# 



# Módulo 4: Estatística e Modelagem de Dados

Aula 17: Regressão Logística





#### Instrutora

# Cristiane Rodrigues

- Bacharel em Matemática UNESP Rio Claro.
- Mestre em Estatística USP Piracicaba
- Experiências Profissionais:
  - Modelagem de Credito para PF e PJ Banco Bradesco
  - Experiência com Segmentação e Análise de Series temporais Atento
  - Consultora Analítica no SAS Institute Brasil
  - Professora do curso SAS Academy for Data Science



#### Índice

- Revisão Regressão Logística
- Motivação
- Forma Funcional do Modelo de Regressão Logística
- Aplicações
- Superfície de Ajuste e Interpretação
- Odds Ratio
- Ponto de Corte e Estimação
- Tratamento das variáveis
- Seleção de Variáveis
- Matriz de Confusão
- Curva ROC



#### Revisão: Supervised X Unsupervised Learning

 Cenário 1: Você é uma criança e vê diferentes tipos de animais, seu pai lhe diz que esse animal é um cão ... depois dele, dando algumas dicas, você vê um novo tipo de cachorro, que você nunca viu antes, mas você o identifica como um cão e não como gato ou macaco ou batata.

Este cenário é um exemplo de classificação supervisionada, onde você tem alguém para orientá-lo e aprender conceitos, de modo que, quando uma nova amostra chega ao seu caminho, mesmo que você não tenha visto antes, você ainda pode identificá-la.

 Cenário2: Você vai fazer uma viagem para um novo país, o qual você não conhece muito sobre sua comida, cultura, idioma, etc. No entanto, a partir do primeiro dia, você começa a caminhar por lá, aprendendo o que comer e o que não comer, encontrar uma caminho para a praia ou para o hotel, etc.

Este cenário é um exemplo de classificação não supervisionada, onde você tem muitas informações, mas não sabe o que fazer inicialmente. Uma distinção importante é que, não há ninguém para guiá-lo e você tem que encontrar uma saída por conta própria. Então, com base em alguns critérios, você começa a gerar essas informações em grupos que fazem sentido para você.

#### Revisão: Supervised Learning

- Usam dados com marcação da variável resposta
- Variáveis preditoras + variável target
- Objetivo: prever a variável target, usando as variáveis preditoras
  - Regressão: variável target é contínua
  - Classificação: variável target é composta de categorias
- Nomenclaturas para as variáveis
  - Independentes = Preditoras = Características = Input
  - Target = Dependente = Resposta

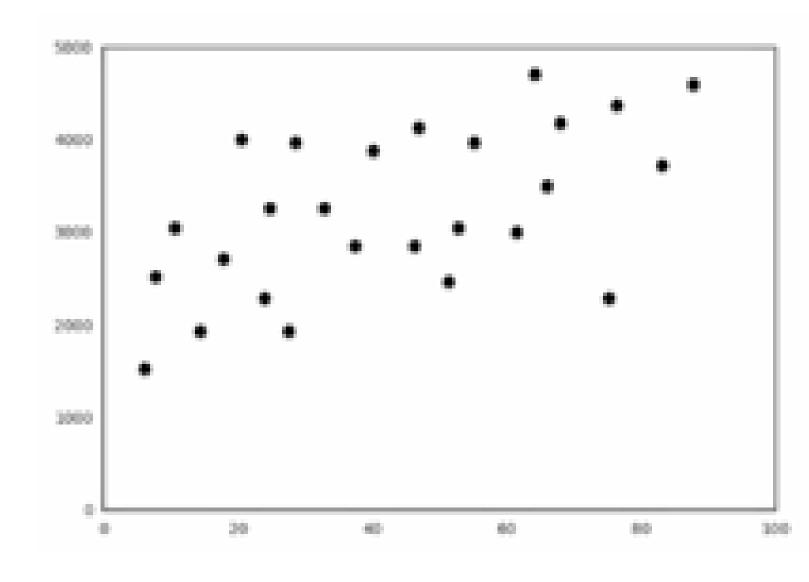


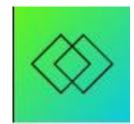
- $y = \beta_0 + \beta_1 x + e$ 
  - -y = target
  - -x = variável preditora contínua
  - $\beta_0$ ,  $\beta_1 = parâmetros do modelo$
- Como escolher  $\beta_0$  e  $\beta_1$ ?

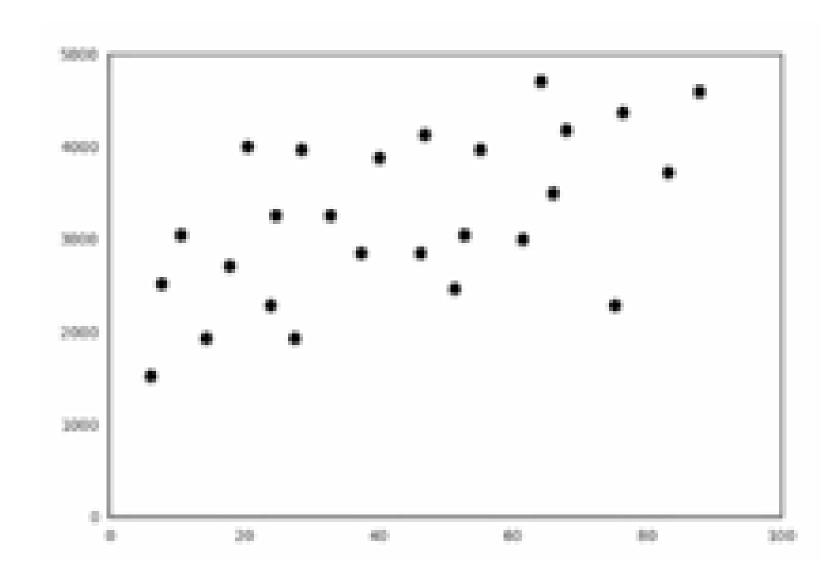
Os valores de  $\beta_0$  e  $\beta_1$  podem ser estimados pelo método dos mínimos quadrados, minimizando a soma dos erros quadráticos

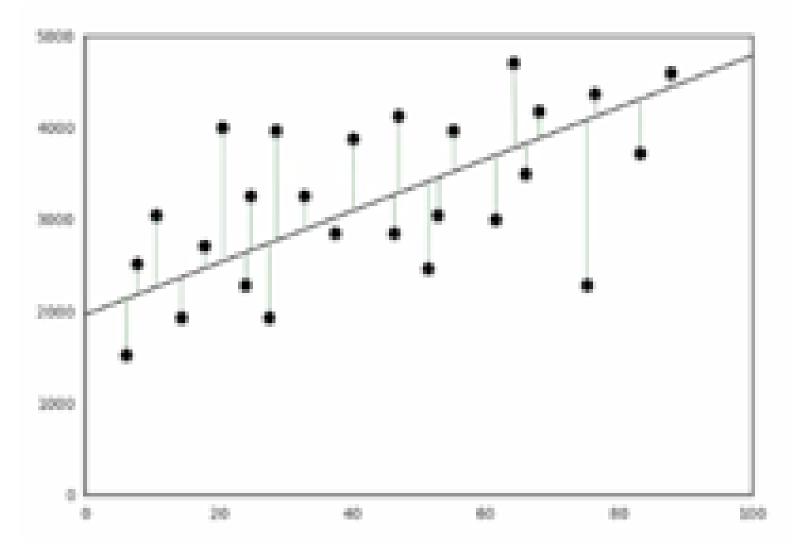
$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$$

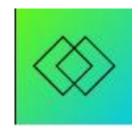


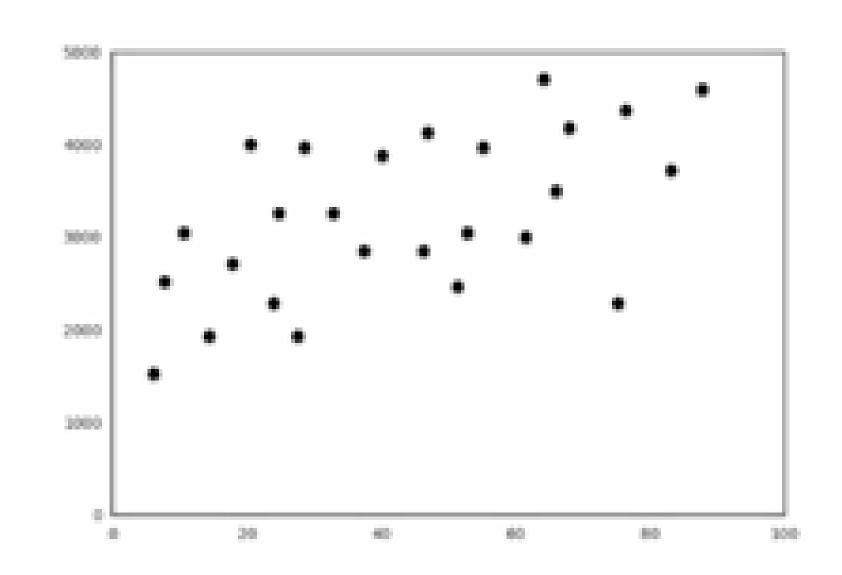


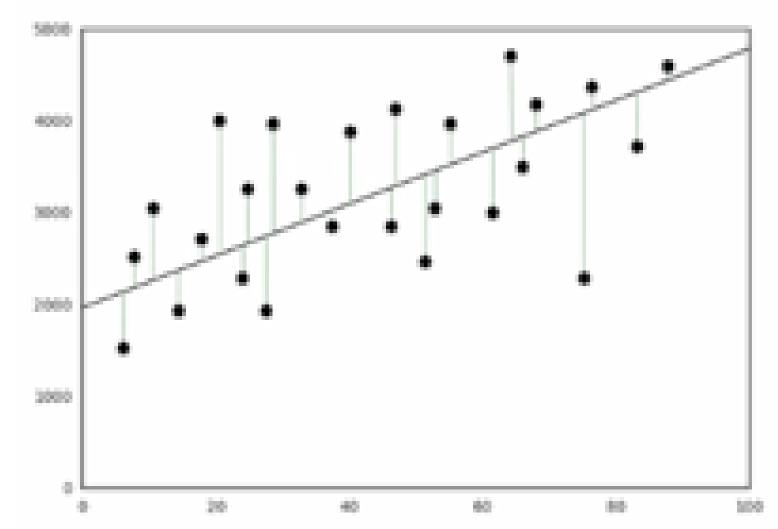


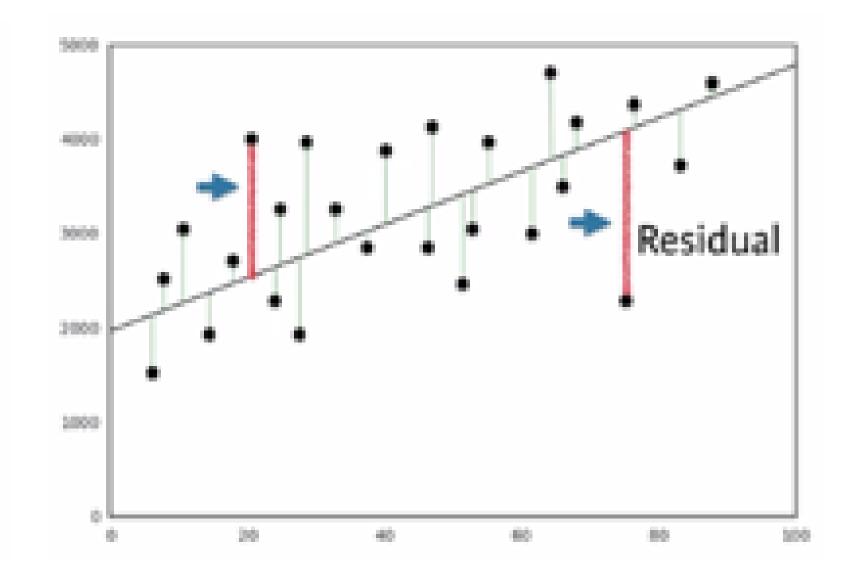




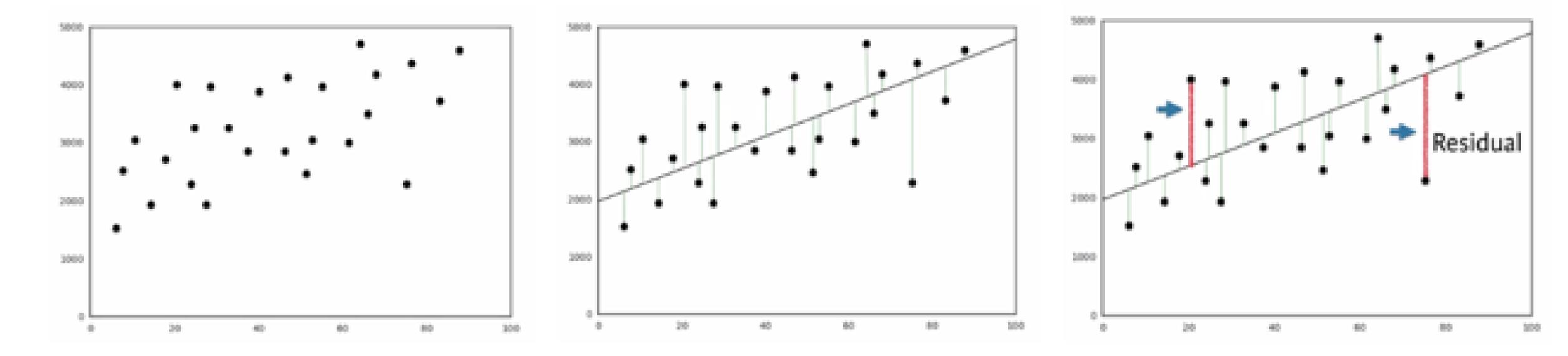




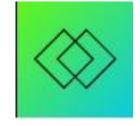


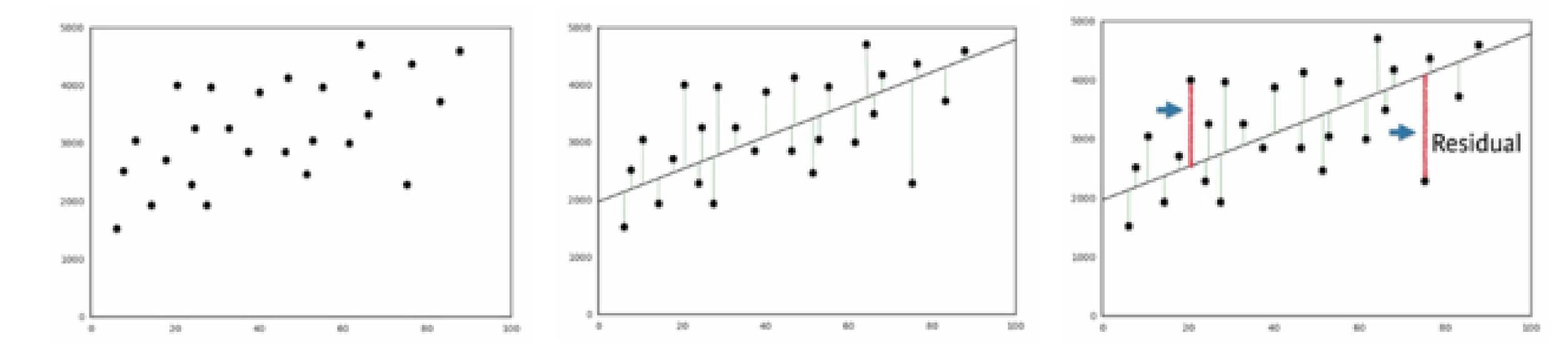






 Na regressão linear o objetivo é escolher a reta que minimiza a função de erro, ou seja, que diminui a distância entre o ajuste e os dados





