージ理論

2.6 ヒッグス機構

第 3 章

素粒子標準模型では説明できない物理

3.1 標準模型の抱える問題

素粒子標準模型は高エネルギー物理学の実験をほぼ正確に予言することができるため、大きな成功を収めた。特に 2011 年に CERN にある大型ハドロン衝突型加速器 (Large Hadron Collider; LHC) が標準模型に現れる Higgs 粒子を発見したことにより、標準模型は揺るぎないものとなった。しかし、次のような課題があり、理論の拡張が迫られている。

- ニュートリノ質量, およびニュートリノ振動

標準模型ではニュートリノは質量を持たない粒子として存在する。しかし 1998 年にニュートリノ振動がスーパーカミオカンデで観測されたことにより、ニュートリノは質量を持つことが示唆されたため、標準模型を何かしら拡張する必要があると考えられている。

- 重力相互作用

粒子の持つ相互作用のうち、重力相互作用は他の相互作用と異なり、一般相対論で記述されるものであり、これを量子化しようとするときくりこみができない問題が生じる。

- 真の統一理論

標準模型はゲージ対称性を $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ とした理論であるが、直積としてゲージ群が記述されていることは群の操作は独立に行われていることを意味しており、真の統一理論とは言えない。

- 電荷の量子化

素粒子の電荷は単位電荷の整数倍の値を持つ。非可換群の固有値であれば量子化が実現できるが、ハイパーチャージ Y は可換群である $U(1)$ 対称性における無限小演算子であり、固有値 Y の量子化は行えない。したがって標準模型で電荷 Q は $Q = I^3 + \frac{Y}{2}$ という関係に基づいて決定されるが、この電荷が量子化される根拠は標準模型に存在しない。

- 階層性問題

標準模型の典型的なエネルギースケールは $M_W \simeq 80\text{GeV}$ である。プランクスケール M_{Pl} や大統一スケール M_{GUT} に至れば理論が標準模型と入れ替わると考えられているが、エネルギースケールに大きな隔たりがあり、この階層性を如何にして自然と説明できるかは重要な問題である。

- 予言できないパラメーターの数

素粒子標準模型はゲージ相互作用と量子場の理論で構成されるが、唯一のスカラー場であるヒッグス粒子は標準模型であっても相互作用を規定する主導原理は存在せず、クォークやレプトンとの湯川相互作用やヒッグス自身の自己相互作用は理論の中では任意の値をとることが可能であり、予言することができない。

- 暗黒物質

標準模型に存在する粒子のみを考えた場合、観測事実として宇宙全体のエネルギーに対して4%のみしか説明することができず、残りの96%のうち23%は暗黒物質と考えられている。ここで言う暗黒物質とは、物質粒子との相互作用が極めて弱いものの重力相互作用を微弱に持つものであると考えられているが、そのような粒子は素粒子標準模型のみでは説明することができない。

- 暗黒エネルギー

先に述べた暗黒物質を考えた場合であっても、およそ73%は未知のエネルギーとして考えられており、これは暗黒エネルギーと呼ばれる。暗黒エネルギーは初期宇宙においてインフレーションと呼ばれる加速膨張を引き起こした宇宙項と関係があると考えられている

3.2 階層性問題

大統一理論や超弦理論を考えた場合、一般的にエネルギースケールの階層性が問題となる。ここでは大統一理論に表れる階層性に集中してこの問題について取り扱う。

3.2.1 階層性問題とは

素粒子標準模型は電弱スケールである $M_W \sim 100 [\text{GeV}]$ まで高エネルギー加速器実験結果を説明することができる。一方で標準模型を超えた物理 (Beyond the Standard Model; BSM) が加速器実験で検証されるには電弱スケールよりも高いエネルギーにより、その実験を検証することが可能となる。

この見方を変えると、現在の標準模型はこのようなBSMの有効理論であると考えることができる。したがって素粒子標準模型の理論の適用範囲は何らかのエネルギースケールである Λ まで有効であり、 Λ 以上のエネルギーでは別の理論へ移り変わると考えられている。

大統一理論や重力が含まれる理論では、このカットオフは $\Lambda \sim M_{\text{GUT}}$ や $\Lambda \sim M_{\text{pl}}$ 程度であるとそれぞれ考えられており、 M_W に比べて13桁程度の乖離が存在する。

標準模型に登場する粒子はヒッグス粒子の真空期待値に比例するため、これらは電弱スケールに質量が存在することとなる。これらはゲージ理論により説明されるが、ヒッグス粒子の質量を説明できる主導原理は標準模型に存在しない。標準模型に表れるヒッグス粒子の質量を m_h とした場合、いかにして $m_h \ll \Lambda$ を保つかが大きな問題となっている。

3.2.2 Doublet-triplet splitting problem

ここでは $SU(5)$ 大統一理論を考える。 $SU(5)$ 大統一理論では、5表現ヒッグスと24表現ヒッグスを考えることができた。それぞれ H, Φ とおく。これらのヒッグス粒子によるポテンシャルを考える。 \mathbb{Z}_2 対称性を課すと、

$$V(H, \Phi) = -\frac{1}{2}\nu^2 H^\dagger H + \frac{\lambda}{4}(H^\dagger H)^2 + H^\dagger [\alpha \text{Tr}(\Phi^2) + \beta(\Phi^2)]H \quad (3.1)$$

となる。ここで、 Φ の最小化は式 (3.1) の第3項の内部のみで行われていると考える。これは式 (3.1) は階層性のもとでは、多項式全体の最小化の影響よりも、十分影響を与えるためである。

ただし、このように真空期待値を取った場合、 Y ボゾンに質量を与えうる H^α と Φ_5^0 という2つのカラー三重項ヒッグス場が存在したとしても片方のヒッグス場のみ質量を与え、もう一方は質量がないままとなる。

3.3 ニュートリノ質量

素粒子標準模型では、ニュートリノには質量がない。これは、レプトンセクターではニュートリノは $SU(2)_L$ 二重項にのみ存在し、カイラルパートナーである右巻きニュートリノが存在せず、他の粒子のようにヒッグス機構を考えることができないためである。ところが、すでにカミオカンデによる観測により、ニュートリノ振動と呼ばれるニュートリノのフレーバーが変化する現象が発見されたことからニュートリノにも質量があると考えなければならない。

3.3.1 マヨナラ質量項

ここでは、ニュートリノの質量項を導入するためにマヨナラ場を導入する。量子場の理論では、質量を持った粒子は4成分のディラックスピノール場を用いて記述されていた。このディラックスピノール場を ψ_D とする。ディラックスピノールとカイラルスピノールには射影演算子 $P_L = \frac{1-\gamma^5}{2}$, $P_R = \frac{1+\gamma^5}{2}$ を用いて次のように示される。

$$\psi_R = P_R \psi, \quad \psi_L = P_L \psi$$

4成分スピノール場 ψ は2つのカイラルスピノールの和で書くことができる。

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_L + \psi_R \\ &= \frac{1+\gamma^5}{2} \psi + \frac{1-\gamma^5}{2} \psi \\ &= P_L \psi + P_R \psi \end{aligned} \tag{3.2}$$

ここから、 γ 行列はカイラル基底をとる。これによってカイラルスピノールを2成分のスピノールとして扱うことができる。具体的には、パウリ行列 σ^i ($i = 1, 2, 3$) に対して

$$\begin{aligned} \sigma^\mu &= (I, \sigma^i) \\ \bar{\sigma}^\mu &= (I, -\sigma^i) \end{aligned}$$

と定義すると、 γ 行列は

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

と書くことができる。このことから、カイラルスピノールは

$$\begin{aligned} \psi_L &= \begin{pmatrix} \eta_\alpha \\ 0 \end{pmatrix}; (\alpha = 1, 2) \\ \psi_R &= \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}; (\dot{\alpha} = 1, 2) \end{aligned} \tag{3.4}$$

となり、それぞれ2成分の複素ベクトルで表すことができる。また、ローレンツ群の生成子 $\sigma^{\mu\nu}$ は

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sigma^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^{\mu\nu} \end{pmatrix}, \quad (\sigma^{\mu\nu} \equiv \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu, \quad \bar{\sigma}^{\mu\nu} \equiv \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \quad (\mu \neq \nu)) \tag{3.5}$$

となり、ローレンツ変換の下で異なるカイラリティを持つ場が混合しない。数学的には群 $SL(2, \mathbb{C})$ の既約表現を成すことが明確になる。

カイラル基底では C 変換は $C = i\gamma^0\gamma^2$ と行列で表すことができた。これよりカイラルフェルミオンは

$$\begin{aligned} (\psi_L)^c &= C\bar{\psi}_L^t = -i\gamma^2(\psi_L)^* \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.6)$$

と異なるカイラリティを持つカイラルフェルミオンを構成することができる。

これまでで、ディラックスピノールは

$$\psi_D = \psi_L + \psi_R = \begin{pmatrix} \eta_\alpha \\ \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

と表せる。さらに、C 変換はカイラリティを変化させることから、ある左巻きのカイラルフェルミオンとその反粒子でスピノールを構成することが可能であることがわかる。

$$\psi_{ML} = \psi_L + (\psi_L)^c = \begin{pmatrix} \eta_\alpha \\ \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

あるいは右巻きのカイラルフェルミオンを用いると

$$\psi_{MR} = \psi_R + (\psi_R)^c = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

のように、スピノールを構成することが可能となる。このようにして構成されたスピノールはマヨラナスピノールと呼ばれる。

マヨラナスピノールの重要な点として、P 変換と C 変換を 2 回施すと元の状態に戻る。以上のことから、マヨラナスピノールは粒子と反粒子の区別がない中性のフェルミオンを表す。

ここで、数学的な側面に言及する。 $\eta, \bar{\xi}$ はローレンツ群 $SL(2, \mathbb{C})$ の基本表現とその反表現としての振る舞いをする。これらは Levi-Civita テンソルを用いて

$$\bar{\eta}^{\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\eta}_{\dot{\beta}} \quad (3.10)$$

となり、Levi-Civita テンソルが計量としての役割を持つ。

ここで、任意の 2 つの左巻きスピノール η, χ の縮約を考える。

$$\eta_\alpha \chi^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} \eta_\alpha \chi_\beta$$

は $SL(2, \mathbb{C})$ 変換のもとで不変であるから、ローレンツ不変量であることがわかる。これは $SU(2)$ 群において基本表現の 2 重項を反対称に組むことによって 1 重項を成し、 $SU(2)$ 不変量を成すことを表している。^{*1}

3.3.2 シーソー機構

^{*1} これは時空をミンコフスキー的ではなくユークリッド的のすると、ローレンツ変換が $SO(4) \simeq SU(2) \times SU(2)$ となり、独立な $SU(2)$ で記述できることと対応している。

第 4 章

大統一理論

大統一理論は H.Georgi と S.L.Glashow により 1974 年に提唱された [1]. 大統一理論では重力を除いた 3 つの相互作用を 1 つに統一することを目的としている. したがって, ゲージ対称性は単純群によって記述されると考えられており, 標準模型のゲージ群である $\mathcal{G}_{\text{SM}} = SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ を部分群として内包する群を考える. このことから, 前節で述べられているような標準模型の問題点はいくつか解決され则认为られている.

要修正: どの点で何が解決できているのか

大統一理論にも様々な単純群を考えることが可能であり, $SU(5)$ や $SO(10)$, E_6 などの模型を考えることが可能であるが, このノートでは最小模型である $SU(5)$ について取り扱い, 理論の拡張を試みる.

はじめに, $SU(5)$ 大統一理論が最小模型である理由を考える. 標準模型のゲージ対称性である $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ は, 群の階数が $\text{rank} = 4$ であり, これを内包できる群を考える必要がある. その中で考えられる単純群は, $O(8)$, $O(9)$, $\text{Sp}(8)$, F_4 , そして $SU(5)$ である. このうち, $SU(3)$ のもつ 3 重項をもち, $SU(2)$ がもつ 2 重項の複素表現をもつという性質は $SU(5)$ 群を用いて記述することができるため, 最小模型として $SU(5)$ 群を考えて理論を構築することが可能となる.

4.1 Georgi-Glashow モデル

ここから $SU(5)$ 群を考える. ゲージ群を決定すると, ラグランジアンに導入する場の既約表現を指定すれば理論を定めることができる. $SU(5)$ の基本表現は 5 表現であり, 5 表現か, その複素表現である $\bar{5}$ を用いることですべての表現を構成することができる. $SU(5)$ 群の階数は 4 であるから, 生成演算子を $L_i (i = 1, \dots, 24)$ のうち対角化可能なものが 4 つ存在する. $SU(3)_c$ の対角化可能な生成演算子を λ_3, λ_8 , $SU(2)$ のものを I_3 (アイソスピン), $U(1)$ の超電荷を Y に対応させて考えることができる.

次にフェルミオンの次元を $SU(3), SU(2)$ の表現次元, $U(1)$ の超電荷 Y で $(1, 2, -1)$ のように表し, どのように $SU(5)$ 模型に当てはめられるか考える.

