

大統一模型模型研究ノート

金沢大学大学院 自然科学研究科数物科学専攻 (物理学コース) 修士課程 2 年
学籍番号 2315011026 名列番号 216
高村 泰時

2025 年 1 月 16 日

目次

第 I 部	教科書の部分	7
第 1 章	記法	9
1.1	場の量子論に関する	9
1.2	SU(5) 大統一理論	9
第 2 章	素粒子標準模型	11
2.1	概観	11
2.2	ローレンツ代数とスピノール表現	11
2.3	ゲージ粒子	12
2.4	フェルミオン	13
2.5	ヒッグス機構	13
2.6	フェルミオン質量の獲得	15
2.7	走るゲージ結合定数	16
第 3 章	素粒子標準模型では説明できない物理	17
3.1	標準模型の抱える問題	17
3.2	階層性問題	18
3.3	ニュートリノ質量	19
第 4 章	SU(5) 大統一理論	23
4.1	フェルミオンの表現	23
4.2	ゲージ粒子の表現	24
4.3	対称性の破れ	26
4.4	フェルミオン質量	29
4.5	SU(5) 大統一理論の予言	29
第 II 部	研究の部分	31
第 5 章	SU(5) 大統一理論の拡張模型	33
5.1	高次元表現ヒッグスを用いた拡張	33
付録 A	群論	35
A.1	群	35

A.2	Lie 群	35
A.3	表現	35
A.4	カルタン分類	35
参考文献		37

これは $SU(5)$ 大統一理論の研究のノートです。勉強のためにまとめた部分が第 1 部、実際に論文として挙げられているものに対する議論は第 2 部にまとめています。勉強したものであっても一度まとめておかないと、後々忘れてしまうものですので冗長にまとめている部分もあります。全部分の Notation はまだまとめていません。

第 I 部

教科書の部分

第 1 章

記法

この本で用いる記法については次のものにしたがう.

1.1 場の量子論に関する

計量テンソル

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad (1.1)$$

パウリ行列

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

1.2 SU(5) 大統一理論

$\bar{\mathbf{5}}$ 表現フェルミオン

$$\psi_{\bar{\mathbf{5}}} = \begin{pmatrix} d_1^c \\ d_2^c \\ d_3^c \\ l \\ -\nu_l \end{pmatrix}_L = \left(\bar{\mathbf{3}}, 1, \frac{1}{3} \right) \oplus \left(1, 2, -\frac{1}{2} \right) \quad (1.3)$$

$\mathbf{10}$ 表現フェルミオン

$$\psi_{\mathbf{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & u_3^c & -u_2^c & u_1 & d_1 \\ -u_3^c & 0 & u_1^c & u_2 & d_2 \\ u_2^c & -u_1^c & 0 & u_3 & d_3 \\ -u_1 & -u_2 & -u_3 & 0 & e^c \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -e^c & 0 \end{pmatrix}_L = (3, 2, \frac{1}{6}) \oplus (\bar{\mathbf{3}}, 1, -\frac{2}{3}) \oplus (1, 1, 1) \quad (1.4)$$

第 2 章

素粒子標準模型

この章では素粒子物理学における標準模型についてまとめた。素粒子標準模型は現在の高エネルギー実験をほぼ説明することができるものであるが、標準模型だけでは説明できない事実が存在する。大統一理論はそれらを解決するための理論の一つであるが、そもそも標準模型がどのような理論であるのかをここで振り返る。

2.1 概観

素粒子標準模型は量子場の理論により記述される。素粒子の相互作用は Yang-Mills による理論によって、数学的にリー群に属する局所非可換ゲージ変換のもとで不変になるようにラグランジアン密度を記述することができる。具体的には、次のようなゲージ対称性を持つ理論である。

$$\mathcal{G}_{\text{SM}} = \text{SU}(3)_c \times \text{SU}_L(2) \times \text{U}(1)_Y \quad (2.1)$$

それぞれゲージ群の添字は量子数に対応している。“C” はカラー量子数, “L” は左巻きのカイラリティ, “Y” は超電荷である。SU(3)_c 群は核子に作用する強い相互作用を記述する群であり、量子色力学 (QCD) によって記述される。一方で SU(2)_L × U(1)_Y は弱い相互作用と電磁相互作用を統一的に記述する電弱理論を記述する群である。

ゲージ対称性の他に、理論に現れる粒子がどのようなものであるのか、標準模型のゲージ対称性の中でどのような対称性を持つ粒子であるのかを決めることにより、理論を具体的に決定することができる。他にも、ラグランジアン密度に含める項は、繰り込み可能であり、ローレンツ対称性を満足するものを決めることで全て書き下すことができる。ここからは標準模型に現れる粒子と、その対称性について考える。

2.2 ローレンツ代数とスピノール表現

物質場の基本的な構成をするために、スピノール場を定義する。スピノール場はローレンツ群 $SL(2, \mathbb{C})$ の変換をうける。

はじめに、ローレンツ群の表現行列は

$$D(\Lambda) = \exp \left(-\frac{i}{2\hbar} \omega^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} \right) \quad (2.2)$$

と表される。ω_{αβ} に対して、基本表現は

$$\psi'_\alpha = U_\alpha^\beta \psi_\beta \quad (2.3)$$

2.3 ゲージ粒子

量子場の理論は量子力学と特殊相対論を組み合わせたものである。素粒子の反応を記述することは量子場の理論のみではできないが、ゲージ対称性を理論に課すことにより相互作用を記述することができる。物質粒子どうしの相互作用を媒介する粒子はゲージ粒子と呼ばれ、スピン 1 のボーズ粒子である。素粒子標準模型では強い相互作用を媒介するグルーオン (g)、弱い相互作用を媒介する (W, Z) ボゾン、電磁相互作用を記述する光子 (γ) がある。これらはゲージ原理によって理論のラグランジアンに含まれることになる。

2.3.1 ゲージ原理

ゲージ原理とは、局所変換と呼ばれる時空の各点で独立なゲージ変換を行ったとしても、物理法則が不変でなければならない主導原理である。

ゲージ粒子は、このゲージ原理によって理論に導入することができる。先に述べたが、量子場の理論にゲージ対称性を課すことで相互作用を記述することができる。この対称性は数学的にリー群によって記述される。ゲージ原理の一般的な説明のために、以下では物質場 $\Psi(x)$ がリー群 G に属し、 r 重項を成しているとする。

リー群の要素は一般的に $\exp(i \sum_{a=1}^n \theta^a T^a)$ と書かれる。 θ^a は実定数であり、 $n = \dim(G)$ はリー群の次元である。ここで、 T^a はリー群の生成子であり、交換関係

$$[T^a, T^b] = if_{abc} T^c \quad (2.4)$$

を満たす。ここで f_{abc} はリー群の構造定数である。

ここで、ゲージ原理を用いてリー群の対称性によって局所変換のもとで不変な理論を考える。物質場 $\Psi(x)$ の局所変換を次のように考える。

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi(x)' = \exp(i\theta^a(x)T^a(\mathbf{r})) \Psi(x) \equiv U(x)\Psi(x) \quad (2.5)$$

このとき、 $\theta^a(x)$ は積分可能な実関数、 $T^a(\mathbf{r})$ は \mathbf{r} 次元のリー群の表現行列である。非可換ゲージ場 $A_\mu^a(x)$ と共変微分 $D_\mu \equiv \partial_\mu + igA_\mu^a(x)T^a(x)$ を導入するここで定数 g はゲージ結合定数である。この共変微分を導入したことによりゲージ場と物質場の相互作用を記述している。

