UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Quadern de treball: Raonament probabilístic

Albert Sanchis

DSIC

Departament de Sistemes Informàtics i Computació

Objectius formatius

- Inferir coneixement probabilístic mitjançant les regles suma i producte del càlcul de probabilitats
- Inferir coneixement a partir de variables contínues
- Aplicar la regla de decisió de Bayes
- Calcular la probabilitat d'error
- Inferir coneixement probabilístic amb el teorema de Bayes

- ***Qüestió 1***: Basant-te en la taula de probabilitats conjuntes de l'exemple del dentista que es mostra a la dreta, i aplicant la regla suma o la regla producte, calcula les següents probabilitats:

d	c	b	P
0	0	0	0.576
0	0	1	0.008
0	1	0	0.144
0	1	1	0.072
1	0	0	0.064
1	0	1	0.012
1	1	0	0.016
1	1	1	0.108

1. Probabilitat d'observar càries i dolor (alhora):

   $$P(c=1,d=1)=\sum_{b=0,1} P(b,c=1,d=1)=0.124$$

2. Probabilitat d'observar dolor:

   $$P(d=1)=\sum_{b=0,1}\sum_{c=0,1} P(b,c,d=1)=0.2$$

3. Probabilitat d'observar càries després d'observar (sabent que hi ha) dolor:

   $$P(c=1\mid d=1)=\frac{P(c=1,d=1)}{P(d=1)}=\frac{0.124}{0.2}=0.62$$

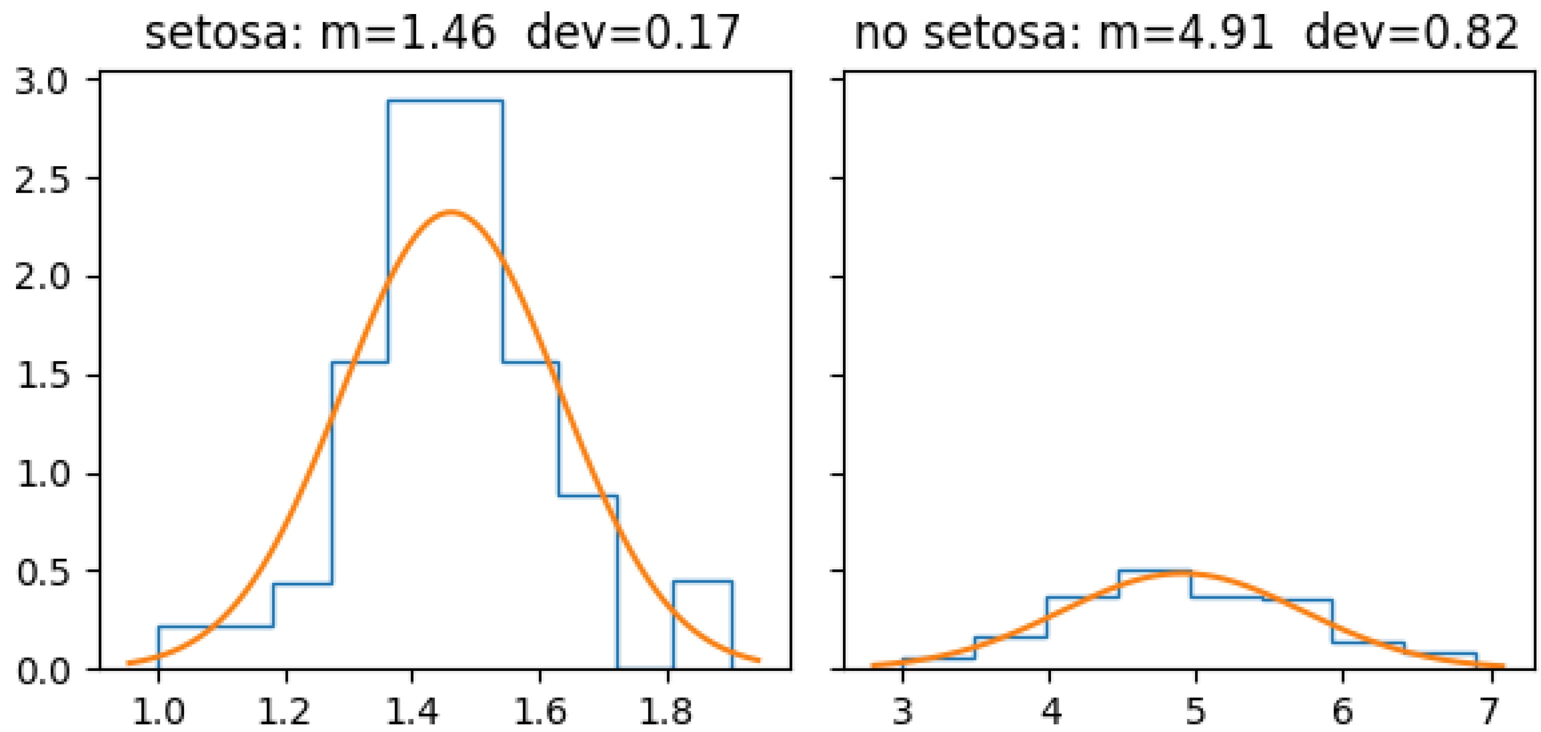
4. Probabilitat de no observar buit després d'observar (sabent que hi ha) dolor:

   $$P(b=0\mid d=1)=\frac{P(b=0,d=1)}{P(d=1)}=\frac{0.08}{0.2}=0.4$$

• ***Qüestió 2***: Considera el problema de classificar flors iris en setosa o no-setosa a partir de la seua longitud de pètals (x). L'estudi empíric següent mostra que les distribucions de x per a setoses i no-setoses poden aproximar-se amb distribucions normals de mitjanes i desviacions estàndard:

$$p(x \mid c = \text{set}) \sim \mathcal{N}(\mu_{\text{set}} = 1.46, \sigma_{\text{set}} = 0.17)$$

$$p(x \mid c = \text{nos}) \sim \mathcal{N}(\mu_{\text{nos}} = 4.91, \sigma_{\text{nos}} = 0.82)$$



Assumint que les densitats normals estimades són certes i la probabilitat a priori de setosa és $1/3$, contesta a les següents preguntes:

1. Quina és la probabilitat a posteriori que una flor de longitud de pètals 2 siga setosa sabent que $\mathcal{N}(x = 2 \mid \mu_{\text{set}} = 1.46, \sigma_{\text{set}} = 0.17) = 0.015117$ y $\mathcal{N}(x = 2 \mid \mu_{\text{nos}} = 4.91, \sigma_{\text{nos}} = 0.82) = 0.00089614$?

$$P(c = \textbf{\textit{set}} \mid x = 2) = \frac{P(c = \textbf{\textit{set}})\, p(x = 2 \mid c = \textbf{\textit{set}})}{p(x = 2)}$$

$$= \frac{P(c = \textbf{\textit{set}})\, p(x = 2 \mid c = \textbf{\textit{set}})}{P(c = \textbf{\textit{set}})\, p(x = 2 \mid c = \textbf{\textit{set}}) + P(c = \textbf{\textit{nos}})\, p(x = 2 \mid c = \textbf{\textit{nos}})}$$

$$= \frac{1/3 \cdot \mathcal{N}(x = 2 \mid \mu_{\textbf{\textit{set}}} = 1.46, \sigma_{\textbf{\textit{set}}} = 0.17)}{1/3 \cdot \mathcal{N}(x = 2 \mid \mu_{\textbf{\textit{set}}} = 1.46, \sigma_{\textbf{\textit{set}}} = 0.17) + 2/3 \cdot \mathcal{N}(x = 2 \mid \mu_{\textbf{\textit{nos}}} = 4.91, \sigma_{\textbf{\textit{nos}}} = 0.82)}$$

$$= \frac{1/3 \cdot 0.015117}{1/3 \cdot 0.015117 + 2/3 \cdot 0.00089614} = 0.89$$

2. Quina és la decisió òptima de classificació d'aquesta flor?

$$c^*(x=2) = \arg\max_c \begin{pmatrix} P(c = \textbf{\textit{set}} \mid x = 2) & = 0.89 \\ P(c = \textbf{\textit{nos}} \mid x = 2) & = 0.11 \end{pmatrix} = \textbf{\textit{set}}$$

3. Quina és la probabilitat de que aquesta decisió siga errònia?

$$\begin{aligned} P(\textbf{\textit{error}} \mid x = 2) &= 1 - P(c^*(x=2) \mid x) \\ &= 1 - P(c = \textbf{\textit{set}} \mid x) \\ &= 1 - 0.89 \\ &= 0.11 \end{aligned}$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

- ***Qüesió 3***: Tenint en compte la següent informació sobre la malaltia de la meningitis:
  - La meningitis causa rigidesa de bescoll en un 70% dels casos.
  - La probabilitat a priori que un pacient tinga meningitis és de $1\,/\,100\,000$.
  - La probabilitat a priori que un pacient tinga rigidesa de bescoll és del 1%.

  Calcula la probabilitat que un pacient amb rigidesa de bescoll tinga meningitis.

$$P(m=1 \mid r=1) = \frac{P(m=1)\cdot P(r=1 \mid m=1)}{P(r=1)}$$
$$= \frac{1/100000 \cdot 70/100}{1/100}$$
$$= \frac{7}{10000} = 0.0007$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA