Notas del capítulo 5: sucesiones, inducción matemática y recurrencia.

Cristian Rodríguez.

September 21, 2023

0.1 Sucesión

Una sucesión es una función cuyo dominio es ya sean todos los naturales entre dos naturales dados o todos los naturales mayores o iguales a un natural dado.

Definición de la profe: Es una función que tiene por dominio el conjunto de los naturales.

0.1.1 Y así sucesivamente

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 \ldots \longrightarrow A_k = 2^k$$

a_k se lee "a subíndice k"; cada elemento suyo se denomina término.

0.1.2 Notación de sucesión

Notación hasta n: $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n,.$
Notación infinita: $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$

Una *fórmula explícita* o *fórmula general* para una sucesión es una regla que muestra cómo los valores de a_k dependen de k, por ejemplo $a_k = 2^k$.

0.1.3 Valores

Las sucesiones infinitas pueden tener valores finitos; $c_j = (-1)^j$ para todo entero $j \geq 0$.

Dos fórmulas diferentes pueden dar a sucesiones con los mismos términos:

$$a_k = \frac{k}{k+1} \forall k \in Zk \geq 1,$$

$$b_i = \frac{i-1}{i} \forall i \in Z \geq 2.$$

0.2 notación de suma

DEFINICIÓN: Si m y n son números naturales y $m \leq n$, el símbolo

$$\sum_{k=m}^{n} a_k$$

Se lee como la suma desde k igual a m a n de a subíndice k, es la suma detodos los términos de $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots a_n$. Decimos que $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots a_n$ es la forma desarollada de la suma y se escribe como

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots a_n.$$

LLamamos a k al *índice* de la suma, a m al *límite inferior* de la suma y a n al *límite superior* de la suma.

0.3 Definición recursiva

Una definición matemática más precisa de la suma, llamada una definición recursiva, es la siguiente: Si m es cualquier entero, entonces

$$\sum_{k=m}^{m} a_k = a_m \text{ y } \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n-1} a_k + a_n \forall n \in N > m$$

Cuando se resuelven problemas, con frecuencia es útil reescribir una suma usando la forma recursiva de la definición ya sea separando el término final de una suma o agregando un término final a una suma.

0.4 Notación de producto

DEFINICIÓN: Si m y n son enteros y $m \leq n$, el símbolo

$$\prod_{k=m}^{n}$$

se lee como la *forma de producto de k es igual a m a n de a subíndice k*, es el producto de todos los términos, $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n$. Se escribe

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n.$$

0.4.1 Propiedades

1.
$$\sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k = \sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k)$$

2.
$$c \cdot \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} c \cdot a_k$$

3.
$$(\prod_{k=m}^{n} a_k) \cdot (\prod_{k=m}^{n} b_k) = \prod_{k=m}^{n} (a_k \cdot b_k)$$

4.
$$\sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{p} a_k = \sum_{k=m}^{p} a_k$$

0.5 Factorial

DEFINICIÓN: Para cada entero postivo n, la cantidad n *factorial* que se denota por $n!$, se define como el producto de todos los enteros de 1 a n.

$$n! = n \cdot (n-1) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Cero factorial, que se denota por 0!, se define como 1:

$$0! = 1.$$

0.6 Combinaciones

DEFINICIÓN: Sean n y r enteros con $0 \leq r \leq n$. El símbolo

$$\left(\begin{array}{c} n \\ r \end{array} \right)$$

Se lee *'n se seleccionan r'* y representa el número de subconjuntos de tamaño r que se pueden elegir de un conjunto con n elementos.

Fórmula: Para todo entero n y r con $0 \leq r \leq n$,

$$\left(\begin{array}{c} n \\ r \end{array} \right) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

0.7 Inducción matemática

0.7.1 Etapas

1. Base inductiva: probar que la supocisión se cumple para $n \in N$ específico.
2. Hipótesis inductiva: Se sustituye $n = h$.
3. Tesis inductiva: Se sustituye $n = h + 1$. Es lo que debo demostrar a partir de la Hipótesis.
4. Demostración.

0.7.2 Definición

Sea $P(n)$ una propiedad que se define para enteros n y sea a un entero fijo. Suponga que los siguientes dos enunciados son verdaderos:

1. $P(n)$ es verdadera.
2. Para todo entero $k \geq a$, si $P(k)$ es verdadera entonces $P(k+1)$ es verdadera.

0.8 Definiciones varias.

0.8.1 Múltiplo:

$$a = \dot{b} \iff \exists k \in N / a = b \cdot h$$

0.8.2 Divisible:

$$a/b \iff \exists k \in N / b = b \cdot k$$

0.9 Fórmulas varias.

- Fórmula cuadrática: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$
- $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$
- $(a + b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3$
- $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$
- $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$
- $(\frac{a}{b})^{-1} = \frac{b}{a}$
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $a^m \cdot a^m = (a \cdot b)^m$
- $a^m \div a^n = a^{m-n}$
- $a^m \div a^m = (a \div b)^m$
- $(a^m)^p = a^{m \cdot p}$
- $a^{-n} = (\frac{1}{a})^n$