UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Cuaderno de trabajo:

Funciones discriminantes

Albert Sanchis

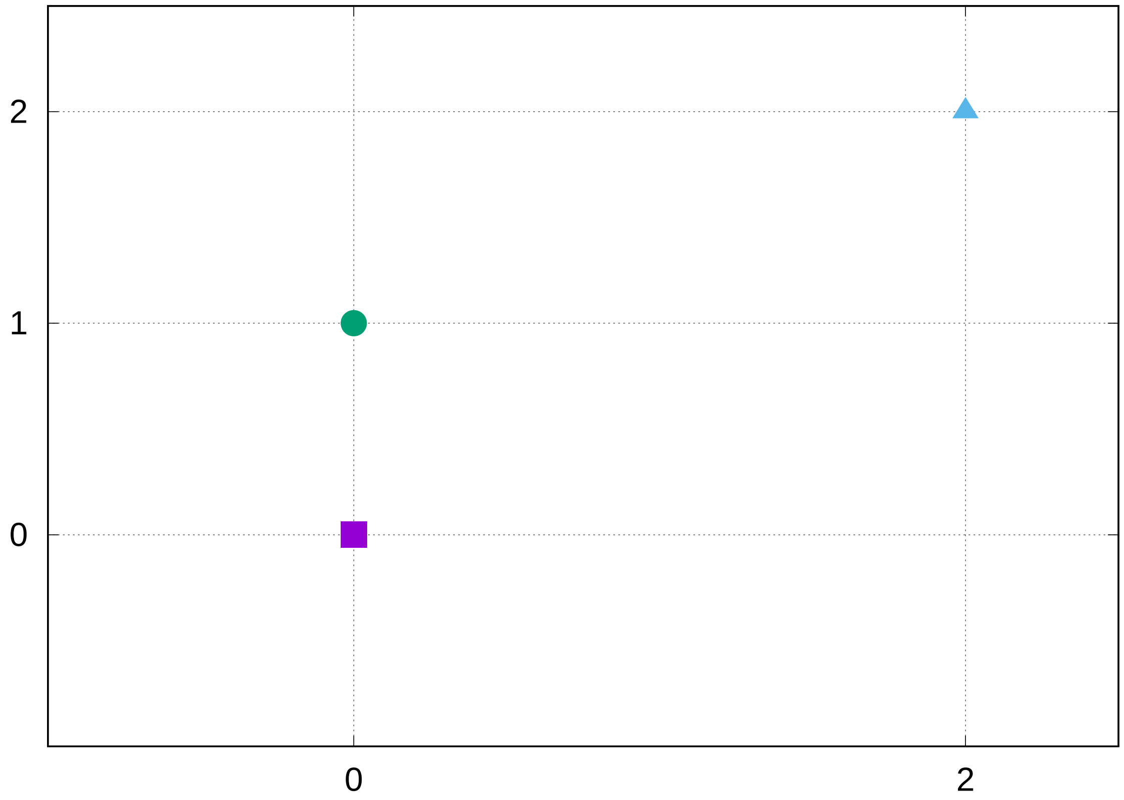
DSIC

Departamento de Sistemas
Informáticos y Computación

Objetivos formativos

- Aplicar funciones discriminantes
- Calcular la frontera de decisión entre clases
- Calcular las regiones de decisión de un clasificador
- Identificar clasificadores equivalentes

- ***Cuestión 1***: Sea un problema de clasificación en 3 clases ($c = 1, 2, 3$), para objetos representados mediante vectores de características bidimensionales ($\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^t$). Supongamos que se dispone de 3 muestras de entrenamiento $x_1 = (0, 0)^t$ de la clase $c_1 = 1$; $x_2 = (0, 1)^t$ de la clase $c_2 = 2$; y $x_3 = (2, 2)^t$ de la clase $c_3 = 3$ tal como se muestra en la siguiente figura:



Supongamos también que se ha definido un clasificador lineal basado en funciones discriminantes con los siguientes vectores de pesos y peso umbral para cada clase:

- $\boldsymbol{w}_1 = (-2, -4)^t; w_{10} = 0$
- $\boldsymbol{w}_2 = (-2, 0)^t; w_{20} = -2$
- $\boldsymbol{w}_3 = (2, 0)^t; w_{30} = -3$

Contesta a las siguientes preguntas:

1. ¿En qué clase se clasificaría cada una de las 3 muestras de entrenamiento aplicando el clasificador definido?
   - ***Valores de las discriminantes para*** $x_1 = (0, 0)^t$

$$g_1(\boldsymbol{x_1}) = -2 \cdot 0 + (-4) \cdot 0 + 0 = 0$$
$$g_2(\boldsymbol{x_1}) = -2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-2) = -2$$
$$g_3(\boldsymbol{x_1}) = 2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-3) = -3$$

   - ***Clasificación:*** $c^*(\boldsymbol{x_1}) = \arg\max_{c \in C} g_c(\boldsymbol{x_1}) = 1$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

- ***Valores de las discriminantes para*** $x_2 = (0,1)^t$

$$g_1(\boldsymbol{x_2}) = -2 \cdot 0 + (-4) \cdot 1 + 0 = -4$$
$$g_2(\boldsymbol{x_2}) = -2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-2) = -2$$
$$g_3(\boldsymbol{x_2}) = 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-3) = -3$$

- ***Clasificación:*** $c^*(\boldsymbol{x_2}) = \underset{c \in C}{\arg\max}\, g_c(\boldsymbol{x_2}) = 2$

- ***Valores de las discriminantes para*** $x_3 = (2,2)^t$

$$g_1(\boldsymbol{x_3}) = -2 \cdot 2 + (-4) \cdot 2 + 0 = -12$$
$$g_2(\boldsymbol{x_3}) = -2 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + (-2) = -6$$
$$g_3(\boldsymbol{x_3}) = 2 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + (-3) = 1$$

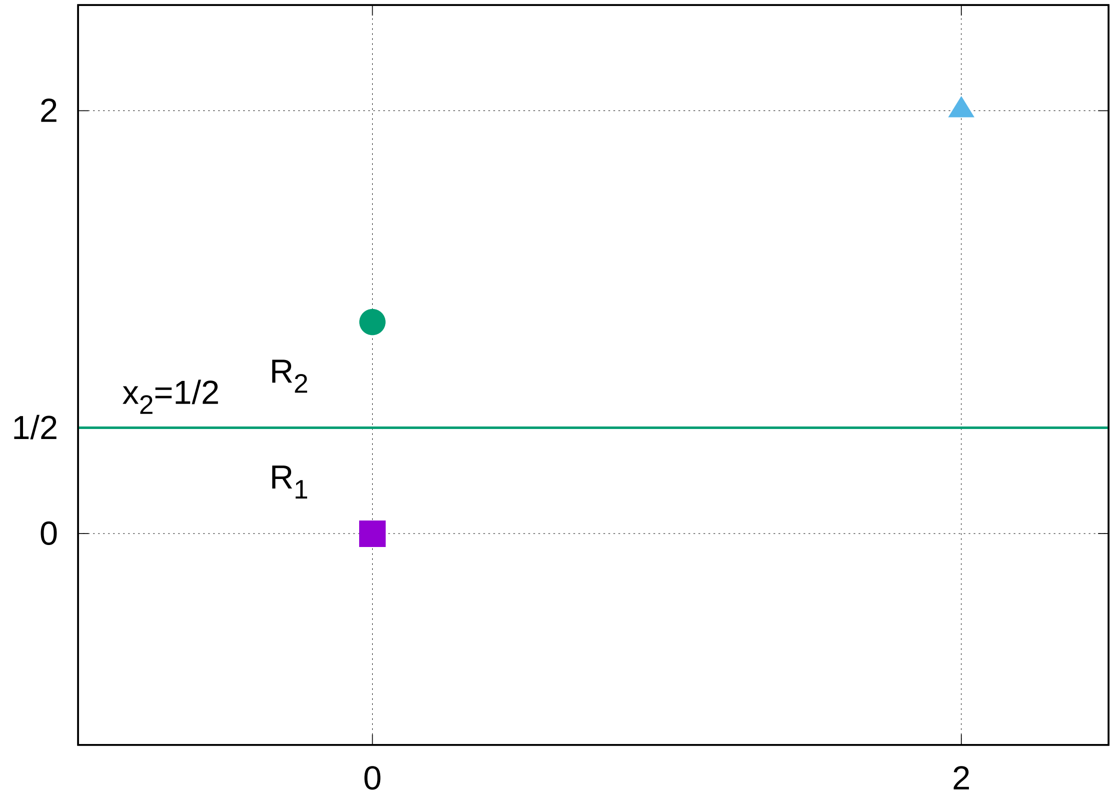
- ***Clasificación:*** $c^*(\boldsymbol{x_3}) = \underset{c \in C}{\arg\max}\, g_c(\boldsymbol{x_3}) = 3$

2. ¿Se produce algún error de clasificación? ***No, las tres muestras de entrenamiento se clasifican correctamente***

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

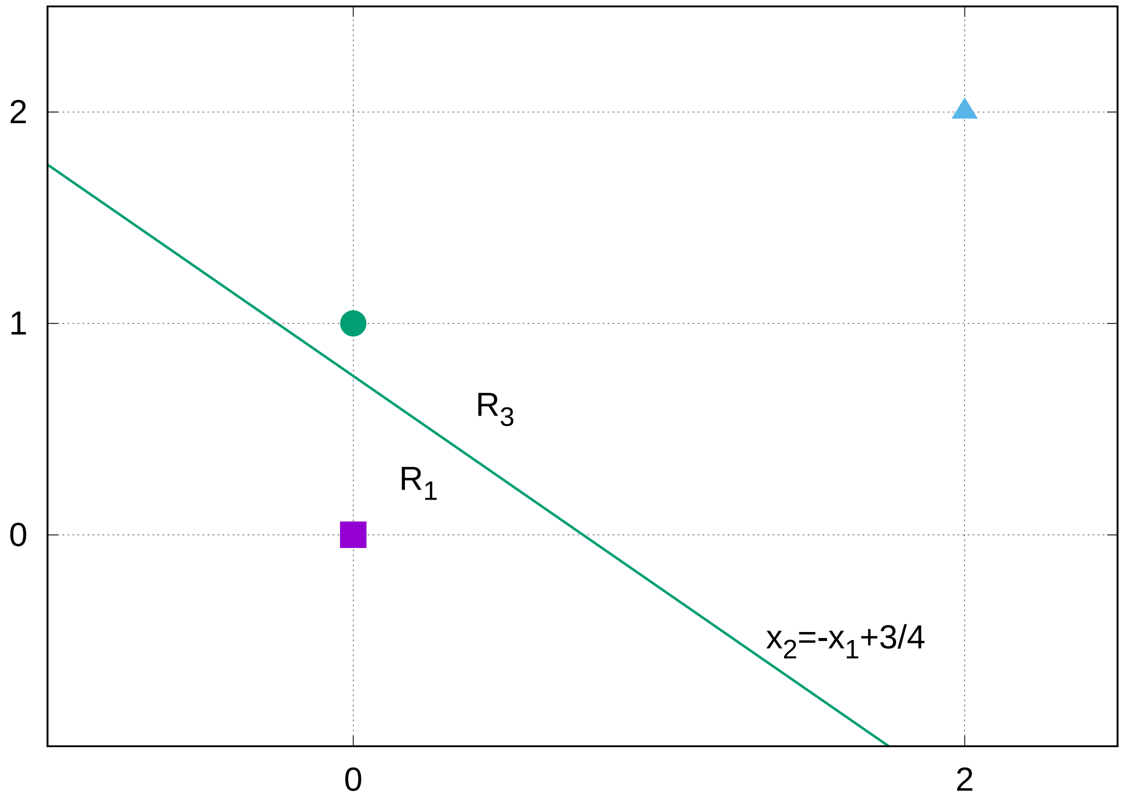
3. Calcula la frontera de decisión que define el clasificador entre las clases 1 y 2. Represéntala gráficamente.

$$g_1(\boldsymbol{x}) = g_2(\boldsymbol{x})$$
$$-2x_1 - 4x_2 + 0 = -2x_1 + 0x_2 - 2$$
$$x_2 = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$



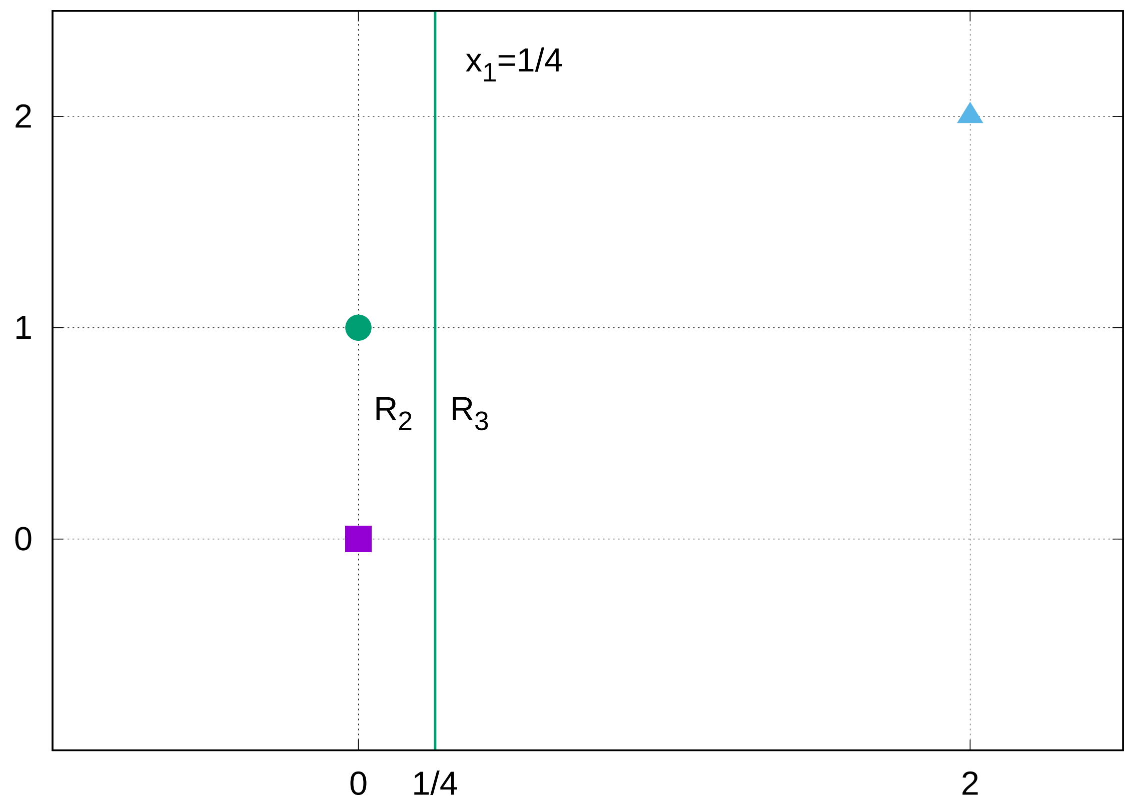
4. Calcula la frontera de decisión que define el clasificador entre las clases 1 y 3. Represéntala gráficamente.

$$g_1(\boldsymbol{x}) = g_3(\boldsymbol{x})$$
$$-2x_1 - 4x_2 + 0 = 2x_1 + 0x_2 - 3$$
$$-4x_2 = 4x_1 - 3$$
$$x_2 = -x_1 + \frac{3}{4}$$

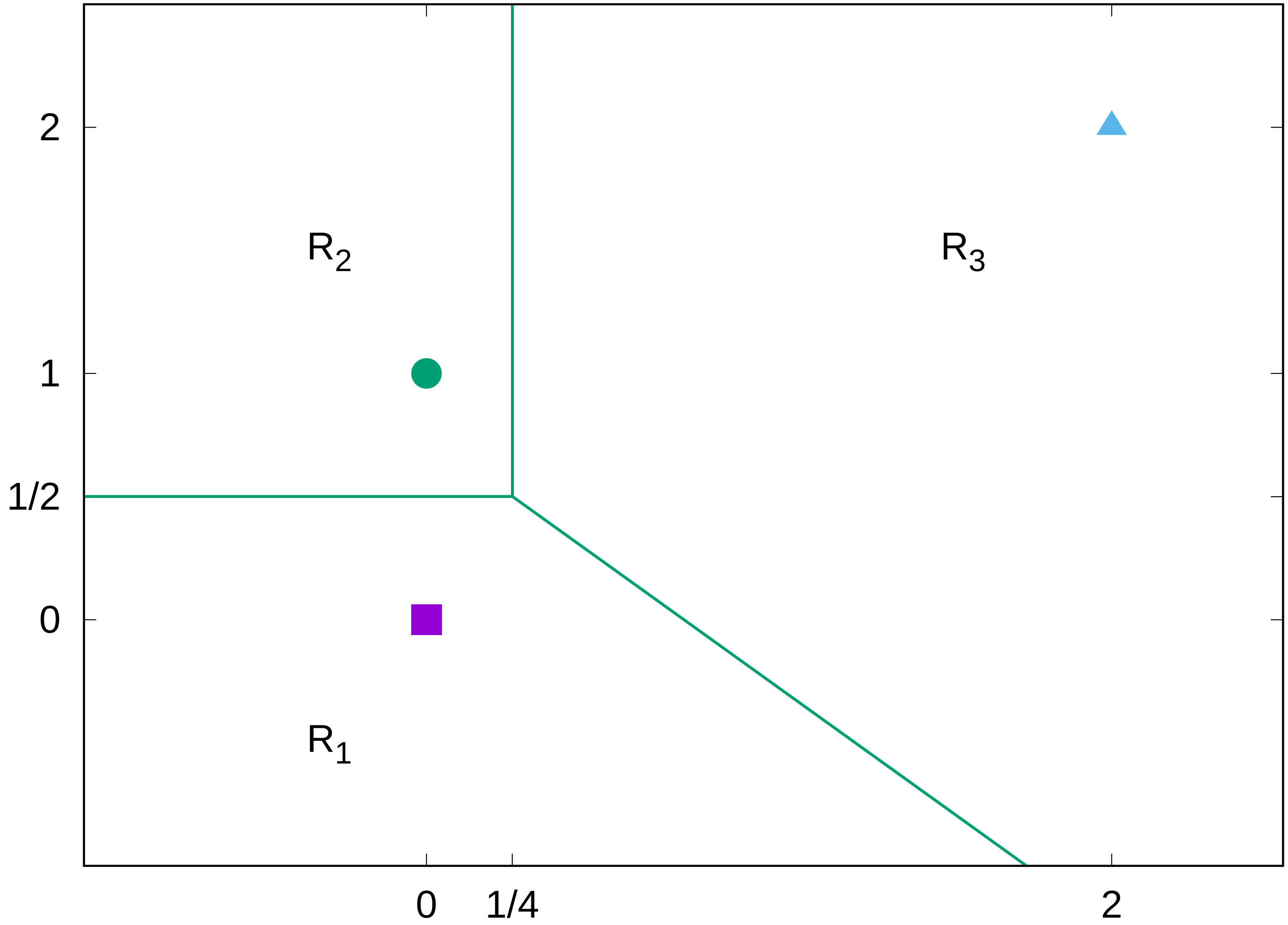


5. Calcula la frontera de decisión que define el clasificador entre las clases 2 y 3. Represéntala gráficamente.

$$g_2(\boldsymbol{x}) = g_3(\boldsymbol{x})$$
$$-2x_1 + 0x_2 - 2 = 2x_1 + 0x_2 - 3$$
$$-4x_1 = -1$$
$$x_1 = \frac{1}{4}$$



6. Representa gráficamente las 3 regiones de decisión que define el clasificador dado.



7. Dado el siguiente clasificador:
    - $\boldsymbol{w'}_1 = (-1, -2)^t; w'_{10} = 0$
    - $\boldsymbol{w'}_2 = (-1, 0)^t; w'_{20} = -1$
    - $\boldsymbol{w'}_3 = (1, 0)^t; w'_{30} = -1{,}5$

    ¿se trata de un clasificador equivalente al clasificador anterior? ***Sí, porque define las mismas regiones de decisión***

8. Dado el siguiente clasificador:

- $\boldsymbol{w'}_1 = (2, 4)^t; w'_{10} = 0$
- $\boldsymbol{w'}_2 = (2, 0)^t; w'_{20} = 2$
- $\boldsymbol{w'}_3 = (-2, 0)^t; w'_{30} = 3$

¿se trata de un clasificador equivalente al clasificador anterior? ***No, porque define regiones de decisión distintas***