



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

DSIC
DEPARTAMENTO DE SISTEMAS
INFORMÁTICOS Y COMPUTACIÓN

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática



**Departamento de Sistemas Informáticos y Computación
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática
Universitat Politècnica de València**

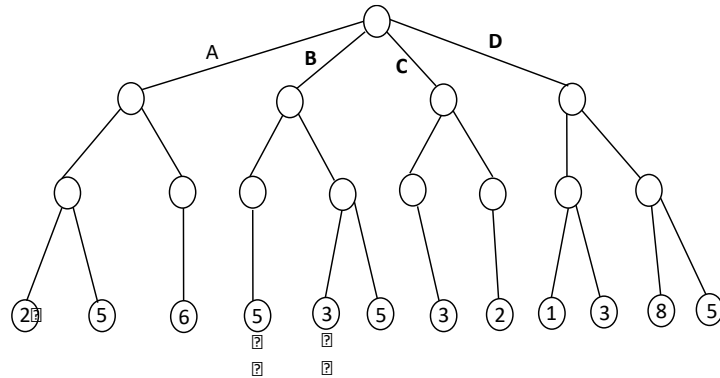
BOLETÍN DE EJERCICIOS SISTEMAS INTELIGENTES

Bloque 1: Búsqueda con adversario

Octubre 2024

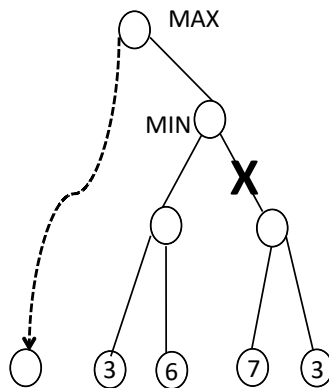
CUESTIONES

- 1) Dado el árbol de juego de la figura, ¿cuál es la mejor jugada para el nodo raíz MAX si aplicamos un alfa-beta?



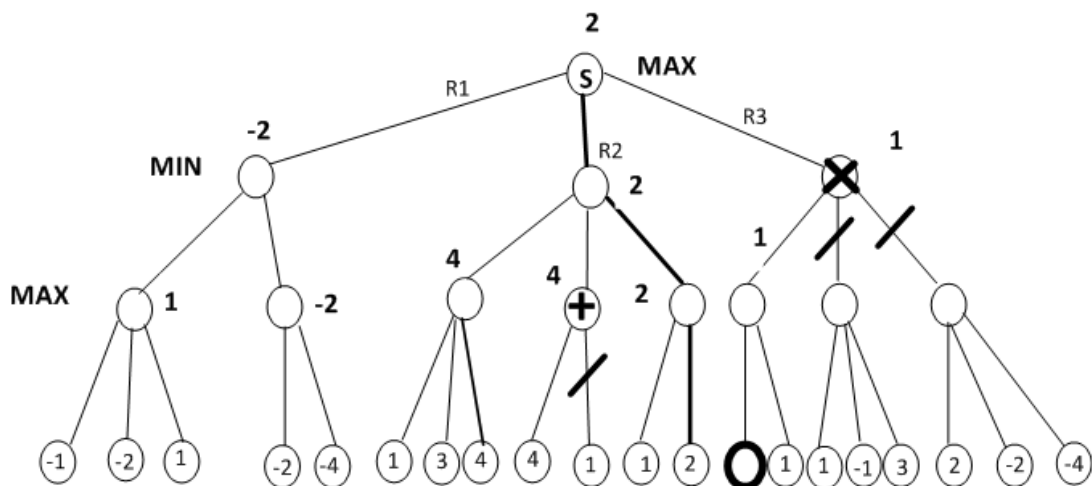
- A. La rama A
B. La rama B
C. La rama C
D. La rama D

- 2) Dado el desarrollo parcial de una búsqueda alfa-beta indicado en la figura. ¿Qué valor volcado provisional debe tener el nodo MAX para que se produzca el corte indicado en la figura?



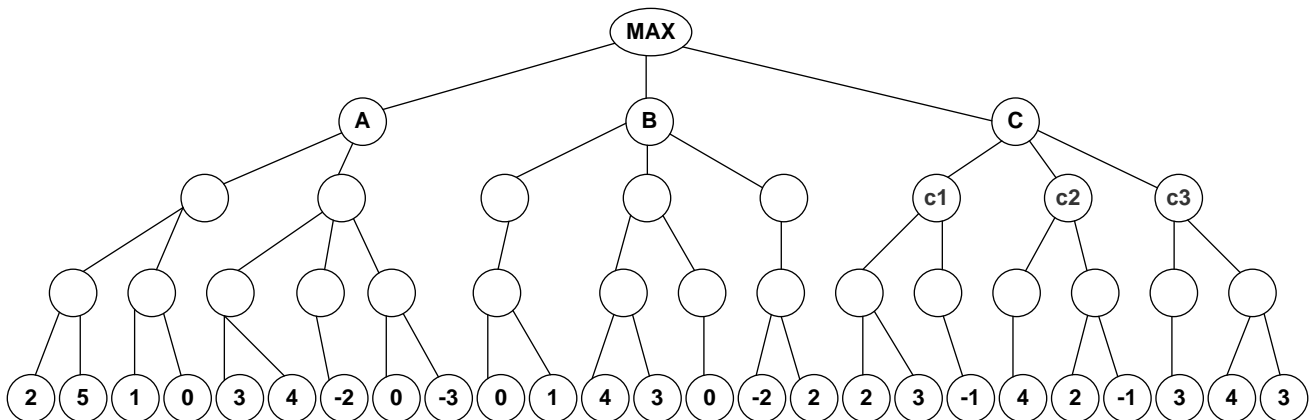
- A. 7
B. Mayor o igual que 6
C. Menor o igual que 6
D. Menor que 3

- 3) Dado el espacio de búsqueda de un juego que se muestra en la figura, ¿qué valor tendría que tener el nodo terminal señalado en negrita?



- A. $[-\infty, 1]$
- B. 1
- C. $[2, +\infty]$
- D. No se puede determinar con los datos disponibles

4) Dado el árbol de juego de la figura, ¿cuál es la mejor jugada para el nodo raíz MAX (S) si aplicamos un alfa-beta?



- A. La rama A
- B. La rama B
- C. La rama C
- D. La rama A ó B

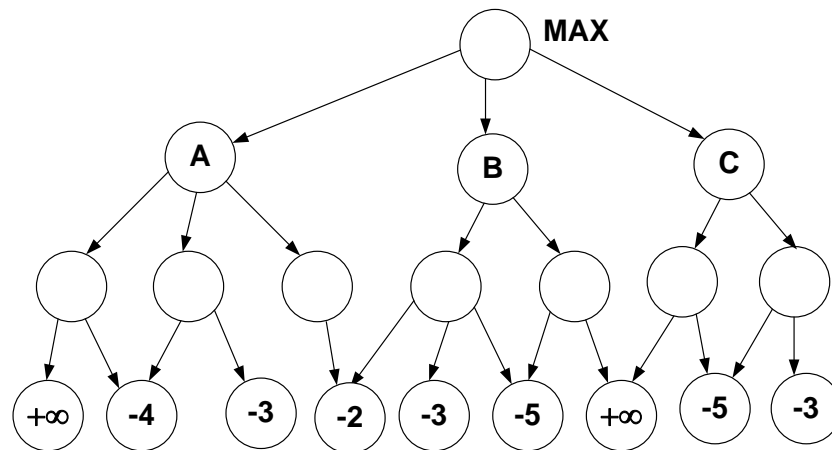
5) Dado el árbol de juego de la figura y aplicando un procedimiento alfa-beta:



A. Con cualquier valor del nodo se produciría un corte
B. Menor que -3
C. Mayor que -3
D. Nunca se podría producir el corte indicado (o ninguna de las anteriores)

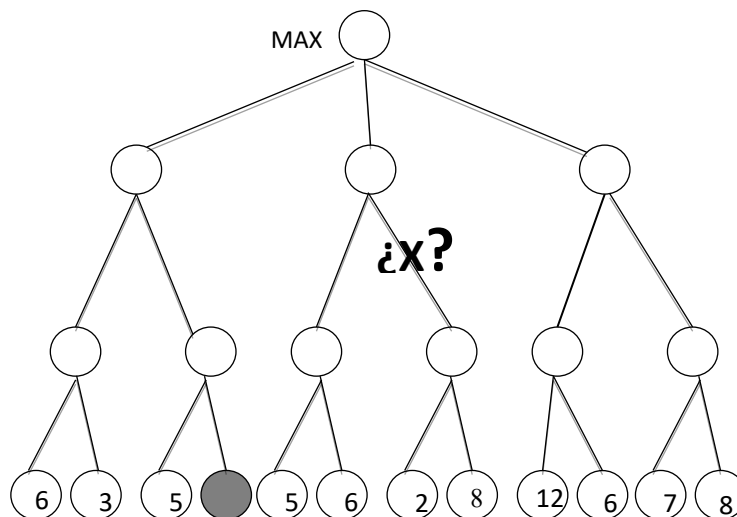
- 5

- 7) En la siguiente figura se reproduce el espacio de búsqueda en un juego, donde inicialmente debe jugar MAX. Aplicando un procedimiento alfa-beta,



- A. Se puede elegir indistintamente cualquier rama, ya que todas pueden alcanzar posiciones finales ganadoras para MAX.
- B. Se elige la rama A.
- C. Se elige la rama B.**
- D. Se elige la rama C

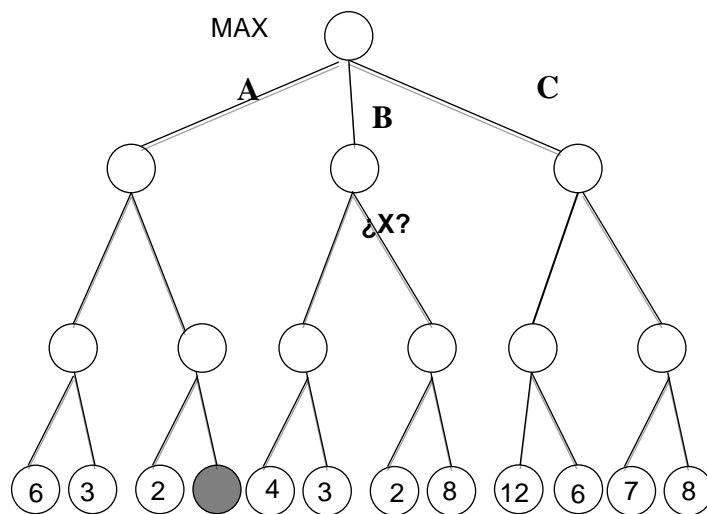
- 8) Dado el árbol de juego de la figura y aplicando un procedimiento alfa-beta:



¿Qué valor debería tener el NODO terminal sombreado para que se produzca el corte indicado en la figura?

- A. Con cualquier valor del nodo se produciría un corte
- B. Menor que 6
- C. Mayor o igual que 6**
- D. Nunca se podría producir el corte indicado (o ninguna de las anteriores)

9) Dado el árbol de juego de la figura y aplicando un procedimiento alfa-beta:



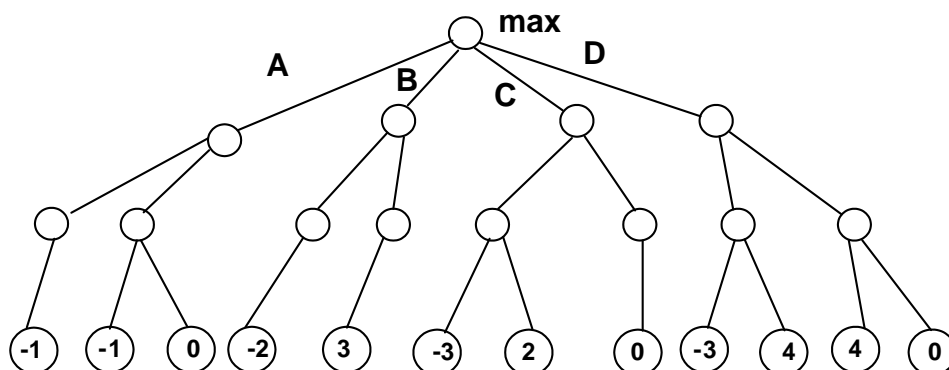
¿Qué valor debería tener el nodo terminal sombreado para que se produzca el corte indicado en la figura?

- A. Con cualquier valor del nodo se produciría un corte
- B. Menor que 3
- C. Mayor o igual que 4
- D. Nunca se podría producir el corte indicado (o ninguna de las anteriores)

10) Dado el árbol de juego de la figura anterior y asumiendo que se produce el corte indicado, tras la aplicación del procedimiento alfa-beta:

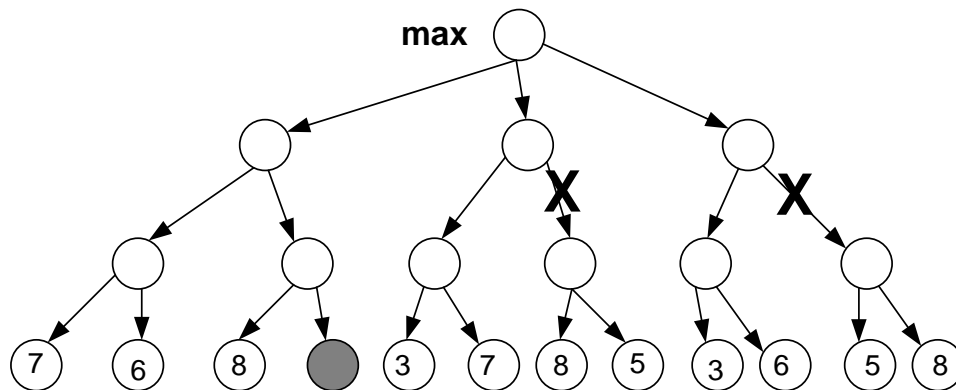
- A. Se elige la rama A
- B. Se elige la rama B
- C. Se elige la rama C
- D. Se elige la rama A o B

11) Dado el árbol de juego de la figura, ¿Cuántos nodos evitamos generar respecto a un algoritmo MINIMAX si realizamos una exploración alfa-beta?



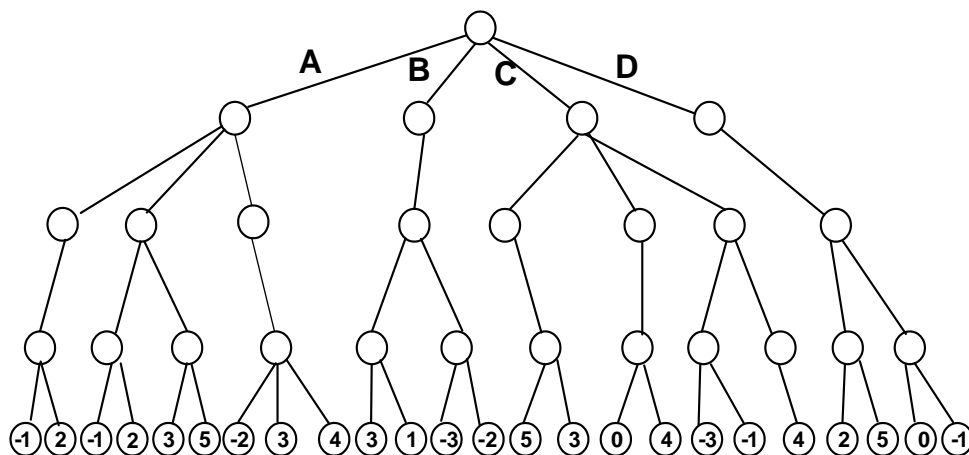
- A. 3
- B. 4**
- C. 5
- D. 6

12) Dado el árbol de juego de la figura y aplicando un procedimiento alfa-beta, ¿Qué valor debería tener el NODO terminal sombreado para que se produzcan los cortes indicados en la figura?



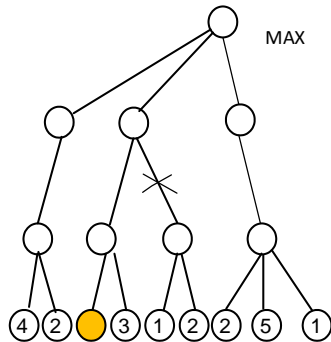
- A. Mayor o igual a 7
- B. Mayor o igual a 8
- C. Menor o igual a 7
- D. Con cualquier valor se producirían dichos cortes**

13) Si se aplica el algoritmo MINIMAX al árbol de juego de la figura, ¿qué rama se escogería?



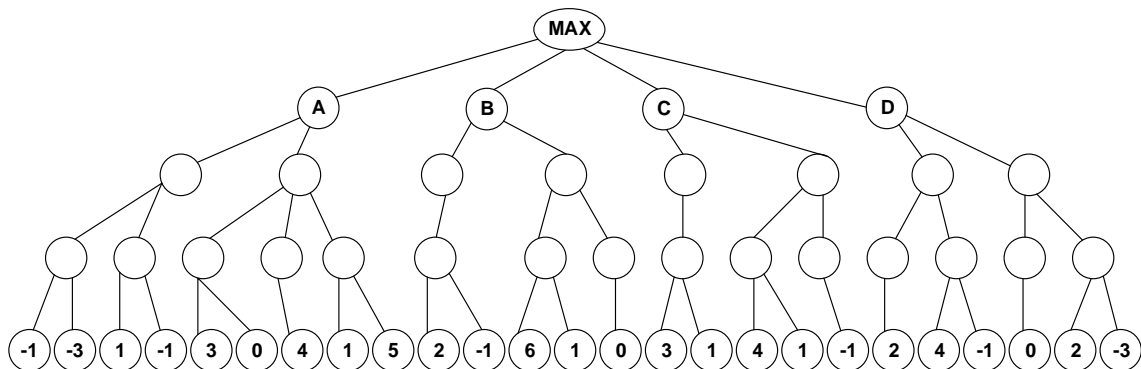
- A. A
- B. B
- C. C
- D. D**

14) ¿Qué valores debería tener el nodo sombreado para que se produzca siempre el corte mostrado en la figura?



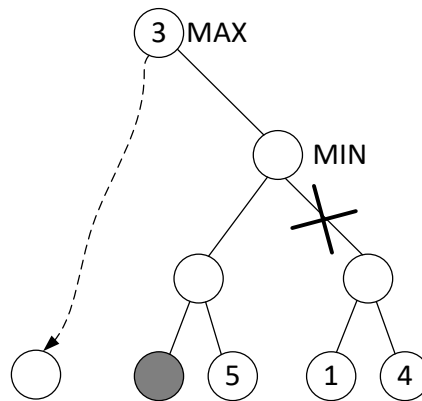
- A. Cualquier valor comprendido en $[-\infty 4]$
- B. Cualquier valor.
- C. Cualquier valor comprendido en $[4 +\infty]$
- D. Nunca se producirá

15) Indica la rama que se elegiría al aplicar la poda α - β al árbol de juego de la figura.



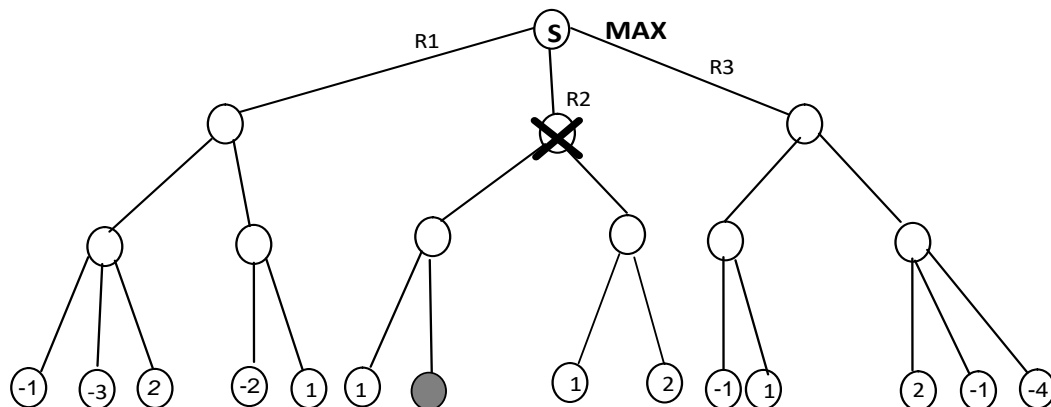
- A. A
- B. B
- C. C
- D. D

16) ¿Qué valor provisional debería tener el nodo sombreado para que se produzca el corte indicado?



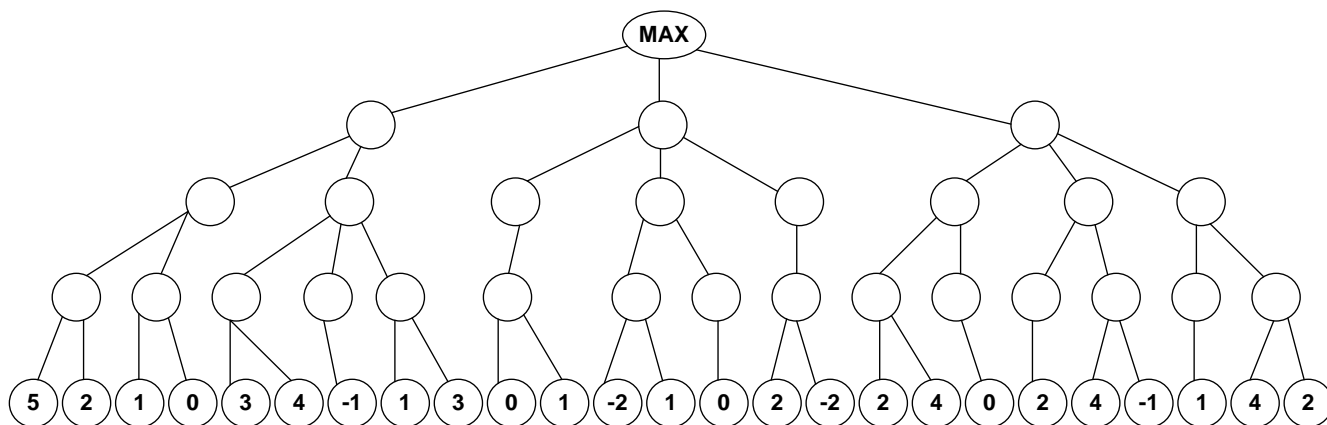
- A. $[-\infty, 2]$
- B. $[-\infty, 3]$
- C. $[-\infty, 5]$
- D. No es posible el corte

17) Dado el espacio de búsqueda de un juego representado en la figura siguiente, asumiendo que se aplica un procedimiento alfa-beta, indica el valor que debería tomar el nodo sombreado para que se produzca el corte señalado en la rama R2:



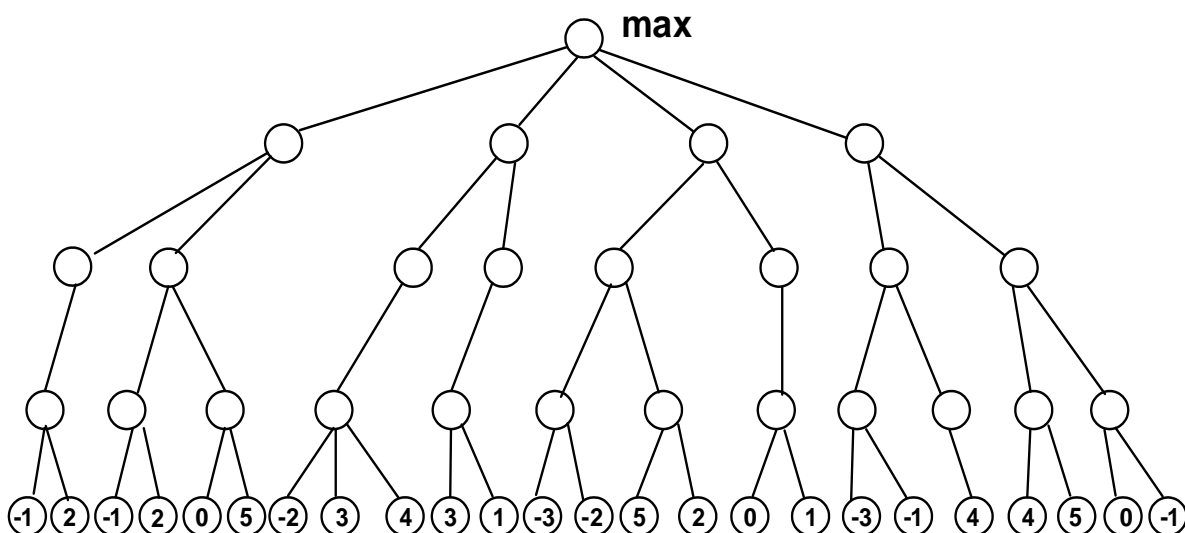
- A. Un valor en $[-\infty, 1]$
- B. Un valor en $[1, +\infty]$
- C. El nodo sombreado solo puede tomar el valor 1
- D. No se puede producir el corte de la figura.

18) Dado el siguiente árbol de juego y aplicando un procedimiento alfa-beta, ¿cuántos nodos terminales no hace falta generar?



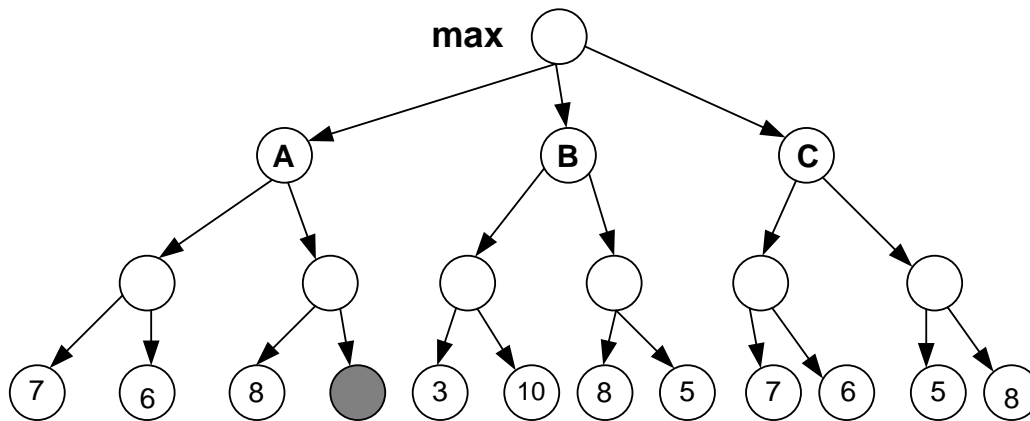
- A. 13
- B. 15
- C. 16
- D. 17**

19) Indica cuantos nodos terminales se generarían si se aplicara un procedimiento alfa-beta al siguiente árbol de juego:



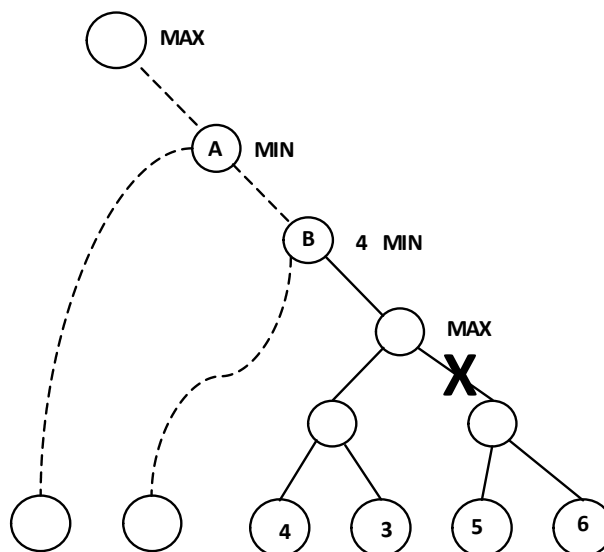
- A. 13
- B. 12
- C. 11
- D. 14**

20) Dado el árbol de juego de la figura, donde aplicamos un procedimiento alfa-beta, indica la respuesta CORRECTA:



- A. Si el nodo sombreado toma un valor ≤ 8 , se producirá un corte alfa en el nodo B y C.
- B. Si el nodo sombreado toma un valor ≥ 10 , se producirá un corte alfa en el nodo B y C.
- C. Para cualquier valor del nodo sombreado, se producirá siempre un corte alfa en B.
- D. Para cualquier valor del nodo sombreado, se producirá siempre un corte alfa en C.**

21) Dado el desarrollo parcial de una búsqueda alfa-beta indicado en la figura, donde el nodo B tiene un valor volcado provisional de 4 ¿Qué valor volcado provisional debe tener el nodo A para que se produzca el corte efectivo indicado en la figura?

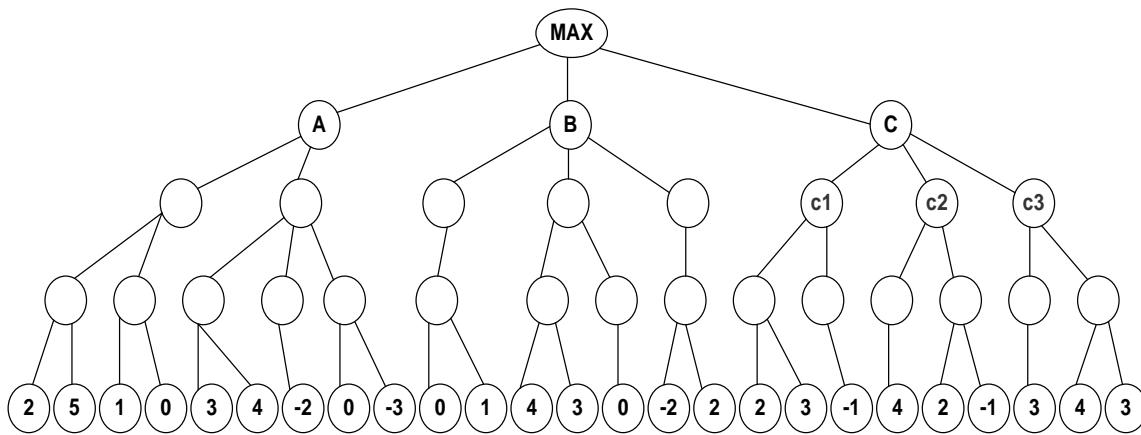


- A. Nunca se producirá el corte
- B. Menor o igual que 3**
- C. Mayor o igual que 3
- D. Menor que 3

22) Sea n_1 y n_2 los dos únicos nodos hijo de un nodo n el cual es un nodo MAX en un árbol de juego. Asumimos que se explora primero el nodo n_1 y luego n_2 . Indica la respuesta CORRECTA:

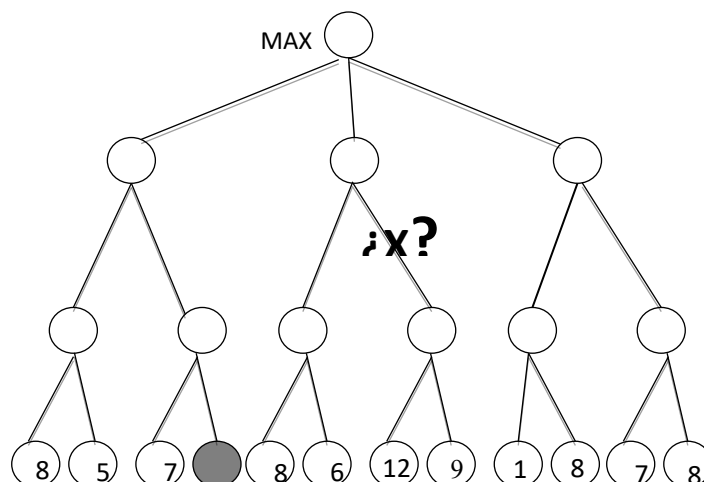
- A. El valor definitivo del nodo n será el máximo entre el valor definitivo de $n1$ y $n2$ solo cuando $n1$ y $n2$ son nodos terminales.
- B. Cuando se vuelva el valor de $n1$ al nodo padre n , este puede tener asociado un valor volcado anteriormente.
- C. Cuando se vuelva el valor de $n1$ al nodo padre n , se puede producir un corte beta en n .
- D. Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

23) ¿Cuál es la mejor jugada para el nodo raíz MAX si aplicamos un alfa-beta al árbol de juego?



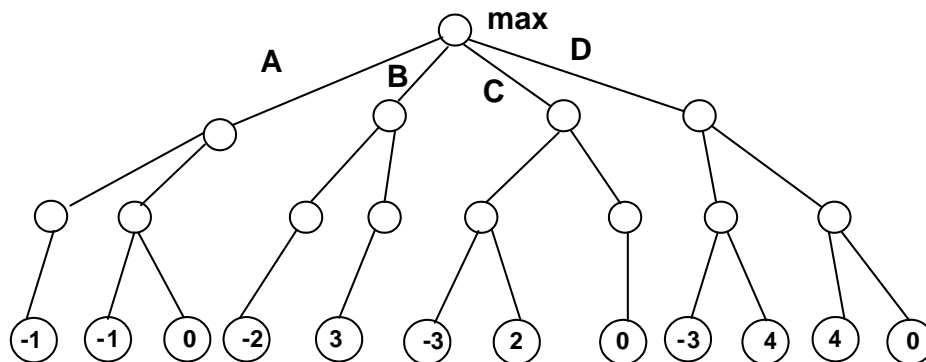
- A. La rama A
- B. La rama B
- C. La rama C
- D. La rama A ó B

24) Dado el espacio de búsqueda de un juego representado en la figura siguiente, asumiendo que se aplica un procedimiento alfa-beta, indica el valor que debería tener el nodo terminal sombreado para que se produzca el corte ilustrado en la figura:



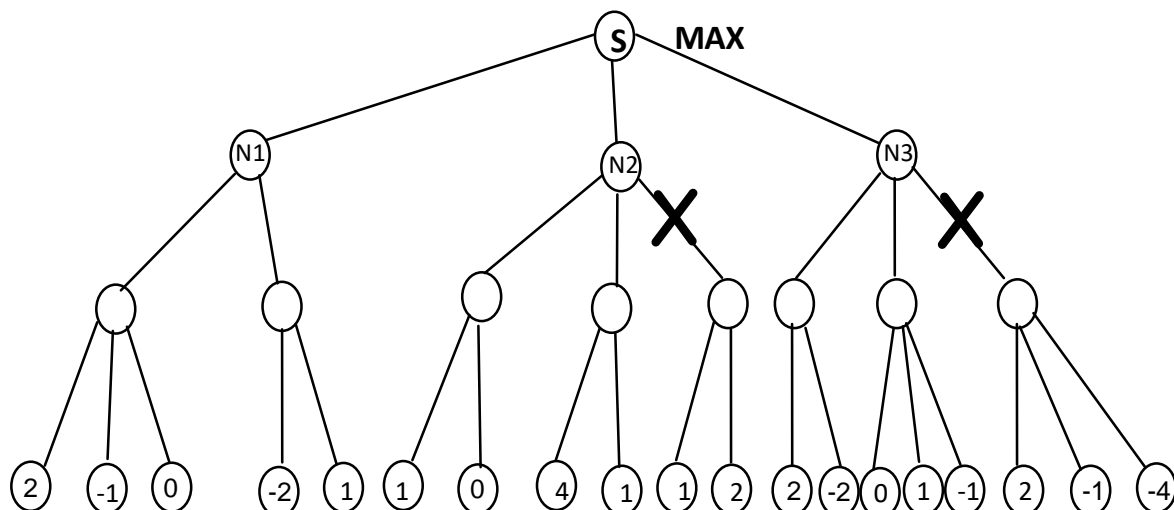
- A. Con cualquier valor del nodo se produciría un corte
- B. Menor que 8
- C. Mayor o igual que 8**
- D. Nunca se podría producir el corte indicado (o ninguna de las anteriores)

25) Dado el árbol de juego de la figura, ¿Cuántos nodos evitamos generar respecto a un algoritmo MINIMAX si realizamos una exploración alfa-beta?



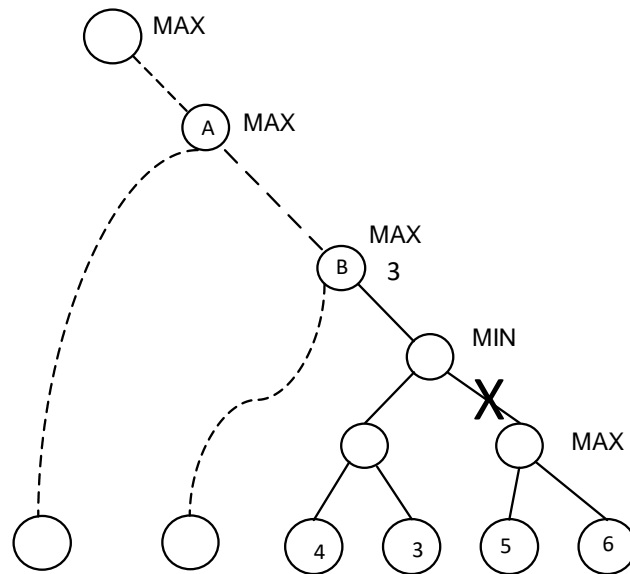
- A. 3
- B. 4**
- C. 5
- D. 6

26) Dado el árbol de juego de la figura donde se ha aplicado un procedimiento alfa-beta, indica la respuesta correcta:



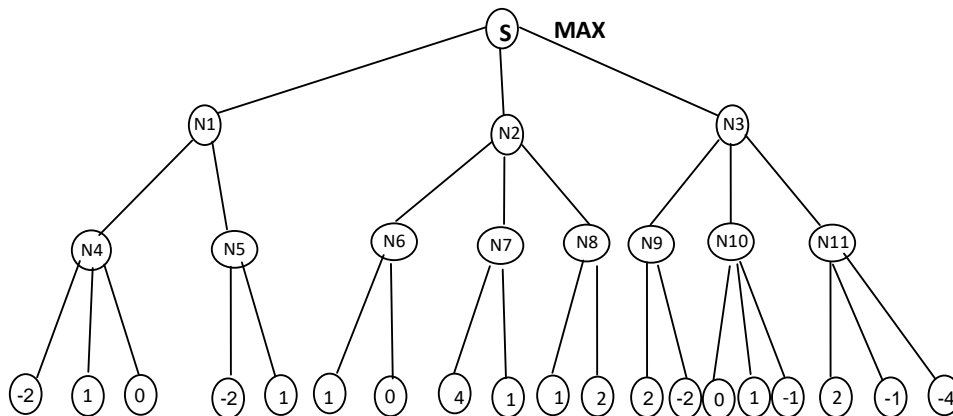
- A. No se produce corte en N3 y por tanto no se poda la rama de la derecha de N3
- B. No se produce corte en N2 y por tanto no se poda la rama de la derecha de N2
- C. Se produce un corte en el nodo N3 que podaría también la rama intermedia de N3
- D. Se produce un corte en el nodo N2 que podaría también la rama intermedia de N2**

27) Dado el desarrollo parcial de una búsqueda alfa-beta indicado en la figura, ¿qué valor provisional debería tener el nodo A para que se produzca el corte de la figura?



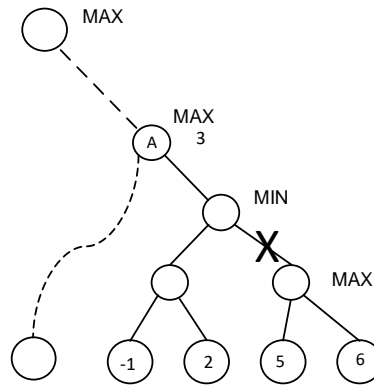
- A. Todos los valores comprendidos en el intervalo $[4, +\infty]$ provocarían el corte
- B. Todos los valores comprendidos en el intervalo $[3, +\infty]$ provocarían el corte
- C. Todos los valores comprendidos en el intervalo $[-\alpha, 3]$ provocarían el corte
- D. El corte de la figura no se puede producir nunca

28) Dado el árbol de juego de la figura donde se ha aplicado un procedimiento alfa-beta, indica la respuesta correcta:



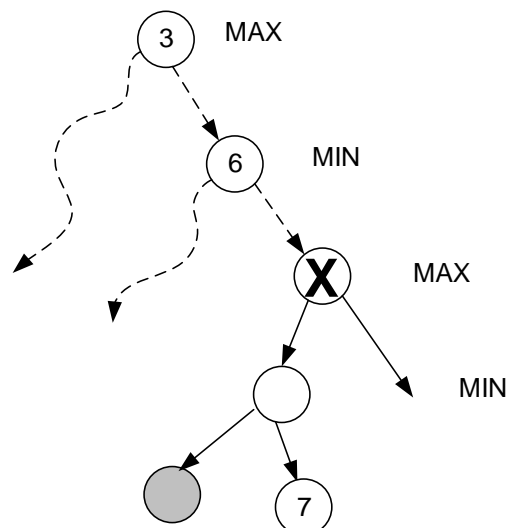
- A. Se produce un corte en el nodo N5
- B. Se produce un corte en el nodo N6
- C. Se produce un corte en el nodo N7
- D. Se produce un corte en el nodo N10

29) Dado el desarrollo parcial de una búsqueda alfa-beta indicado en la figura, indica la respuesta correcta:



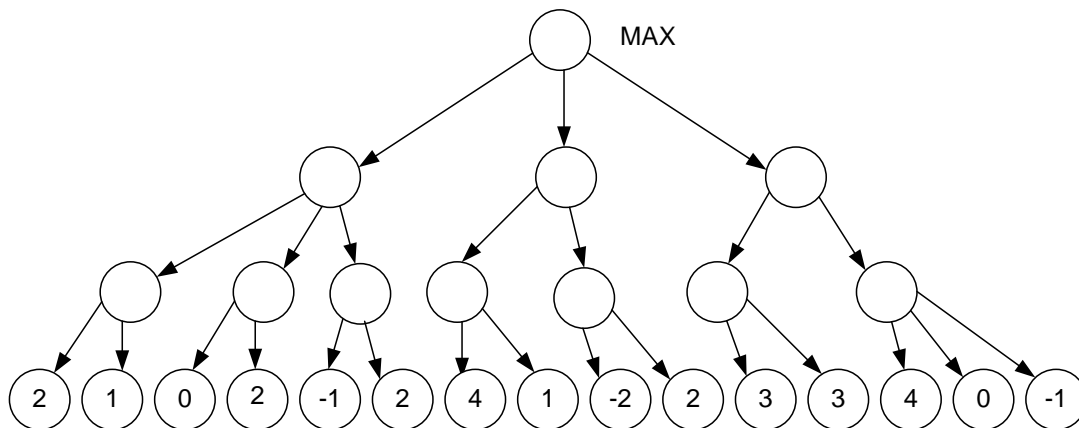
- A. El corte de la figura no se puede producir
- B. Si se cambia el valor -1 por el valor 4 entonces se produciría el corte
- C. Si se cambia el valor 2 por el valor 4 entonces se produciría el corte
- D. Ninguna de las respuestas anteriores es correcta

30) ¿Qué valor debería tener el nodo sombreado para que se produzca el corte indicado?



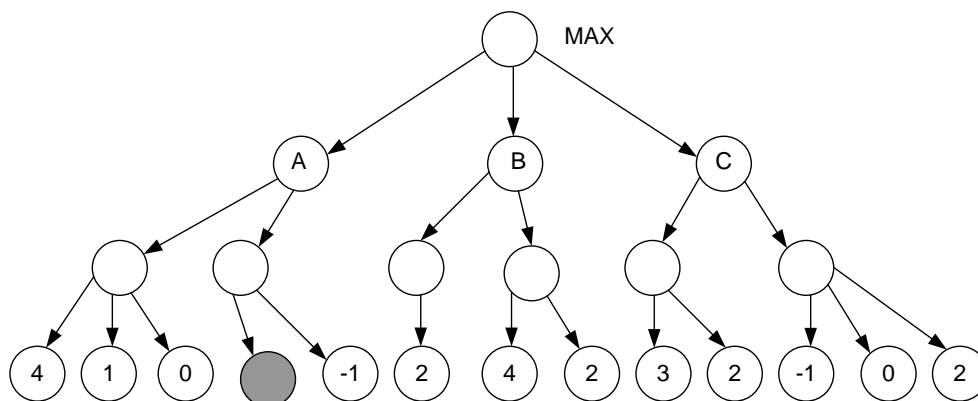
- A. Cualquier valor comprendido en $[6, \infty]$
- B. Cualquier valor comprendido en $[-\infty, 6]$
- C. Cualquier valor comprendido en $[3, \infty]$
- D. Cualquier valor comprendido en $[-\infty, 7]$

31) Dado el árbol de juego de la figura, donde se aplica un procedimiento alfa-beta, indica cuántos nodos evitamos generar respecto a un algoritmo MINIMAX si realizamos una exploración alfa-beta:



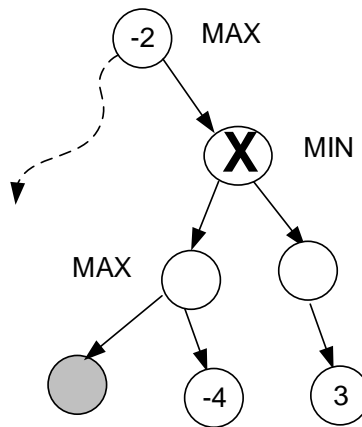
- A. Más de 4 y menos de 7
- B. Más de 6
- C. 2
- D. 4

32) Dado el árbol de juego de la figura, donde se aplica un procedimiento alfa-beta, indica la respuesta **CIERTA**:



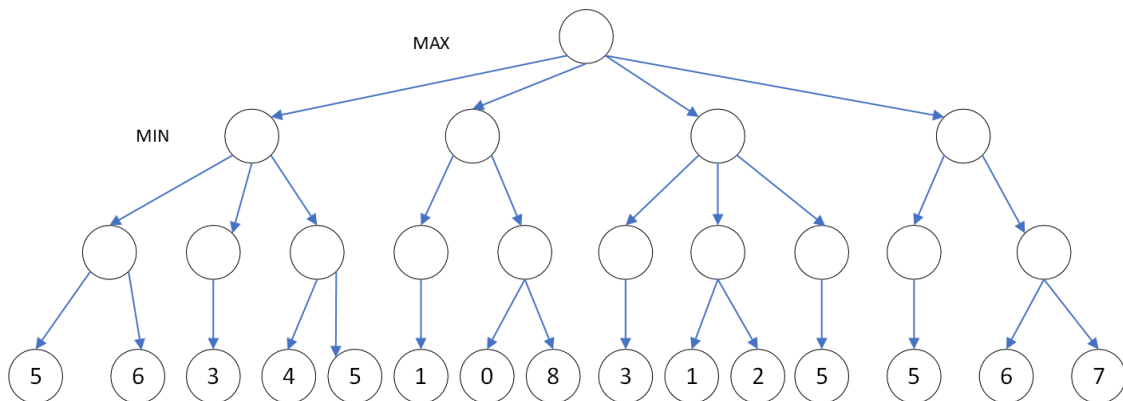
- A. Si el valor del nodo sombreado es mayor o igual a 4, se expanden 7 nodos terminales.
- B. Independientemente del valor del nodo sombreado, nunca se producirá un corte alfa en B.
- C. Independientemente del valor del nodo sombreado, nunca se producirá un corte alfa en C.
- D. Ninguna de las respuestas anteriores es correcta

33) Dado el siguiente árbol de búsqueda de un algoritmo alfa-beta ¿Qué rango de valores podría tener el nodo sombreado para que se realizase el corte indicado?