- Na regressão linear o objetivo é escolher a reta que minimiza a função de erro, ou seja, que diminui a distância entre o ajuste e os dados
- Na regressão linear múltipla temos a inserção de mais variáveis preditoras e podemos escrever o modelo da seguinte forma:

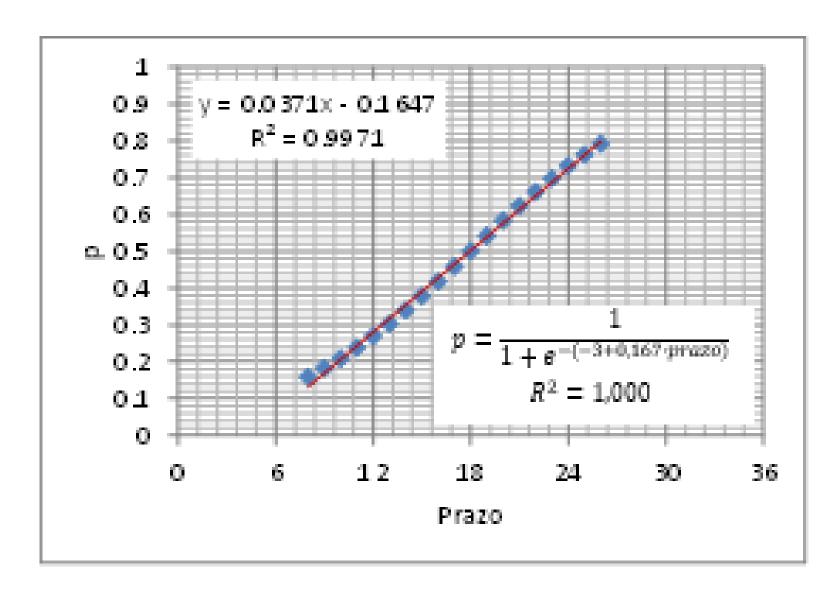
$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k$$



#### Comparação

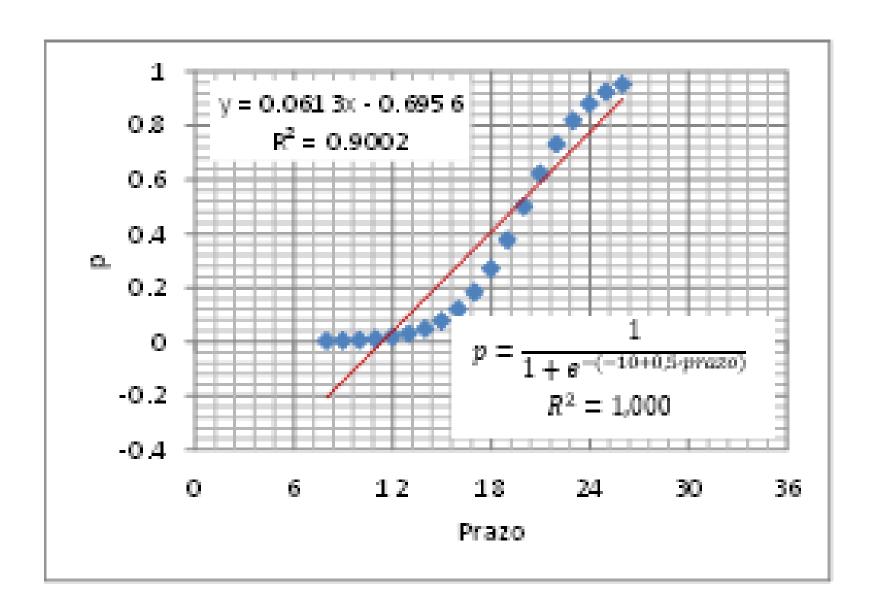
Ajustando modelos de regressão linear para dois tipos de dados diferentes

 Probabilidade variando entre 0,15 e 0,85 substituição



A equação linear **é suficiente** para modelar bem os dados

 Probabilidade menor que 0,15 ou maior que 0,85



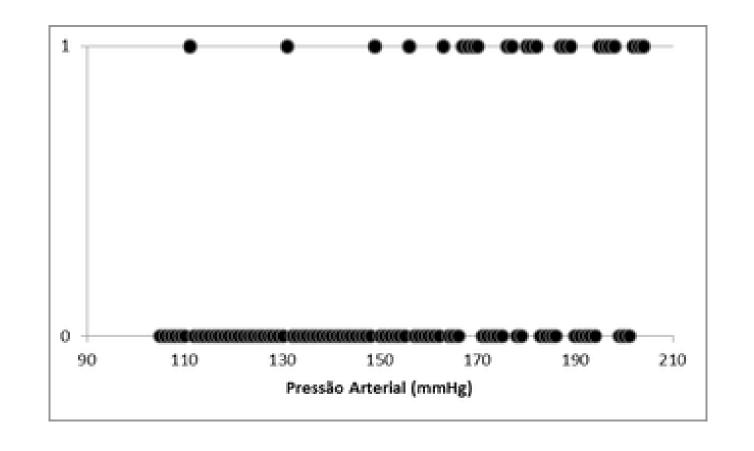
A equação linear **não é suficiente** para modelar bem os dados



#### Motivação

- As equações apresentadas no tópico anterior são equações do tipo linear.
- Nem sempre as variáveis se comportam como uma reta, portanto nem sempre uma equação linear será uma equação adequada para descrever o comportamento de uma variável em relação à outra. Isso é especialmente verdade quando temos uma variável binária: 0 ou 1.

Por exemplo: queremos saber os valores de pressão arterial entre pessoas que tiveram ou não um AVC. Se classificarmos "presença de AVC" igual a 1 e "ausência de AVC" igual a 0, teremos um gráfico tipo o abaixo, o qual não parece se ajustar bem com uma reta



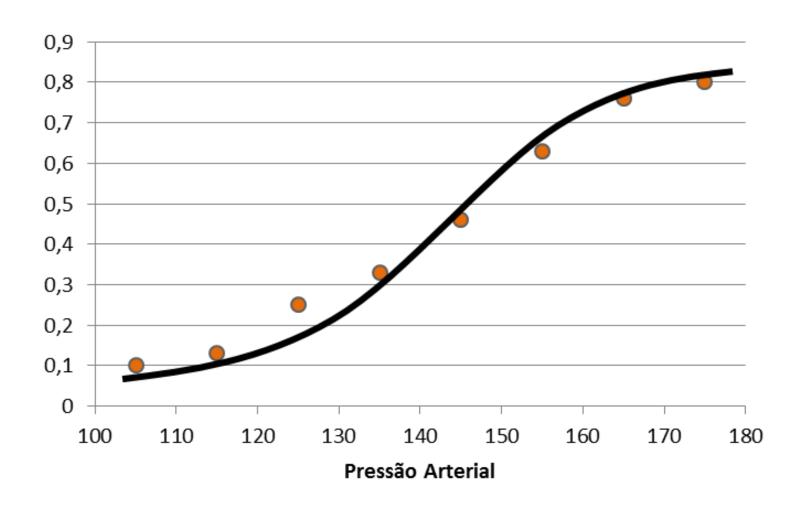
- só tem dois valores: 0 ou 1
- os pontos estão mais concentrados próximos:
  - ao valor 0, em que os valores de pressão arterial são mais baixos
  - ao valor 1, em que os valores de pressão arterial são mais altos
  - significa que: provavelmente à medida que aumenta a pressão arterial, aumenta a incidência de AVC.

Mas em quanto?



#### Forma Funcional

 Quando transformamos uma variável com valores 1 e 0 em proporções, acontece um fenômeno que o gráfico fica mais ou menos assim:



 Algum estatístico percebeu que essa curva poderia ser escrita em forma de função, porém ela não é linear, mas sim bem mais complexa, e pode ser descrita assim:

$$p_i = \frac{1}{1 + e^{-n}}$$

em que  $p_i$  é a proporção de eventos para cada  $x_i$  e

$$n = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_k x_{ki}$$



#### Função de ligação logit

- Essa probabilidade em forma de S é muito difícil de interpretar pois o y aumenta em velocidades diferentes ao longo do eixo x.
- A ideia é tornar a equação uma reta novamente para ficar mais fácil de interpretar o resultado
- Para fazer isso, vamos utilizar a transformação Logit, a qual é composta por duas transformações
- 1. Transformar o p em uma chance:  $\frac{p}{1-p}$
- 2. Aplicando o logaritmo a chance

$$logit(p_i) = ln\left(\frac{p_i}{1 - p_i}\right) = ln\left(\frac{\frac{1}{1 + e^{-n}}}{1 - \frac{1}{1 + e^{-n}}}\right) = ln\left(\frac{\frac{1}{1 + e^{-n}}}{\frac{e^{-n}}{1 + e^{-n}}}\right) = ln\left(\frac{1}{e^{-n}}\right) = ln(e^n) = n$$

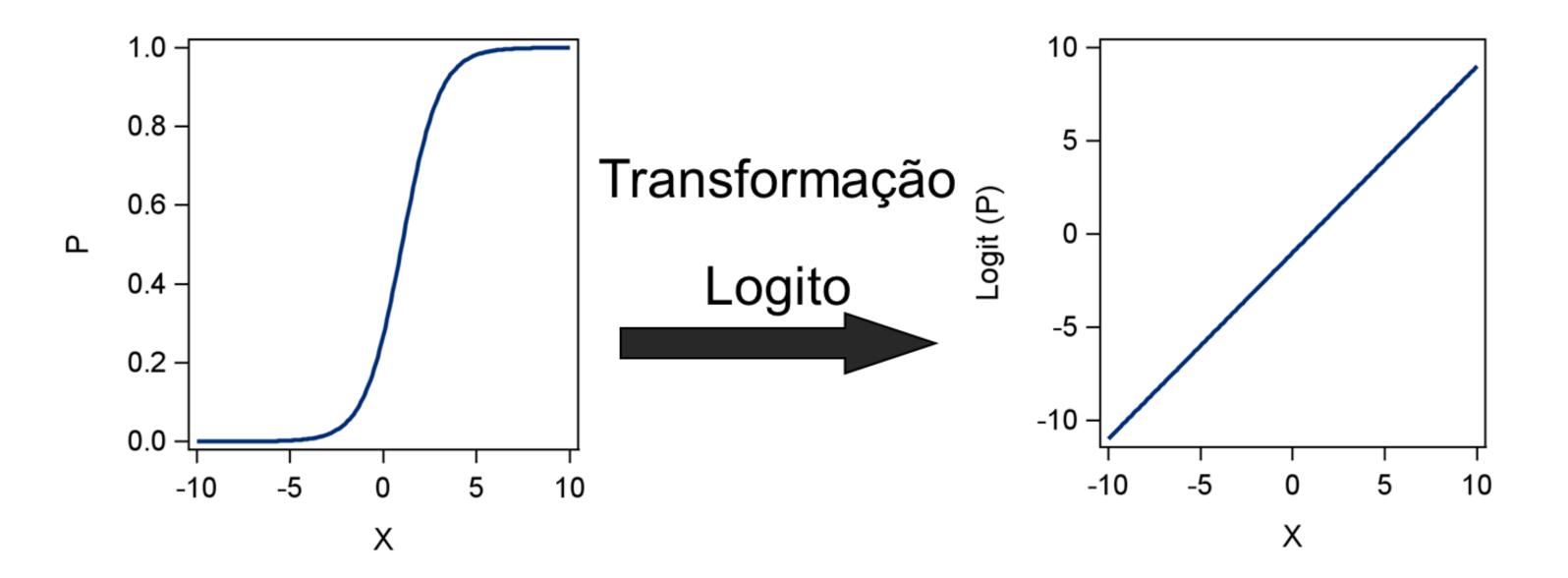
$$= \beta_o + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_k x_{ki}$$

Desta forma voltamos para uma relação linear entre o logit de  $p_i$  e as variáveis input.



#### Transformação

 Usando a transformação Logito podemos sair de um problema não linear e voltar para a modelagem de um problemas linear.





## Aplicações da Regressão Logística - Classificação

• Marketing:

Objetivo: Encontrar segmentos de clientes mais prováveis a aderir a uma promoção

Target: Se o cliente aderiu ou não a alguma promoção passada

Inputs: Histórico de compras, Localidade, Salário,...

• RH – Pedido de demissão de funcionários:

Objetivo: Verificar a probabilidade do funcionário deixar a empresa

Target: Se o funcionário saiu ou não da empresa no mês anterior

Inputs: Tempo de servico, nível de satisfação, salário, cargo,...

