UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Quadern de treball: Funcions discriminants

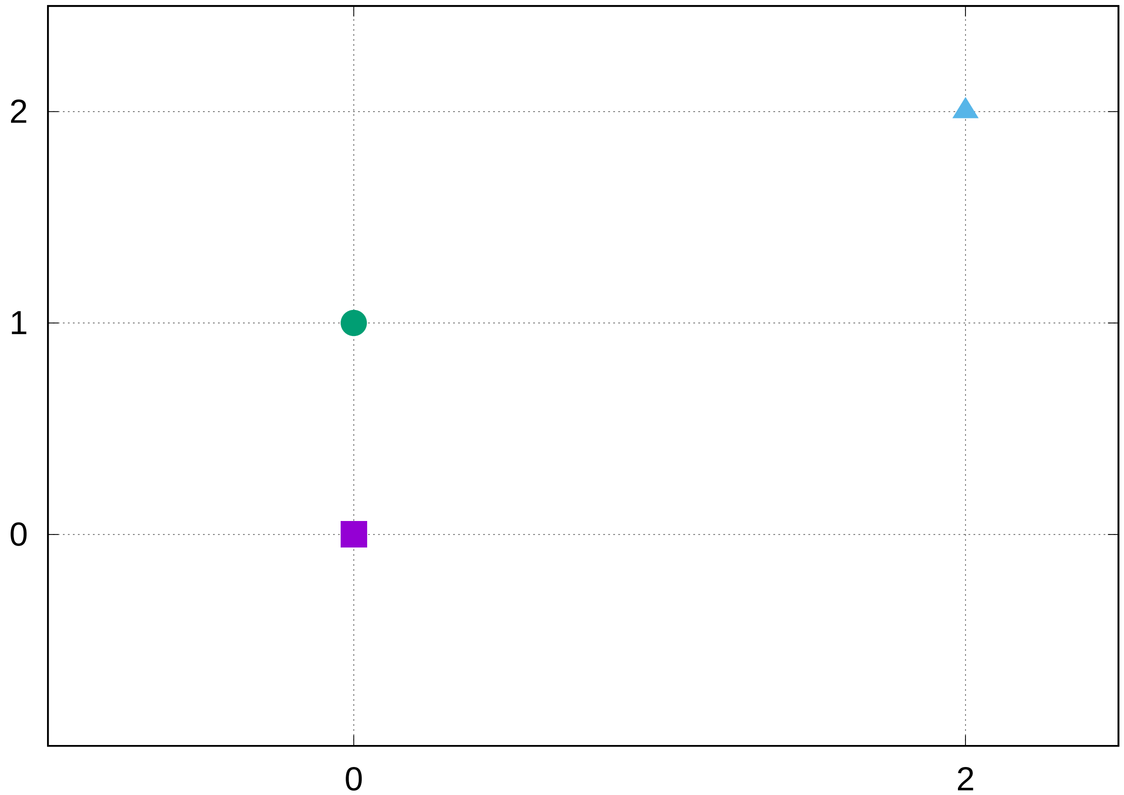
Albert Sanchis

Departament de Sistemes Informàtics i Computació

Objectius formatius

- Aplicar funcions discriminants
- Calcular la frontera de decisió entre classes
- Calcular les regions de decisió d'un classificador
- Identificar classificadors equivalents

- ***Qüestió 1***: Siga un problema de classificació en 3 classes ($c = 1, 2, 3$), per a objectes representats mitjançant vectors de característiques bidimensionals ($\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^t$). Suposem que es disposa de 3 mostres d'entrenament $x_1 = (0, 0)^t$ de la classe $c_1 = 1$; $x_2 = (0, 1)^t$ de la classe $c_2 = 2$; i $x_3 = (2, 2)^t$ de la classe $c_3 = 3$ tal com es mostra en la següent figura:



Suposem també que s'ha definit un classificador lineal basat en funcions discriminants amb els següents vectors de pesos i pes llindar per a cada classe:

- $\boldsymbol{w}_1 = (-2, -4)^t; w_{10} = 0$
- $\boldsymbol{w}_2 = (-2, 0)^t; w_{20} = -2$
- $\boldsymbol{w}_3 = (2, 0)^t; w_{30} = -3$