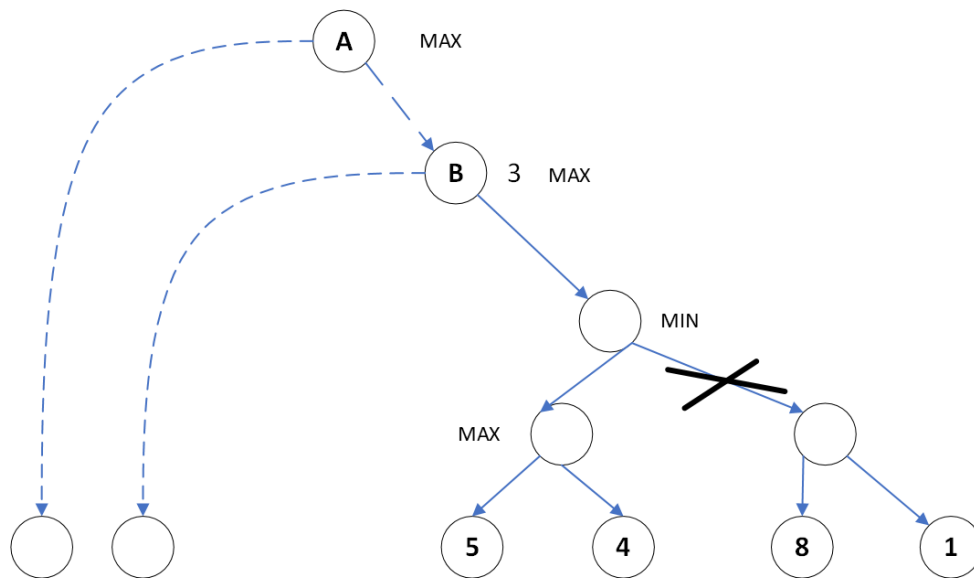
- A. $[-2, +\infty]$
- B. $[-4, +\infty]$
- C. $[-\infty, -2]$
- D. $[-\infty, -4]$

34) ¿Cuántos nodos se dejan de generar usando el algoritmo alfa-beta frente al Minimax en el siguiente árbol (expansión por la izquierda)?



- A. 9
- B. 10
- C. 8
- D. 11

35) Considerando que el nodo B tiene un valor volcado provisional de 3, ¿Qué valor provisional debería tener el nodo A para que se produzca el corte indicado?

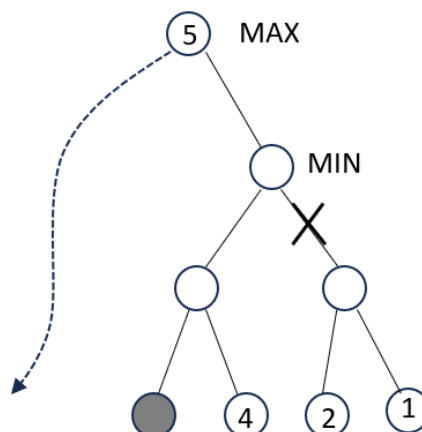


- A. Mayor o igual a 3
- B. Mayor o igual a 4
- C. Mayor o igual a 5
- D. Mayor o igual a 8

36) En un algoritmo Alfa-Beta, indica la sentencia **CORRECTA**:

- A. Los valores α provisionales de un nodo MAX son cotas inferiores del nodo y nunca pueden disminuir al desarrollar la búsqueda.
- B. El valor β de un nodo MIN no terminal es el mayor valor entre los valores de sus nodos sucesores
- C. Los valores β provisionales de un nodo MIN son cotas inferiores del nodo y nunca pueden disminuir al desarrollar la búsqueda.
- D. Ninguna de las anteriores es correcta

37) ¿Qué valor debería tener el nodo sombreado para que se produzca el corte indicado?



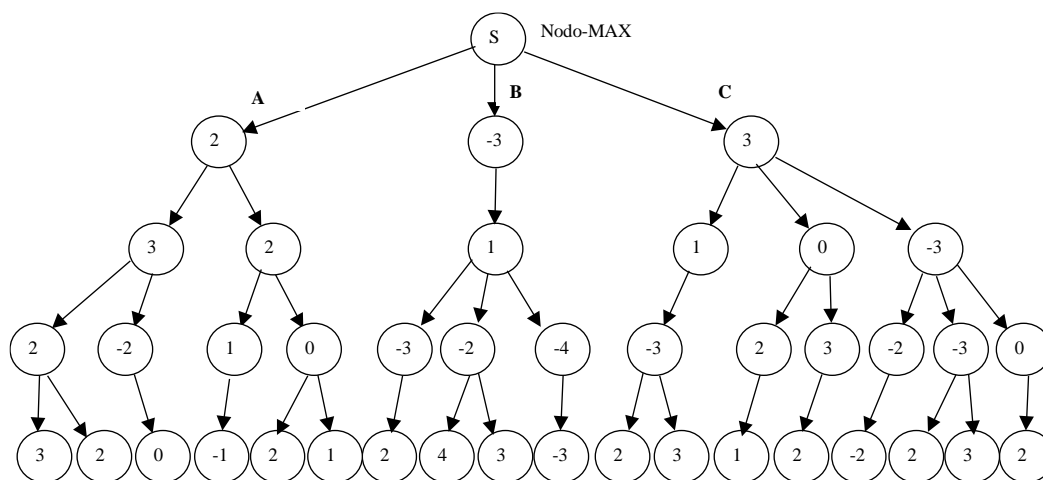
- A. Mayor o igual que 4
- B. Menor o igual que 5
- C. Entre 2 y 6
- D. No es posible el corte

PROBLEMAS

EJERCICIOS: BÚSQUEDA CON ADVERSARIO

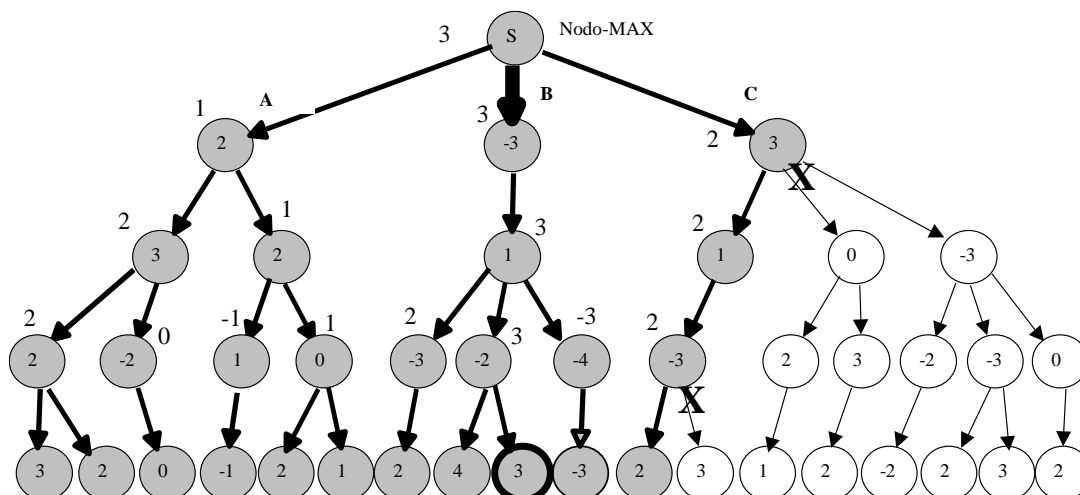
Ejercicio 1

Considérese el árbol de juego de la figura. Los valores situados en los nodos corresponden a la evaluación de una determinada función de estimación.



Mediante un algoritmo de búsqueda con poda alfa-beta, expandiendo primero los nodos sucesores que se encuentran más a la izquierda, obtener cual sería la mejor jugada inicial (A, B, C). Indicar claramente las podas que se realizan y la rama seleccionada por MAX.

Solución:

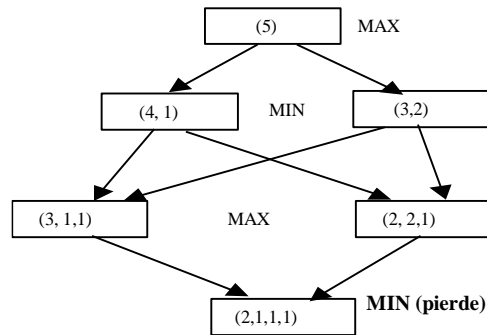


Ejercicio 2

En el juego del NIM, dos jugadores deben coger alternativamente 1, 2 ó 3 monedas (y dejarlas sobre la mesa) de una pila que inicialmente contiene 5 monedas. Pierde el jugador que desapila la última moneda. Desarrolla el árbol del juego y determina cuál es la mejor jugada para MAX. Comenta las alternativas que existen a dicha primera jugada inicial.

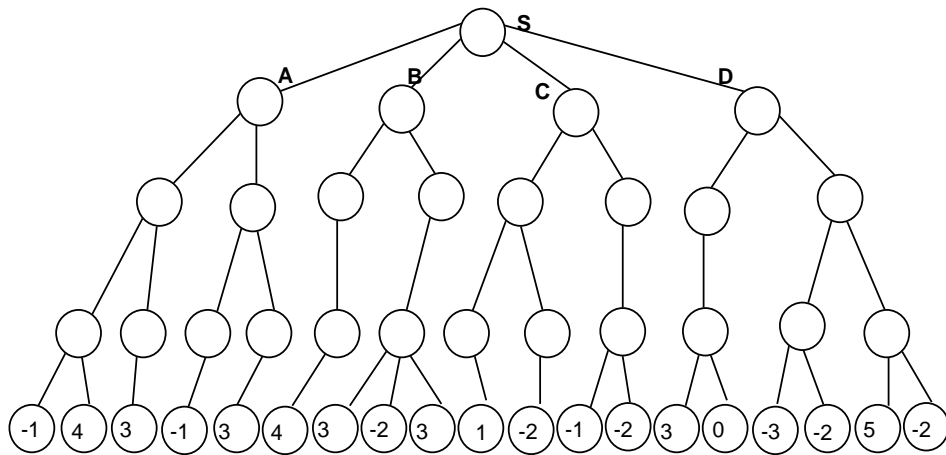
Solución:

En el árbol de juego correspondiente se aprecia que **cualquier jugada inicial** de MAX es una jugada ganadora.



Ejercicio 3

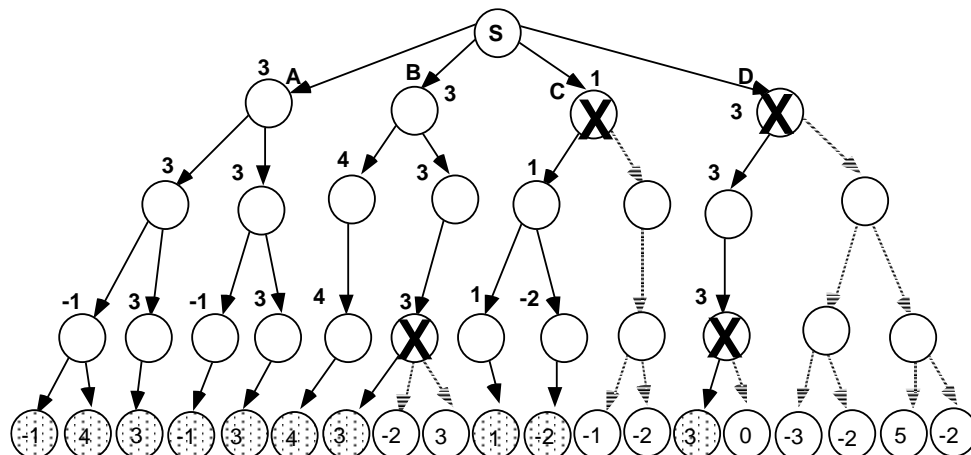
Dado el siguiente árbol de búsqueda, donde se representa la evaluación que se obtendría por una determinada función sobre los nodos terminales, y considerando un procedimiento de búsqueda α - β en profundidad:



- Marcar con X y con + aquellos nodos donde se efectuaría un corte α y β respectivamente.
- Valor final asociado al nodo inicial S y rama que se elegiría.

Solución:

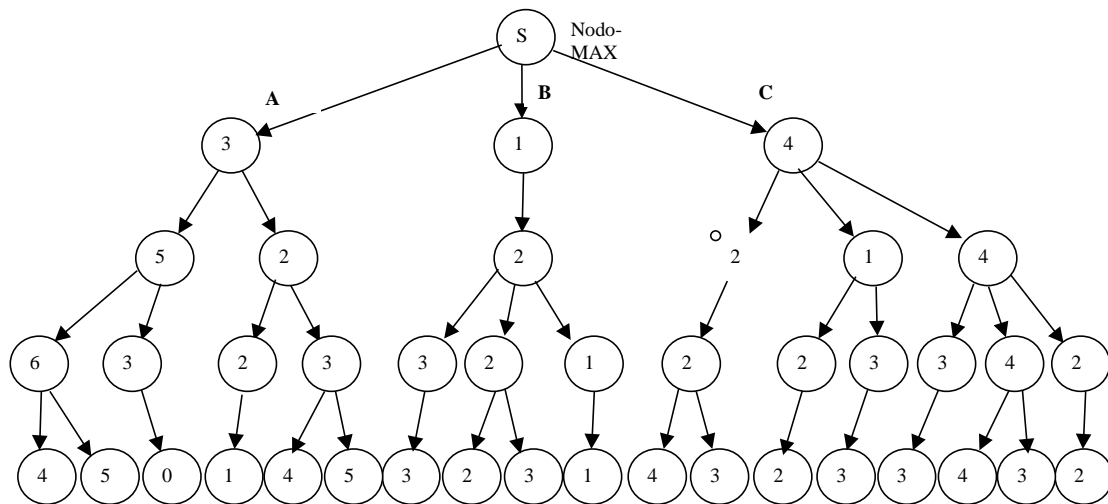
El árbol resultante, donde se indica el valor asumido resultante para cada nodo, es:



El valor final asociado al nodo inicial S es 3, correspondiente a la rama A. No se deben elegir las ramas B o D, aunque su evaluación final sea 3, porque esta evaluación corresponde a un corte efectuado desde la rama A. Su valor final, sin cortes, sería menor o igual a 3, que es el límite impuesto por la rama A para seguir expandiendo sin cortes.

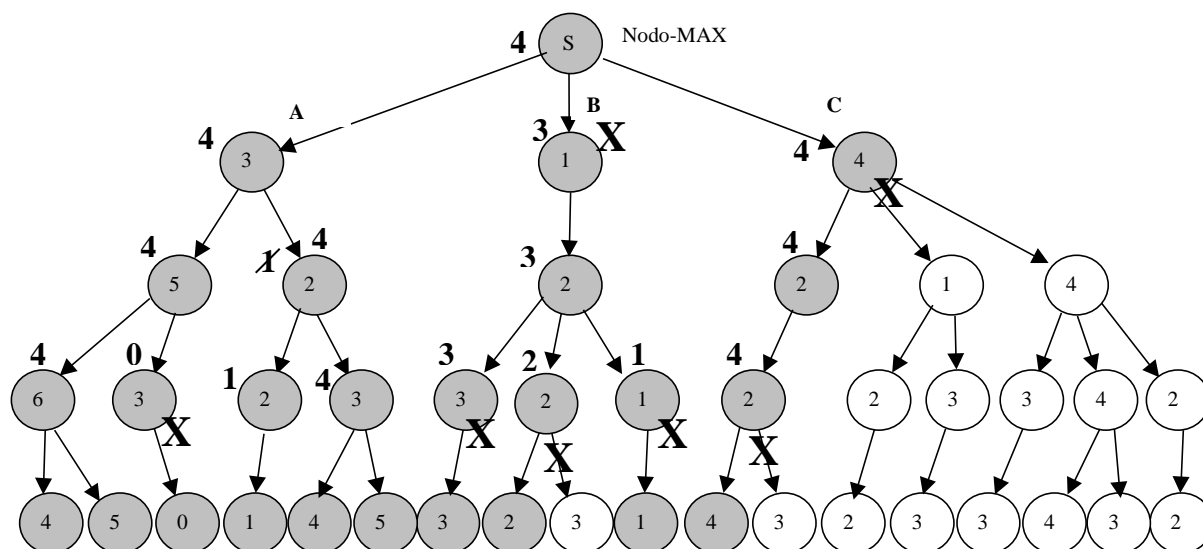
Ejercicio 4

Considérese el árbol de juego de la figura. Los valores situados en los nodos corresponden a la evaluación de una determinada función de estimación.



Se pide: Mediante un algoritmo de búsqueda con poda alfa-beta, expandiendo primero los nodos sucesores que se encuentran más a la izquierda, obtener cual sería la mejor jugada inicial (A, B, C). Indicar claramente las podas que se realizan y la rama seleccionada por MAX.