物質場の共変性からゲージ場の変換を考えることができる。物質場の共変性は、局所変換の変換性のもとで

$$D_\mu \Psi(x) \rightarrow D'_\mu \Psi'(x) = U(x)D_\mu \Psi(x) \quad (2.6)$$

と変換することである。このことから、ゲージ場の変換は

$$\begin{aligned} A_\mu^a(x)T^a(\mathbf{r}) &\rightarrow A'_\mu^a(x)T^a(\mathbf{r}) \\ &= U(x)A_\mu^a T^a(\mathbf{r})U^{-1}(x) - \frac{i}{g}U(x)\partial_\mu U^{-1}(x) \end{aligned} \quad (2.7)$$

となる。ここからゲージ場の強さを定義することができる。共変微分の交換関係は $[D_\mu, D_\nu] = igF_{\mu\nu}^a(x)T^a(\mathbf{r})$ であり、この $F_{\mu\nu}^a$ は

$$F_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) - gf^{abc}A_\mu^b(x)A_\nu^c(x) \quad (2.8)$$

と表され、場の強さテンソルとして定義される物理量となる。ここで用いた場の強さテンソル $F_{\mu\nu}^a$ は理論のゲージ対称性によりそれぞれ異なる。非可換ゲージ場のローレンツ不変性とゲージ不変性を要求すると、運動項は

$$F_{\mu\nu}^a = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \quad (2.9)$$

となる．ここでは一般的なリー群に基づいたゲージ変換を考えたが， $SU(2)$, $SU(3)$ 群を考えることで弱い相互作用と強い相互作用を記述することができる．また，ここで述べたものは非可換ゲージ理論であるが，電磁相互作用を記述する $U(1)$ 対称性はこれらの記述を可換なものとして扱えば良い．その場合，式 (2.8) の第 3 項は存在しない．

2.3.2 ゲージ粒子のラグランジアン

これまで述べたことを踏まえて， $B_{\mu\nu}$ を電磁相互作用を記述する $U(1)$ ゲージ場， $W_{\mu\nu}^i$ ($i = 1, 2, 3$) を弱い相互作用を記述する $SU(2)$ ゲージ場， $G_{\mu\nu}^a$ ($a = 1, \dots, 8$) を強い相互作用を記述する $SU(3)$ ゲージ場とすると，素粒子標準模型に現れる場の強さテンソルは式 (2.8) より次のように表される．

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (2.10)$$

$$W_{\mu\nu}^i = \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i + g_2 \varepsilon^{ijk} W_\mu^j W_\nu^k \quad (2.11)$$

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_3 f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c \quad (2.12)$$

ここでは， g_3, g_2 はそれぞれ $SU(3)_c$, $SU(2)_L$ ゲージ群の結合定数ある．また，後述されるが $U(1)_Y$ ゲージ場によって現れる B_μ ゲージボゾンの結合定数を g' とする． $f^{abc}, \varepsilon_{ijk}$ はそれぞれの構造定数を表す．また，標準模型のゲージ場の運動項は式 (2.9) より

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^i W^{i\mu\nu} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^i G^{i\mu\nu} \quad (2.13)$$

と表せる．

2.4 フェルミオン

標準模型粒子ではクォーク，レプトンは物質粒子という枠組みで説明され，スピンの $\frac{1}{2}$ のフェルミ粒子である．

標準模型では物質粒子は世代と呼ばれる構造をもつ．現在の標準模型は 3 世代模型として考えられており，弱い相互作用での CP 対称性の破れに重要な役割を果たす．]

物質粒子はカイラリティと呼ばれる右巻き粒子と左巻き粒子の状態によって区別される．**カイラリティの説明をするべきか？**

2.5 ヒッグス機構

標準模型はゲージ対称性により記述される理論で大きな成功をおさめた．ところが，この対称性が破れない場合，次のような問題が残る．

- 短距離力である弱い相互作用を記述するゲージボゾンは質量を持つ必要がある．ところがゲージボゾンが局所対称性を維持してしまうと，質量を持つ項を書くことができない．
- クォークやレプトンの質量項を考えると，右巻きフェルミオンは $SU(2)_L$ 一重項に属するため，ゲージ不変な質量項を書くことが許されない．

これらの問題を解決するためにはゲージ対称性を自発的に破る必要がある．

素粒子標準模型において，ヒッグス場は $SU(2)_L$ の複素二重項として次のように書く．

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

ヒッグス場のラグランジアン密度は

$$\mathcal{L}_H = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi) \quad (2.15)$$

となる。第2項はヒッグス場のスカラーポテンシャルであり、

$$V(\Phi) = -\mu^2(\Phi^\dagger \Phi) + \lambda(\Phi^\dagger \Phi)^2, \quad (\mu^2, \lambda > 0) \quad (2.16)$$

である。ヒッグス場のポテンシャルは

$$(\Phi^\dagger \Phi) = \frac{\mu^2}{2\lambda}$$

のときに最小の値をとる。真空期待値は一般的に

$$\langle 0|\Phi|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

のように取ることができるので、真空期待値は

$$v^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}$$

となる。

ヒッグス場を真空期待値の周りで次のように展開する

$$\Phi(x) = \exp\left(i\frac{\pi(x)}{v}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h(x)) \end{pmatrix}, \quad \left(\pi(x) = \sum_{a=1}^3 \pi^a(x) \frac{\sigma^a}{2}\right) \quad (2.18)$$

ただし、 $\pi(x)$ は南部・ゴールドストーンボゾンであり、ユニタリーゲージを取るとゲージ変換で取り除くことができる非物理的自由度である。一方で、 $h(x)$ が実ヒッグス粒子として考えられる。 $\pi^a(x)$, ($a = 1, 2, 3$) の3つの自由度のうち、2つが W^\pm ボゾンに吸収され、1つが Z^0 ボゾンに吸収されることで、それぞれのゲージボゾンが質量を獲得する。

ここから、ゲージ粒子の質量の獲得について考える。ヒッグス場のラグランジアン密度は式 (2.15) で与えられており、ヒッグス粒子の運動項には

$$\mathcal{L}_H \supset \frac{1}{4} \left((g_2 W_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} + g' B_\mu) \Phi \right)^\dagger \left((g_2 W^{a\mu} \frac{\sigma^a}{2} + g' B^\mu) \Phi \right) \quad (2.19)$$

という項が含まれている。ここで g' は $U(1)_Y$ ゲージボゾン B_μ のゲージ結合定数である。これによりゲージ対称性は

$$SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow SU(3)_c \times U(1)_{em} \quad (2.20)$$

のように自発的に破れる。したがって、(2.19) から

$$\mathcal{L}_H \supset \frac{v^2}{8} [(g_2^2(W_\mu^1 W^{1\mu} + W_\mu^2 W^{2\mu}) + (g_2 W_\mu^3 - g' B_\mu)(g_2 W^{3\mu} - g' B^\mu)] \quad (2.21)$$

となる。ここで、ゲージ場 W_μ^a と B_μ を次の様に再定義する。

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2) \quad (2.22)$$

$$\begin{pmatrix} Z_\mu^0 \\ A_\mu \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g'^2 + g_2^2}} \begin{pmatrix} g_2 W_\mu^3 - g' B_\mu \\ g' W_\mu^3 - g_2 B_\mu \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta_W W_\mu^3 - \sin \theta_W B_\mu \\ \sin \theta_W W_\mu^3 + \cos \theta_W B_\mu \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

ただし、この混合角 θ_W は

$$\cos \theta_W = \frac{g_2}{\sqrt{g'^2 + g_2^2}}, \quad \sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g'^2 + g_2^2}}$$

で定義され、ワインバーグ角と呼ばれる。実験によりこの値は $\sin^2 \theta_W \simeq 0.23$ となる。式 (2.21) から W^\pm ボゾンと Z^0 ボゾンの質量は

$$m_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A_\mu & Z_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_Z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^\mu \\ Z^\mu \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