Contesta a les següents preguntes:

1. En quina classe es classificaria cadascuna de les 3 mostres d'entrenament aplicant el classificador definit?
   - ***Valors de les discriminants per a*** $x_1 = (0, 0)^t$

$$g_1(\boldsymbol{x_1}) = -2 \cdot 0 + (-4) \cdot 0 + 0 = 0$$
$$g_2(\boldsymbol{x_1}) = -2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-2) = -2$$
$$g_3(\boldsymbol{x_1}) = 2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-3) = -3$$

   - ***Classificació:*** $c^*(\boldsymbol{x_1}) = \arg\max_{c \in C} g_c(\boldsymbol{x_1}) = 1$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

- ***Valors de les discriminants per a*** $x_2 = (0, 1)^t$

$$g_1(\boldsymbol{x_2}) = -2 \cdot 0 + (-4) \cdot 1 + 0 = -4$$
$$g_2(\boldsymbol{x_2}) = -2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-2) = -2$$
$$g_3(\boldsymbol{x_2}) = 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-3) = -3$$

- ***Classificació:*** $c^*(\boldsymbol{x_2}) = \arg\max_{c \in C} g_c(\boldsymbol{x_2}) = 2$

- ***Valors de les discriminants per a*** $x_3 = (2, 2)^t$

$$g_1(\boldsymbol{x_3}) = -2 \cdot 2 + (-4) \cdot 2 + 0 = -12$$
$$g_2(\boldsymbol{x_3}) = -2 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + (-2) = -6$$
$$g_3(\boldsymbol{x_3}) = 2 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + (-3) = 1$$

- ***Classificació:*** $c^*(\boldsymbol{x_3}) = \arg\max_{c \in C} g_c(\boldsymbol{x_3}) = 3$

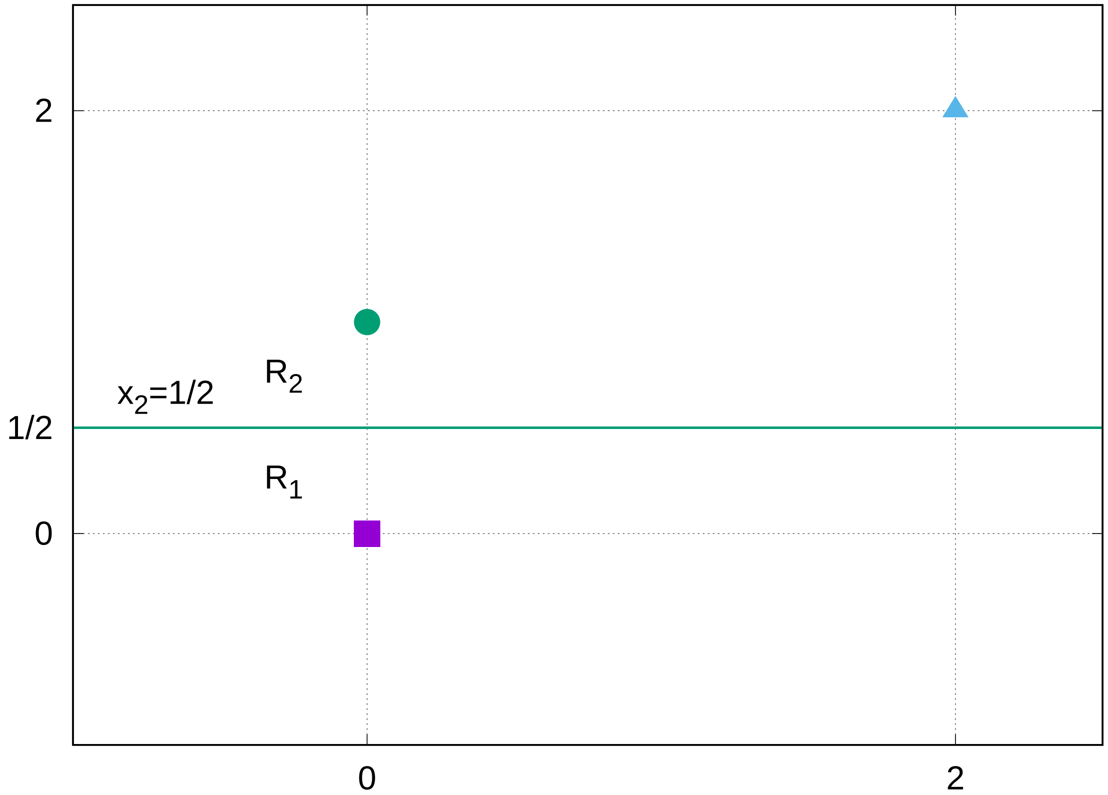
2. Es produeix algun error de classificació? ***No, les tres mostres d'entrenament es classifiquen correctament***

3. Calcula la frontera de decisió que defineix el classificador entre les classes 1 i 2. Representa-la gràficament.

$$g_1(\boldsymbol{x}) = g_2(\boldsymbol{x})$$

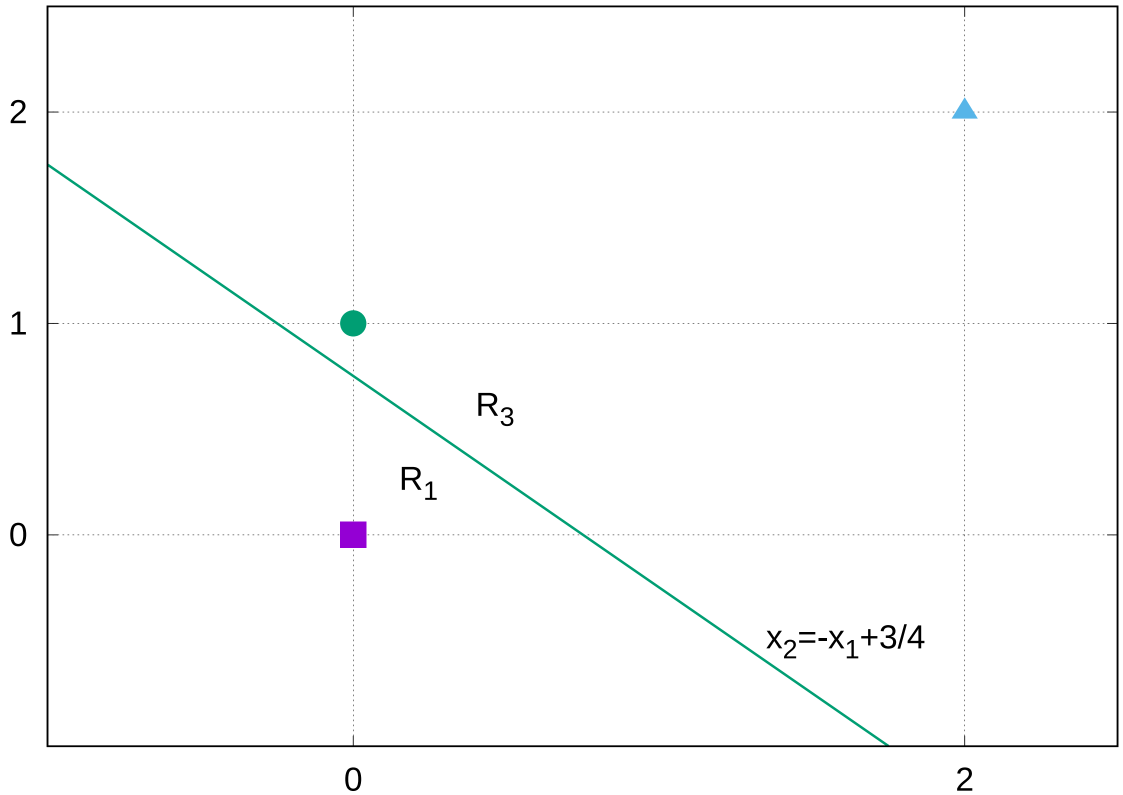
$$-2x_1 - 4x_2 + 0 = -2x_1 + 0x_2 - 2$$

$$x_2 = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$



4. Calcula la frontera de decisió que defineix el classificador entre les classes 1 i 3. Representa-la gràficament.

$$g_1(\boldsymbol{x}) = g_3(\boldsymbol{x})$$
$$-2x_1 - 4x_2 + 0 = 2x_1 + 0x_2 - 3$$
$$-4x_2 = 4x_1 - 3$$
$$x_2 = -x_1 + \frac{3}{4}$$



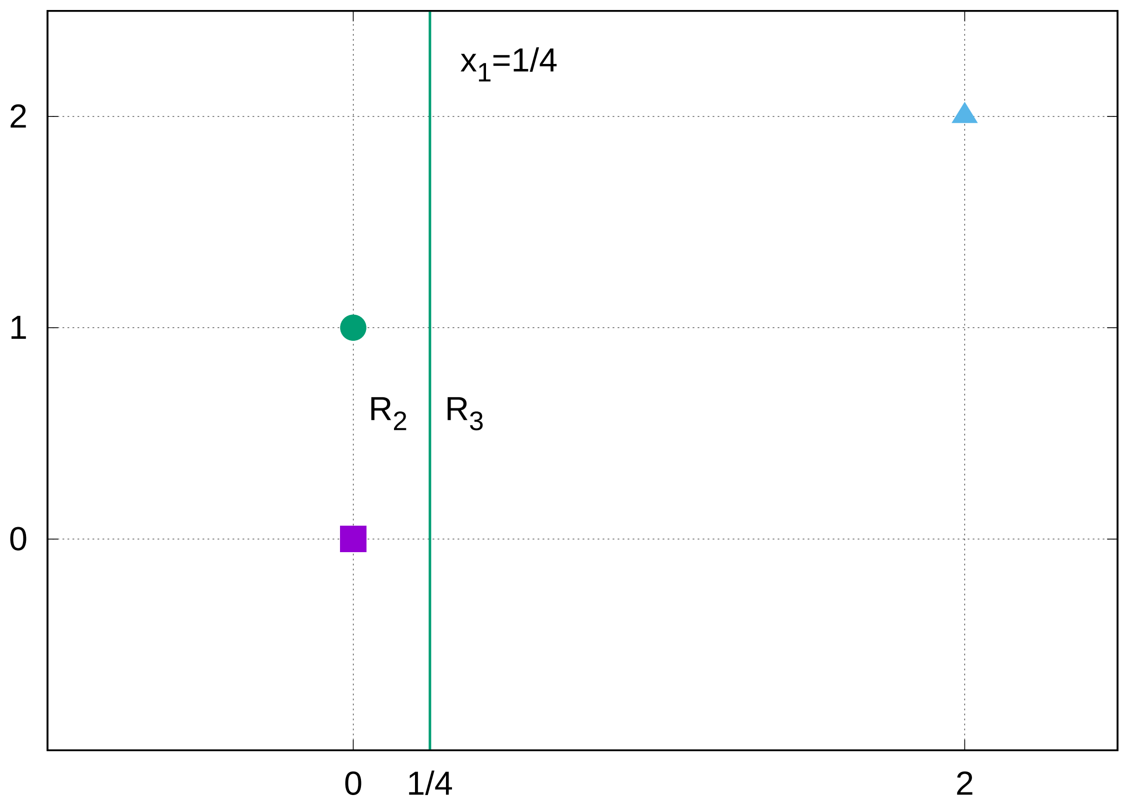
5. Calcula la frontera de decisió que defineix el classificador entre les classes 2 i 3. Representa-la gràficament.

$$g_2(\boldsymbol{x}) = g_3(\boldsymbol{x})$$

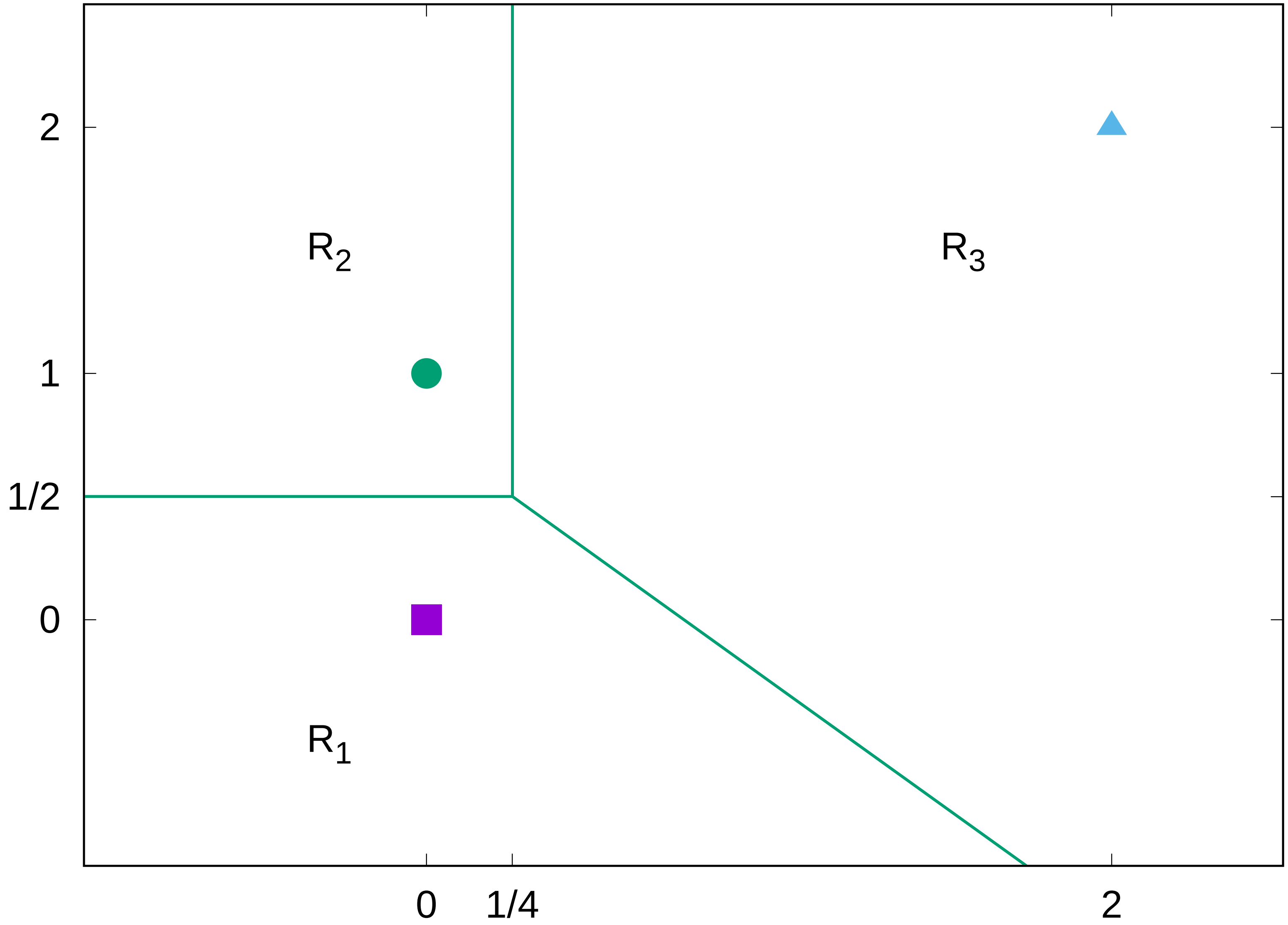
$$-2x_1 + 0x_2 - 2 = 2x_1 + 0x_2 - 3$$

$$-4x_1 = -1$$

$$x_1 = \frac{1}{4}$$



6. Representa gràficament les 3 regions de decisió que defineix el classificador donat.



7. Donat el següent classificador:
   - $\boldsymbol{w'}_1 = (-1, -2)^t; w'_{10} = 0$
   - $\boldsymbol{w'}_2 = (-1, 0)^t; w'_{20} = -1$
   - $\boldsymbol{w'}_3 = (1, 0)^t; w'_{30} = -1{,}5$

   es tracta d'un classificador equivalent al classificador anterior? ***Sí, perquè defineix les mateixes regions de decisió***

8. Donat el següent classificador:

- $\boldsymbol{w'}_1 = (2,4)^t; w'_{10} = 0$
- $\boldsymbol{w'}_2 = (2,0)^t; w'_{20} = 2$
- $\boldsymbol{w'}_3 = (-2,0)^t; w'_{30} = 3$

es tracta d'un classificador equivalent al classificador anterior? ***No, perquè defineix regions de decisió distintes***