• Credit Scoring:

Objetivo: Verificar a probabilidade do cliente entrar em default

Target: Se o funcionário entrou ou não e default nos últimos 90 dias

Inputs: Saldo médio em cc, se recebe em conta, saldo máximo, quantidade de meses em risco

• Detecção de Fraude:

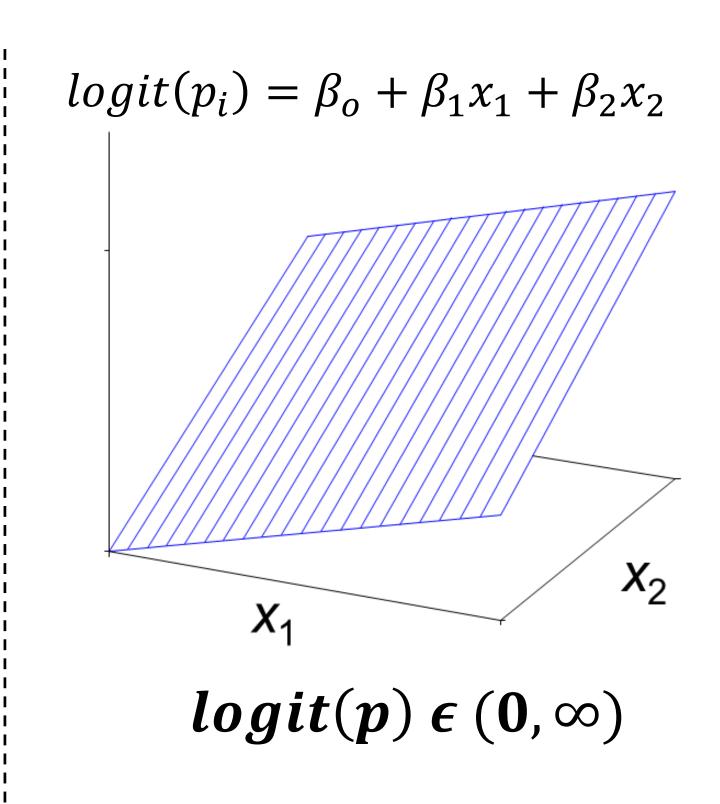


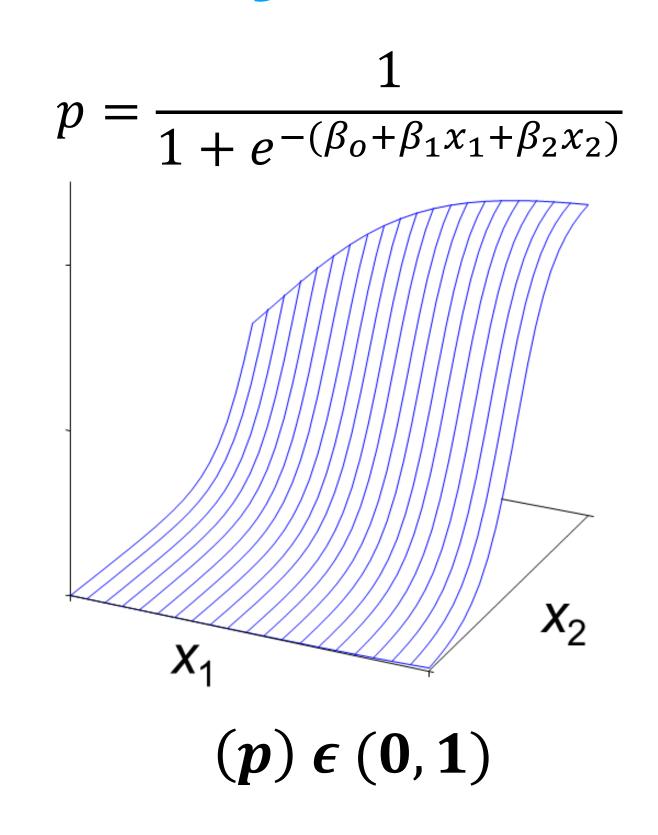
Target: Se o cliente cometeu ou não fraude na transação com cartão de crédito pela internet

Inputs: Valor médio de pagamento por sessão, número de sessões abertas, ...



#### Superfície de Ajuste e Interpretação





Interpretação: Mudar uma unidade em x2

 $\beta_2$  muda na <u>logit</u>

 $100(\exp(\beta_2)-1)\%$  muda na <u>odds</u>

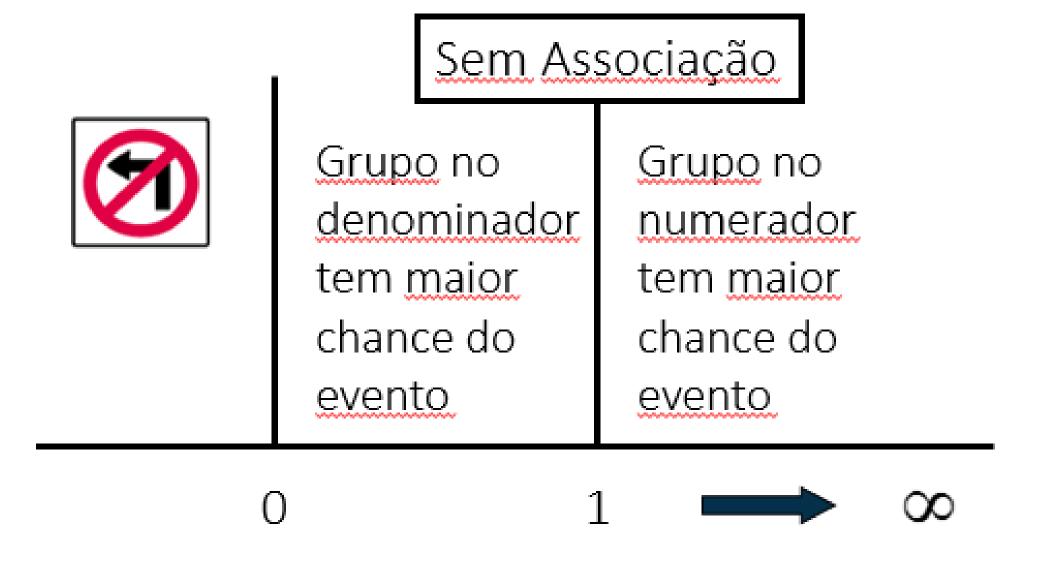


#### **Odds Ratio**

•  $Odds = \frac{p}{1-p} = e^n$ , chance do evento ocorrer. Em que  $n = \beta_o + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_k x_{ki}$ .

• 
$$Odds_{Ratio} = \frac{odds_{grupo_A}}{odds_{grupo_B}} = \frac{e_{grupo\_A}^n}{e_{grupo\_B}^n}$$
, chance do evento ocorrer se for do Grupo\_A com relação ao Grupo\_B

#### Odds Ratio $\epsilon$ $(0, \infty)$



- Odds Ratio = 1  $\Rightarrow \frac{Odds \ Grupo1}{Odds \ Grupo2} = 1 \Rightarrow$  p1=p2, ou seja, não há associação entre a variável preditora e a resposta
- Odds Ratio > 1  $\Rightarrow \frac{Odds \ Grupo1}{Odds \ Grupo2} > 1 \Rightarrow Odds \ Grupo1 > Odds \ Grupo2$ , ou seja, o grupo no numerador tem maior chance do evento ocorrer que o grupo no denominador
- Odds Ratio < 1  $\rightarrow \frac{odds \ Grupo1}{odds \ Grupo2}$  < 1  $\rightarrow Odds \ Grupo1$  <  $Odds \ Grupo2$ , ou seja, o grupo no numerador tem menor chance do evento ocorrer que o grupo no denominador



#### Odds Ratio em um Modelo de Regressão Logística

• Considere o seguinte modelo de regressão logística estimado

$$logit(p) = -.7567 + .4373*(sexo)$$

em que feminino é codificado com 1 e masculino com 0

• Razão de chances estimada (Femino para Masculino) é:

odds ratio = 
$$\frac{\text{odds feminino}}{\text{odds masculino}} = \frac{e^{n1}}{e^{no}} = \frac{e^{-0.7567 + 0.4373*(1)}}{e^{-0.7567 + 0.4373*(0)}} = \frac{e^{-0.7567 + 0.4373*(1)}}{e^{-0.7567}} = e^{0.4373} = 1.55$$

 Interpretação: A chance de ocorer o sexo feminino é 1,55 vezes a chance de ocorrer o sexo masculino



#### Discriminação e Estimação

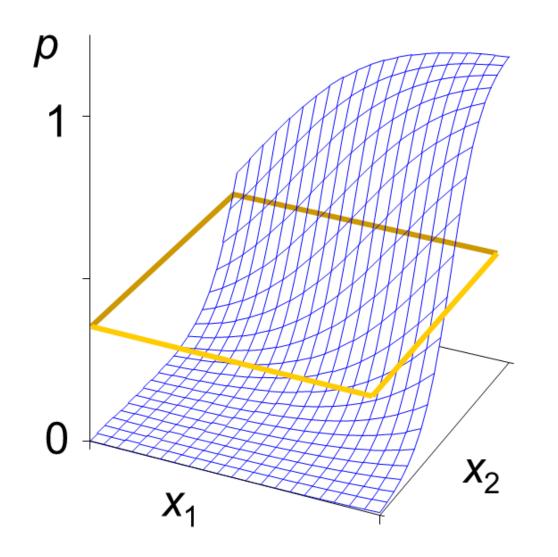
above

below

*X*<sub>1</sub>

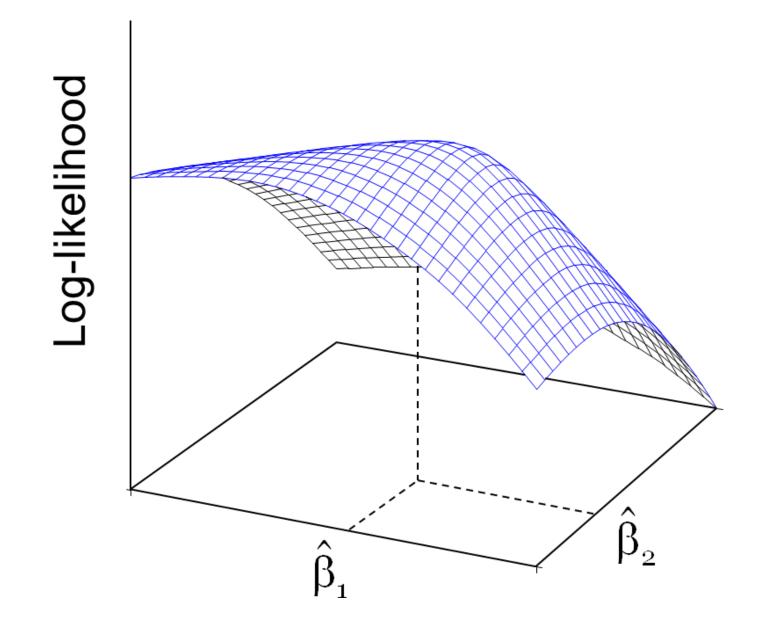
 $X_2$ 

Discriminação





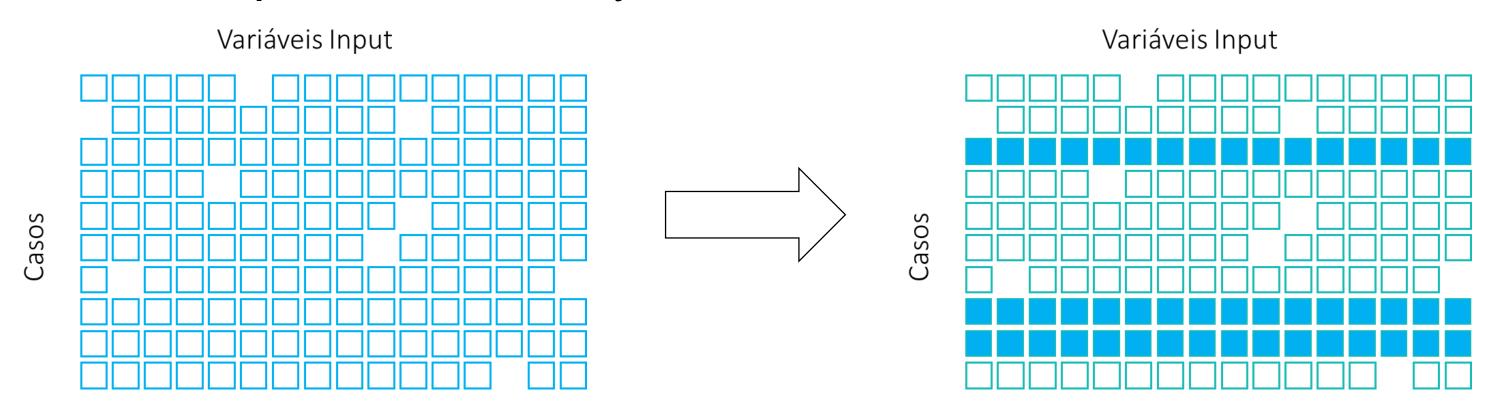
Estimação



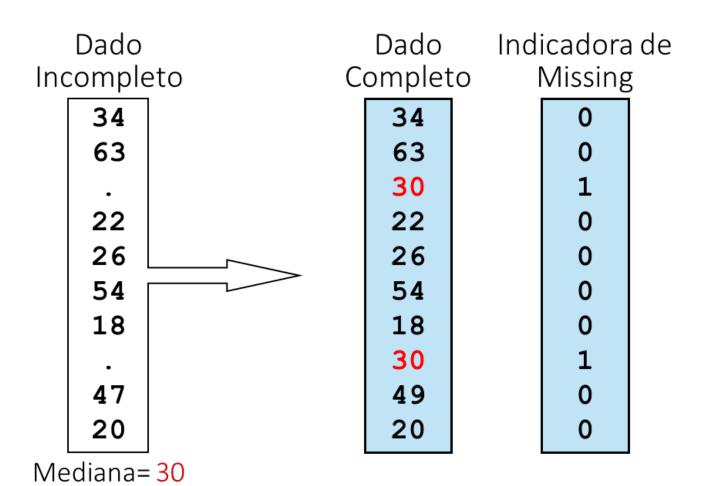


#### Tratamento das variáveis - Missing

1. Complete case analysis



2. Imputação + Variáveis indicadoras de missing



Métodos para substituir o missing na imputação:

 Média, Mediana, Moda, Zero, Criação de nova categoria, regressão,...

Criando a indicadora de missing:

• Indicadora de Missing = 
$$\begin{cases} 1, se \ a \ obs \ \acute{e} \ missing \\ 0, \quad caso \ contrario \end{cases}$$





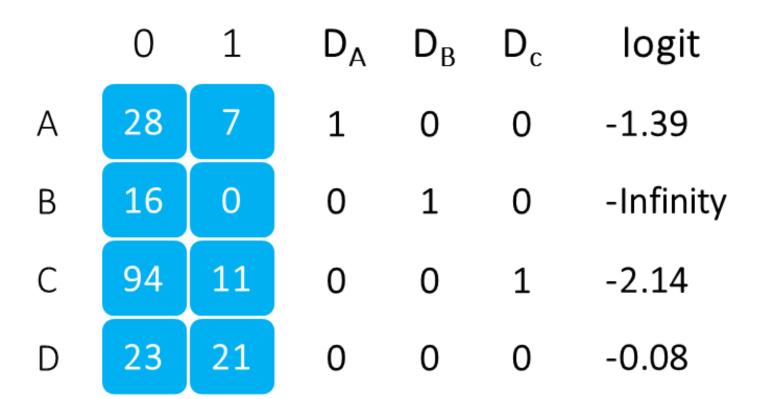
#### Tratamento das variáveis - Categoricas

Problemas causados por variável input categórica

- 1. <u>Variáveis com muitos níveis</u>: se expandir em dummys
  - aumenta a dimensão
  - produzirá inputs redundantes e irrelevantes
- 2. Quase completa separação: Quando um nível da categoria tem taxa de evento target igual a 0 ou a 100% das observações
  - afeta a convergência dos parâmetros
  - Pode levar a escolha errada das variáveis

<u> </u>	classe			<b> </b>	D_B	D_0
<b>1</b> B			1	0	1	
2 A			2	1	0	
<b>B</b>			3	0	1	
С			4	0	0	
i A			5	1	0	
A			6	1	0	
,			7	0	0	

Criando dummys da variável classe



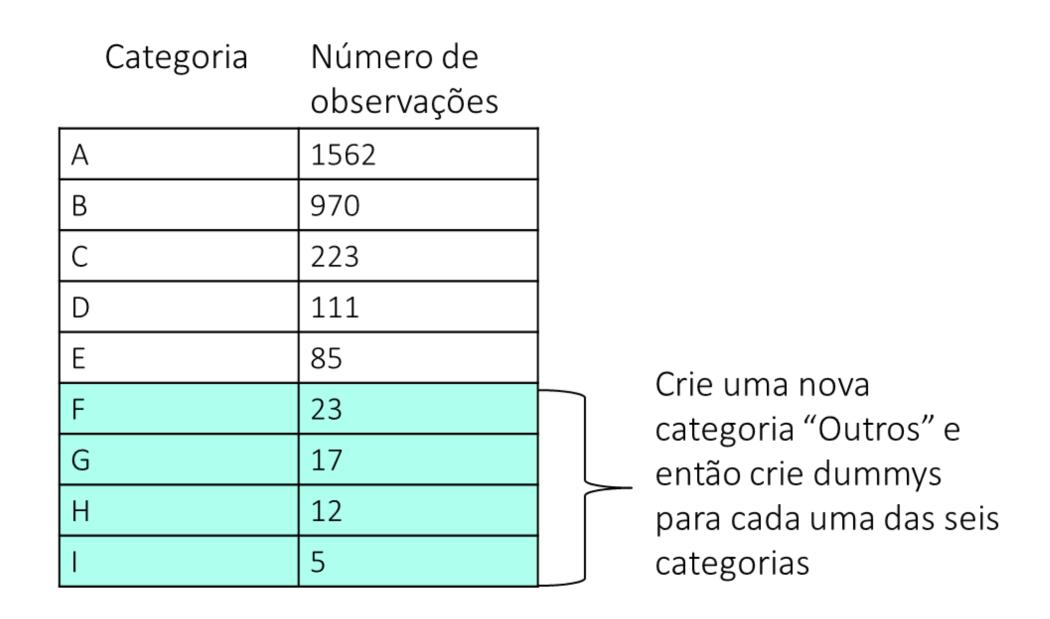




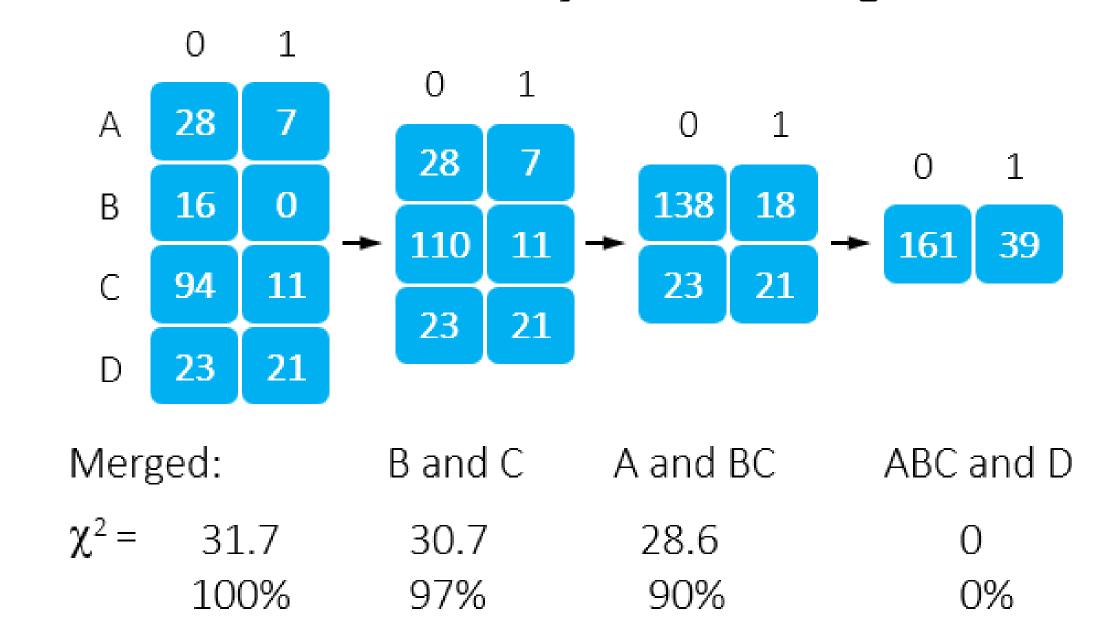
#### Tratamento das variáveis - Categoricas

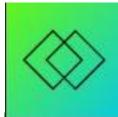
Soluções para os problemas causados por variável input categórica

# 1. Thresholding: Juntar categorias baseado no número de observações



- 2. <u>Clusterização</u>: Juntar as categorias das variáveis considerando
  - menor redução da estatística de  $\chi^2$
  - Taxas de respostas semelhante
  - número de observações na categoria







#### Tratamento das variáveis - Categoricas

Soluções para os problemas causados por variável input categórica

3. Weight of Evidence (WOE): substitui o valor da categoria pelo log(odds) do evento

	0	1	р	WOE		
Α	28	7	0,200	0,25	] -	]
В	16	0	0	0	]	
С	94	11	0,105	0,117		
D	23	21	0,477	0,912		





#### Estudo de Caso Ajustando um modelo de Regressão Logística no Python

Fonte da dados: kaggle

Link: https://www.kaggle.com/kost13/us-income-logistic-regression/data

**Resumo**: Dados do Censo Adulto Americano referentes a renda para fatores sociais como Idade, Educação, raça, etc.

**Objetivo**: Ajustar um modelo de regressão logística, em uma base de treinamento, para uma resposta binária, fazer a previsão desta resposta e avaliar a qualidade de ajuste do modelo em uma base de teste.

#### Ī

# Estudo de Caso Ajustando um modelo de Regressão Logística no Python

- Parte 1: Tratando as Variáveis do modelo
  - Missing
  - Variáveis categóricas

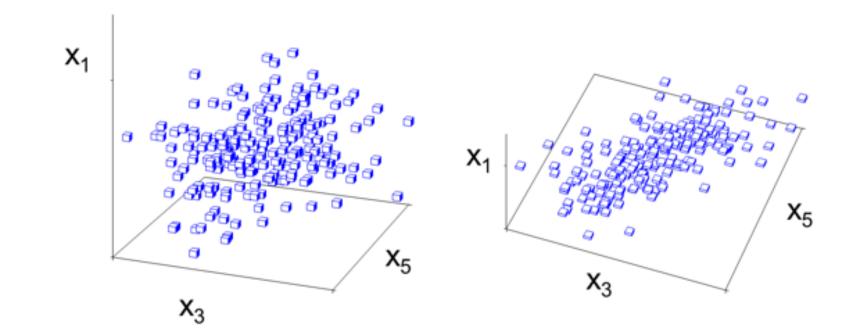


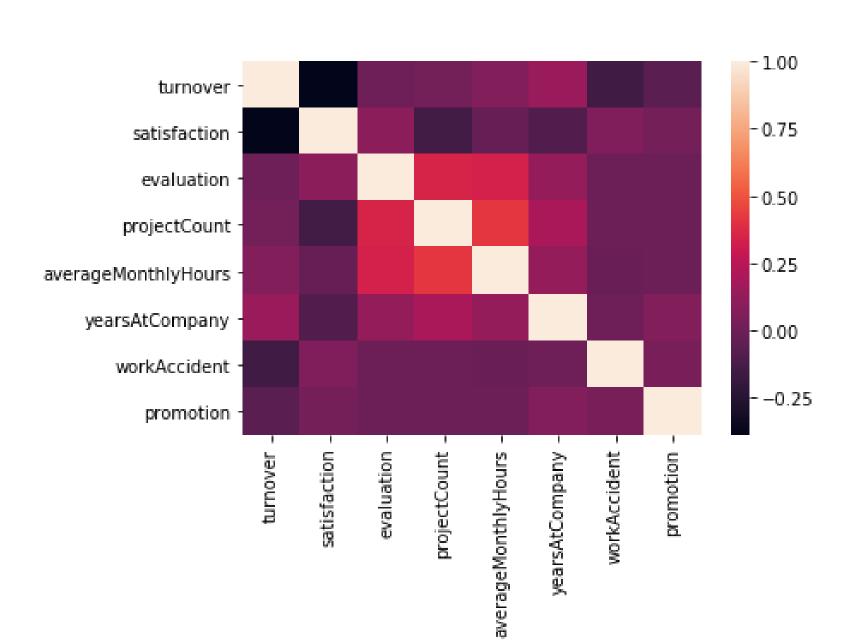


#### Tratamento das variáveis - Redundância

Redundância: Variáveis input altamente correlacionadas

- 1. Problemas das variáveis redundantes:
  - desestabiliza a estimação dos parâmetros
  - aumenta o risco de overfitting
  - pode confundir a interpretação
  - aumenta o tempo computacional para a estimação dos parâmetros
  - aumenta o custo da coleção dos dados
- 2. Como verificar se as variáveis são redundantes:
  - Matriz de correlação entre as variáveis input
- 3. Como resolver o problema da redundância
- Excluir da análise as variáveis que são altamente correlacionadas entre si e destas a que tem menor correlação com a variável resposta









#### Tratamento das variáveis - Irrelevância

Irrelevância: Variáveis inputs pouco correlacionadas com a variável resposta

- 1. Problemas das variáveis irrelevantes:
  - ao utilizar algum método de seleção de variáveis pode-se selecionar a variável incorreta
- 2. Como verificar se as variáveis são irrelevantes:
  - Matriz de correlação das variáveis input com a variável target
- 3. Como resolver o problema da redundância
- Excluir da análise as variáveis que tem baixa correlação com a variável resposta, mas antes verificar se a interação entre as variáveis com baixa correlação aumenta o poder de predição do modelo.

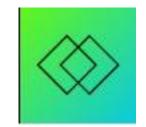




# Estudo de Caso Ajustando um modelo de Regressão Logística no Python

#### Parte 2 : Correlação

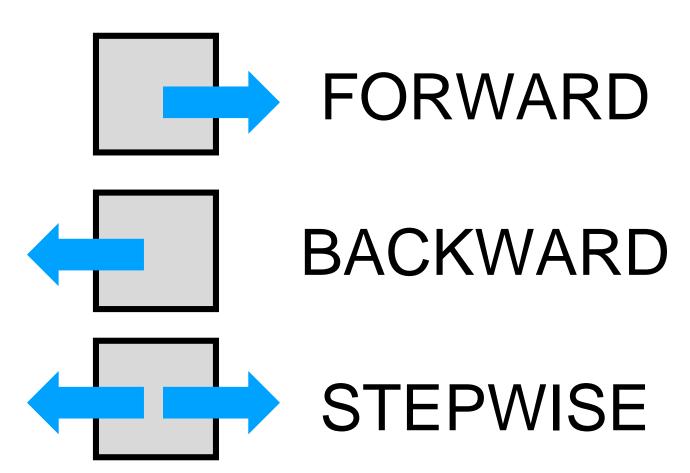
- Entre as variáveis input
- Entre cada input e a target

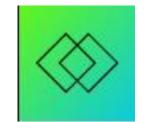




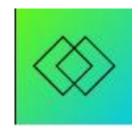
#### Seleção de Variáveis

- Para diminuir a dimensão com conjunto de dados e assim facilitar a análise, podemos utilizar métodos de seleção de variáveis que testam todos os possíveis modelos e retornam o que melhor ficou ajustado.
  - Dependendo do número de variáveis estes métodos se tornam muito caros computacionalmente
- Métodos sequenciais