		多重度
$(u, d)_L$	$(3, 2, \frac{1}{6})$	6
d_L^c	$(3^*, 1, \frac{1}{3})$	3
u_L^c	$(3^*, 1, -\frac{2}{3})$	3
$(\nu, e)_L$	$(1, 2, -\frac{1}{2})$	2
e_L^c	$(1, 1, 1)$	1
ν_L^c	$(1, 1, 0)$	1

基本表現をこの中から選ぶことで

$$(q_L^c, \nu_L, e_L) = (3^*, 1, Y) \oplus \left(1, 2, -\frac{1}{2}\right) = \bar{5} \quad (4.1)$$

と考えられる。ここではまだ q の正体が u, d クォークのどちらかは定かではないが, $SU(5)$ 群のトレースは 0 でなければならないため, Q を電荷とすると上記の電荷は

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^5 Q_a &= 3Q_{qc} + Q_\nu + Q_e \\ \therefore Q_q &= -Q_{qc} = -\frac{1}{3} \end{aligned} \quad (4.2)$$

となる。したがって, $q = d$ と選択することにより, 次のように **5** 表現を決めることができる。

$$\bar{5} = \begin{pmatrix} d_1^c \\ d_2^c \\ d_3^c \\ l \\ -\nu_l \end{pmatrix} = \left(3^*, 1, \frac{1}{3}\right) \oplus \left(1, 2, -\frac{1}{2}\right) \quad (4.3)$$

これによりクォークの電荷が荷電レプトンの $\frac{1}{3}$ の整数倍となっていることが説明できる。残りのフェルミオンを次元の大きい表現に当てはめることを考える。基本表現よりも大きな表現は, すべて基本表現の積で表すことができる。10 表現は

$$5 \otimes 5 = 15 \oplus 10$$

として構成することができる。この 10 表現は $10 \rightarrow (3^*, 1, -\frac{2}{3}) \oplus (3, 2, \frac{1}{6}) \oplus (1, 1, 1)$ と分解できるので, 次のように当てはめることができる。

$$\overline{10} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & u_3^c & -u_2^c & u_1 & d_1 \\ -u_3^c & 0 & u_1^c & u_2 & d_2 \\ u_2^c & -u_1^c & 0 & u_3 & d_3 \\ -u_1 & -u_2 & -u_3 & 0 & e^c \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -e^c & 0 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

ただし, x^c は x を同じカイラリティで荷電共役したものを表している。この x の例として, 左巻きの電子 e_L^- を考える。 e_L^- に対して荷電共役変換を行った $(e_L^-)^c$ を考える。これは右巻きの電子 e_R^- となるが, 左巻きの陽電子である e_L^+ と同じである。

4.1.1 ゲージ粒子の表現

4.1.2 対称性の破れ

4.1.3 予言される現象

4.1.4 破綻

第 5 章

群論

この章では、大統一理論に必要な数学の内容をまとめている。詳しい証明や例については数学の専門書を参考にすること。次のことを認め、話を進める。

X を集合とする。写像 $\phi: X \times X \rightarrow X$ のことを集合 X 上の演算と言う。これ以降では $a, b \in X$ に対する写像を $\phi(a, b)$ の代わりに ab と書く。

5.1 群

群とは次の性質を持つものである。

Definition 1 (群). G を空ではない集合とする。集合 G 上で演算が定義されており、次の性質を満たすとき、 G を群と言う。

1. 単位元と呼ばれる $e \in G$ が存在し、全ての $a \in G$ に対して $ae = ea = a$ となる。
2. すべての $a \in G$ に対し、 $b \in G$ が存在し、 $ab = ba = e$ となる。この元 b は a の逆元と呼ばれ、 a^{-1} と書く。
3. すべての $a, b, c \in G$ に対して、 $(ab)c = a(bc)$ が成り立つ。

特に、性質 3. は結合法則と呼ばれている。群の元 $a, b \in G$ に対して $ab = ba$ が成り立つとき、 a, b は可換である。 G の任意の元 a, b が可換なら、 G を可換群 (Abel 群) と呼ぶ。

5.2 Lie 群

5.3 表現

5.4 カルタン分類

第Ⅱ部

研究の部分

参考文献

- [1] H. Georgi and S. L. Glashow. Unity of all elementary-particle forces. *Phys. Rev. Lett.*, 32:438–441, Feb 1974.