さらに、

$$m_W = \frac{1}{2} g_2 v, \quad m_Z = \frac{1}{2} \sqrt{g'^2 + g_2^2} v$$

となる。これらも質量は

$$m_W \simeq 80.4 [\text{GeV}], \quad m_Z \simeq 91.2 [\text{GeV}]$$

と観測されている。また、式 (2.23), (2.24) に表れる A_μ は質量がないことがわかり、 $U(1)_{em}$ ゲージ場の相互作用をする光子であることがわかる。

ヒッグス場の真空期待値の値は、4 体フェルミ相互作用の観測によって、フェルミ結合定数 ($G_F \simeq 1.166 \times 10^{-5} [\text{GeV}]^{-2}$) から導かれた。場の理論の計算によれば

$$2\sqrt{2}G_F = \frac{g_2^2}{2m_W^2} = \frac{2}{v^2}$$

と与えられるので、 $v \simeq 246 [\text{GeV}]$ と定めることができる。2012 年に発見されたヒッグス粒子は $h(x)$ であると考えられており、その質量は $m_H = \sqrt{2\lambda}v \simeq 125 [\text{GeV}]$ と明らかになり、ヒッグス場の結合定数が $\lambda \simeq 0.13$ と決まった。

2.6 フェルミオン質量の獲得

素粒子標準模型において、クォークやレプトンは 3 つの世代構造を持ち、右巻き及び左巻きの 2 つのカイラリティを持つ。フェルミオンの質量はディラック質量項で書かれる。ディラックフェルミオン ψ をカイラルフェルミオン (ψ_L, ψ_R) として $\psi = \psi_L + \psi_R$ と分解して考える。フェルミオンの質量項は

$$\mathcal{L}_{\text{Mass}} = -m\bar{\psi}\psi = -m(\bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R)$$

と書かれる。一方で、カイラリティが左巻きのフェルミオンは $SU(2)_L$ 二重項である一方、右巻きのフェルミオンは $SU(2)_R$ 一重項であるため、その積は $SU(2)_L$ 変換の下で不変ではない。そのためラグランジアンに含めることは許されない。

ヒッグス場によってゲージ対称性を破ることが説明され、ゲージボゾンのみならずクォークやレプトンに対しても質量を与えることが可能となる。 $i = 1, 2, 3$ を世代数として、図 2.1 のようにまとめられる。

2.6.1 レプトン場の質量生成

はじめにレプトンの質量について考える。レプトン場とヒッグス場からなる \mathcal{G}_{SM} 不変な湯川相互作用は

$$\mathcal{L}_Y \supset -Y_l^{ij} \bar{L}_i \Phi l_{jR} + \text{h.c.} \quad (2.25)$$

表 2.1 標準模型粒子と量子数

クォーク場	量子数	レプトン場	量子数
$Q_i \equiv \begin{pmatrix} u_i \\ d_i \end{pmatrix}_L$	$\left(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \frac{1}{6} \right)$	$L_i \equiv \begin{pmatrix} \nu_i \\ l_i \end{pmatrix}_L$	$\left(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2} \right)$
u_{iR}	$\left(\mathbf{3}, \mathbf{1}, \frac{2}{3} \right)$	l_{iR}	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, -1)$
d_{iR}	$\left(\mathbf{3}, \mathbf{1}, -\frac{1}{3} \right)$		

と表される．ヒッグス場が真空期待値を (2.17) のようにとると質量項を書くことができる．

$$\mathcal{L}_{Mass} \supset -m_e \bar{e}e - m_\mu \bar{\mu}\mu - m_\tau \bar{\tau}\tau$$

$$M_l = Y_l \frac{v}{\sqrt{2}} \quad (2.26)$$

2.6.2 クォーク場の質量生成

クォーク場とヒッグス場からなる \mathcal{G}_{SM} 不変な湯川相互作用は

$$\mathcal{L}_Y \supset -Y_d^{ij} \bar{Q}_i \Phi d_{jR} - Y_u^{ij} \bar{Q}_i i\sigma^2 \Phi u_{jR} + \text{h.c.} \quad (2.27)$$

と表せる．

2.7 走るゲージ結合定数

第 3 章

素粒子標準模型では説明できない物理

3.1 標準模型の抱える問題

素粒子標準模型は高エネルギー物理学の実験をほぼ正確に予言することができるため、大きな成功を収めた。特に 2011 年に CERN にある大型ハドロン衝突型加速器 (Large Hadron Collider; LHC) が標準模型に現れる Higgs 粒子を発見したことにより、標準模型は揺るぎないものとなった。しかし、次のような課題があり、理論の拡張が迫られている。

- ニュートリノ質量, およびニュートリノ振動

標準模型ではニュートリノは質量を持たない粒子として存在する。しかし 1998 年にニュートリノ振動がスーパーカミオカンデで観測されたことにより、ニュートリノは質量を持つことが示唆されたため、標準模型を何かしら拡張する必要があると考えられている。

- 重力相互作用

粒子の持つ相互作用のうち、重力相互作用は他の相互作用と異なり、一般相対論で記述されるものであり、これを量子化しようとするときくりこみができない問題が生じる。

- 真の統一理論

標準模型はゲージ対称性を $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ とした理論であるが、直積としてゲージ群が記述されていることは群の操作は独立に行われていることを意味しており、真の統一理論とは言えない。

- 電荷の量子化

素粒子の電荷は単位電荷の整数倍の値を持つ。非可換群の固有値であれば量子化が実現できるが、ハイパーチャージ Y は可換群である $U(1)$ 対称性における無限小演算子であり、固有値 Y の量子化は行えない。したがって標準模型で電荷 Q は $Q = I^3 + \frac{Y}{2}$ という関係に基づいて決定されるが、この電荷が量子化される根拠は標準模型に存在しない。

- 階層性問題

標準模型の典型的なエネルギースケールは $M_W \simeq 80\text{GeV}$ である。プランクスケール M_{Pl} や大統一スケール M_{GUT} に至れば理論が標準模型と入れ替わると考えられているが、エネルギースケールに大きな隔たりがあり、この階層性を如何にして自然と説明できるかは重要な問題である。

- 予言できないパラメーターの数

素粒子標準模型はゲージ相互作用と量子場の理論で構成されるが、唯一のスカラー場であるヒッグス粒子は標準模型であっても相互作用を規定する主導原理は存在せず、クォークやレプトンとの湯川相互作用やヒッグス自身の自己相互作用は理論の中では任意の値をとることが可能であり、予言することができない。

- 暗黒物質

標準模型に存在する粒子のみを考えた場合、観測事実として宇宙全体のエネルギーに対して4%のみしか説明することができず、残りの96%のうち23%は暗黒物質と考えられている。ここで言う暗黒物質とは、物質粒子との相互作用が極めて弱いものの重力相互作用を微弱に持つものであると考えられているが、そのような粒子は素粒子標準模型のみでは説明することができない。

- 暗黒エネルギー

先に述べた暗黒物質を考えた場合であっても、およそ73%は未知のエネルギーとして考えられており、これは暗黒エネルギーと呼ばれる。暗黒エネルギーは初期宇宙においてインフレーションと呼ばれる加速膨張を引き起こした宇宙項と関係があると考えられている

3.2 階層性問題

大統一理論や超弦理論を考えた場合、一般的にエネルギースケールの階層性が問題となる。ここでは大統一理論に表れる階層性に集中してこの問題について取り扱う。

3.2.1 階層性問題とは

素粒子標準模型は電弱スケールである $M_W \sim 100 [\text{GeV}]$ まで高エネルギー加速器実験結果を説明することができる。一方で標準模型を超えた物理 (Beyond the Standard Model; BSM) が加速器実験で検証されるには電弱スケールよりも高いエネルギーにより、その実験を検証することが可能となる。

この見方を変えると、現在の標準模型はこのような BSM の有効理論であると考えることができる。したがって素粒子標準模型の理論の適用範囲は何らかのエネルギースケールである Λ まで有効であり、 Λ 以上のエネルギーでは別の理論へ移り変わると考えられている。

大統一理論や重力が含まれる理論では、このカットオフは $\Lambda \sim M_{\text{GUT}}$ や $\Lambda \sim M_{\text{pl}}$ 程度であるとそれぞれ考えられており、 M_W に比べて13桁程度の乖離が存在する。

標準模型に登場する粒子はヒッグス粒子の真空期待値に比例するため、これらは電弱スケールに質量が存在することとなる。これらはゲージ理論により説明されるが、ヒッグス粒子の質量を説明できる主導原理は標準模型に存在しない。標準模型に表れるヒッグス粒子の質量を m_h とした場合、いかにして $m_h \ll \Lambda$ を保つかが大きな問題となっている。

3.2.2 Doublet-triplet splitting problem

ここでは $SU(5)$ 大統一理論を考える。 $SU(5)$ 大統一理論では、5表現ヒッグスと24表現ヒッグスを考えることができた。それぞれ H, Φ とおく。これらのヒッグス粒子によるポテンシャルを考える。 \mathbb{Z}_2 対称性を課すと、

$$V(H, \Phi) = -\frac{1}{2}\nu^2 H^\dagger H + \frac{\lambda}{4}(H^\dagger H)^2 + H^\dagger [\alpha \text{Tr}(\Phi^2) + \beta(\Phi^2)]H \quad (3.1)$$

となる。ここで、 Φ の最小化は式 (3.1) の第3項の内部のみで行われていると考える。これは式 (3.1) は階層性のもとでは、多項式全体の最小化の影響よりも、十分影響を与えるためである。

ただし、このように真空期待値を取った場合、 Y ボゾンに質量を与えうる H^α と Φ_5^a という2つのカラー三重項ヒッグス場が存在したとしても片方のヒッグス場のみ質量を与え、もう一方は質量がないままとなる。

3.3 ニュートリノ質量

素粒子標準模型では、ニュートリノには質量がない。これは、レプトンセクターではニュートリノは $SU(2)_L$ 二重項にのみ存在し、カイラルパートナーである右巻きニュートリノが存在せず、他の粒子のようにヒッグス機構を考えることができないためである。ところが、すでにカミオカンデによる観測により、ニュートリノ振動と呼ばれるニュートリノのフレーバーが変化する現象が発見されたことからニュートリノにも質量があると考えなければならない。

3.3.1 マヨラナフェルミオンと質量項

ここでは、ニュートリノの質量項を導入するためにマヨラナ場を導入する。量子場の理論では、質量を持った粒子は4成分のディラックスピノール場を用いて記述されていた。このディラックスピノール場を ψ_D とする。ディラックスピノールとカイラルスピノールには射影演算子 $P_L = \frac{1-\gamma^5}{2}$, $P_R = \frac{1+\gamma^5}{2}$ を用いて次のように示される。

$$\psi_R = P_R \psi, \quad \psi_L = P_L \psi$$

4成分スピノール場 ψ は2つのカイラルスピノールの和で書くことができる。

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_L + \psi_R \\ &= \frac{1+\gamma^5}{2} \psi + \frac{1-\gamma^5}{2} \psi \\ &= P_L \psi + P_R \psi \end{aligned} \tag{3.2}$$

ここから、 γ 行列はカイラル基底をとる。これによってカイラルスピノールを2成分のスピノールとして扱うことができる。具体的には、パウリ行列 σ^i ($i = 1, 2, 3$) に対して

$$\begin{aligned} \sigma^\mu &= (I, \sigma^i) \\ \bar{\sigma}^\mu &= (I, -\sigma^i) \end{aligned}$$

と定義すると、 γ 行列は

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

と書くことができる。このことから、カイラルスピノールは

$$\begin{aligned} \psi_L &= \begin{pmatrix} \eta_\alpha \\ 0 \end{pmatrix}; (\alpha = 1, 2) \\ \psi_R &= \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}; (\dot{\alpha} = 1, 2) \end{aligned} \tag{3.4}$$

となり、それぞれ2成分の複素ベクトルで表すことができる。また、ローレンツ群の生成子 $\sigma^{\mu\nu}$ は

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sigma^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^{\mu\nu} \end{pmatrix}, \quad (\sigma^{\mu\nu} \equiv \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu, \quad \bar{\sigma}^{\mu\nu} \equiv \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \quad (\mu \neq \nu)) \tag{3.5}$$

となり、ローレンツ変換の下で異なるカイラリティを持つ場が混合しない。数学的には群 $SL(2, \mathbb{C})$ の既約表現を成すことが明確になる。

カイラル基底では C 変換は $C = i\gamma^0\gamma^2$ と行列で表すことができた。これよりカイラルフェルミオンは

$$\begin{aligned} (\psi_L)^c &= C\bar{\psi}_L^t = -i\gamma^2(\psi_L)^* \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.6)$$

と異なるカイラリティを持つカイラルフェルミオンを構成することができる。

これまでで、ディラックスピノールは

$$\psi_D = \psi_L + \psi_R = \begin{pmatrix} \eta_\alpha \\ \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

と表せる。さらに、C 変換はカイラリティを変化させることから、ある左巻きのカイラルフェルミオンとその反粒子でスピノールを構成することが可能であることがわかる。

$$\psi_{ML} = \psi_L + (\psi_L)^c = \begin{pmatrix} \eta_\alpha \\ \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

あるいは右巻きのカイラルフェルミオンを用いると

$$\psi_{MR} = \psi_R + (\psi_R)^c = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

のように、スピノールを構成することが可能となる。このようにして構成されたスピノールはマヨラナスピノールと呼ばれる。

マヨラナスピノールの重要な点として、P 変換と C 変換を 2 回施すと元の状態に戻る。以上のことから、マヨラナスピノールは粒子と反粒子の区別がない中性のフェルミオンを表す。

ここで、数学的な側面に言及する。 $\eta, \bar{\xi}$ はローレンツ群 $SL(2, \mathbb{C})$ の基本表現とその反表現としての振る舞いをする。これらは Levi-Civita テンソルを用いて

$$\bar{\eta}^{\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\beta} \bar{\eta}_{\dot{\beta}} \quad (3.10)$$

となり、Levi-Civita テンソルが計量としての役割を持つ。

ここで、任意の 2 つの左巻きスピノール η, χ の縮約を考える。

$$\eta_\alpha \chi^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} \eta_\alpha \chi_\beta$$

は $SL(2, \mathbb{C})$ 変換のもとで不変であるから、ローレンツ不変量であることがわかる。これは $SU(2)$ 群において基本表現の 2 重項を反対称に組むことによって 1 重項を成し、 $SU(2)$ 不変量を成すことを表している。^{*1}

マヨラナスピノールの構成を行ったことにより、マヨラナ型の質量項を構成することができる。

$$-m_L \overline{\psi_{ML}} \psi_{ML} = -m_L (\bar{\nu}_L^c \nu_L + \text{h.c.}) = m_L (\eta^\alpha \eta_\alpha + \text{h.c.}) \quad (3.11)$$

$$-m_R \overline{\psi_{MR}} \psi_{MR} = -m_R (\bar{\nu}_R^c \nu_R + \text{h.c.}) = m_R (\xi^\alpha \xi_\alpha + \text{h.c.}) \quad (3.12)$$

一方で、左巻きニュートリノのカイラルパートナーとして右巻きのニュートリノを理論に含めたことにより、他のフェルミオンと同じようにディラック型の質量項を考えることができる。

$$-m_D \bar{\psi}_D \psi_D = -m_D (\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L) \quad (3.13)$$

これらをまとめると、ニュートリノの質量項は式 (3.11), (3.12), (3.13) を用いて、一般的に

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = -\frac{1}{2} m_L (\bar{\nu}_L^c \nu_L + \text{h.c.}) - \frac{1}{2} m_R (\bar{\nu}_R^c \nu_R + \text{h.c.}) - m_D (\bar{\nu}_L \nu_R + \bar{\nu}_R \nu_L) \quad (3.14)$$

^{*1} これは時空をミンコフスキー的ではなくユークリッド的のすると、ローレンツ変換が $SO(4) \simeq SU(2) \times SU(2)$ となり、独立な $SU(2)$ で記述できることと対応している。

と表すことができる.

