Funcions discriminants

Alfons Juan
Jorge Civera
Albert Sanchis

Departament de Sistemes
Informàtics i Computació

Objectius formatius

- Aplicar funcions discriminants
- Calcular la frontera de decisió entre dues classes
- Identificar el tipus de frontera de decisió
- Calcular les regions de decisió d'un classificador
- Obtenir i identificar classificadors equivalents

Índex

1 Funcions discriminants

Tot classificador pot representar-se com ara:

$$c(x) = \arg\max_c \ g_c(x)$$

on, per a cada classe c, s'utilitza una ***funció discriminant*** $g_c(\cdot)$ que mesura el grau de pertinença dels objectes a c.

Exemple: classificador en 3 classes per a $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^t \in [0,1]^2$:

x_1	x_2	$g_1(\boldsymbol{x})$	$g_2(\boldsymbol{x})$	$g_3(\boldsymbol{x})$	$c(\boldsymbol{x})$
0	0	1.0	0.0	0.0	1
0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1
1	0	0.25	0.5	0.25	2
1	1	0.01	0.01	0.98	3

Nota: Bayes s'obté amb $g_c(x) = P(c \mid x)$ per a tot c i x

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

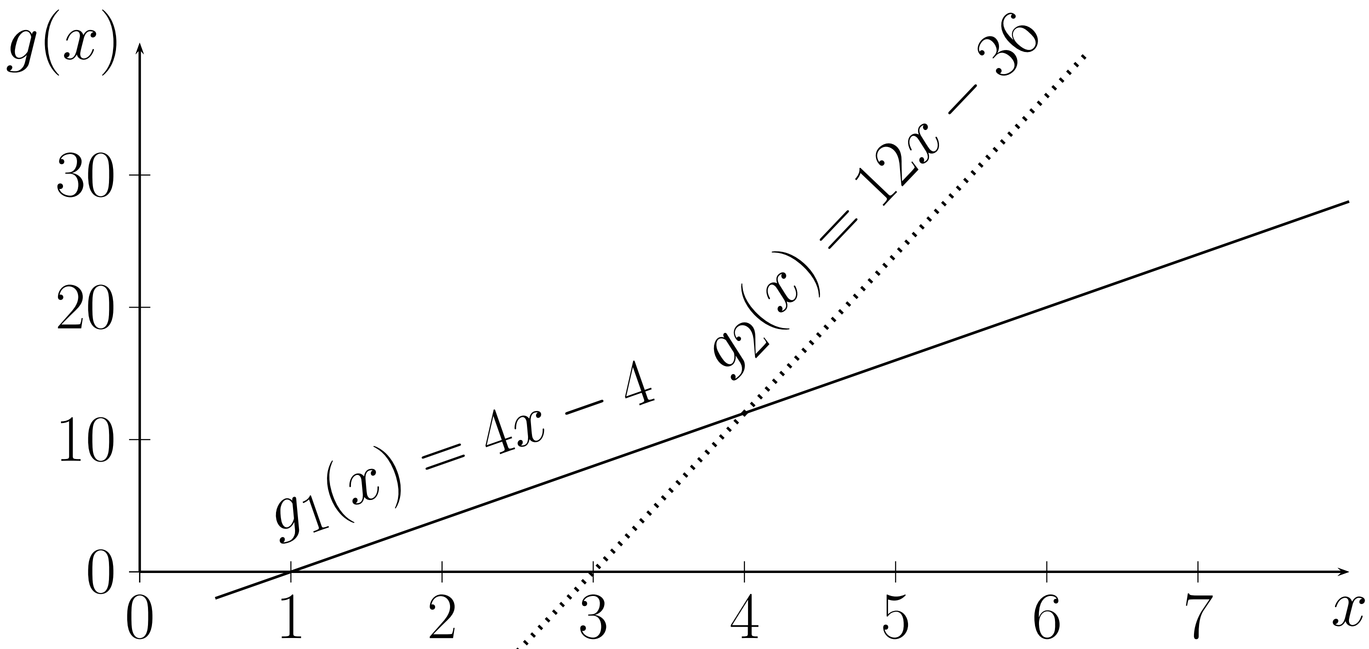
2 Funcions discriminants lineals

Les funcions discriminants més utilitzades són ***lineals*** (amb $\boldsymbol{x}$):

$$g_c(\boldsymbol{x}) = \sum_d w_{cd}\, x_d + w_{c0} = \boldsymbol{w}_c^t\, \boldsymbol{x} + w_{c0}$$

on $\boldsymbol{w}_c$ és el vector de pesos de la classe c i w_{c0} el pes llindar.