Solución:



La mejor jugada será la rama A, ya que, aunque se produce una meseta con la rama C (igual valor final volcado en los hijos de S), por debajo de la rama A no hay corte, con lo que el valor final volcado coincidirá con el que se obtendría con MINI-MAX, mientras que en la rama C el valor final volcado es una cota superior (si desarrollase

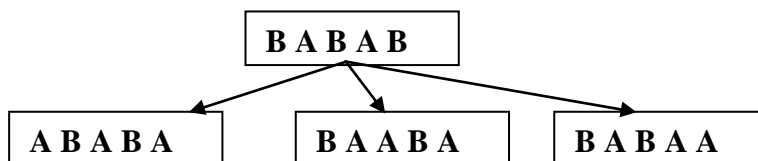
exhaustivamente la búsqueda el valor final volcado podría ser menor, como efectivamente sucedería) del valor que se obtendría en el caso de aplicar MIN-MAX.

Ejercicio 5

Dos jugadores A y B tienen delante un conjunto de fichas alineadas. Hay 2 clases de fichas A y B. Los dos jugadores juegan por turnos.

- Turno de A: Una ficha A puede “comerse” todas las fichas del tipo B que se encuentren entre dos fichas A, o entre una ficha A y un extremo del tablero. Los huecos resultantes se eliminan.
- Turno de B: Recíproco del anterior. Las fichas B se “comen” a las fichas A.

Por ejemplo a partir de la situación inicial, las posibles jugadas para A serían:



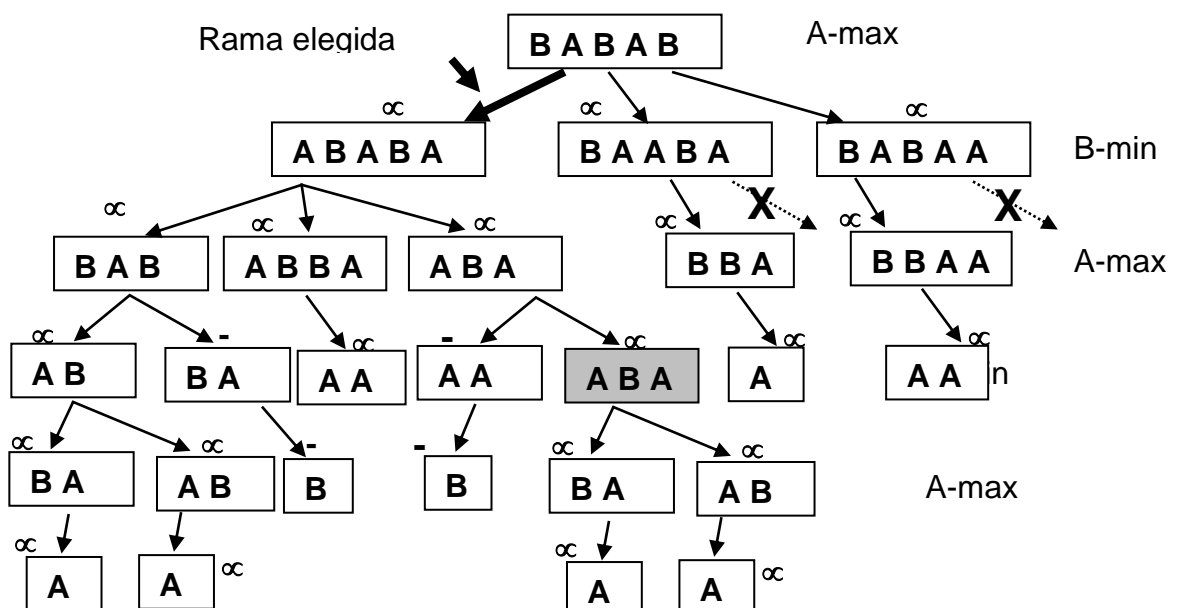
El juego termina cuando algún jugador se queda sin fichas. Gana el jugador que conserve fichas al terminar el juego.

Aplicar un **procedimiento de búsqueda con poda alfa-beta** a partir de la situación inicial anterior [BABABA], suponiendo que empieza el jugador A y se desarrolla hasta estados finales (en los que gane uno u otro jugador). Obtener la mejor jugada inicial para el jugador A.

Notas importantes:

- Desarrollar el árbol de forma que los sucesores de un nodo se ordenen entre sí con el siguiente criterio: el hijo más a la izquierda sería el que corresponda a la eliminación de las fichas enemigas que estén más a la izquierda.
- Debe tenerse en cuenta que, dado que se utiliza un procedimiento alfa-beta, **no todo el árbol de juego requerirá ser generado**: Solo deben aparecer en el árbol los nodos que necesariamente se hayan generado.

Solución: El árbol que se explora es el siguiente, incluyendo los cortes α - β :



valor beta (3) menor que el de su hijo MAX (4). El corte alfa de la rama de la derecha se produce al volcar el valor 1 en un nodo MIN teniendo su antecesor MAX un valor de 2.

b) Un alfa-beta óptimo se obtiene cuando se producen el máximo número de cortes alfa-beta, podando el mayor número posible de nodos. Dicho de otro modo, un alfa-beta es óptimo cuando se producen todos los cortes posibles en el desarrollo del algoritmo (es decir, la respuesta a toda pregunta de corte es SI).

Hay varias formas de conseguir un alfa-beta óptimo para el ejemplo. En este caso, iremos tomando los valores de los nodos terminales tal cual aparecen en el árbol hasta que veamos un corte que no se produce y cambiaremos el valor correspondiente del nodo terminal para que el corte se genere.

- Los nodos A, B y C no cambian de valor ya que no es posible que se produzca un corte porque los nodos superiores aún no tienen valor volcado.
- Al volcar el valor del nodo D no se produce corte pero podría generarse uno ya que su padre MIN ya tiene un valor (-1). Por tanto, si el valor del nodo **D** $\in [-1, +\infty]$ se hubiera producido un corte beta efectivo, podando de este modo el nodo E. En esta primera rama no es posible conseguir ningún corte más ya que el nodo MIN no tiene valor hasta que su primer hijo se estudia por completo; por otra parte, el nodo MAX superior aún no tiene valor por lo que no es posible obtener un corte.
- En la segunda rama el corte más efectivo que se podría haber producido sería si al volcar el primer valor al nodo MIN se produce un corte alfa con el valor provisional que ya tiene el nodo MAX inicial (-1) (similar a lo que ocurre en la rama de la derecha). Para que esto suceda los valores de los nodos **F y G tendría que $\in [-\infty, -1]$** . De este modo se hubiera volcado el valor -1 al nodo padre MIN que a su vez hubiera producido un corte con el valor -1 provisional del nodo MAX superior.
- Llegados este punto, el nodo MAX tiene un valor provisional de (-1). Los nodos L y M tienen que ser estudiados para conseguir un primer valor en el nodo MIN y así poder producirse un corte con el valor del nodo MAX inicial. Si cambiamos **M por un valor $[-\infty, -1]$** el nodo MAX padre se quedaría con un valor -1 que subiría al nodo MIN que a su vez provocaría un corte alfa con el valor del nodo MAX inicial.

En resumen, los nodos que tendrían que cambiar son:

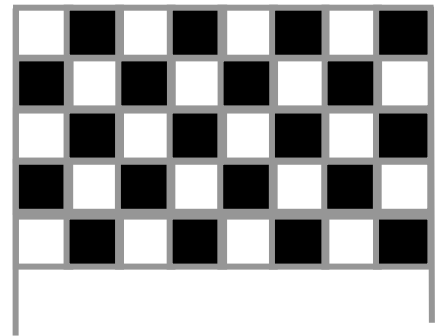
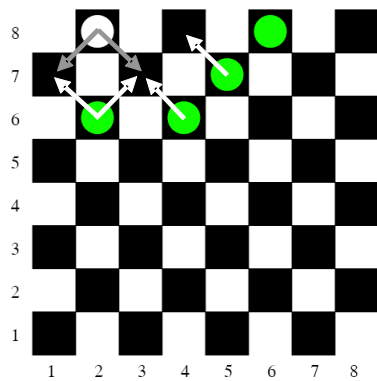
- $D \in [-1, +\infty]$
- $F, G \in [-\infty, -1]$
- $M \in [-\infty, -1]$

Ejercicio 7

El juego del gato y el ratón se juega en un tablero de ajedrez (8x8), utilizando solo las casillas negras. Los gatos son las fichas negras, situadas inicialmente en las casillas negras de la primera fila, y el ratón (ficha blanca) está inicialmente en cualquiera de las casillas negras de la última fila. Los jugadores se van turnando en sus movimientos. Los gatos solo puede mover una ficha en cada turno y siempre avanzando, ocupando una de las posibles dos casillas negras diagonales contiguas de la fila siguiente. El ratón se puede mover hacia adelante y atrás, es decir, a cualquiera de las cuatro diagonales inmediatas.

Los gatos ganan la partida si consiguen acorralar e impedir el movimiento del ratón. El ratón gana si se encuentra en una fila anterior a la del gato más atrasado o bien en línea con el gato más retrasado y es su turno de juego, dado que los gatos solo pueden ir hacia adelante y el ratón se escaparía.

Suponiendo la situación inicial descrita en la figura, y que juega el ratón (computador, MAX),

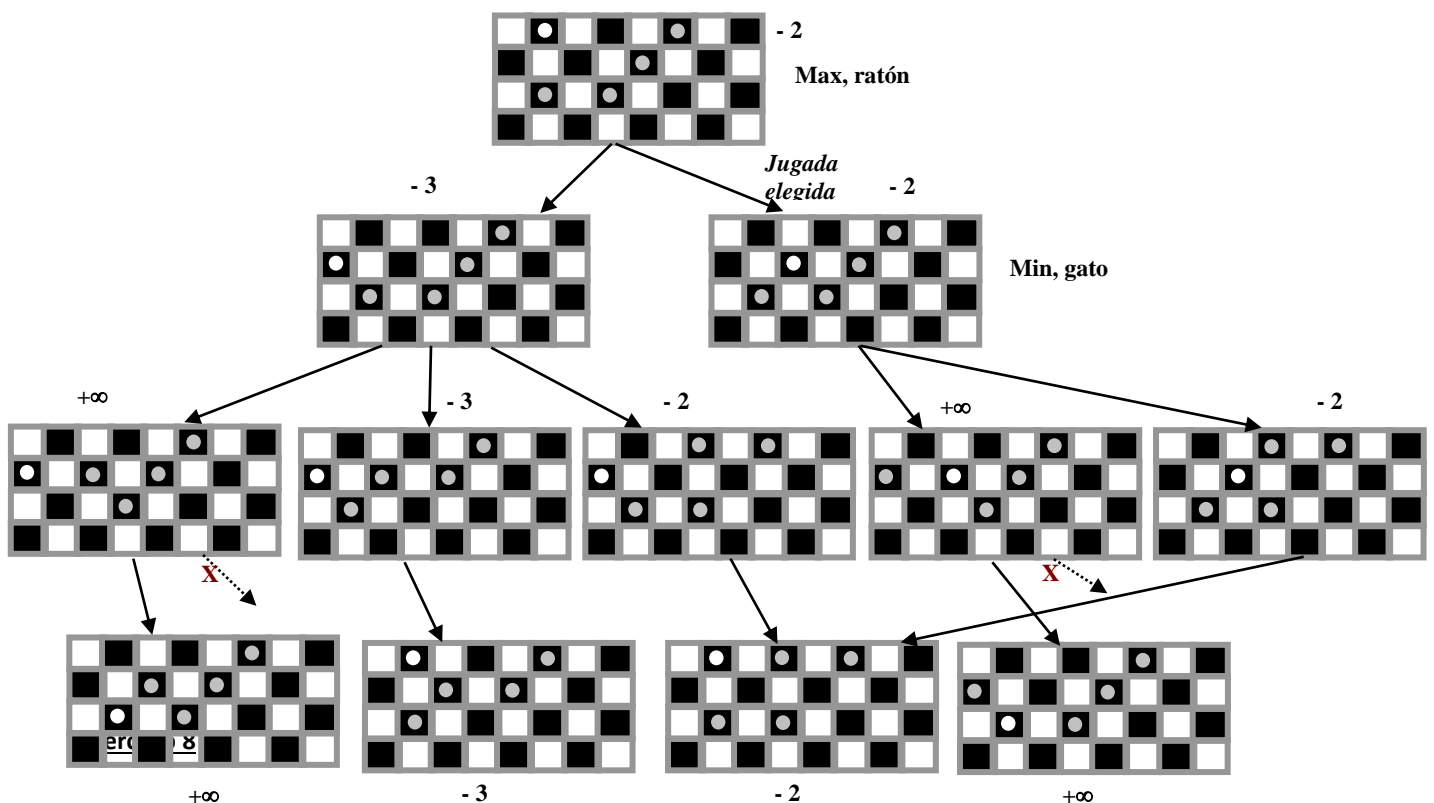


Nota: Para clarificar el desarrollo del procedimiento, representar cada nodo mediante la plantilla de la figura derecha.

- Definir una función de evaluación, tal que resulte $+\infty$ (o $-\infty$) si gana (o pierde) el ratón.
- Determinar la jugada inicial mediante un procedimiento alfa-beta en profundidad, con nivel máximo de exploración 3, efectuando e **indicando claramente** los cortes que sean necesarios. En la evaluación de los nodos terminales, usar la función de evaluación anterior. Representar cada nodo mediante la plantilla de la figura derecha anterior.
- Para la exploración en profundidad, supóngase:
 - Prioridad movimiento ratón: a casillas de filas inferiores antes que a superiores, y en segundo lugar, a columnas inferiores antes que a superiores.
 - Prioridad movimiento gato: el gato más a la izquierda primero y, en segundo lugar, el movimiento a columna inferior (diagonal izquierda) primero.

Solución:

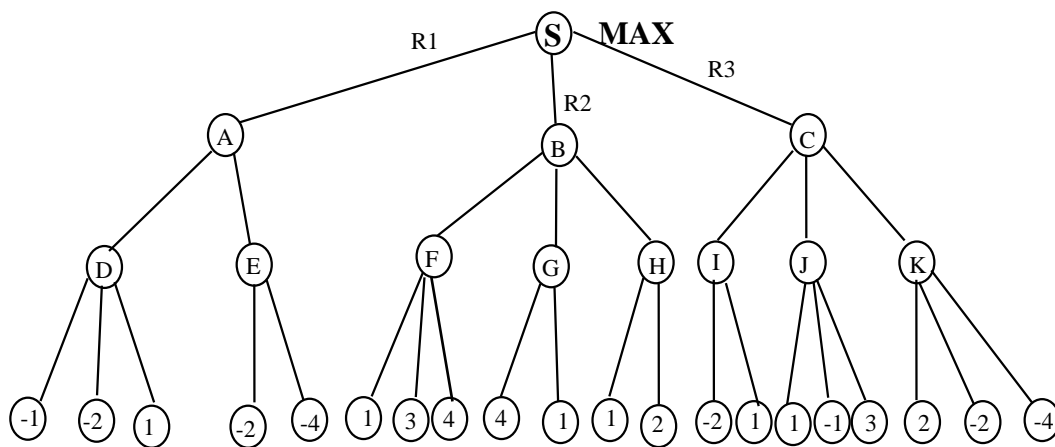
Por ejemplo, definimos $f(n) = -(\text{nº gatos en filas inferiores al ratón})$. Será más positiva (menos negativa) cuanto mejor sea para el ratón. Asumimos $+\infty$ (o $-\infty$) si gana (o pierde) el ratón. El árbol que se genera es el siguiente, produciéndose los cortes indicados. Se indica la mejor jugada inicial.



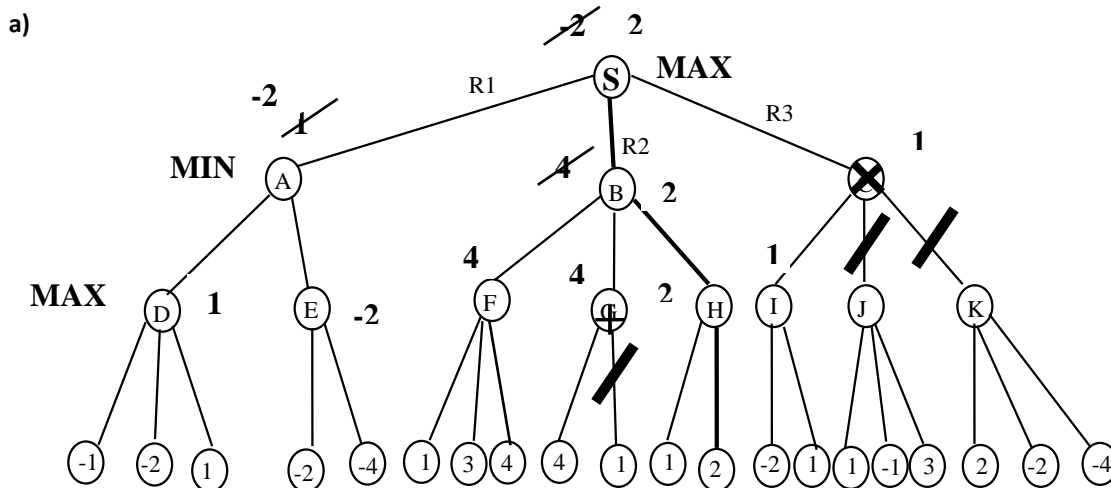
Ejercicio 8

Sea el árbol de juego de la figura que se muestra a continuación:

- a) Asumiendo que los nodos se expanden de izquierda a derecha, aplica el algoritmo alfa-beta en profundidad. Indica claramente los valores que se asocian a cada uno de los nodos. Marca con una **X** los cortes alfa y con una **+** los cortes beta. Muestra todos los cortes, tanto efectivos como no efectivos (en el primer caso señala adecuadamente que ramas son las que se podan). Indica cuál será la mejor jugada de MAX y el número de nodos que se podan.
- b) Queremos ejecutar de nuevo el algoritmo alfa-beta pero expandiendo los nodos de tal modo que la aplicación del algoritmo provoque el mayor número de nodos podados posibles. Aplica de nuevo el algoritmo alfa-beta escogiendo el orden en el que se expanden los nodos de nivel 1 y nivel 2 (los nodos terminales siempre se expanden de izquierda a derecha). Indica y justifica claramente el orden en que se expanden los nodos A,B,C ... K.

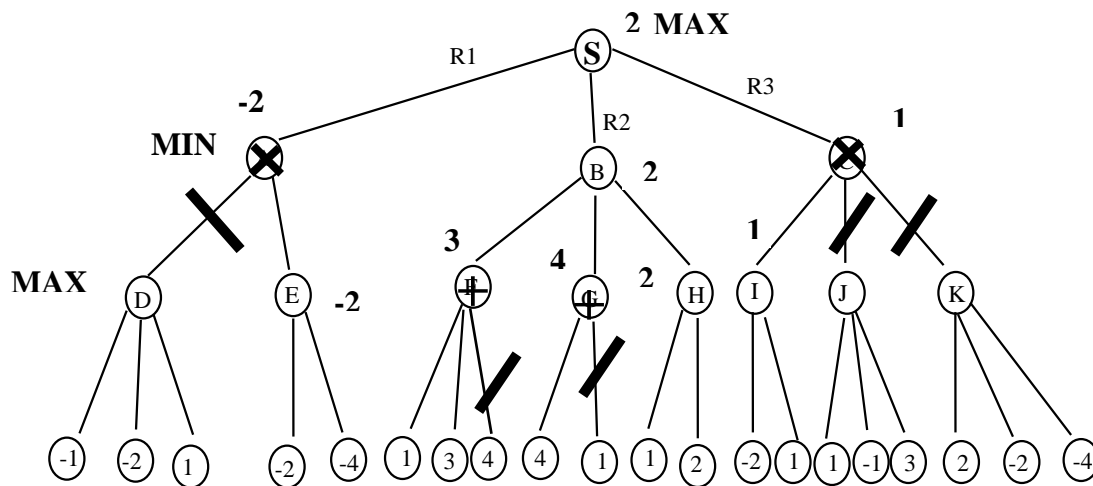


Solución:



Se produce un corte beta en el nodo G y un corte alfa en el nodo C, podando así sus respectivos hijos, en total 9 nodos. La mejor jugada de MAX sería la rama R2; concretamente, el nodo terminal que daría valor al nodo MAX raíz sería el hijo del nodo H con valor 2.

b) Para que se produzca el mayor número de nodos podados posibles, habría que volcar en primer lugar el valor del nodo terminal que maximiza el nodo raíz MAX, esto es, el hijo del nodo H con valor 2. De este modo, expandimos primero el nodo B y a continuación su hijo H.



En el siguiente paso, deberíamos estudiar el nodo F o G. No importa el orden en el que se estudien estos dos nodos, ya que producirán los mismos cortes, ambos producidos por el valor 2 del nodo B. Por tanto, el orden seguido hasta el momento es (B,H,F,G) o bien (B,H,G,F).

En el siguiente paso podemos estudiar el nodo A o el nodo C. De nuevo, el orden no influirá en el número de nodos podados porque en ambos casos se producirá una poda por el valor 2 provisional del nodo S. Estudiamos primero el nodo C. Ahora tenemos que elegir el nodo hijo de C que vamos a estudiar en primer lugar. El nodo J no produciría poda porque el máximo valor de sus nodos terminales es 3, que no cortaría con el valor 2 provisional del nodo S al volcarlo en el nodo C. El nodo K sí produciría poda al volcar el valor máximo 2 de sus nodos terminales, pero en dicho caso se podarían 7 nodos (los nodos I y J y sus respectivos hijos); por el contrario, si estudiamos primero el nodo I, se producirá una poda con respecto al valor 2 provisional del nodo S y podremos podar 8 nodos (los nodos J y K, los 3 hijos de J y los 3 hijos de K).

El orden escogido hasta el momento es (B,H,F,G,C,I). En el último paso estudiamos el nodo A. El máximo valor que adquiriría D es 1 y el máximo valor que adquiriría E es -2. En ambos casos se produciría una poda en el nodo A con respecto al valor 2 provisional del nodo S. Por tanto, estudiamos en primer lugar el nodo E ya que producirá una poda de 4 nodos.

En resumen, se podan en total 14 nodos y el orden final es: (B,H,F,G,C,I,A,E) pudiendo alterar el orden entre F y G y el orden entre C y A.

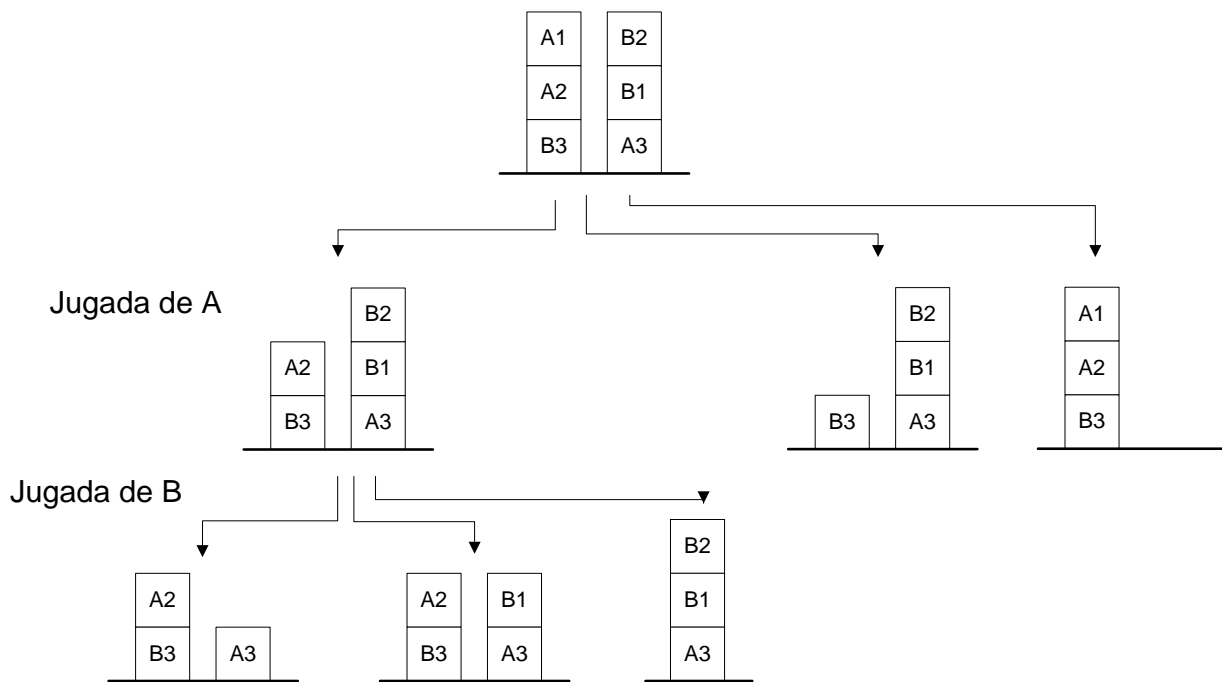
Ejercicio 9

Dos jugadores A y B, juegan una variante del denominado juego de Hackenbusch, en la que sobre un tablero hay varias columnas de bloques apilados. Hay bloques de tipo A y bloques de tipo B. Los jugadores A y B juegan por turnos, cada jugador sólo con los bloques de su mismo tipo. Un jugador en su turno debe elegir un bloque de su tipo y retirarlo. Siempre que se retire un bloque todos los bloques que están encima de él, sean del tipo que sean, han de ser retirados también. Pierde el jugador que en el siguiente turno no tiene bloques para retirar.

En la figura, se muestra la situación inicial del juego así como las posibilidades de la primera jugada de A y parte de la primera jugada de B.

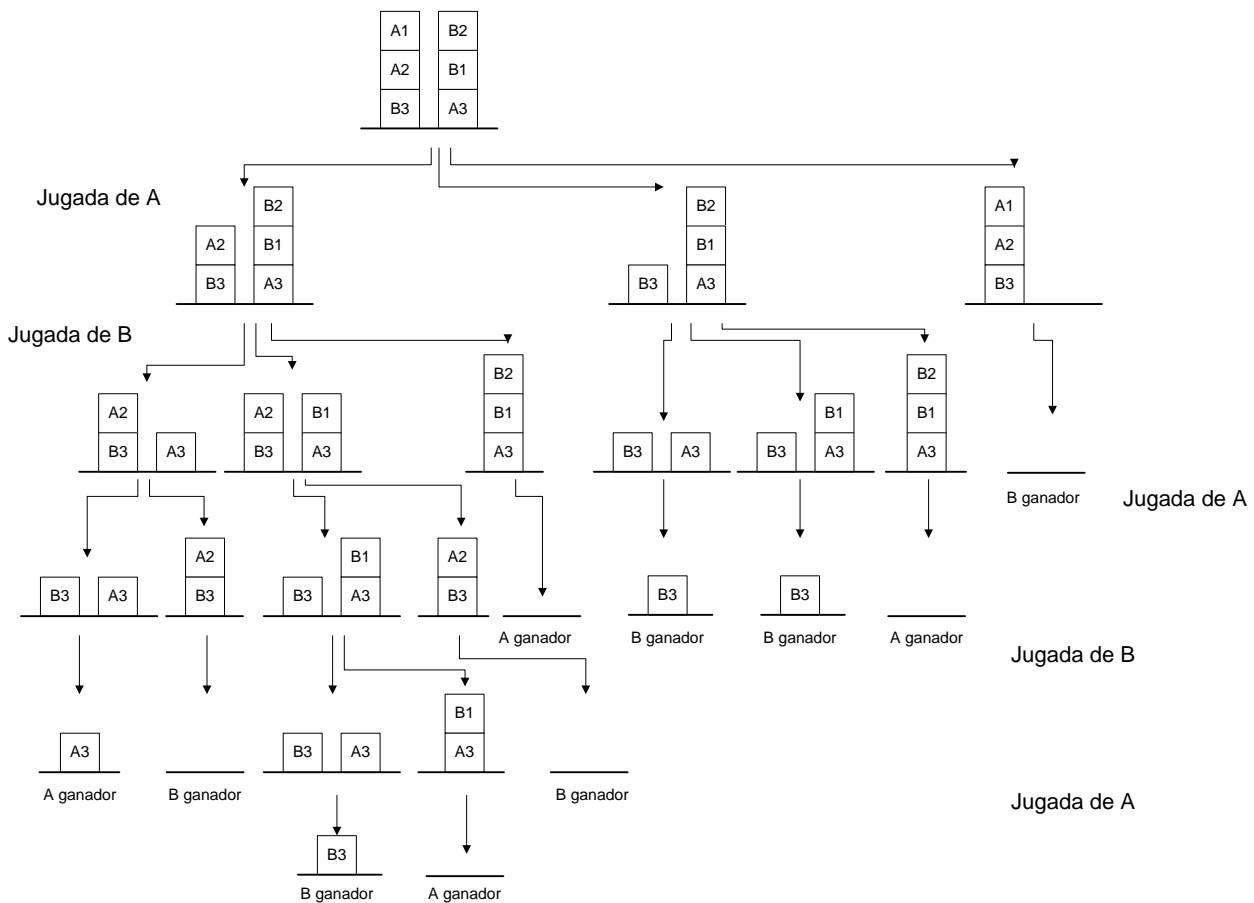
- Desarrollar el árbol de juego completo hasta estados terminales.
- Utilizar el procedimiento Minimax con poda alfa-beta para decidir la mejor jugada de A..

- c) Razonar que posibilidades tiene A de ganar el juego si B también aplicara el mismo procedimiento para decidir su siguiente jugada.

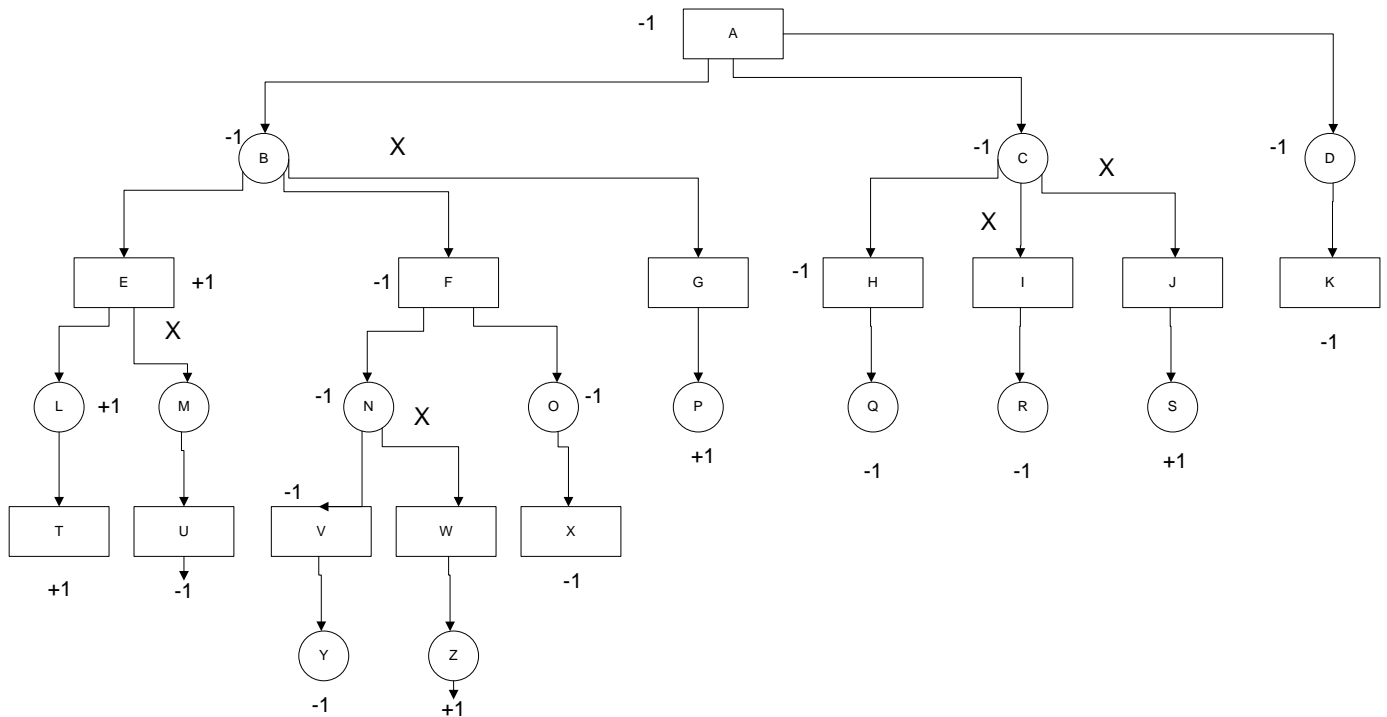


Solución:

a) Desarrollo del árbol de juego:



b) Minimax con poda alfa-beta:



Nota: Utilizamos los valores -1 y +1 equivalentemente a $-\infty$ y $+\infty$.

Comenzamos asignando todos los nodos con sus valores iniciales: -1 para nodos MAX (rectángulos) y +1 para nodos MIN (círculos), ya que son los únicos valores que se podrán volcar desde los nodos sucesores. El procedimiento empieza estudiando la rama de la izquierda. En este caso, el valor volcado al nodo L (+1) es el mismo que inicialmente tenía, por lo que no se modifica. Sin embargo, al volcar este valor +1 al nodo E, sí se modifica, ya que éste es un nodo MAX y su valor inicial era -1. Como B es un nodo MIN y E es un nodo MAX y ambos tienen el mismo valor (+1, que además es el máximo que E puede tomar), se poda la rama M-U. Se vuelca el valor +1 a B, que es el que inicialmente tenía.

Continuamos por la siguiente rama. El valor -1 del nodo Y se vuelca al nodo V, que no modifica su valor. Al subir el valor al nodo N, éste sí modifica el valor asociado, pasando a ser -1. La rama W-Z se poda ya que N es un nodo MIN con valor -1 y F es un nodo MAX con el mismo valor (también se podría considerar que -1 es el mínimo valor que puede tomar N). Y este valor -1 se vuelca en el nodo F (que no se modifica). Seguimos por el siguiente nodo terminal, X, que vuelca su valor en O. Igualmente, se sube -1 a F, que ya tenía este valor. B es un nodo MIN y actualmente tiene el valor +1, pero al subir el valor de F, se modifica a -1. Como B es un nodo MIN y ya tiene el menor valor que puede tomar, podemos la última rama sucesora de B (esta poda también se realiza si tenemos en cuenta que A tiene como valor -1 que es igual al valor del nodo B). El valor -1 de B se vuelca en A (aunque no se modifica).

Estudiamos ahora la rama más a la izquierda de nodos sucesores de C. Q vuelca su valor en H y éste en C, que pasa a tener el valor -1. Como el valor del nodo C (MIN) es igual al valor del nodo A (MAX), se realiza una poda de ambas ramas (efectivamente, ya no es necesario estudiarlas, puesto que C tiene el mínimo valor que puede tomar).

Por último, el valor del nodo K se sube al nodo D, que modifica su valor. Aquí se produce una poda no efectiva, ya que este nodo no tiene otros sucesores aparte del ya estudiado.

A la vista del resultado del procedimiento Minimax con poda alfa-beta, no existe una jugada que claramente sea mejor para A. La jugada que corresponde al nodo D se descarta rápidamente, ya que ésta conduce a A a una derrota clara. La jugada que corresponde al nodo C también se descarta porque esta rama tiene varias podas, por lo que no se ha estudiado en profundidad. Así que se escogería como jugada la que corresponde al nodo B, cuyos nodos sucesores llevan a varias jugadas ganadoras para A.

- c) A no tiene ninguna posibilidad de ganar, ya que todas las ramas nos indican que existe una combinación de jugadas en las que ganará B (siempre y cuando B escoja la mejor opción en cada caso).

Ejercicio 10

La figura (a) muestra el estado inicial de un puzzle lineal que consta de 5 casillas: las dos de la izquierda contienen 2 fichas blancas (B), la del medio es un espacio vacío, y las dos de la derecha contienen 2 piezas negras (N). La figura (b) muestra el estado final al que se desea llegar.

1	2	3	4	5
B	B		N	N

(a) Estado inicial

1	2	3	4	5
N	N		B	B

(b) Estado final

Las acciones que se pueden aplicar en este problema son:

- A1. Una ficha se puede mover al espacio vacío si está al lado del espacio vacío
- A2. Una ficha se puede mover al espacio vacío saltando sobre otra ficha de cualquier color
- A3. Una ficha se puede mover al espacio vacío saltando sobre dos fichas de cualquier color

Además, hay que tener en cuenta que las fichas B solo se pueden mover hacia la DERECHA, y las fichas N solo se pueden mover hacia la IZQUIERDA.

Supongamos que tenemos dos jugadores: jugador-B que juega con las fichas B, y jugador-N, que juega con las fichas N. Los movimientos que puede realizar cada jugador son los que se especifican en el enunciado (A1, A2 y A3).

El objetivo del jugador-B es colocar sus dos fichas en las posiciones 4 y 5. El objetivo del jugador-N es colocar sus dos fichas en las posiciones 1 y 2. Si un jugador no puede mover ninguna de sus fichas en su turno (el jugador-B no puede mover ninguna ficha B hacia la derecha o el jugador-N no puede mover ninguna ficha N a la izquierda), el jugador pierde el turno y mueve el jugador contrario. Desarrolla un procedimiento de búsqueda alfa-beta con expansión en profundidad a partir de la situación inicial (BB_NN), suponiendo que empieza el jugador-B y que la búsqueda se desarrolla hasta estados terminales finales. Obtener la mejor jugada inicial para jugador-B. Justifica la respuesta.

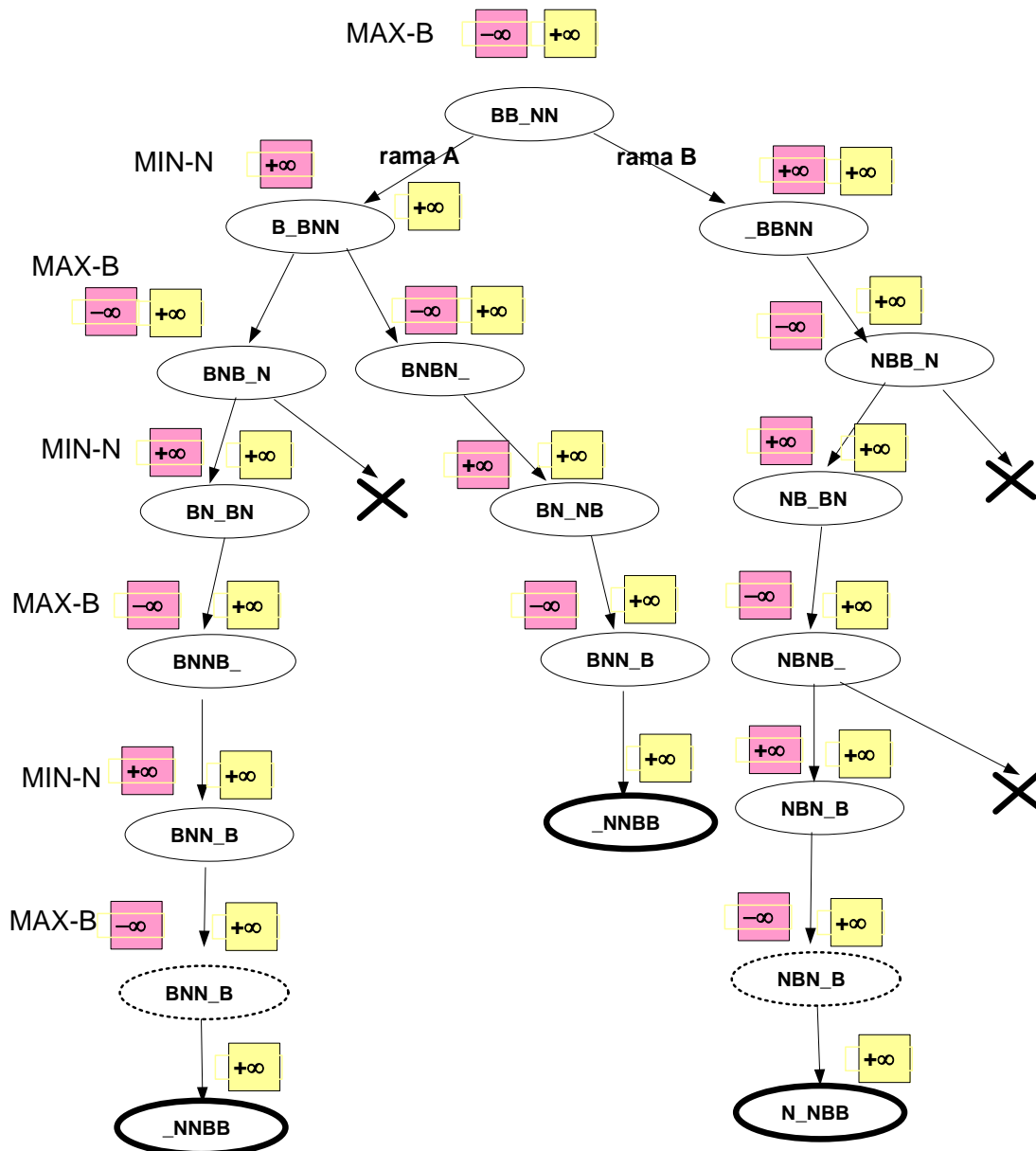
NOTA RECORDATORIO: El valor beta inicial de los nodos MIN es $+\infty$, y el valor alfa inicial de los nodos MAX es $-\infty$.

Solución:

En rosa aparecen los valores iniciales de MIN y MAX. En amarillo los valores volcados. Se muestran solo los cortes efectivos.

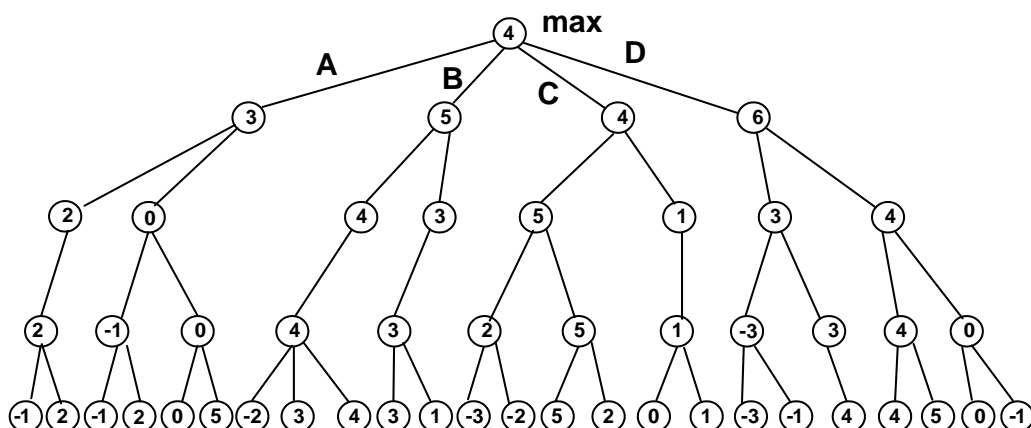
El jugador-B puede escoger cualquiera de las dos jugadas iniciales porque ambas le conducen a una situación ganadora. En ambas ramas se producen cortes pero los cortes de la rama B no son consecuencia del valor volcado de la rama A sino del valor inicial $+\infty$ del nodo MIN lo que indica que el corte se produciría igualmente si se hubiera expandido antes por la rama B. Por tanto, en este caso ambas jugadas producen el mismo beneficio.

Los cortes que se producen en la figura son producto del valor $+\infty$ del nodo MIN, pero dichos cortes se podrían producir igualmente siguiendo el razonamiento de que una evaluación provisional $+\infty$ para un nodo alfa no es superable por ninguna otra. En este caso, y siguiendo este mismo razonamiento, podríamos haber obviado la expansión de la rama B.



Ejercicio 11

Dado el siguiente espacio de búsqueda para un problema de juego dado, en donde se indica sobre cada nodo (intermedios y terminales) la evaluación obtenida por una determinada función de evaluación:

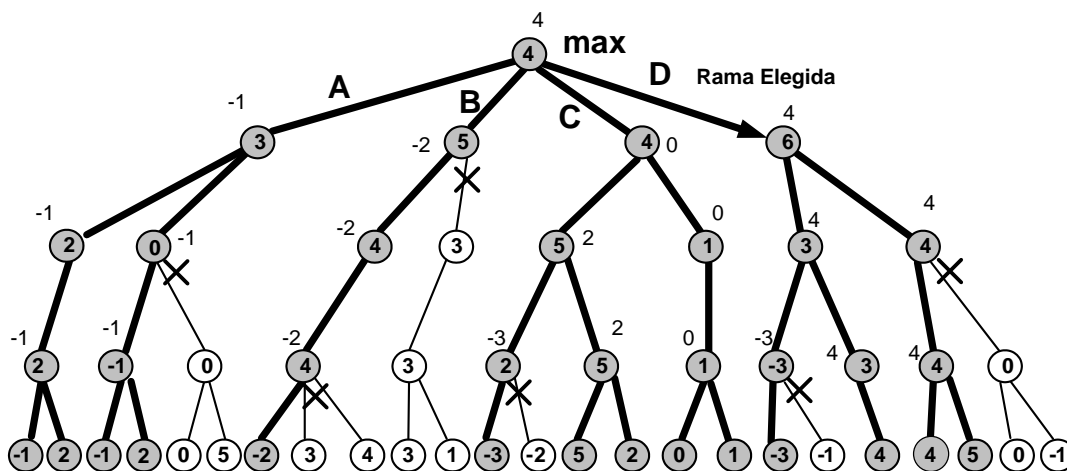


Se pide:

- 1) Aplicar un algoritmo de búsqueda con **poda alfa-beta en profundidad**, expandiendo primero los nodos que se encuentran más a la izquierda.
 - a. Obtener la mejor jugada inicial (A, B, C, D), **marcando claramente** las ramas y nodos generados, así como la evaluación final de cada nodo.
 - b. Indicar claramente los cortes que se realizan. No es preciso indicar los cortes cuando no haya poda en la exploración.
 - c. Indicar el número total de nodos que son **generados** (excluyendo el nodo raíz) y los nodos que son **evaluados**.

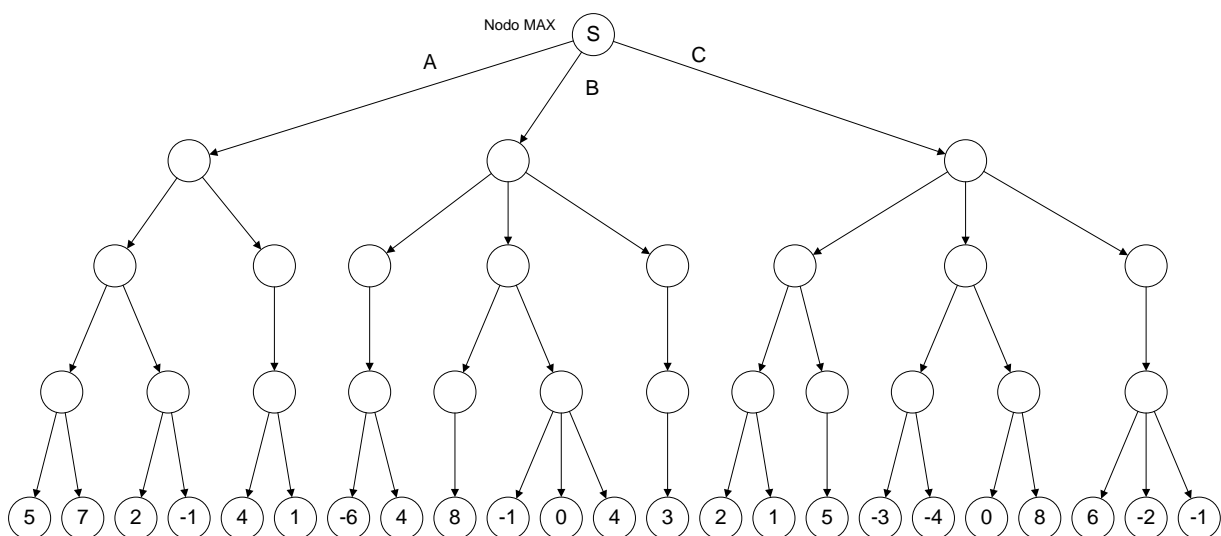
Solución:

Expansión en profundidad (no se muestran cortes no efectivos).



Ejercicio 12

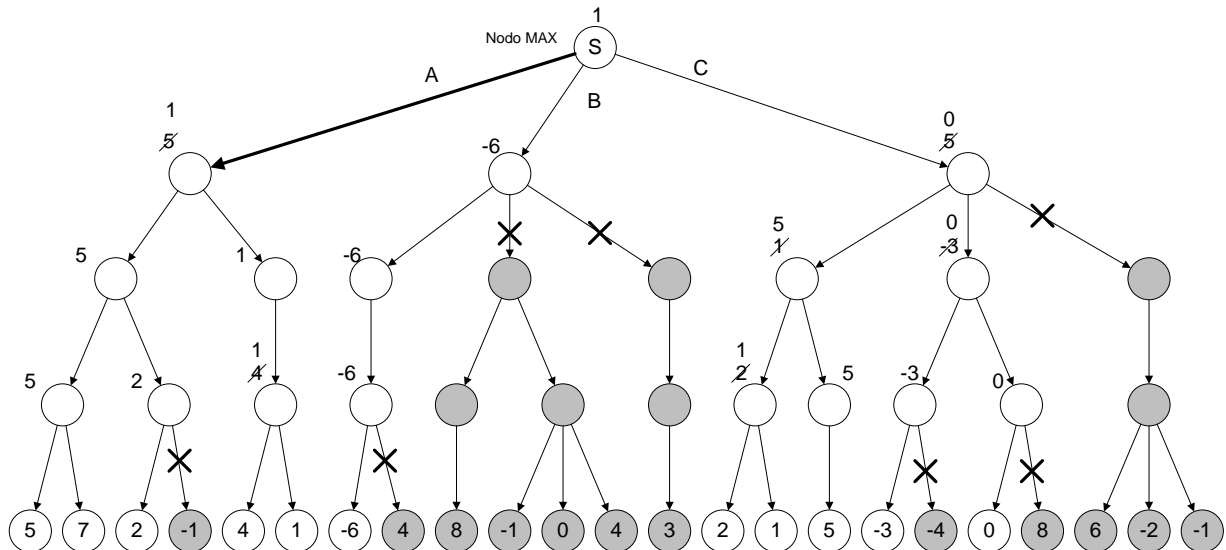
Considérese el árbol de juego de la figura. Los valores situados en los nodos corresponden a la evaluación de una determinada función de estimación.



Se pide:

- a) Mediante un algoritmo de búsqueda con poda alfa-beta, expandiendo primero los nodos sucesores que se encuentran más a la izquierda, obtener cual sería la mejor jugada inicial (A, B, C). Indicar claramente las podas que se realizan y la rama seleccionada por MAX.
- b) ¿Diferiría la rama que elegiría MAX si no se aplica la poda alfa-beta? Justifica la respuesta.

Solución:

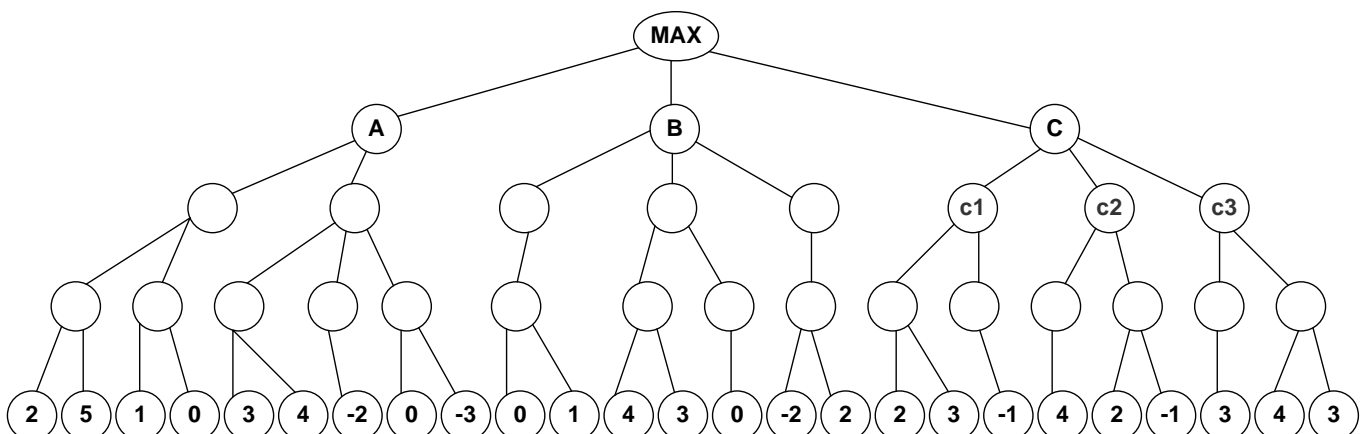


- b) En este caso no difiere, ya que al aplicar el algoritmo MINIMAX sin poda alfa-beta, el valor de la segunda rama también sería -6, y en el caso de la tercera sería -2. Hay que tener en cuenta que si se aplica alfa-beta, los nodos Min pueden tomar valores mayores que los que tomarían si no se aplicara (debido a que no se exploran ramas que no pueden mejorar el valor del nodo Max que provoca el corte).

Ejercicio 13

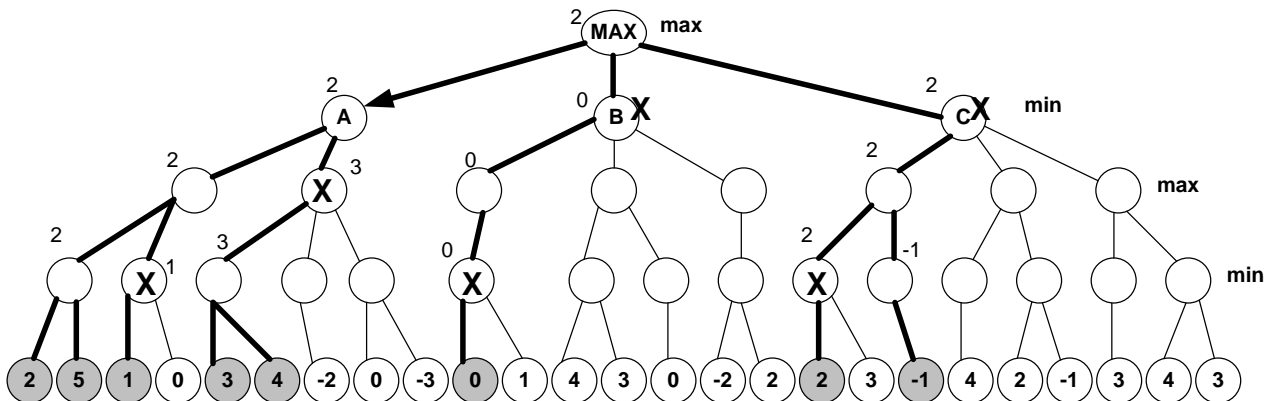
Considérese el árbol de juego de la figura. Los valores situados en los nodos terminales corresponden a la evaluación de una determinada función de estimación.

- a) Mediante un algoritmo de búsqueda con poda alfa-beta, expandiendo primero los nodos sucesores que se encuentran más a la izquierda, obtener la mejor jugada inicial. Indicar claramente: puntuación final de MAX y rama inicial elegida (A, B, C), podas que se realizan, y remarcar los nodos terminales que se han visitado.
- b) En el caso de que el jugador MAX escogiese la rama C, que jugada debería elegir MIN a continuación? Aplicar un procedimiento MINIMAX para determinar esta mejor jugada de MIN.

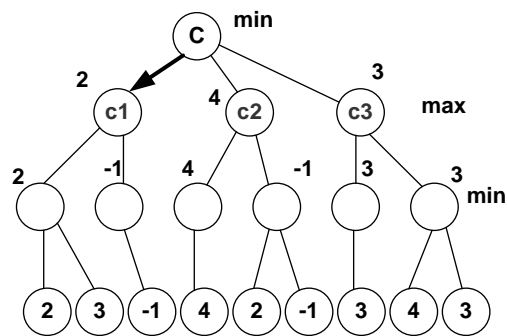


Solución:

a) La rama elegida es A y el árbol resultante es:

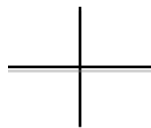


b) La aplicación de MINIMAX a la jugada C es (MIN elegiría la rama c1):



Ejercicio 14

Considere el juego del tictactoe de 2×2 , en la siguiente figura se puede observar el tablero:



Las reglas del juego son:

- poner MAX una X o MIN una O en una casilla cuando es su turno,
- otra posible jugada es que cada jugador tiene la opción adicional de pasar (es decir, no marcar un cuadrado).

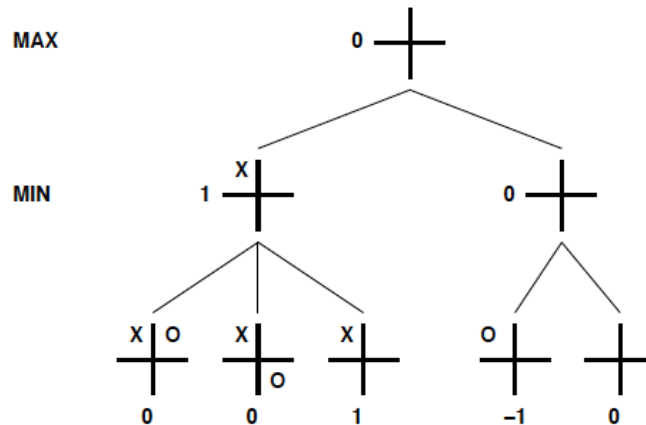
Como es habitual, asumimos que X juega primero.

- Dibujar el árbol de juego completo hasta una profundidad de 2. No hay que mostrar los nodos que son simetrías (rotaciones o reflexiones) de nodos ya dibujados. **(El árbol debe tener cinco hojas)**
- Supongamos que la función de evaluación es el **número de X menos el número de O**. Marcar los valores de todos los nodos y hojas con el resultado de aplicar esta función de evaluación a cada uno de ellos.

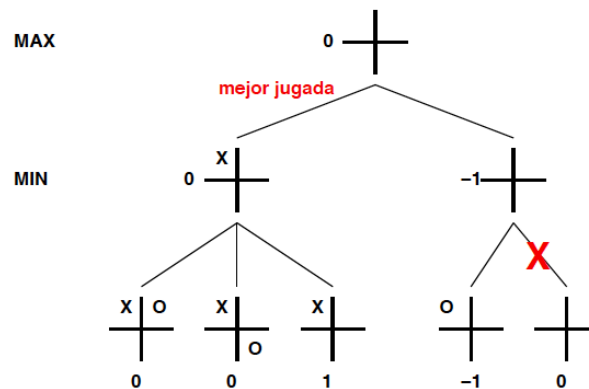
- c) Aplicar el algoritmo alfa-beta al árbol obtenido en (a) con los valores obtenidos en (b) para los nodos hoja
¿Cuál sería la mejor jugada para X?
- d) Aplicar el algoritmo mini-max al árbol obtenido en (a) con los valores obtenidos en (b) para los nodos hoja
¿Cuál sería la mejor jugada para X?

Solución

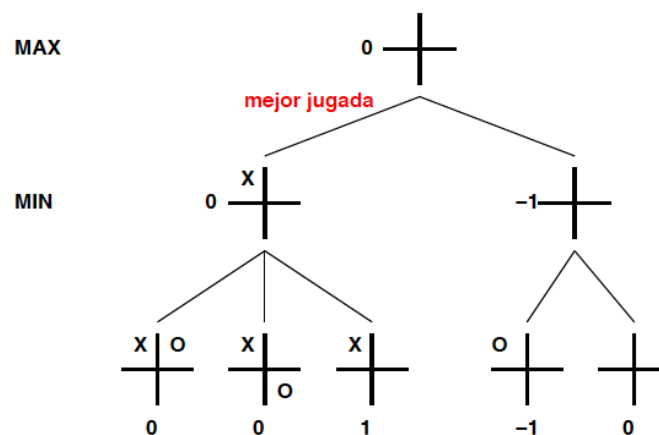
a) y b)



c)

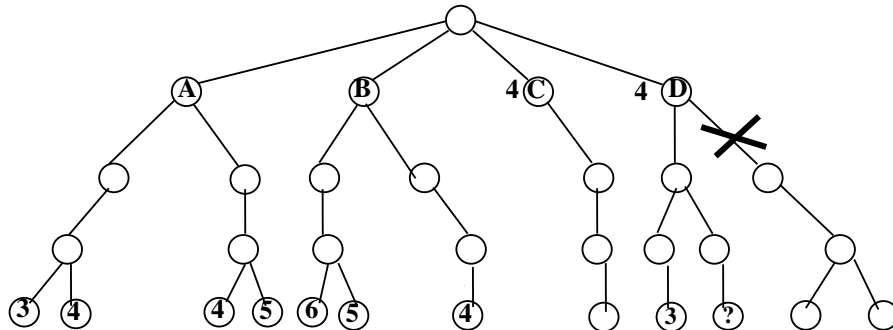


d)



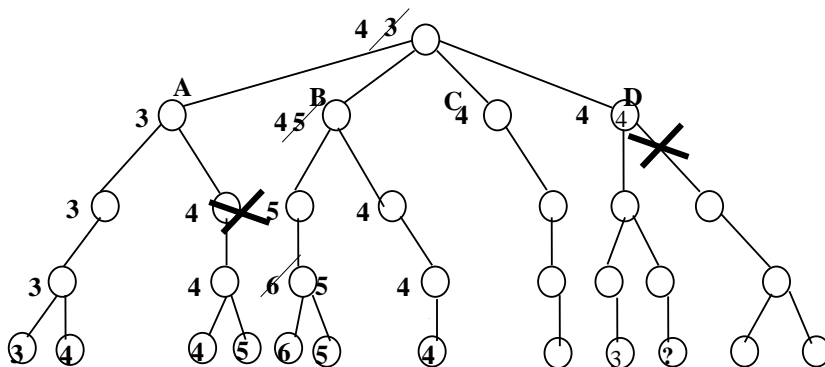
Ejercicio 15 (Examen 2013)

El siguiente árbol representa el resultado parcial de aplicar el algoritmo alfa-beta de izquierda a derecha al espacio de búsqueda de un juego dado. En el árbol se han eliminado los valores volcados de algunos de los nodos así como algunas de las podas.



Determinar, razonando cada una de las respuestas:

- a) Calcular en las dos ramas de la izquierda (A y B) los valores volcados aplicando alfa-beta.



- b) Teniendo en cuenta la resolución del apartado a). ¿Qué rama (A, B, C o D) será la mejor jugada para el nodo raíz?. ¿por qué?

Se produce una meseta entre las ramas B, C y D, y por tanto cualquiera de ellas podría ser la mejor jugada. Sin embargo, si se ha producido alguna poda por debajo de una rama, los valores volcados podrían ser mayores que los obtenidos en caso de no producirse dichas podas.

La rama B será la primera en ser expandida, y no se producen podas, por tanto el valor volcado obtenido será el mismo que en el caso de utilizar MINIMAX y ésta será la mejor jugada en el caso de utilizar alfa-beta, es decir 'la rama de mayor valor volcado que haya sido expandida en primer lugar'. Por debajo del nodo C tampoco se producen podas, por lo que la rama C también podrá ser considerada mejor jugada. En la rama D no podemos garantizar que el valor volcado no sea menor que en caso de desarrollar completamente la búsqueda por debajo de la misma.

- c) Teniendo en cuenta el corte que se produce por debajo del nodo de nivel 1 de la rama D, ¿qué valor deberá tener el nodo hoja marcado con ‘?’?

El valor será 4, si aplicamos el algoritmo alfa-beta, tal como se indica en la figura, podemos comprobar que este es el único valor posible.