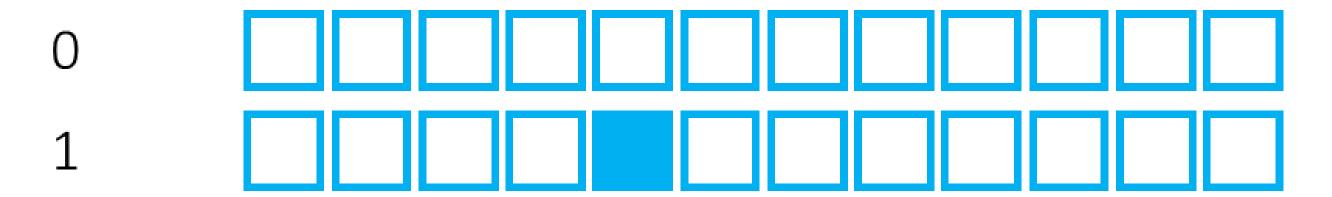




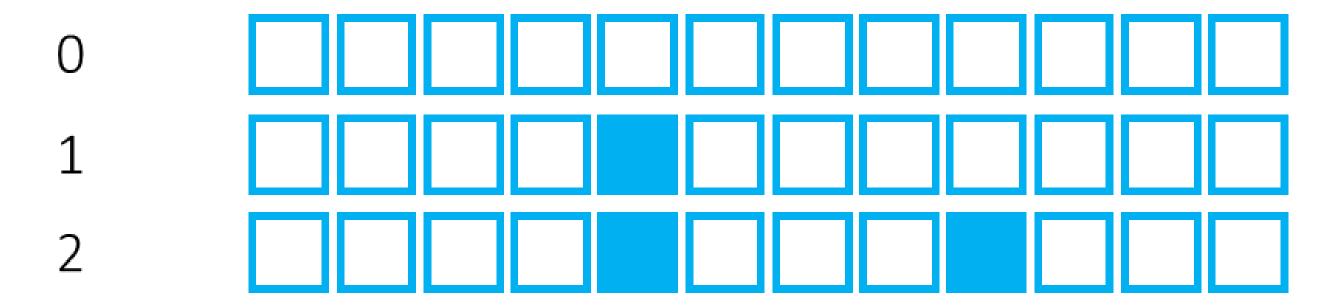




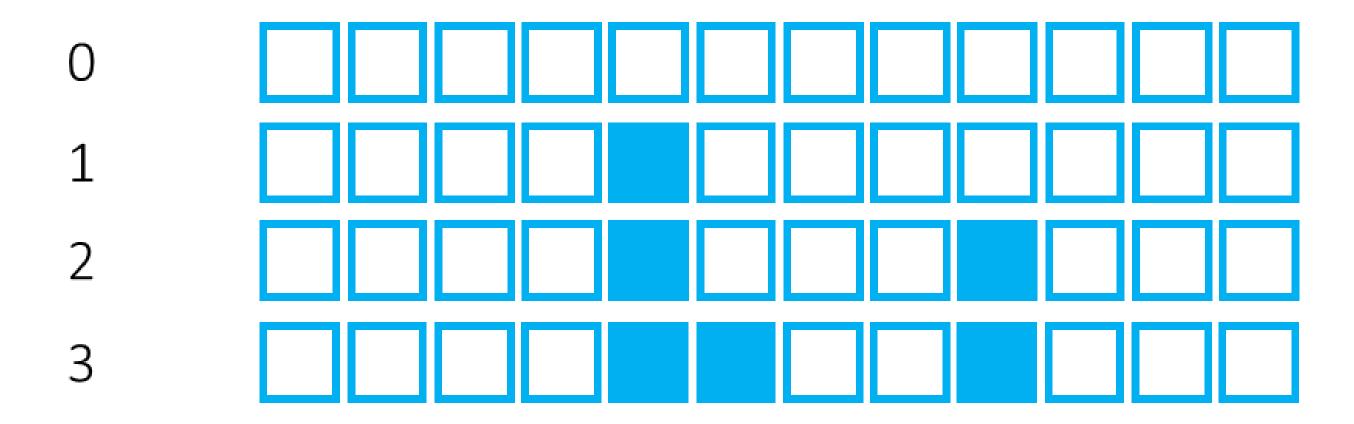






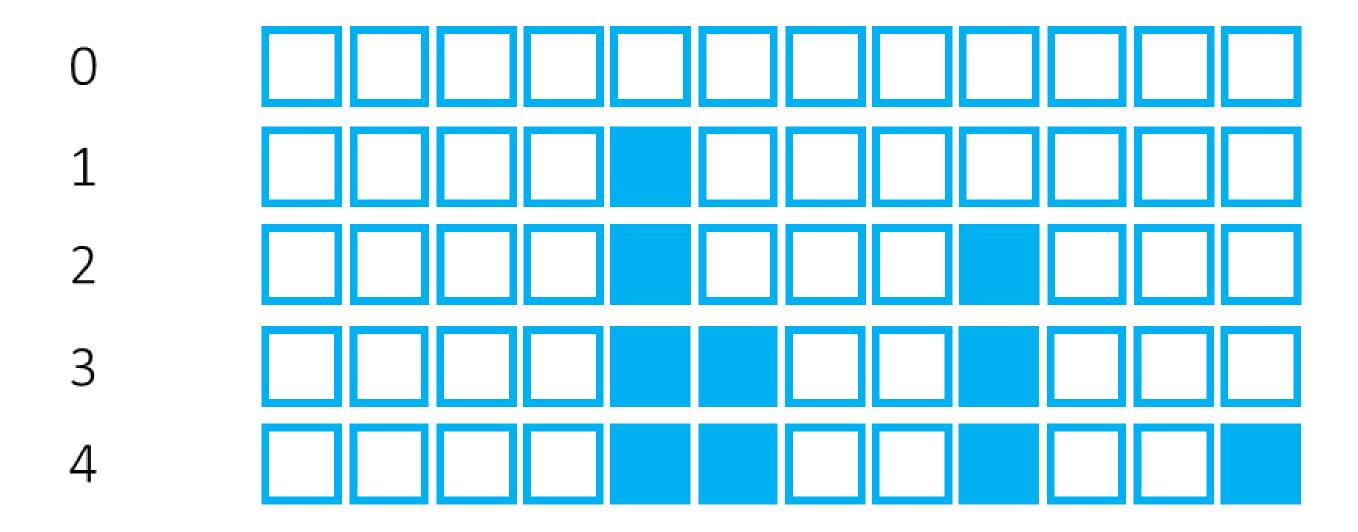






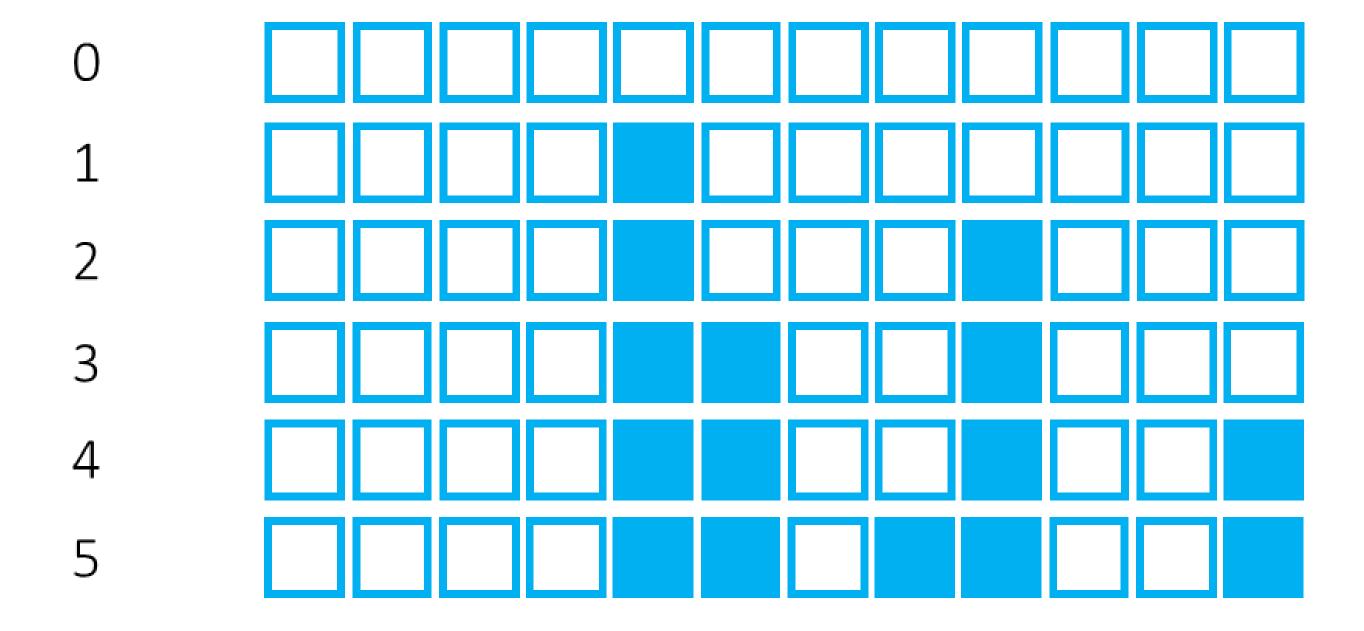


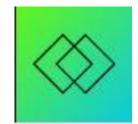
#### Seleção de Variáveis - Forward



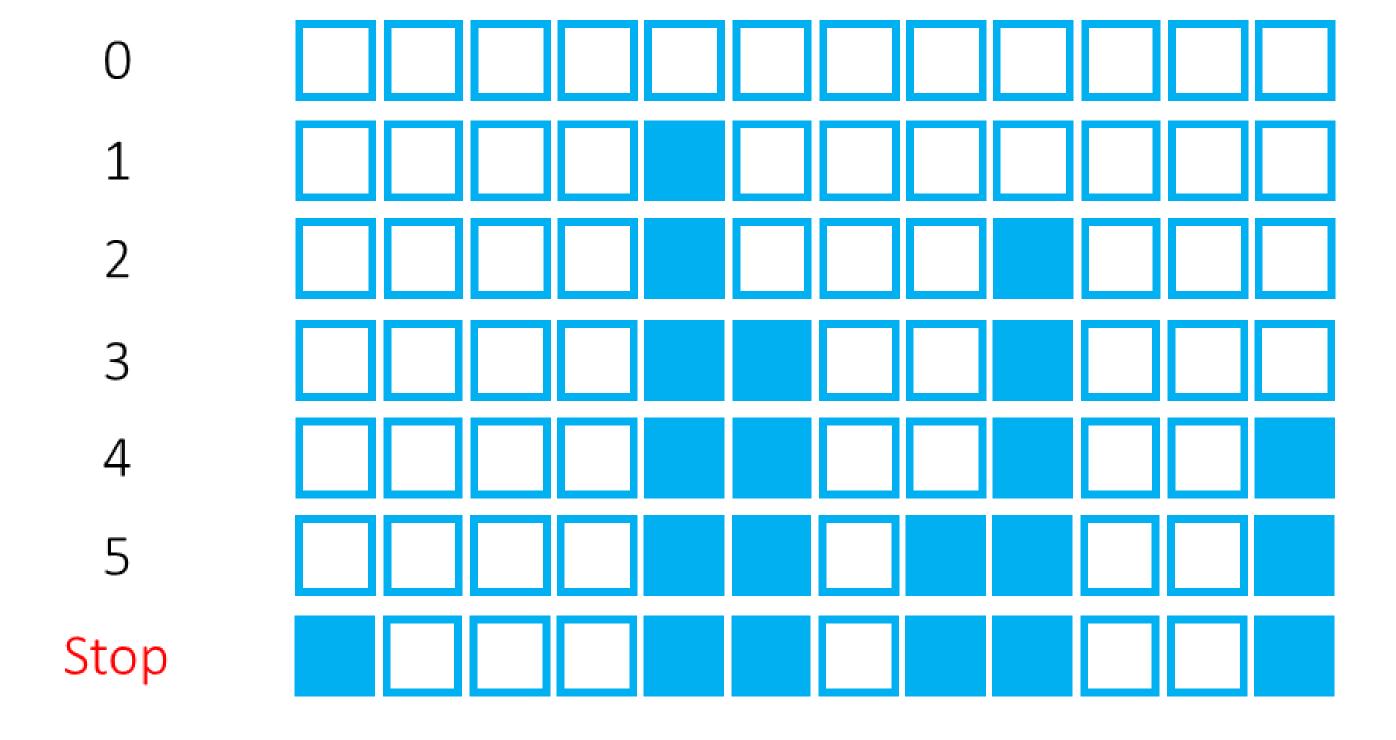


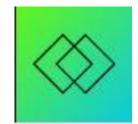
#### Seleção de Variáveis - Forward





#### Seleção de Variáveis - Forward



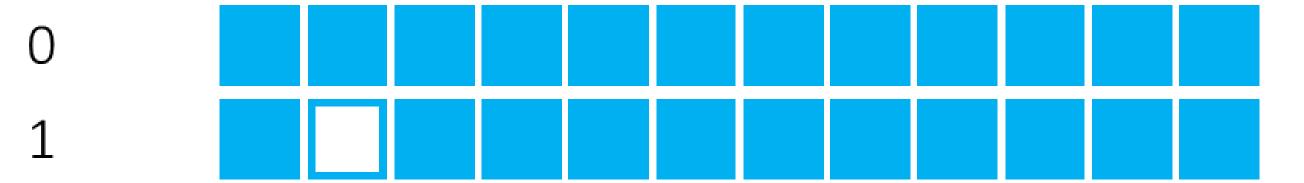


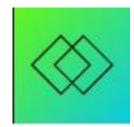




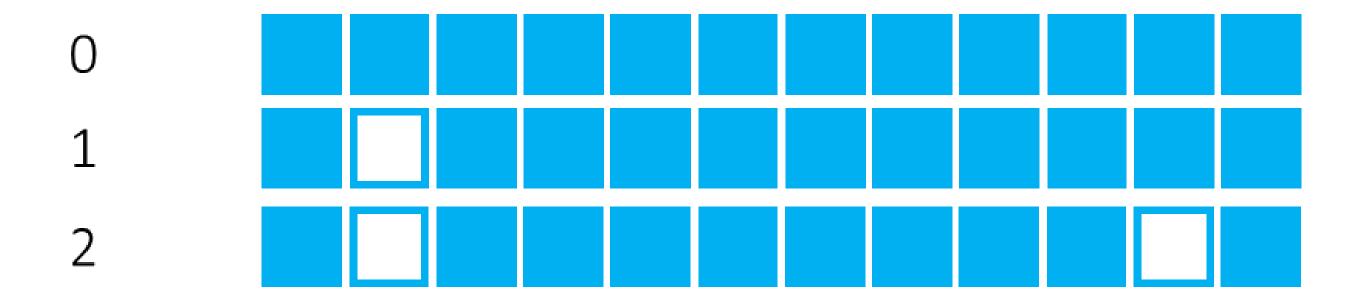






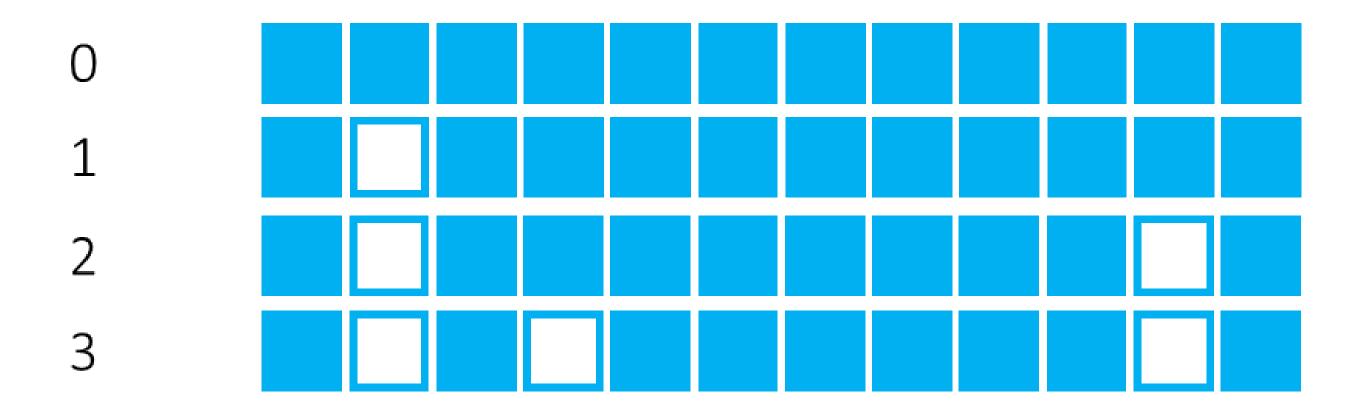


Ī

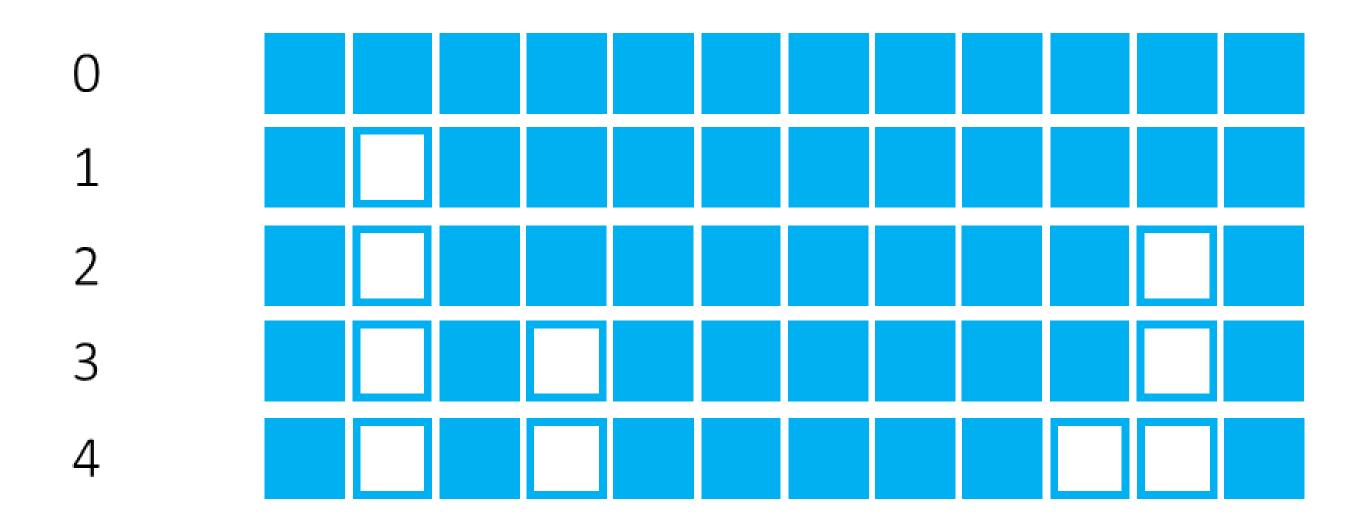




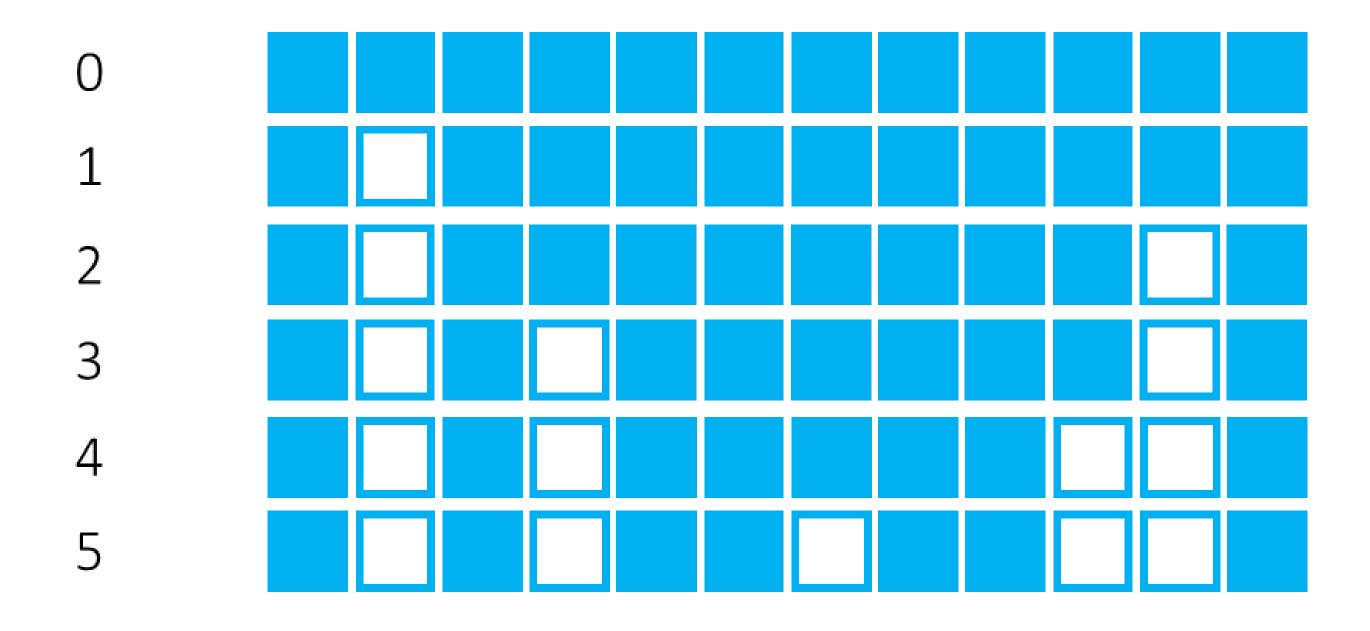
T

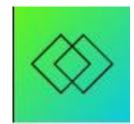


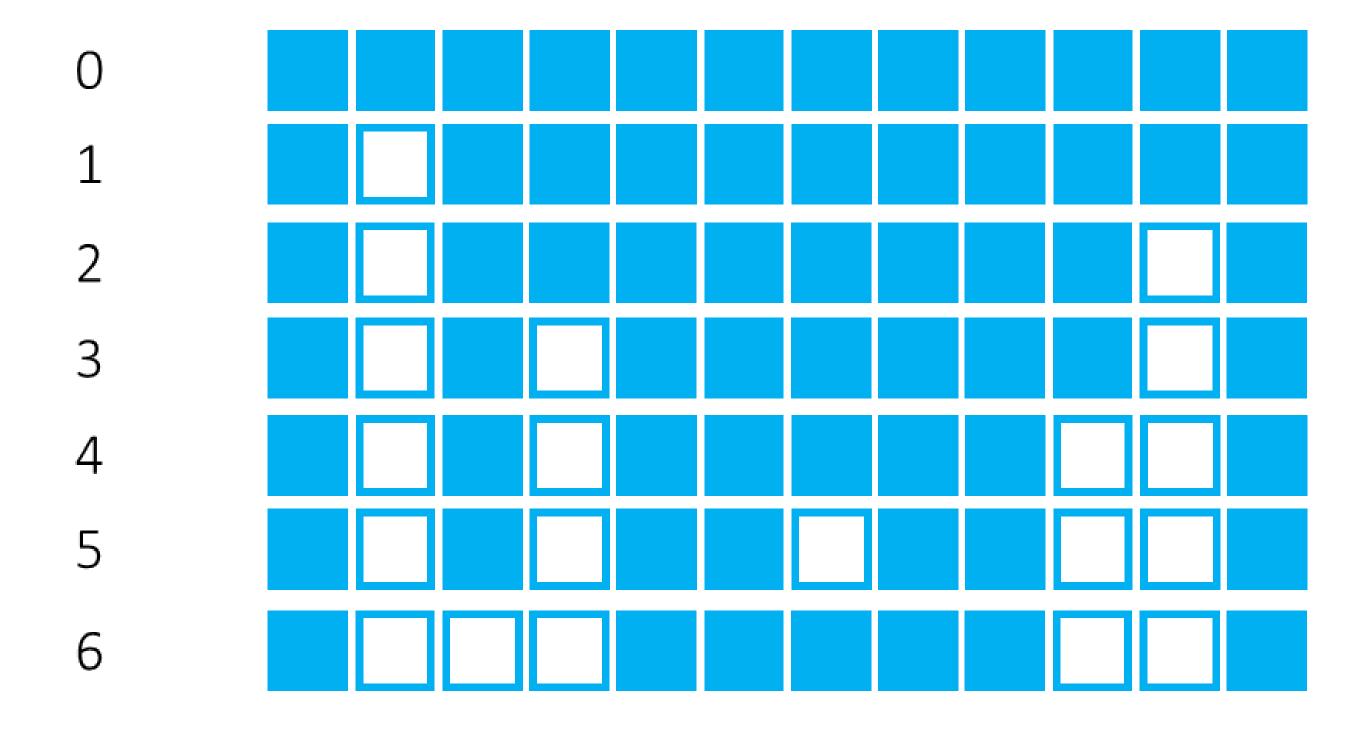




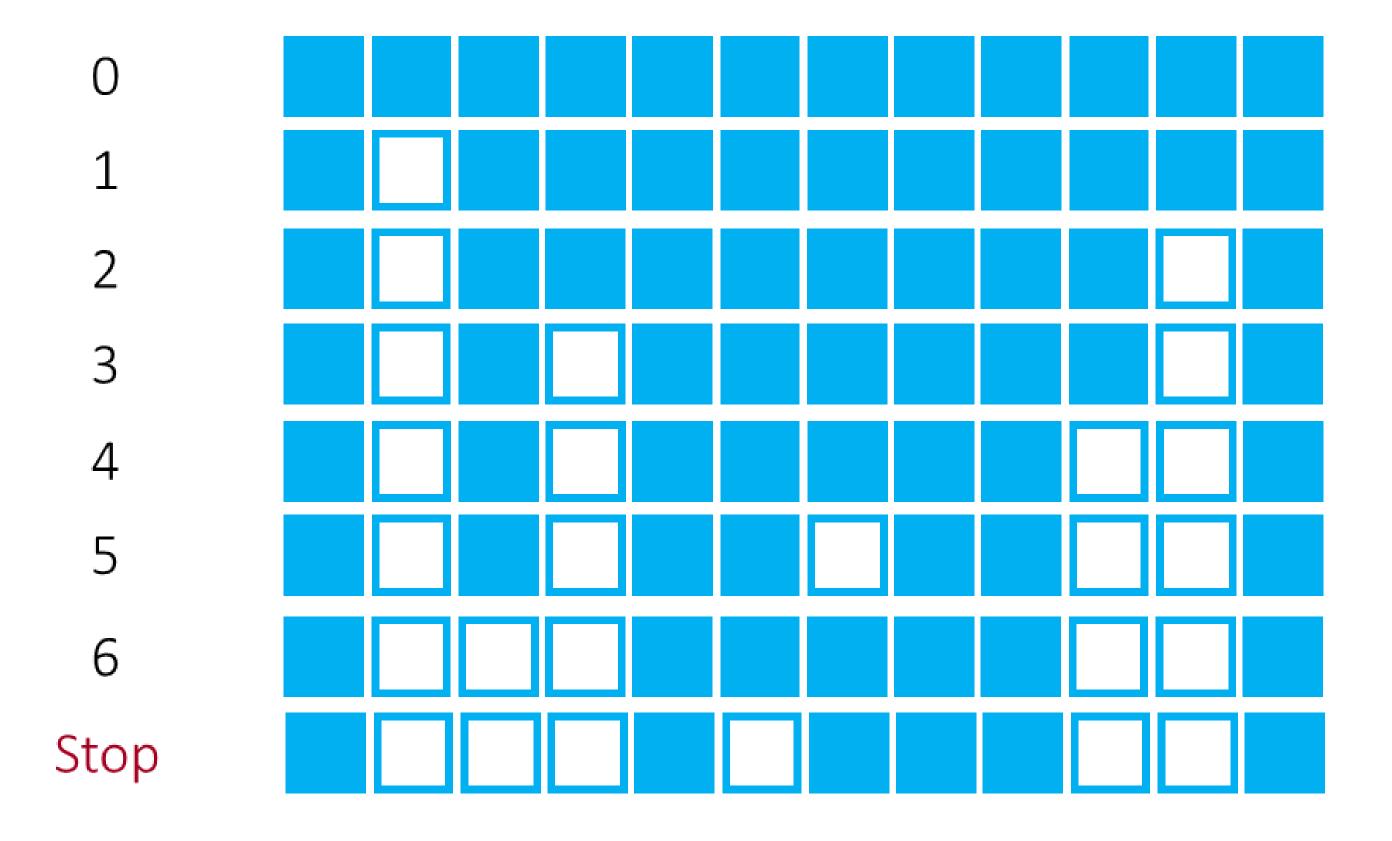






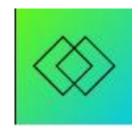




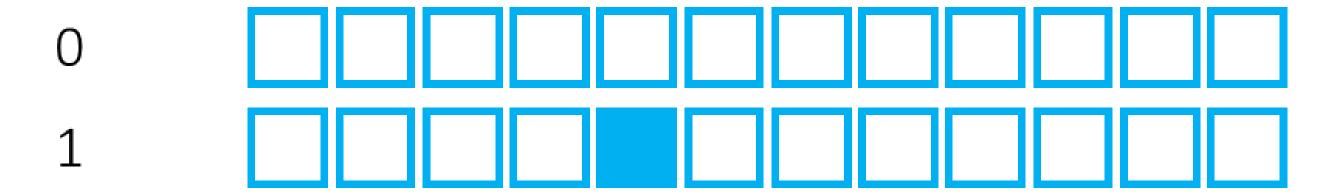




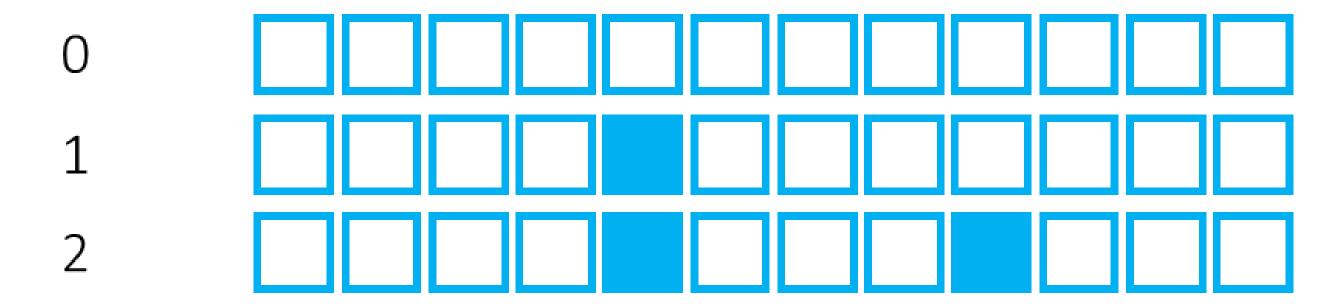




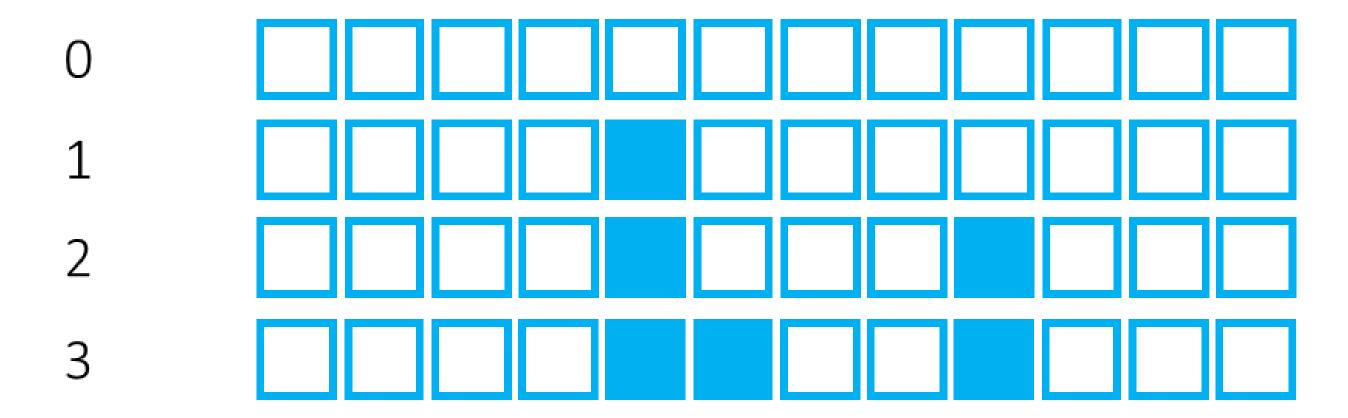




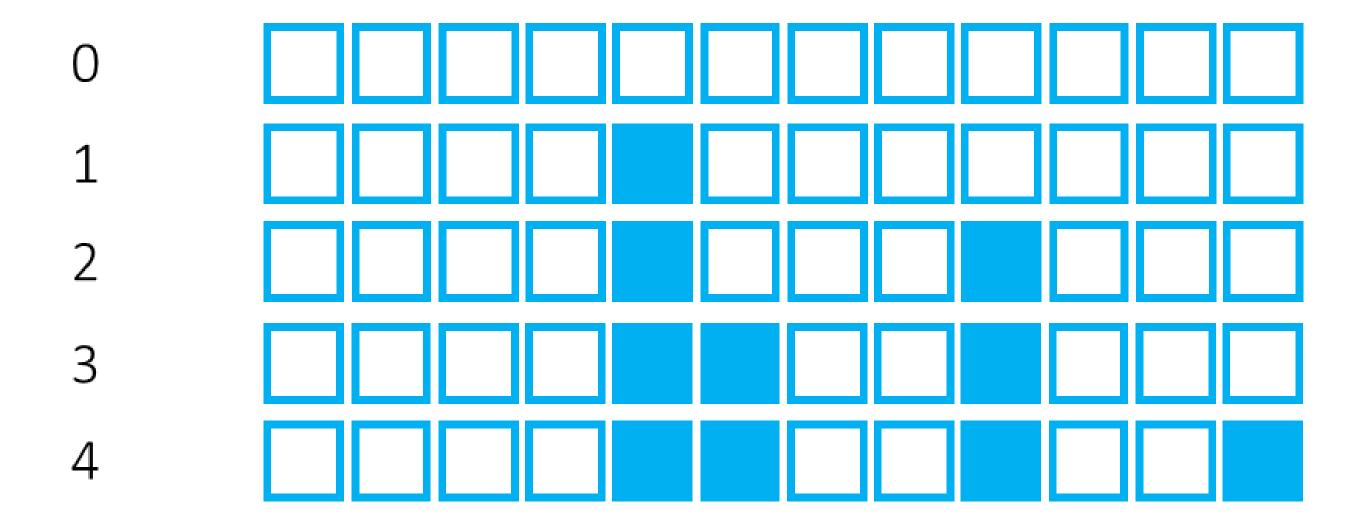




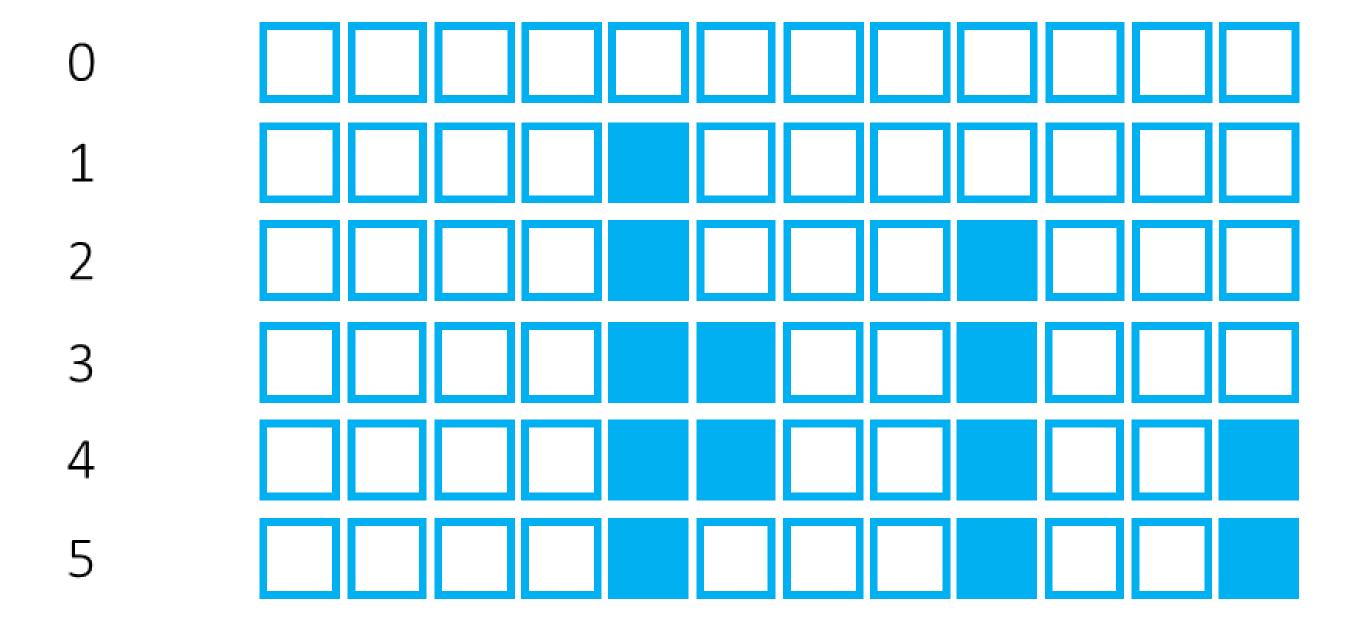


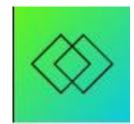


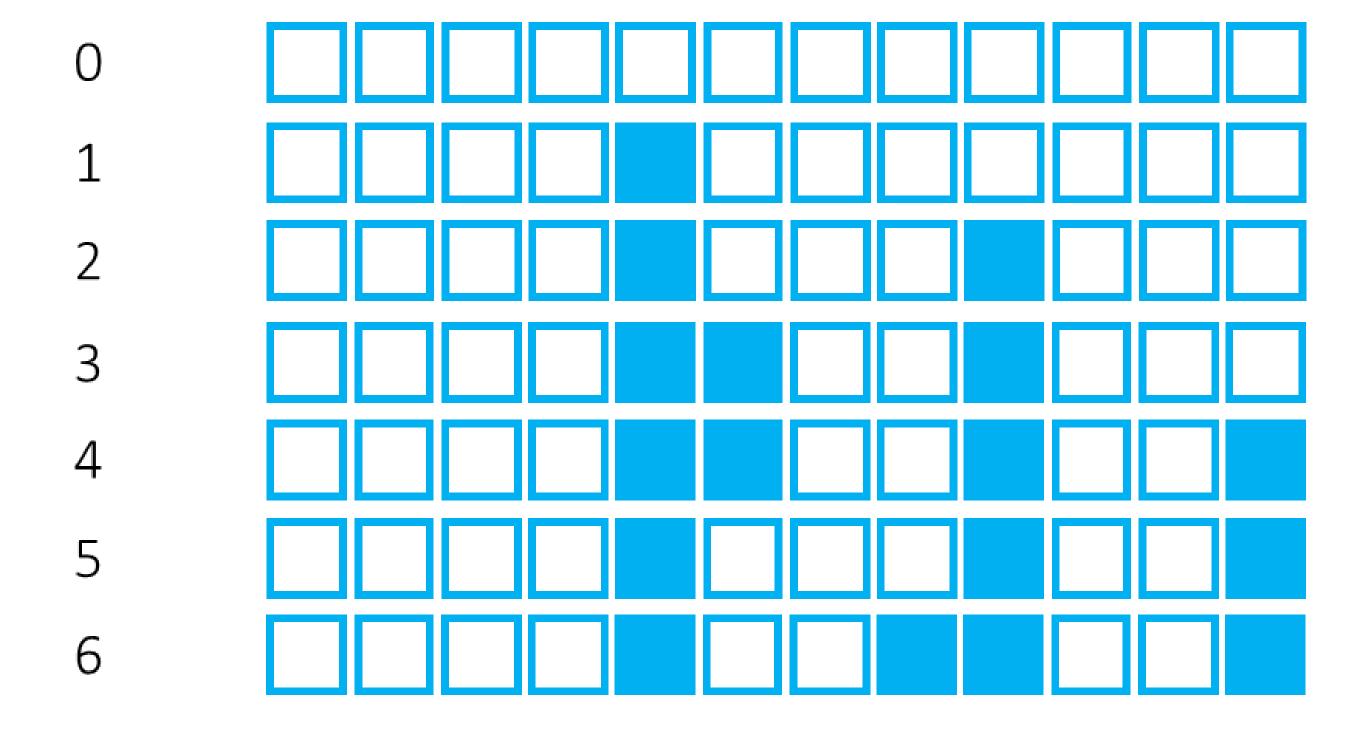




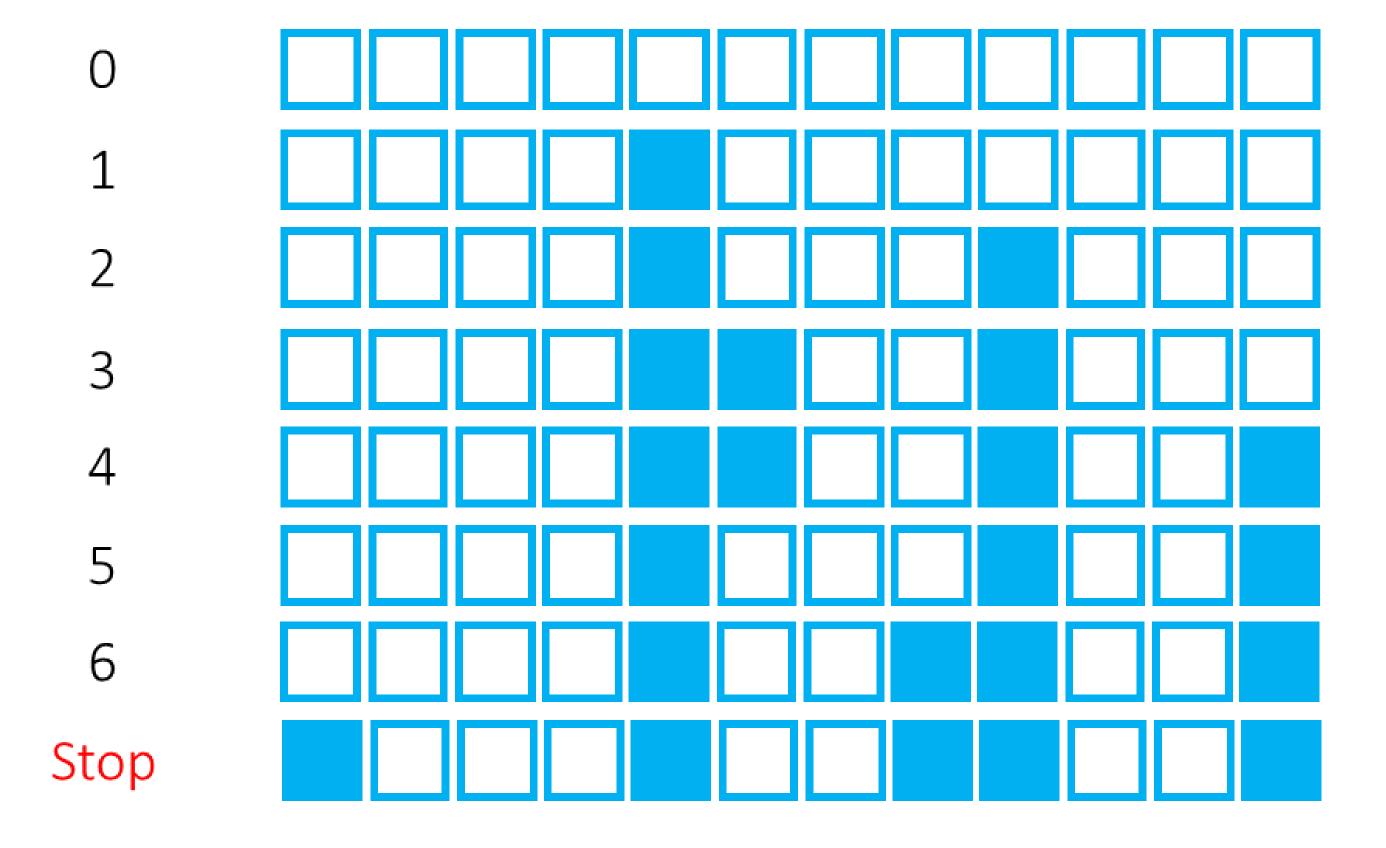










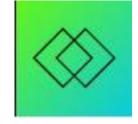






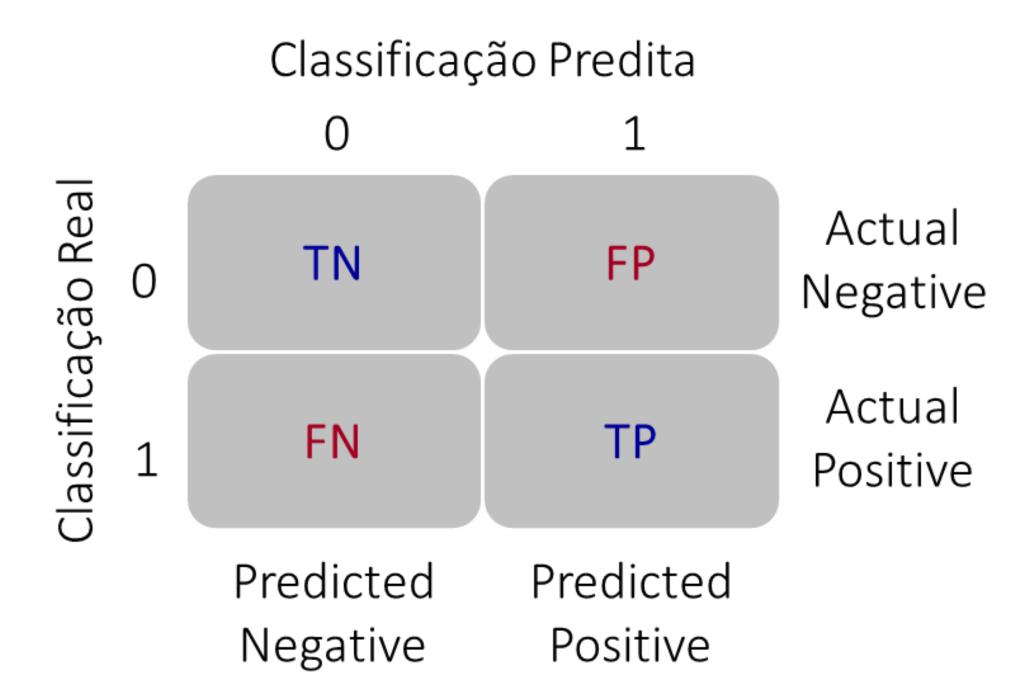
# Estudo de Caso Ajustando um modelo de Regressão Logística no Python

Parte\_3: Método de seleção de variáveis – Forward





#### Ajuste do Modelo – Matriz de Confusão



TN: True Negative

TP: True Positve

FN: False Negative

FP: False Positive

• Métricas para avaliar a qualidade do ajuste do modelo

- Missclassification = 
$$\frac{FP+FN}{Total\ de\ casos}$$

- Acurácia = 
$$\frac{TP+TN}{Total\ de\ casos}$$

- Precision = 
$$P = \frac{TP}{TP + FP}$$

- Altos valores de precision estão relacionados a baixa taxa de FP

- Recall = 
$$R = \frac{TP}{TP + FN}$$

- Altos valores de recall estão relacionados a baixa taxa de FN

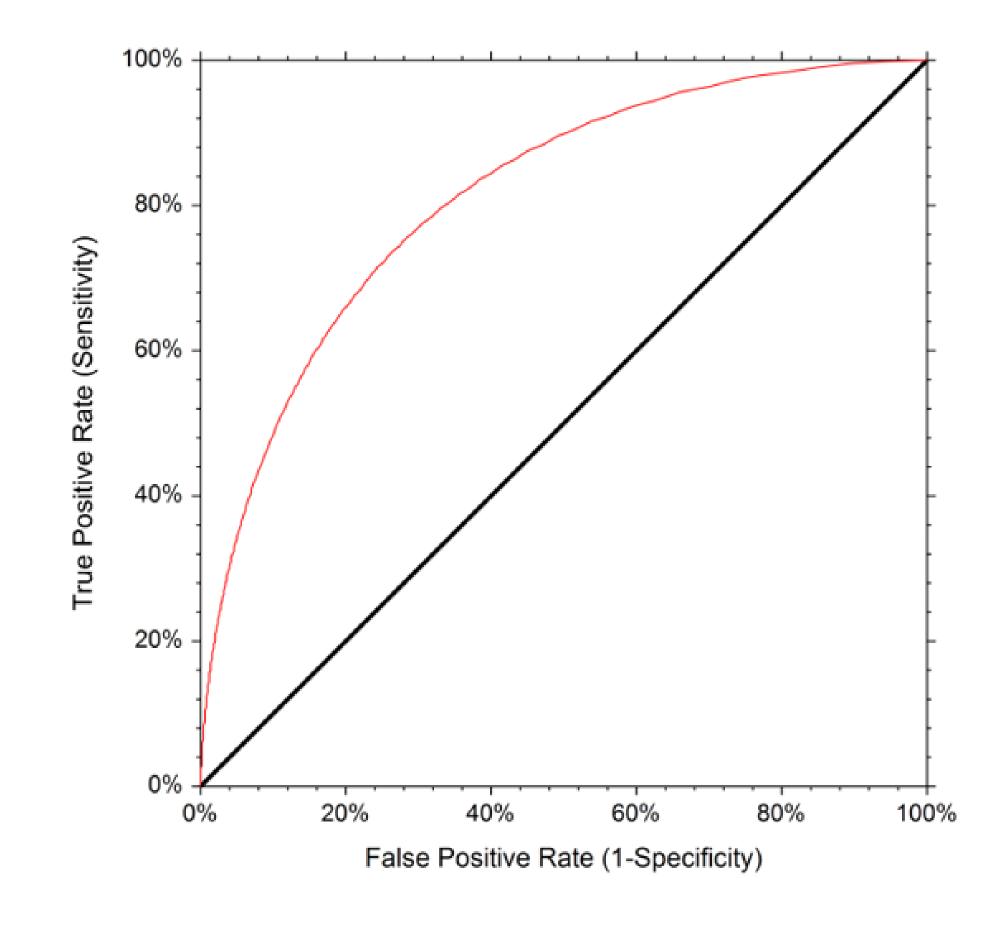
#### • Conclusões:

- Alto recall e Baixo precision -> prejudica o cliente, pois o cliente era bom (0) e foi classificado como ruim (1).
- Baixo recall e Alto precision -> beneficia o cliente, pois o cliente era ruim (1) e foi classificado como bom (0).
- Altos valores de precision e recall são indicativos de um modelo bem ajustado



#### Ajuste do Modelo - Curva ROC

A curva ROC, mede, fração a fração, quantos 1's foram capturados (taxa de true positive) vs quantos 0's foram capturados (taxa de false positive).



#### • <u>Métricas</u>

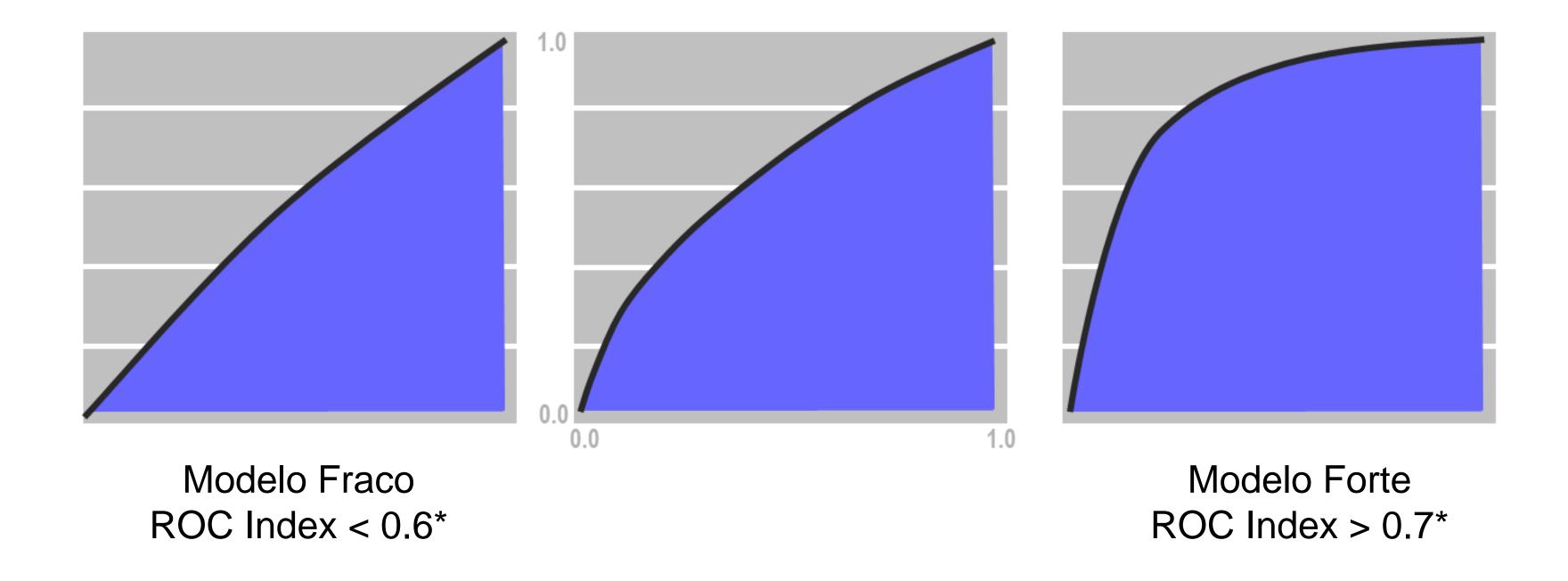
- 
$$Sensibilidade = Recall = \frac{TP}{TP+FN}$$

- 
$$Especificidade = \frac{TN}{TN+FP}$$



#### Ajuste do Modelo - Curva ROC

Quanto maior a área sob a curva melhor é o modelo ajustado





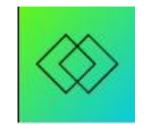
<sup>\*</sup> Regras de bolso sempre são perigosas, o modelo ideal depende sempre do problema modelado.

#### T

## Estudo de Caso Ajustando um modelo de Regressão Logística no Python

Parte\_4.1: Ajustar um modelo de regressão Logística na base de treinamento usando sklearn

Parte\_4.2: Validar o modelo na base de teste usando: AUC, precision, recall

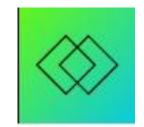


#### T

# Estudo de Caso Ajustando um modelo de Regressão Logística no Python

Parte\_5.1: Ajustar um modelo de regressão Logística na base de treinamento usando statsmodel

Parte\_5.2: Validar o modelo na base de teste usando: AUC, precision, recall



# Desafio Ajustar um modelo de Regressão Logística no Python

- 1. Tratar as Variáveis da base de dados: Missing e Categoricas
- 2. Verificar a correlação entre as variáveis
- 3. Dividir a base em treinamento e teste
- 4. Seleção de variáveis
- 4. Ajustar um modelo de regressão Logística
- 5. Prever na base de teste
- 6. Avaliar a qualidade do ajuste do modelo: acurácia, precision, recall



# DÚVIDAS?!



#### Referências

- 1. <a href="https://ebmacademy.wordpress.com/2015/08/17/o-fantasma-da-regressao-logistica/">https://ebmacademy.wordpress.com/2015/08/17/o-fantasma-da-regressao-logistica/</a>
- 2. https://www.kaggle.com/kost13/us-income-logistic-regression
- 3. http://planspace.org/20150423-forward\_selection\_with\_statsmodels/





# Obrigada

Cristiane Rodrigues

crisrodrigues\_27@hotmail.com