ここで, 式 (3.14) を行列でまとめる.

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \overline{(\nu_L)^c} & \overline{\nu_R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ (\nu_R)^c \end{pmatrix} + \text{h.c.} \quad (3.15)$$

一般的に質量行列は複素行列である. このとき, 複素対称行列はユニタリー行列とその転地行列により対角化することができる.

$$\begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} = U^T \begin{pmatrix} m_a & 0 \\ 0 & m_s \end{pmatrix} U \quad (3.16)$$

このとき, 対角化行列 U , ν_L と $(\nu_R)^c$ の混合角 θ_ν はそれぞれ

$$U = \begin{pmatrix} -i \cos \theta_\nu & \sin \theta_\nu \\ i \sin \theta_\nu & \cos \theta_\nu \end{pmatrix}, \quad \tan 2\theta_\nu = \frac{2m_D}{m_R - m_L} \quad (3.17)$$

となる. 質量固有状態とカイラル固有状態は

$$\begin{pmatrix} \nu_a \\ \nu_s \end{pmatrix} = U^\dagger \begin{pmatrix} \nu_L \\ (\nu_R)^c \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

という関係となる.

以上により 2 つの質量固有値 m_a, m_s とそれぞれの質量固有状態 ν_a, ν_s を得ることができる.

$$\begin{aligned} m_a &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2} - (m_R + m_L) \right] \\ m_s &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2} + (m_R + m_L) \right] \\ \nu_a &= i (\nu_L \cos \theta_\nu - (\nu_R)^c \sin \theta_\nu) \\ \nu_s &= \nu_L \sin \theta_\nu + (\nu_R)^c \cos \theta_\nu \end{aligned}$$

質量固有状態 ν_a と ν_s によって, 1 つの世代から独立な 2 つのマヨラナフェルミオンの質量項を書くことができ,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} m_s \bar{\nu}_s \nu_s - \frac{1}{2} m_a \bar{\nu}_a \nu_a + \text{h.c.} \quad (3.19)$$

となる. ここまでマヨラナフェルミオンとディラックフェルミオンからニュートリノの質量項を一般的に導くことを行った. ニュートリノが質量を持つ機構についてはいくつか考えられており, 主に

- ディラック型 ... マヨラナ質量を持たずにディラック型の質量項のみを考える.
- シーソー機構 ... ディラック質量より非常に大きなマヨラナ質量が存在する.
- 擬ディラック・ニュートリノ ... ディラック質量より非常に小さなマヨラナ質量が存在する.

が提案されている. この中でもシーソー機構はニュートリノが他のフェルミオンに比べて非常に小さな質量を持つことを自然に説明することができる.

3.3.2 シーソー機構

シーソー機構は大きく質量が異なるマヨラナニュートリノの存在により, 小さなニュートリノ質量の説明を行うものである. はじめに, 質量に次のような階層があると仮定する.

$$m_L \ll m_D \ll m_R \quad (3.20)$$

このとき、混合角は

$$\theta \simeq \frac{m_D}{m_R} \ll 1 \quad (3.21)$$

と近似できる。同じように ν_a, ν_s についても

$$\begin{aligned} \nu_a &\simeq i((\nu_L) - (\nu_R)^c \theta_\nu) \\ \nu_s &\simeq \nu_L \theta_\nu + (\nu_R)^c \end{aligned}$$

となるから、

$$m_a \simeq \frac{m_D^2}{m_R} - m_L, \quad m_s \simeq \frac{m_D^2}{m_R} + m_R$$

と質量を表せる。質量の階層性の仮定である式 (3.20) から m_a, m_s の質量の大きな階層性を導いた。ここまでは、左巻きニュートリノの質量 m_L について詳細を述べていないが、実際に $m_L \neq 0$ とマヨラナ質量があることを考えるためには $SU(2)$ 三重項ヒッグスを理論に含める必要がある。これは左巻きニュートリノのマヨラナ質量項

$$-\frac{1}{2} m_L \overline{\nu_L^c} \nu_L + \text{h.c.}$$

に含まれる ν_L は $SU(2)_L$ 不変性を持たないため、もしこの項をゲージ不変な形で実現するためには三重項ヒッグスで考えることになる。そのため $m_L = 0$ という仮定をおく。すると

$$m_a \simeq \frac{m_D^2}{m_R} \ll m_D, \quad m_s \simeq m_R$$

となり、マヨラナニュートリノは

$$\nu_a \simeq i(\nu_L - (\nu_L)^c), \quad \nu_s \simeq \nu_R + \nu_R^c \quad (3.22)$$

となる。

第 4 章

SU(5) 大統一理論

大統一理論は H.Georgi と S.L.Glashow により 1974 年に提唱された [1]. 大統一理論では重力を除いた 3 つの相互作用を 1 つに統一することを目的としている. したがって, ゲージ対称性は単純群によって記述されると考えられており, 標準模型のゲージ群である $\mathcal{G}_{\text{SM}} = SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ を部分群として内包する群を考える. このことから, 前節で述べられているような標準模型の問題点はいくつか解決され则认为られている.

要修正: どの点で何が解決できているのか

大統一理論にも様々な単純群を考えることが可能であり, $SU(5)$ や $SO(10)$, E_6 などの模型を考えることが可能であるが, このノートでは最小模型である $SU(5)$ について取り扱い, 理論の拡張を試みる.

はじめに, $SU(5)$ 大統一理論が最小模型である理由を考える. 標準模型のゲージ対称性である $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ は, 群の階数が $\text{rank} = 4$ であり, これを内包できる群を考える必要がある. その中で考えられる単純群は, $O(8)$, $O(9)$, $Sp(8)$, F_4 , そして $SU(5)$ である. このうち, $SU(3)$ のもつ 3 重項をもち, $SU(2)$ がもつ 2 重項の複素表現をもつという性質は $SU(5)$ 群を用いて記述することができるため, 最小模型として $SU(5)$ 群を考えて理論を構築することが可能となる.

4.1 フェルミオンの表現

ここでは $SU(5)$ 群において標準模型に現れるフェルミオンがどのように当てはめられるのか考える.

ゲージ群を決定すると, ラグランジアンに導入する場の既約表現を指定すれば理論を定めることができる. $SU(5)$ の基本表現は 5 表現であり, 5 表現か, その複素表現である $\bar{5}$ を用いることですべての表現を構成することができる. $SU(5)$ 群の階数は 4 であるから, 生成演算子を $L_i (i = 1, \dots, 24)$ のうち対角化可能なものが 4 つ存在する. $SU(3)_c$ の対角化可能な生成演算子を λ_3, λ_8 , $SU(2)$ のものを I_3 (アイソスピン), $U(1)$ の超電荷を Y に対応させて考えることができる.

次にフェルミオンの次元を $SU(3)$, $SU(2)$ の表現次元, $U(1)$ の超電荷 Y で $(1, 2, -1)$ のように表し, どのように $SU(5)$ 模型に当てはめられるか考える.

		多重度
$(u, d)_L$	$(3, 2, \frac{1}{6})$	6
d_L^c	$(3^*, 1, \frac{1}{3})$	3
u_L^c	$(3^*, 1, -\frac{2}{3})$	3
$(\nu, e)_L$	$(1, 2, -\frac{1}{2})$	2
e_L^c	$(1, 1, 1)$	1
ν_L^c	$(1, 1, 0)$	1

基本表現をこの中から選ぶことで

$$(q_L^c, \nu_L, e_L) = (3^*, 1, Y) \oplus \left(1, 2, -\frac{1}{2}\right) = \bar{5} \quad (4.1)$$

と考えられる。ここではまだ q の正体が u, d クォークのどちらかは定かではないが、SU(5) 群のトレースは 0 でなければならないため、 Q を電荷とすると上記の電荷は

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^5 Q_a &= 3Q_{qc} + Q_\nu + Q_e \\ \therefore Q_q &= -Q_{qc} = -\frac{1}{3} \end{aligned} \quad (4.2)$$

となる。したがって、 $q = d$ と選択することにより、次のように **5** 表現を決めることができる。

$$\psi_{\bar{5}} = \begin{pmatrix} d_1^c \\ d_2^c \\ d_3^c \\ l \\ -\nu_l \end{pmatrix} = \left(3^*, 1, \frac{1}{3}\right) \oplus \left(1, 2, -\frac{1}{2}\right) \quad (4.3)$$

これによりクォークの電荷が荷電レプトンの $\frac{1}{3}$ の整数倍となっていることが説明できる。残りのフェルミオンを次元の大きい表現に当てはめることを考える。基本表現よりも大きな表現は、すべて基本表現の積で表すことができる。**10** 表現は

$$\mathbf{5} \otimes \mathbf{5} = \mathbf{15} \oplus \mathbf{10}$$

として構成することができる。この **10** 表現は $\mathbf{10} \rightarrow (3^*, 1, -\frac{2}{3}) \oplus (3, 2, \frac{1}{6}) \oplus (1, 1, 1)$ と分解できるので、次のように当てはめることができる。

$$\psi_{\mathbf{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & u_3^c & -u_2^c & u_1 & d_1 \\ -u_3^c & 0 & u_1^c & u_2 & d_2 \\ u_2^c & -u_1^c & 0 & u_3 & d_3 \\ -u_1 & -u_2 & -u_3 & 0 & e^c \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -e^c & 0 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

ただし、 x^c は x を同じカイラリティで荷電共役したものを表している。この x の例として、左巻きの電子 e_L^- を考える。 e_L^- に対して荷電共役変換を行った $(e_L^-)^c$ を考える。これは右巻きの電子 e_R^- となるが、左巻きの陽電子である e_L^+ と同じである。

4.2 ゲージ粒子の表現

ゲージ粒子を SU(5) 大統一理論で考えるために、群の生成子について考える。一般に SU(n) ゲージ群の変換は、

$$U = \exp \left(-i \sum_{i=1}^{n^2-1} \beta_i L_i \right) = \exp(-\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{L}) \quad (4.5)$$

で表される。ここで、 L_i は群の生成子であり、エルミート性があり、トレースレス ($\text{tr} L_i = 0$) である。これにより U はユニタリーであり、 $\det U = 1$ を満たす。 L_i は

$$\text{tr}(L_i L_j) = \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad (4.6)$$

と規格化する．ここで、表現行列を昇降演算子との類推で今後のために

$$(L_b^a)_d^c \equiv \delta_b^c \delta_d^a - \frac{1}{n} \delta_b^a \delta_d^c, \quad ((L_b^a)^\dagger = L_a^b) \quad (4.7)$$

と定義する．交換関係は

$$[L_b^a, L_d^c] = \delta_b^a L_d^c - \delta_b^c L_d^a \quad (4.8)$$

を満たす．これまで n 表現について考えたが、共役な表現 \bar{n} を考えた場合、

$$L_b^a(\bar{n}) = -L_b^{aT} = -L_a^b \quad (4.9)$$

を満たす．

ここから具体的にゲージ場について考える． $SU(n)$ ゲージ理論では、 $n^2 - 1$ 個のゲージ場が存在する．これらは随伴表現で表される． $SU(5)$ 群の生成演算子をこれまでのように $[L_i]_b^a$ ($i = 1, \dots, 24, a, b = 1, \dots, 5$) として構成する．基本表現である 5 表現の類推からは $a, b = 1, 2, 3$ はカラー量子数、 $a, b = 4, 5$ がアイソスピン量子数と考えられる．そのため $i = 1, \dots, 8$ を $SU(3)$ 部分、 $i = 9, 10, 11$ を $SU(2)$ の部分群として考えると

$$L_i(i = 1, \dots, 8) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{2}\lambda_i & & & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & 0 \end{array} \right), \quad L_i(i = 9, 10, 11) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & 0 & \\ & 0 & & 0 & 0 & \\ & & & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \frac{1}{2}\sigma_j \end{array} \right) \quad (4.10)$$

ただし、 $\sigma_{j=i-8}$ ($j = 1, 2, 3$) である．

対角行列は L_3, L_8, L_{11} にそれぞれ $SU(3), SU(2)$ 群の対角行列を対応させる．残りの 1 つは L_{12} であり、 $U(1)_Y$ の超電荷を対応させる．基本表現である 5 表現の超電荷を対応させ、規格化条件である式 (4.6) を用いることで

$$L_{12} = \frac{1}{2\sqrt{15}} \text{diag}(-2, -2, -2, 3, 3)$$

と決めることができる．

24 個のゲージボソンは随伴表現として存在し、次のように分解できる．

$$\mathbf{24} = G(8, 1, 0) \oplus W(1, 3, 0) \oplus B(1, 1, 0) \oplus \bar{X}(3, \bar{2}, -\frac{5}{6}) \oplus X(\bar{3}, 2, +\frac{5}{6}) \quad (4.11)$$

ゲージボソンを V_μ とすると、

$$\frac{1}{\sqrt{2}} V_\mu = \sum_{i=1}^{24} \frac{1}{2} V_\mu^i L_i \quad (4.12)$$

$$V_\mu = \left(\begin{array}{ccccc} G_1^1 - \frac{2B}{\sqrt{30}} & G_2^1 & G_3^1 & \bar{X}_1 & \bar{Y}_1 \\ G_1^2 & G_2^2 - \frac{2B}{\sqrt{30}} & G_3^2 & \bar{X}_2 & \bar{Y}_2 \\ G_1^3 & G_2^3 & G_3^3 - \frac{2B}{\sqrt{30}} & \bar{X}_3 & \bar{Y}_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 & \frac{W^3}{\sqrt{2}} + \frac{3B}{\sqrt{30}} & W^+ \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & W^- & -\frac{W^3}{\sqrt{2}} + \frac{3B}{\sqrt{30}} \end{array} \right) \quad (4.13)$$

ただし、 $SU(3)$ ゲージ場の部分は G^i ($i = 1, \dots, 8$) をグルーオン場として

$$\begin{aligned} G_2^1 &= G^1, & G_1^2 &= G^2, & G_1^3 &= G^5, & G_3^2 &= G^6, & G_2^3 &= G^7 \\ G_1^1 &= \frac{G^3}{\sqrt{2}} + \frac{G^8}{\sqrt{6}}, & G_2^2 &= -\frac{G^3}{\sqrt{2}} + \frac{G^8}{\sqrt{6}}, & G_3^3 &= -\frac{2G^8}{\sqrt{6}} \end{aligned}$$

であり, $SU(2)$ ゲージ場は

$$W^\pm = \frac{W^1 \mp iW^2}{\sqrt{2}}$$

である. ここで, $SU(5)$ ゲージ粒子として新しく X, Y ボゾンが導入される. これらは

$$X, Y = \left(\bar{3}, 2, \frac{5}{3} \right) \quad (4.14)$$

という量子数をもつ.

ここまででゲージ場を導入できたので, $SU(5)$ ゲージ群のラグランジアンを書くことができる. はじめに共変微分を考える. n 表現, \bar{n} 表現の共変微分は

$$\begin{aligned} (D_\mu \psi)^a &= \left[\partial_\mu \delta_b^a - \frac{ig}{\sqrt{2}} (V_\mu)_b^a \right] \psi^b \\ (D_\mu \chi)_a &= \left[\partial_\mu \delta_a^b + \frac{ig}{\sqrt{2}} (V_\mu)_a^b \right] \chi^b \end{aligned}$$

と表せる. また, $\frac{n(n-1)}{2}$ 表現の場合

$$(D_\mu \psi)^{ab} = \partial_\mu \psi^{ab} - \frac{ig}{\sqrt{2}} (V_\mu)_c^a \psi^{cb} - \frac{ig}{\sqrt{2}} (V_\mu)_d^b \psi^{ad}$$

となる. 場の強さを

$$(F_{\mu\nu})_b^a = \partial_\mu (A_\nu)_b^a - \frac{ig}{\sqrt{2}} (A_\mu)_c^a (A_\nu)_b^c - (\mu \leftrightarrow \nu) \quad (4.15)$$

とすると, ゲージ場の運動項は

$$\mathcal{L}_K = -\frac{1}{4} \text{Tr}(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) = -\frac{1}{4} (F^{\mu\nu})_b^a (F_{\mu\nu})^b_a \quad (4.16)$$

となる. また ψ_5 について

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{5K} &= i\bar{\psi}_5 \gamma^\mu D_\mu \psi_5 \\ &= i\bar{\psi}_{5a} \gamma^\mu \left(\delta_b^a \partial_\mu + \frac{ig}{\sqrt{2}} (V_\mu)_b^a \right) \psi_5^b \end{aligned}$$

さらに ψ_{10} について

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{10K} &= i\bar{\psi}_{10ab} \gamma^\mu (D_\mu \psi_{10})^{ab} \\ &= i\bar{\psi}_{10ab} \gamma^\mu \left(\delta_c^a \partial_\mu + \frac{2ig}{\sqrt{2}} (V_\mu)_c^a \right) \psi_{10}^{cb} \end{aligned}$$

となる.

4.3 対称性の破れ

$SU(5)$ 模型は X, Y ゲージボゾンの存在を预言する. これらの粒子はクォークとレプトンの相互作用を引き起こすため, 陽子崩壊が起こる. 陽子は標準模型では安定である. 現在の実験データと矛盾させないためには大統一スケールが十分大きくなければならない.*1 したがって, 大統一スケールで対称性が

$$SU(5) \rightarrow SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y \quad (4.17)$$

*1 これについては次の小区分で詳細を述べる.

と自発的に破れると考えられている。標準模型ではゲージボソンは 12 個存在していた。\$SU(5)\$ 模型にある 24 個のゲージボソンのうち、標準模型には現れない残りの 12 個の粒子が質量をもつ必要がある。そのため少なくとも 12 個の南部・ゴールドストーンボソンが存在しなければならない。また、自発的対称性の破れは、式 (4.17) のようにゲージ群を単純群から直積の群へ破るものである。このときに群のランクを保存するものでなければならない。したがって、そのような対称性の破れを行うものは随伴表現である。最小模型では 24 表現ヒッグス \$\phi_{24}\$ を用いる。ゲージ粒子と同じように、

$$(\phi_{24})_a^b \equiv \sum_{i=1}^{24} \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_{24}^i L_i \quad (4.18)$$

となる。ゲージ場との結合は

$$\mathcal{L}_K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{24} [D_\mu \phi_{24}]^\dagger [D^\mu \phi_{24}]$$

となる。共変微分を具体的に求める。24 表現は \$\mathbf{24} \oplus \mathbf{1} = \mathbf{5} \otimes \bar{\mathbf{5}}\$ であるため、

$$\phi_{24b}^a = \psi_5^a \psi_{\bar{5}b} - \frac{1}{5} \delta_b^a \psi_5^c \psi_{\bar{5}c} \quad (4.19)$$

と構成されている。それぞれの表現の変換は

$$\begin{aligned} \psi_5^a &\rightarrow \psi_5^a + \delta \psi_5^a = \psi_5^a - i \frac{g}{2} \varepsilon^i L_{ic}^a \psi_5^c \\ \psi_{\bar{5}a} &\rightarrow \psi_{\bar{5}a} + \delta \psi_{\bar{5}a} = \psi_{\bar{5}a} + i \frac{g}{2} \varepsilon^i L_{ia}^c \psi_{\bar{5}c} \end{aligned}$$

となるから、\$\phi_{24}\$ は

$$\phi_{24b}^a \rightarrow \phi_{24b}^a - i \frac{g}{2} [L_i, \phi_{24}]_b^a \quad (4.20)$$

と変換を受ける。したがって共変微分は

$$(D_\mu \phi_{24})_b^a = \partial_\mu \phi_{24a}^b - \frac{ig}{\sqrt{2}} [V_\mu, \phi_{24}]_a^b \quad (4.21)$$

となる。ヒッグスの運動項は

$$\mathcal{L}_K = \text{Tr}[(D_\mu \phi_{24})^\dagger (D^\mu \phi_{24})] \quad (4.22)$$

とまとめることができる。ゲージボソンの質量は 24 表現ヒッグスの真空期待値を \$\Sigma = \langle 0 | \phi_{24} | 0 \rangle\$ としたとき

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M &= \text{Tr}[(D_\mu \phi_{24})^\dagger (D^\mu \phi_{24})] |_{\phi_{24}=\Sigma} \\ &= \frac{g^2}{2} \text{Tr}([V_\mu, \Sigma]^\dagger [V^\mu, \Sigma]) = m_{ij}^2 V_\mu^{i\dagger} V^{\mu j} \end{aligned} \quad (4.23)$$

これによりポテンシャルは

$$V(\phi_{24}) = -\frac{\mu^2}{2} \text{Tr}(\phi_{24}^2) + \frac{1}{4} a (\text{Tr}(\phi_{24}^2))^2 + \frac{1}{2} b \text{Tr}(\phi_{24}^4) + \frac{1}{3} c \text{Tr}(\phi_{24}^3)$$

となる。簡単のために \$\mathbb{Z}_2\$ 対称性を課すと、\$c = 0\$ となる。真空期待値は次のようなとり方が考えられる。

$$\Sigma = v \text{diag}(1, 1, 1, 1, -4), \quad (b < 0) \quad (4.24)$$

$$\Sigma = v \text{diag}\left(1, 1, 1, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right), \quad (b > 0) \quad (4.25)$$

式 (4.24) の場合, ゲージ対称性は $SU(4) \times U(1)$ に破れ, 式 (4.25) の場合は $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ に破れる. したがって, 後者の場合を考える. この場合のポテンシャルの最小値は $b > 0$, $a > -7b/15$ の条件のもとで

$$\left. \frac{\partial V(\phi_{24})}{\partial \phi_{24}} \right|_{\phi_{24}=\Sigma} = 0 \quad (4.26)$$

より求められ,

$$v^2 = \frac{2\mu^2}{15a + 7b}$$

となる. ゲージボゾンの質量は 24 表現ヒッグスに真空期待値をもたせると

$$[V_\mu, \Sigma] \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & -\frac{5}{2}\bar{X}_1 & -\frac{5}{2}\bar{Y}_1 & \\ & 0 & & -\frac{5}{2}\bar{X}_2 & -\frac{5}{2}\bar{Y}_2 & \\ & & & -\frac{5}{2}\bar{X}_3 & -\frac{5}{2}\bar{Y}_3 & \\ \hline \frac{5}{2}X_1 & \frac{5}{2}X_2 & \frac{5}{2}X_3 & & & \\ \frac{5}{2}Y_1 & \frac{5}{2}Y_2 & \frac{5}{2}Y_3 & & 0 & \end{array} \right) \quad (4.27)$$

となる. これにより X, Y ボゾンの質量は

$$m_X^2 = m_Y^2 = \frac{25}{8}g^2v^2 \quad (4.28)$$

となる.

標準模型で表れるヒッグス粒子 Ψ は 5 表現に属する.

$$\phi_5 = \begin{pmatrix} T^1 \\ T^2 \\ T^3 \\ \phi^+ \\ -\phi^0 \end{pmatrix} = \left(\mathbf{3}, 1, -\frac{1}{3} \right) \oplus \left(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \frac{1}{2} \right) \quad (4.29)$$

真空期待値は

$$\langle \phi_5 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \quad (v_0 \sim 246 [\text{GeV}]) \quad (4.30)$$

のようにして, 標準模型と同じ値を取る. もし 24 表現ヒッグスと 5 表現ヒッグスに交わりがない場合, ポテンシャルは

$$V(\phi_5) = -\frac{\mu_5^2}{2}\phi_5^\dagger\phi_5 + \frac{\lambda}{4}(\phi_5^\dagger\phi_5)^2 \quad (4.31)$$

である.*2このとき, $v_0^2 = \frac{2\mu_5^2}{\lambda}$ となり, 標準模型に表れるゲージボゾンは

$$m_W^2 = \frac{g^2v_0^2}{4} \quad (4.32)$$

と質量を持つことになる. 検討中 (20250113): ヒッグスの DTsplitting 問題をここに入れる?

*2 第2章のポテンシャルの規格化とは異なる

4.4 フェルミオン質量

フェルミオンの質量項は $\bar{\psi}_R \chi_L + \text{h.c.}$ で書かれるが, カイラリティを顕にすると

$$\psi_L C \chi_L + \text{h.c.} = \chi_L^T C \psi_L + \text{h.c.} \equiv \bar{\psi}_R^c \chi_L \quad (4.33)$$

と書かれる. C は荷電共役変換の演算子である. このとき, 直積表現は

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{5}} \otimes \bar{\mathbf{5}} &= \bar{\mathbf{10}} \oplus \bar{\mathbf{15}} \\ \bar{\mathbf{5}} \otimes \mathbf{5} &= \mathbf{5} \oplus \mathbf{45} \\ \mathbf{10} \otimes \mathbf{10} &= \bar{\mathbf{5}} \oplus \mathbf{45} \oplus \mathbf{50} \end{aligned}$$

と分解されるため, $\mathbf{5}$ 表現か $\mathbf{45}$ 表現に属するスカラー場とのみ結合することがわかる. 既に見たように, (4.29) のように標準模型で現れるヒッグス粒子を考えることができた. そのため標準模型で現れる質量の関係を得るためには $\mathbf{5}$ 表現ヒッグスを用いることで記述することができる. また, $SU(5)$ 対称性を破る随伴表現ヒッグスはこれらのフェルミオンと結合しないため, 大統一スケールとフェルミオンの質量スケールを離して考えることが自然と可能となる.

はじめに $\bar{\mathbf{5}} \otimes \mathbf{5}$ の場合を考える.

$$\mathcal{L} \supset Y^{mn} (\psi_{\mathbf{5}mL}^T)_a C (\psi_{\mathbf{10}nL})^{ab} (\phi_{\mathbf{5}})^\dagger_b + \text{h.c.} \quad (4.34)$$

ヒッグスに真空期待値を持たせると,

$$upquarkmass \quad (4.35)$$

となり, 上系列クォークの質量を導くことができる. 一方で, $\mathbf{10} \otimes \mathbf{10}$ の場合は

4.5 $SU(5)$ 大統一理論の予言

$SU(5)$ 大統一理論では, 素粒子標準模型に現れる粒子を $SU(5)$ 群の $\bar{\mathbf{5}}$ 表現や $\mathbf{10}$ 表現, 随伴表現の $\mathbf{24}$ 表現に当てはめて考えた. これにより素粒子標準模型には存在しない現象が予言される.

4.5.1 陽子崩壊

$SU(5)$ 大統一理論では式 (4.14) で見たように, 新たに X, Y ゲージボゾンの存在が予言される.

4.5.2 電荷の量子化

式 (4.2) で述べているが, 標準模型では予言されない電荷の量子化が行える. これは $SU(5)$ 大統一理論がクォーク, レプトンを $SU(5)$ の単純群で記述し, 式 (4.3) のように $\bar{\mathbf{5}}$ 表現に当てはめることで

$$\text{Tr} Q = 0$$

と標準模型では与えられない条件を満足させているためである.

4.5.3 ワインバーグ角

標準模型に現れるフェルミオンやゲージ粒子が, $SU(5)$ 大統一理論でどのように当てはめられるのかを見てきた. ゲージ結合定数が大統一スケールで g_5 と統一されたことにより, 理論的にワインバーグ角を決定するこ

とができる。それを見るために $U(1)_Y$ ゲージ群の結合定数を $SU(5)$ の中で規格化する。フォトン場を A_μ , 中性弱ボソンを Z_μ とすると

$$\begin{aligned} D_\mu &\supset \partial_\mu - i\frac{g_5}{2}[W^0 L_{11} + B L_{12}] \\ &= \partial_\mu - i\frac{g_5}{2}[(\sin \theta_W L_{11} + \cos \theta_W L_{12})A_\mu + (\cos \theta_W L_{11} - \sin \theta_W L_{12})Z_\mu] \\ &\equiv \partial_\mu - i[eQ A_\mu + g'Q_Z Z_\mu] \end{aligned}$$

となる。このとき、電荷を表す演算子 Q は、

$$eQ = \frac{g_5}{2}(\sin \theta_W L_{11} + \cos \theta_W L_{12}) \quad (4.36)$$

と関係する。一方で電荷演算子はアイソスピン $I_3 = L_{11}$ と超電荷 $Y = \sqrt{\frac{5}{3}}L_{12}$ を用いると

$$Q = L_{11} + \sqrt{\frac{5}{3}}L_{12} \quad (4.37)$$

とかける。これらを比較することで、

$$\begin{aligned} e &= g_5 \sin \theta_W \\ g' &= \frac{e}{\cos \theta_W} = \sqrt{\frac{3}{5}}g_5 = g_5 \tan \theta_W \\ \sin \theta_W &= \sqrt{\frac{3}{8}} \end{aligned} \quad (4.38)$$

と大統一スケールでの値を预言することができる。 $\sin \theta_W$ は標準模型では値を预言することはできなかったが、大統一理論では预言ができることが示された。

第Ⅱ部

研究の部分

第 5 章

SU(5) 大統一理論の拡張模型

5.1 高次元表現ヒッグスを用いた拡張

15 表現ヒッグスを

付録 A

群論

この章では、大統一理論に必要な数学の内容をまとめている。詳しい証明や例については数学の専門書を参考にする。次のことを認め、話を進める。

X を集合とする。写像 $\phi: X \times X \rightarrow X$ のことを集合 X 上の演算と言う。これ以降では $a, b \in X$ に対する写像を $\phi(a, b)$ の代わりに ab と書く。

A.1 群

群とは次の性質を持つものである。

Definition 1 (群). G を空ではない集合とする。集合 G 上で演算が定義されており、次の性質を満たすとき、 G を群と言う。

1. 単位元と呼ばれる $e \in G$ が存在し、全ての $a \in G$ に対して $ae = ea = a$ となる。
2. すべての $a \in G$ に対し、 $b \in G$ が存在し、 $ab = ba = e$ となる。この元 b は a の逆元と呼ばれ、 a^{-1} と書く。
3. すべての $a, b, c \in G$ に対して、 $(ab)c = a(bc)$ が成り立つ。

特に、性質 3. は結合法則と呼ばれている。群の元 $a, b \in G$ に対して $ab = ba$ が成り立つとき、 a, b は可換である。 G の任意の元 a, b が可換なら、 G を可換群 (Abel 群) と呼ぶ。

A.2 Lie 群

A.3 表現

A.4 カルタン分類

参考文献

- [1] H. Georgi and S. L. Glashow. Unity of all elementary-particle forces. *Phys. Rev. Lett.*, 32:438–441, Feb 1974.