Exemple: Un classificador lineal en 2 classes

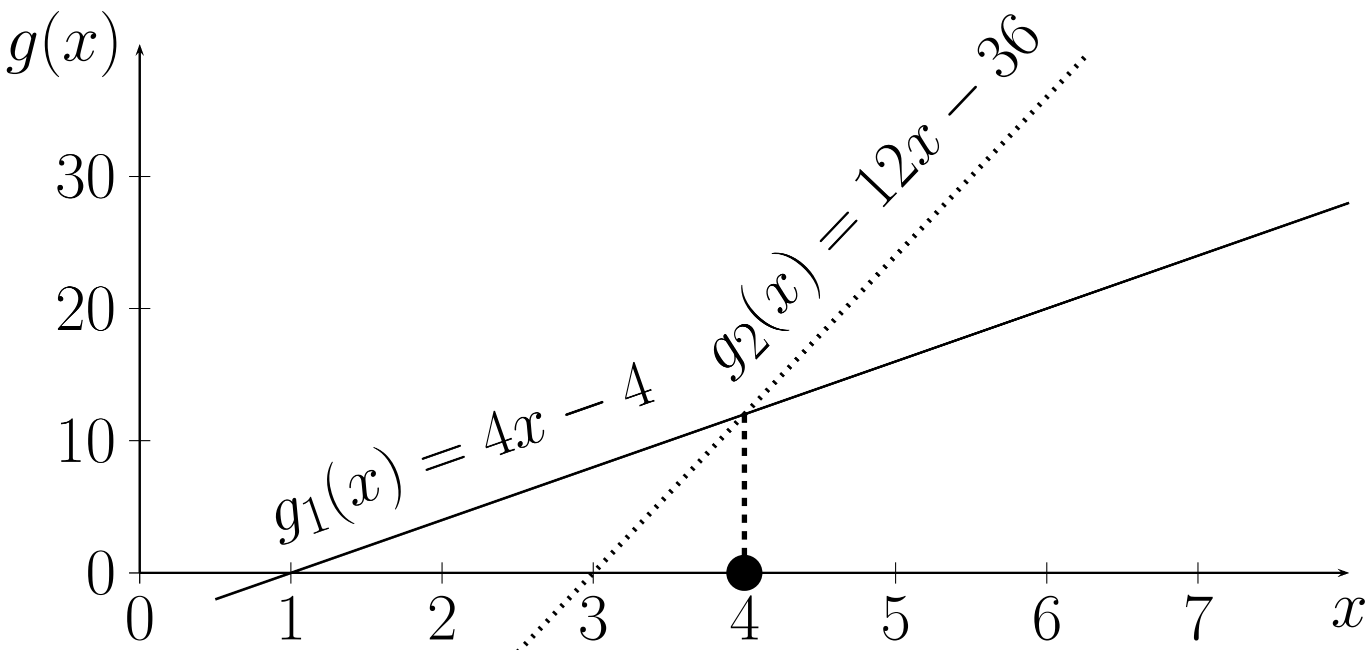


UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

3 Fronteres de decisió

La ***frontera de decisió*** entre dues classes, c i c', és el lloc geomètric dels punts $\boldsymbol{x} \in E$ on es compleix:

$$g_c(\boldsymbol{x}) = g_{c'}(\boldsymbol{x}) \qquad \text{per a tot } c \neq c'$$



$$g_1(x) = g_2(x) \rightarrow 4x - 4 = 12x - 36 \rightarrow x = \frac{32}{8} = 4$$

Fronteres de decisió

La ***frontera de decisió*** entre dues classes, c i c', amb $\boldsymbol{x} \in E$ és:

- Un punt, si $E \equiv \mathbb{R}$
- Una línia (ex. *rectes*), si $E \equiv \mathbb{R}^2$
- Una superfície (ex. *plans*), si $E \equiv \mathbb{R}^3$

En general són *hipersuperfícies* definides per les equacions:

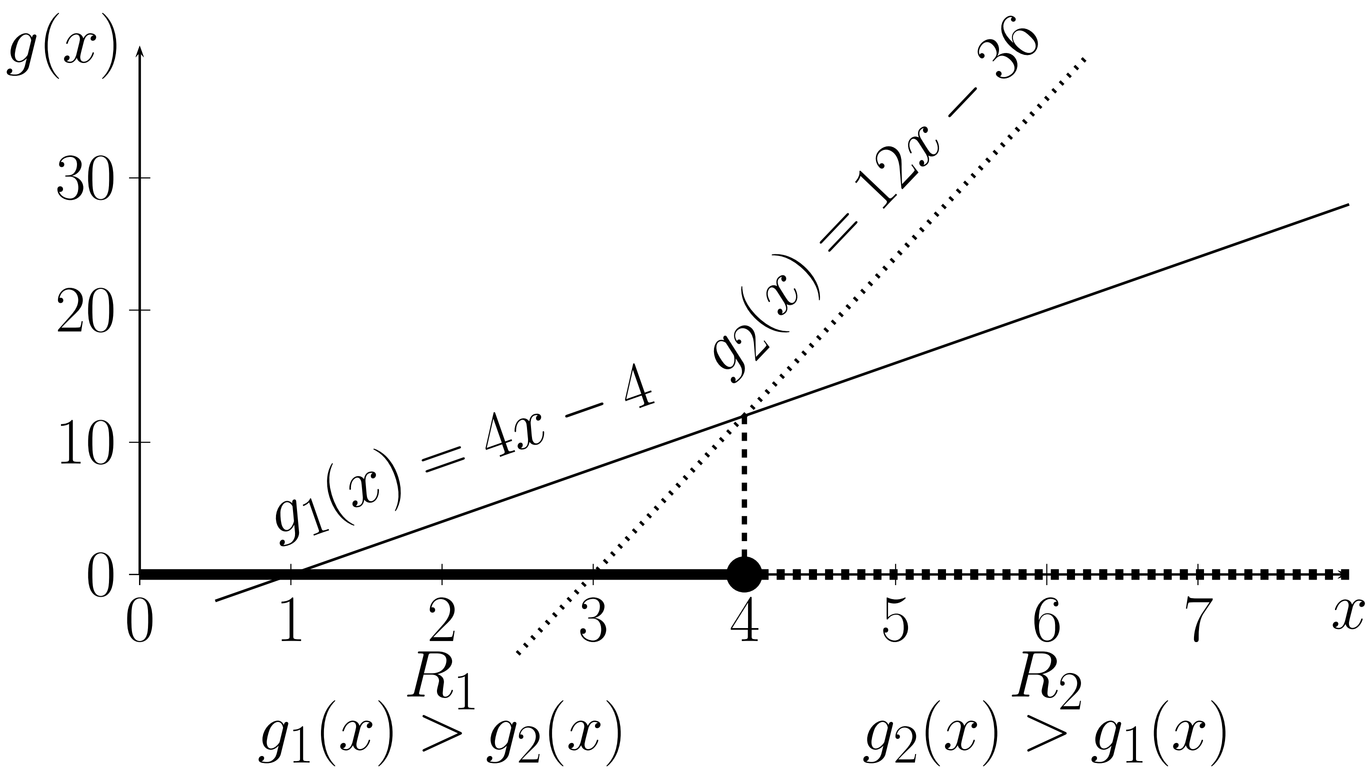
$$g_c(\boldsymbol{x}) - g_{c'}(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad \text{per a tot } \; c \neq c'$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

4 Regions de decisió

Un classificador en C classes divideix l'espai de representació en C ***regions de decisió***, $R_1, \ldots, R_C$:

$$R_c = \left\{ \mathbf{x} \in E : \quad g_c(\mathbf{x}) > \max_{c' \neq c} g_{c'}(\mathbf{x}) \right\}$$



5 Classificadors equivalents

Dos ***classificadors*** $(g_1, \ldots, g_C)$ i $(g'_1, \ldots, g'_C)$ són ***equivalents*** si defineixen les mateixes fronteres i regions de decisió, és a dir:

$$g_c(\mathbf{x}) > g_{c'}(\mathbf{x}) \Leftrightarrow g'_c(\mathbf{x}) > g'_{c'}(\mathbf{x}) \qquad \forall c' \neq c, \;\; \forall \mathbf{x} \in E$$

Com obtenir classificadors equivalents?

$$g'_c(\mathbf{x}) = a \cdot g_c(\mathbf{x}) + b \qquad \text{amb } a > 0 \qquad 1 \leq c \leq C$$
$$g'_c(\mathbf{x}) = \log\, g_c(\mathbf{x}) \qquad \text{amb } g_c(\mathbf{x}) > 0 \qquad 1 \leq c \leq C$$

Un classificador equivalent al (g_1, g_2) de la traspa anterior:

$$g'_1(x) = x - 1 \;\text{ i }\; g'_2(x) = 3x - 9 \rightarrow x = \frac{8}{2} = 4$$

on $a = \frac{1}{4}$ i $b = 0$.

Conclusions

- Hem vist com classificar amb funcions discriminants i el seu efecte en termes de fronteres i regions de decisió

- També hem vist com obtenir classificadors equivalents

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA