T1.1 Razonamiento probabilístico: representación e inferencia

Índice

1 El problema de la calificación

Problema de la calificación: imposibilidad práctica de conocer y comprobar todas las **calificaciones** (condiciones) que habría que garantizar para asegurar el cumplimiento de una acción

- Ejemplo: salir al aeropuerto 90 minutos antes del vuelo me permite llegar a tiempo SI no hay atascos Y no hay pinchazos Y ...
- Ejemplo: un bote nos permite cruzar un río SI es un bote de remo Y tiene remos y escálamos Y no están rotos Y encajan Y ...

Incertidumbre: los sistemas inteligentes actuales incluyen la **incertidumbre** como parte del conocimiento y la representan mediante **probabilidades** asociadas a los sucesos (proposiciones) de interés

2 Representación probabilística

Distribución de probabilidad conjunta: de las variables aleatorias de interés para representar el conocimiento probabilístico

Ejemplo del dentista: conocimiento para diagnosticar caries

Variables aleatorias de interés:

$$\begin{array}{ll} \text{Dolor:} & D \in \{0,1\} \\ \text{Caries:} & C \in \{0,1\} \\ \text{Hueco:} & H \in \{0,1\} \end{array}$$

Representación: tabla a la derecha con

$$P(D=d, C=c, H=h) \quad \text{para todo } d, c, h \in \{0,1\}$$

d	c	b	P
0	0	0	0.576
0	0	1	0.008
0	1	0	0.144
0	1	1	0.072
1	0	0	0.064
1	0	1	0.012
1	1	0	0.016
1	1	1	0.108

3 Inferencia probabilística

Reglas suma y producto: reglas básicas para calcular la probabilidad de cualquier **suceso** (**proposición**) de interés a partir de la distribución conjunta

$$P(x) = \sum_y P(x, y) \qquad \text{y} \qquad P(x, y) = P(x)\, P(y \mid x)$$

Observación importante: en general no es necesario conocer la tabla completa de probabilidades conjuntas para calcular la probabilidad de un suceso dado mediante las reglas suma y producto

Ejemplo del dentista: cálculo de la probabilidad de observar...

- Caries y hueco (a la vez): $P(c = 1, h = 1) = \sum_{d=0,1} P(d, c = 1, h = 1) = 0.180$
- Hueco: $P(h = 1) = \sum_{d=0,1} \sum_{c=0,1} P(d, c, h = 1) = 0.200$
- Caries después de observar hueco: $P(c = 1 \mid h = 1) = \frac{P(c = 1, h = 1)}{P(h = 1)} = \frac{0.180}{0.200} = 0.900$

In [1]:
```python
import numpy as np
T = np.array([[0,0,0,.576], [0,0,1,.008], [0,1,0,.144], [0,1,1,.072],
              [1,0,0,.064], [1,0,1,.012], [1,1,0,.016], [1,1,1,.108]])
Pc1b1 = np.sum(T[(T[:,1]==1) & (T[:,2]==1),-1])
Pb1 = np.sum(T[T[:,2]==1,-1])
Pc1Db1 = Pc1b1/Pb1
print(f"Pc1b1 = {Pc1b1:.3f}  Pb1 = {Pb1:.3f}  Pc1Db1 = {Pc1Db1:.3f}")
```

```
Pc1b1 = 0.180  Pb1 = 0.200  Pc1Db1 = 0.900
```

4 Independencia

Variables independientes: dos variables x y y son **independientes** si

$$P(x, y) = P(x)\,P(y) \quad \text{o} \quad P(x \mid y) = P(x) \quad \text{o} \quad P(y \mid x) = P(y)$$

Conocimiento experto: la independencia puede establecerse por conocimiento experto y conveniencia

Ejemplo del dentista:

- Consideramos una nueva variable con el tiempo que hace cuando el paciente visita el dentista

$$T \in \{\text{sol}, \text{nubes}, \text{lluvia}, \text{nieve}\}$$

- Asumimos que las tres variables que ya teníamos son independientes del tiempo que hace

$$P(d, c, h, t) = P(t)\,P(d, c, h \mid t) = P(t)\,P(d, c, h)$$

- Así reducimos el número de probabilidades a almacenar: 32 vs $4 + 8$

5 Teorema de Bayes

Teorema de Bayes: permite actualizar nuestro conocimiento sobre una hipótesis y después de observar una nueva evidencia x

$$P(y \mid x) \;=\; \frac{P(x,y)}{P(x)} \;=\; P(y)\,\frac{P(x \mid y)}{P(x)}$$

- De otra manera: $P(y \mid x)$ es la probabilidad de que se produzca el efecto y después de observar que se ha producido la causa x

Ejemplo del dentista:

- Sabemos que la probabilidad de caries es: $P(c=1)=0.34$
- Sabemos que la probabilidad de dolor es: $P(d=1)=0.20$
- Sabemos que la probabilidad de dolor después de observar caries es: $P(d=1 \mid c=1)=0.36$
- ¿Cúal es la probabilidad de caries después de observar dolor, $P(c=1 \mid d=1)$?

$$P(c=1 \mid d=1) = P(c=1)\,\frac{P(d=1 \mid c=1)}{P(d=1)} = 0.34\,\frac{0.36}{0.20} = 0.61$$

In [3]:
```
Pc1 = 0.34; Pd1 = 0.20; Pd1c1 = 0.36; Pc1Dd1 = Pc1 * Pd1c1 / Pb1; print(f"Pc1Dd1 = {Pc1Dd1:.2f}")
```

```
Pc1Dd1 = 0.61
```

Ejercicios T1.1 Razonamiento probabilístico

2023_01_26_Cuestión 1: Dada la siguiente tabla de probabilidades conjuntas de tres variables de interés:

A	0	0	0	0	1	1	1	1
B	0	0	1	1	0	0	1	1
C	0	1	0	1	0	1	0	1
$P(A,B,C)$	0.093	0.100	0.133	0.163	0.157	0.150	0.117	0.087

Cúal és el valor de $P(A=1, B=1 \mid C=1)$?

1. $P(A=1, B=1 \mid C=1) \leq 0.25$
2. $0.25 < P(A=1, B=1 \mid C=1) \leq 0.50$
3. $0.50 < P(A=1, B=1 \mid C=1) \leq 0.75$
4. $0.75 < P(A=1, B=1 \mid C=1)$

Solución: la 1; $P(A = 1, B = 1 \mid C = 1) = 0.174$

In [1]:
```
PA1B1C1 = 0.087; PC1 = 0.1 + 0.163 + 0.15 + 0.087; PA1B1_C1 = PA1B1C1 / PC1; print(PA1B1_C1)
```

```
0.174
```

2023_01_17_Cuestión 1: Supón que tenemos dos cajas con 40 naranjas en la primera y 80 en la segunda. La primera caja contiene 9 naranjas Navelina y 31 Caracara. La segunda caja contiene tres veces más naranjas Navelina que Caracara. Ahora supón que se escoge una caja al azar, y después una naranja al azar de la caja escogida. Si la naranja escogida es Navelina, la probabilidad P de que proceda de la primera caja es:

1. $0/4 \leq P < 1/4$.
2. $1/4 \leq P < 2/4$.
3. $2/4 \leq P < 3/4$.
4. $3/4 \leq P \leq 4/4$.

Solución:

$$
\begin{aligned}
P = P(C=1 \mid T=N) &= \frac{P(C=1)P(T=N \mid C=1)}{P(C=1)P(T=N \mid C=1) + P(C=2)P(T=N \mid C=2)} \\
&= \frac{1/2 \cdot 9/40}{1/2 \cdot 9/40 + 1/2 \cdot 3/4} = \frac{9}{9+30} = 0.23
\end{aligned}
$$

2022_01_27_Cuestión 4: Dada la siguiente tabla de frecuencias conjuntas de tres variables de interés:

A	0	0	0	0	1	1	1	1
B	0	0	1	1	0	0	1	1
C	0	1	0	1	0	1	0	1
$N(A,B,C)$	124	28	227	175	126	222	23	75

Cúal és el valor de $P(A = 1 \mid B = 1, C = 0)$?

1. 0.023
2. 0.250
3. 0.092
4. 0.446

Solución: la 3.

2022_01_13_Cuestión 7: Sea un problema de razonamiento probabilístico sobre desplazamientos por carretera, con las variables aleatorias de interés:

- Climatología (C): {claro(CLA), nublado (NUB), lluvia (LLU)}
- Luminosidad (L): {día (DÍA), noche (NOCHE)}
- Seguridad (S): {seguro (SEG), accidente (ACC)}

La probabilidad conjunta de las tres variables viene dada en la tabla:

	DÍA			NOCHE		
$P(S, L, C)$	CLA	NUB	LLU	CLA	NUB	LLU
SEG	0.27	0.23	0.07	0.16	0.07	0.06
ACC	0.02	0.01	0.02	0.02	0.03	0.04

La probabilidad condicional $P(S = \mathrm{ACC} \mid L = \mathrm{DÍA}, C = \mathrm{NUB})$ es:

1. 0.042
2. 0.010
3. 0.240
4. 0.140

Solución: la 1.

T1.2 Variables continuas y regla de Bayes

Índice

1 Variables continuas

Función de densidad de probabilidad: caracterización usual de las variables continuas para la representación de conocimiento probabilístico

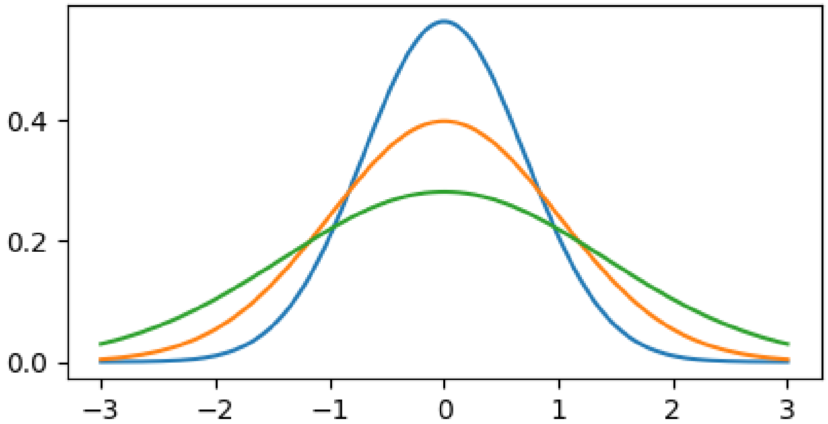
$$p(x) \geq 0 \quad \text{para todo } x \qquad \text{y} \qquad \int p(x)\, dx = 1$$

La densidad normal: $p(x) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}\right) \qquad P(x \in [\mu \pm 1.96\sigma]) = 0.95$$

Ejemplo: densidades normales con $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 0.5, 1, 2$

In [2]:
```
import numpy as np; from scipy.stats import norm; import matplotlib.pyplot as plt
x = np.linspace(-3, 3, 200)
plt.figure(figsize=(5, 2.5))
plt.plot(x, norm.pdf(x, 0, np.sqrt(0.5)), x, norm.pdf(x, 0, 1), x, norm.pdf(x, 0, np.sqrt(2)));
```



2 Teorema de Bayes en el caso continuo

Teorema de Bayes en el caso continuo: probabilidad de una hipótesis y después de observar una evidencia (nueva) x

$$P(y \mid x) = P(y)\,\frac{p(x \mid y)}{p(x)}$$

Ejemplo: $x =$ resultado de un test de saliva para el diagnóstico de caries

- Sin caries, $c = 0,\ p(x \mid c = 0) \sim \mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$
- Con caries, $c = 0,\ p(x \mid c = 1) \sim \mathcal{N}(\mu = 2, \sigma^2 = 0.5)$
- Sabemos que la probabilidad (a priori) de caries es: $P(c = 1) = 0.34$
- **Si el test da $x = 2$, cuál es la probabilidad (a posteriori) de caries?**

$$P(c = 1 \mid x = 2) = P(c = 1)\,\frac{p(x = 2 \mid c = 1)}{p(x = 2)} = 0.340\,\frac{0.564}{0.307} = 0.843$$

- Observa que primero había que encontrar la (densidad de) probabilidad (a priori) de test $x = 2$:

$$\begin{aligned} p(x = 2) &= P(c = 0)p(x = 2 \mid c = 0) + P(c = 1)p(x = 2 \mid c = 1) \\ &= (1 - 0.34) \cdot 0.054 + 0.34 \cdot 0.564 = 0.227 \end{aligned}$$

In [3]:
```
Pc1 = 0.34; px2Dc0 = norm.pdf(2, 0, 1); px2Dc1 = norm.pdf(2, 2, np.sqrt(0.5))
px2 = (1-Pc1) * px2Dc0 + Pc1 * px2Dc1; Pc1Dx2 = Pc1 * px2Dc1 / px2
print(f"px2Dc0 = {px2Dc0:.3f}  px2Dc1 = {px2Dc1:.3f}  px2 = {px2:.3f}  Pc1Dx2 = {Pc1Dx2:.3f}")
```

```
px2Dc0 = 0.054  px2Dc1 = 0.564  px2 = 0.227  Pc1Dx2 = 0.843
```

3 La regla de decisión de Bayes

Regla de decisión de Bayes: predice una hipótesis después de observar una evidencia x mediante la elección, entre un conjunto de hipótesis posibles $\mathcal{C}$, de una hipótesis de máxima **probabilidad a posteriori** (de la observación de la evidencia)

$$c^*(x) = \operatorname*{argmax}_{c \in \mathcal{C}} \; P(c \mid x)$$

Probabilidad de error: es decir, probabilidad de que la hipótesis predicha sea distinta de la realmente producida

$$P(\text{error} \mid x) = 1 - P(c^*(x) \mid x)$$

Optimalidad de la regla de Bayes: ninguna otra elección mejoraría esta probabilidad de error!

Ejemplo del dentista:

$$c^*(x=2) = \operatorname*{argmax}_{c} \begin{pmatrix} P(c=0 \mid x=2) = 0.116 \\ P(c=1 \mid x=2) = 0.884 \end{pmatrix} = 1$$

Regla de Bayes en función de probabilidades a priori y (densidades) condicionales de las clases: en lugar (de arg-)maximizar $P(c \mid x)$ en c, lo hacemos en función de $P(c)\, p(x \mid c)$ puesto que el resultado es el mismo

$$c^*(x) = \operatorname*{argmax}_{c \in \mathcal{C}} \; P(c \mid x) = \operatorname*{argmax}_{c \in \mathcal{C}} \; P(c) \, \frac{p(x \mid c)}{p(x)} = \operatorname*{argmax}_{c \in \mathcal{C}} \; P(c) \, p(x \mid c)$$

Ejemplo del dentista:

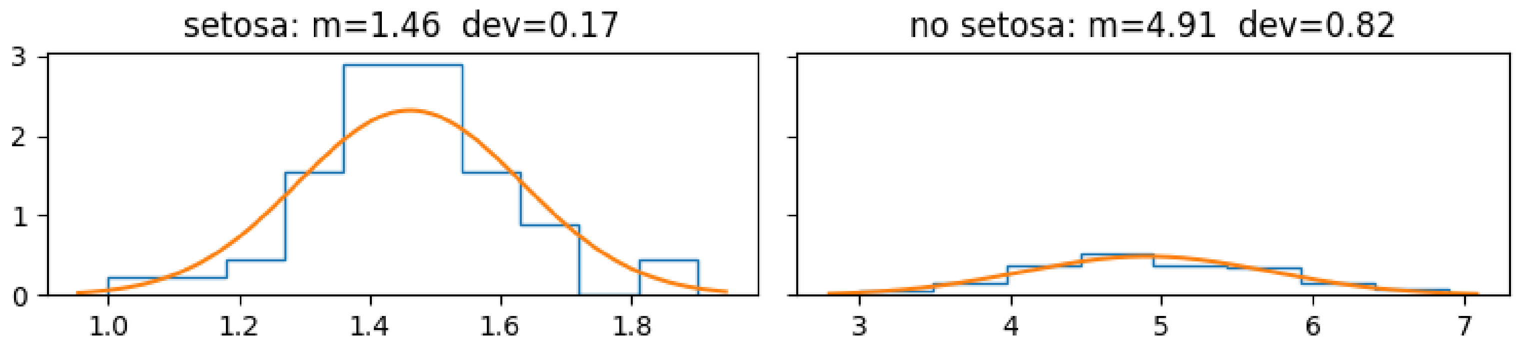
$$c^*(x=2) = \operatorname*{argmax}_{c} \begin{pmatrix} P(c=0) \, p(x=2 \mid c=0) = 0.036 \\ P(c=1) \, p(x=2 \mid c=1) = 0.271 \end{pmatrix} = 1$$

Ejercicios T1.2 Variables continuas y regla de Bayes

Problema: Considerad la clasificación de flores iris en setosa o no-setosa a partir de la longitud de pétalos, x. El estudio empírico siguiente muestra que las distribuciones de x para setosas y no-setosas pueden aproximarse con distribuciones normales de medias y desviaciones estándares:

$$p(x \mid c = \text{set}) \sim \mathcal{N}(\mu_{\text{set}} = 1.46, \sigma_{\text{set}} = 0.17) \qquad \text{y} \qquad p(x \mid c = \text{nos}) \sim \mathcal{N}(\mu_{\text{nos}} = 4.91, \sigma_{\text{nos}} = 0.82)$$

In [1]:
```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt
from sklearn.datasets import load_iris; from scipy.stats import norm
iris = load_iris(); X = iris.data.astype(np.float16); y = iris.target.astype(np.uint)
x_set = np.squeeze(X[np.where(y==0), 2]); x_nos = np.squeeze(X[np.where(y!=0), 2])
fig, axs = plt.subplots(1, 2, figsize=(8, 2), sharey=True, tight_layout=True)
axs[0].hist(x_set, bins='auto', density=True, histtype='step')
x_set_range = np.arange(*axs[0].get_xlim(), .01)
x_set_mean = x_set.mean(); x_set_dev = np.sqrt(x_set.var())
axs[0].set_title(f'setosa: m={x_set_mean:.2f}  dev={x_set_dev:.2f}')
axs[0].plot(x_set_range, norm.pdf(x_set_range, x_set_mean, x_set_dev))
axs[1].hist(x_nos, bins='auto', density=True, histtype='step')
x_nos_range = np.arange(*axs[1].get_xlim(), .01)
x_nos_mean = x_nos.mean(); x_nos_dev = np.sqrt(x_nos.var())
axs[1].set_title(f'no setosa: m={x_nos_mean:.2f}  dev={x_nos_dev:.2f}')
axs[1].plot(x_nos_range, norm.pdf(x_nos_range, x_nos_mean, x_nos_dev));
```



Si las densidades normales estimadas son ciertas y la probabilidad a priori de setosa es $1/3$, ¿cuál es la probabilidad a posteriori de que una flor de longitud de pétalos 2 sea setosa?

Solución:

$$
\begin{aligned}
P(c=\text{set}\mid x=2) &= \frac{P(c=\text{set})\,p(x=2\mid c=\text{set})}{p(x=2)}\\
&= \frac{P(c=\text{set})\,p(x=2\mid c=\text{set})}{P(c=\text{set})\,p(x=2\mid c=\text{set})+P(c=\text{nos})\,p(x=2\mid c=\text{nos})}\\
&= \frac{1/3\cdot\mathcal{N}(x=2\mid \mu_{\text{set}}=1.46,\sigma_{\text{set}}=0.17)}{1/3\cdot\mathcal{N}(x=2\mid \mu_{\text{set}}=1.46,\sigma_{\text{set}}=0.17)+2/3\cdot\mathcal{N}(x=2\mid \mu_{\text{nos}}=4.91,\sigma_{\text{nos}}=0.82)}\\
&= \frac{\frac{1}{0.17}\exp\left(-\frac{(2-1.46)^2}{2\cdot 0.17^2}\right)}{\frac{1}{0.17}\exp\left(-\frac{(2-1.46)^2}{2\cdot 0.17^2}\right)+\frac{2}{0.82}\exp\left(-\frac{(2-4.91)^2}{2\cdot 0.82^2}\right)} = \frac{0.0379}{0.0379+0.0045} = 0.89
\end{aligned}
$$