Notas del capítulo 5: sucesiones, inducción matemática y recurrencia.

Cristian Rodríguez.

Sucesión

Una sucesión es una función cuyo dominio es ya sean todos los naturales entre dos naturales dados o todos los naturales mayores o iguales a un natural dado.

Definición de la profe: Es una función que tiene por dominio el conjunto de los naturales.

Y así sucesivamente

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 \ldots \longrightarrow A_k = 2^k$$

a_k se lee "a subíndice k"; cada elemento suyo se denomina término.

Notación de sucesión

Notación hasta n: $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n,.$

Notación infinita: $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$

Una *fórmula explícita* o *fórmula general* para una sucesión es una regla que muestra cómo los valores de a_k dependen de k, por ejemplo $a_k = 2^k$.

Valores

Las sucesiones infinitas pueden tener valores finitos; $c_j = (-1)^j$ para todo entero $j \geq 0$.

Dos fórmulas diferentes pueden dar a sucesiones con los mismos términos:

$$a_k = \frac{k}{k+1} \forall k \in Z k \geq 1,$$

$$b_i = \frac{i-1}{i} \forall i \in Z \geq 2.$$

notación de suma

DEFINICIÓN: Si m y n son números naturales y $m \leq n$, el símbolo

$$\sum_{k=m}^{n} a_k$$

Se lee como la suma desde k igual a m a n de a subíndice k, es la suma detodos los términos de $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots a_n$. Decimos que $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots a_n$ es la forma desarollada de la suma y se escribe como

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots a_n.$$

LLamamos a k al *índice* de la suma, a m al *límite inferior* de la suma y a n al *límite superior* de la suma.

Definición recursiva

Una definición matemática más precisa de la suma, llamada una definición recursiva, es la siguiente: Si m es cualquier entero, entonces

$$\sum_{k=m}^{m} a_k = a_m \text{ y } \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n-1} a_k + a_n \forall n \in N > m$$

Cuando se resuelven problemas, con frecuencia es útil reescribir una suma usando la forma recursiva de la definición ya sea separando el término final de una suma o agregando un término final a una suma.

Notación de producto

DEFINICIÓN: Si m y n son enteros y $m \leq n$, el símbolo

$$\prod_{k=m}^{n}$$

se lee como la *forma de producto de k es igual a m a n de a subíndice k*, es el producto de todos los términos, $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n$. Se escribe

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n.$$

Propiedades

1. $$\sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k = \sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k)$$

2. $$c \cdot \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} c \cdot a_k$$

3. $$(\prod_{k=m}^{n} a_k) \cdot (\prod_{k=m}^{n} b_k) = \prod_{k=m}^{n} (a_k \cdot b_k)$$

4. $$\sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{p} a_k = \sum_{k=m}^{p} a_k$$

Factorial

DEFINICIÓN: Para cada entero postivo n, la cantidad n *factorial* que se denota por $n!$, se define como el producto de todos los enteros de 1 a n.

$$n! = n \cdot (n-1) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Cero factorial, que se denota por $0!$, se define como 1:

$$0! = 1.$$

Combinaciones

DEFINICIÓN: Sean n y r enteros con $0 \leq r \leq n$. El símbolo

$$\binom{n}{r}$$

Se lee *'n se seleccionan r'* y representa el número de subconjuntos de tamaño r que se pueden elegir de un conjunto con n elementos.

Fórmula: Para todo entero n y r con $0 \leq r \leq n$,

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Inducción matemática

Etapas

1. Base inductiva: probar que la supocisión se cumple para $n \in N$ específico.
2. Hipótesis inductiva: Se sustituye $n = h$.
3. Tesis inductiva: Se sustituye $n = h + 1$. Es lo que debo demostrar a partir de la Hipótesis.
4. Demostración.

Sucesión aritmética

Definición

Una sucesión $a_0, a_1, a_2, \ldots$ se llama una sucesión aritmética, si y sólo si, existe una constante d tal que

$$a_k = a_{k-1} + d \forall N k \geq 1$$

De lo que se tiene que,

$$a_n = a_0 + dn$$

Sucesión geométrica

Definición

Una sucesión $a_0, a_1, a_2, \ldots$ se llama una sucesión geométrica, si y sólo si, existe una constante r tal que

$$a_k = r a_{k-1} \forall k \in N > 1$$

De lo que se tiene que,

$$a_n = a_0 r^n \forall n \in N \geq 0$$

Definición

Sea $P(n)$ una propiedad que se define para enteros n y sea a un entero fijo. Suponga que los siguientes dos enunciados son verdaderos:

1. $P(n)$ es verdadera.
2. Para todo entero $k \geq a$, si $P(k)$ es verdadera entonces $P(k+1)$ es verdadera.

Definiciones varias.

Múltiplo:

$$a = \dot{b} \iff \exists k \in N / a = b \cdot h$$

Divisible:

$$a/b \iff \exists k \in N / b = b \cdot k$$

Fórmulas varias.

- Fórmula cuadrática: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$
- Suma algebráica: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$
- Suma geométrica: $\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$
- Suma de cuadrados: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$
- Suma de impares: $\sum_{i=1}^{n} (2n - 1) = n^2$
- Suma de pares: $\sum_{i=1}^{n} (2n) = n^2 + n$
- $\sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n+2)}{3} \forall n \in E \geq 2$
- $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$
- $(a + b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3$
- $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$
- $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$
- $(\frac{a}{b})^{-1} = \frac{b}{a}$
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $a^m \cdot a^m = (a \cdot b)^m$
- $a^m \div a^n = a^{m-n}$
- $a^m \div a^m = (a \div b)^m$
- $(a^m)^p = a^{m \cdot p}$
- $a^{-n} = (\frac{1}{a})^n$