Raonament probabilístic: representació i inferència

Alfons Juan
Albert Sanchis
Jorge Civera

Departament de Sistemes
Informàtics i Computació

Objectius formatius

- Representar el coneixement en termes probabilístics
- Inferir coneixement probabilístic mitjançant les regles suma i producte del càlcul de probabilitats
- Aplicar el concepte de variables independents a la representació de coneixement probabilístic
- Inferir coneixement probabilístic mitjançant el teorema de Bayes

Índex

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

1 El problema de la qualificació

Anomenem ***problema de la qualificació*** a la pràctica impossibilitat de conèixer i comprovar totes les *qualificacions* (condicions) que caldria garantir per tal d'assegurar el compliment d'una acció.

Exemples:

- Eixir a l'aeroport 90 minuts abans del vol em permet arribar a temps SI no hi ha embossos I no hi ha punxades I . . .
- Un bot ens permet creuar un riu SI és un bot de rem I té rems i escàlems I no estan trencats I encaixen I . . .

Els sistemes intel·ligents actuals inclouen la ***incertesa*** com a part del coneixement i la representen mitjançant ***probabilitats*** associades als successos (proposicions) d'interés.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

2 Representació probabilística

El coneixement probabilístic pot representar-se amb la distribució de probabilitat conjunta de les variables aleatòries d'interès.

Exemple del dentista: coneixement per a diagnosticar càries

Variables aleatòries d'interès:

$$Dolor: \quad D \in \{0, 1\}$$
$$Càries: \quad C \in \{0, 1\}$$
$$Buit: \quad B \in \{0, 1\}$$

Representació:

$$P(D = d, C = c, B = b)$$

d	c	b	P
0	0	0	0.576
0	0	1	0.008
0	1	0	0.144
0	1	1	0.072
1	0	0	0.064
1	0	1	0.012
1	1	0	0.016
1	1	1	0.108
Suma:			1.000

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

3 Inferència probabilística

A partir de la distribució conjunta podem calcular la probabilitat de qualsevol *succés* (*proposició*) mitjançant aplicació de:

La regla suma:

$$P(x) = \sum_y P(x, y)$$

La regla producte:

$$P(x, y) = P(x)\, P(y \mid x)$$

En general no és necessari conèixer la taula completa de probabilitats conjuntes per a calcular la probabilitat d'un succés donat.

Inferència probabilística: exemple del dentista

Probabilitat d'observar càries i buit (alhora):

$$P(c=1,b=1)=\sum_{d=0,1} P(d,c=1,b=1)=0.180$$

d	c	b	P
0	0	0	0.576
0	0	1	0.008
0	1	0	0.144
0	1	1	0.072
1	0	0	0.064
1	0	1	0.012
1	1	0	0.016
1	1	1	0.108

Probabilitat d'observar buit:

$$P(b=1)=\sum_{d=0,1}\sum_{c=0,1} P(d,c,b=1)=0.200$$

d	c	b	P
0	0	0	0.576
0	0	1	0.008
0	1	0	0.144
0	1	1	0.072
1	0	0	0.064
1	0	1	0.012
1	1	0	0.016
1	1	1	0.108

Probabilitat d'observar càries després d'observar buit:

$$P(c=1 \mid b=1)=\frac{P(c=1,b=1)}{P(b=1)}=\frac{0.180}{0.200}=0.900$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

4 Independència

Diguem que x i y són ***independents*** si:

$$P(x, y) = P(x)\, P(y) \quad \text{o} \quad P(x \mid y) = P(x) \quad \text{o} \quad P(y \mid x) = P(y)$$

La independència pot establir-se per coneixement expert.

Exemple del dentista: $Temps: \; T \in \{sol, núvols, pluja, neu\}$

$$P(t, d, c, b) = P(t)\, P(d, c, b)$$

Reduïm el nombre de probabilitats a emmagatzemar:

32 probabilitats vs $4 + 8$ probabilitats

5 Teorema de Bayes

El *teorema de Bayes* permet actualitzar el nostre coneixement sobre una hipòtesi y després d'observar una nova evidència x:

$$P(y \mid x) \;=\; \frac{P(x, y)}{P(x)} \;=\; P(y)\,\frac{P(x \mid y)}{P(x)}$$

D'altra manera: $P(y \mid x)$ és la probabilitat de que es produïsca l'efecte y després d'observar que s'ha produït la causa x.

Exemple del dentista: volem inferir $P(c = 1 \mid d = 1)$ sabent que

$$P(c = 1) = 0.34, \quad P(d = 1) = 0.20 \quad \text{i} \quad P(d = 1 \mid c = 1) = 0.36$$

Per Bayes, la probabilitat de càries sabent que hi ha dolor és:

$$P(c = 1 \mid d = 1) = P(c = 1)\,\frac{P(d = 1 \mid c = 1)}{P(b = 1)} = 0.34\,\frac{0.36}{0.20} = 0.61$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

6 Conclusions

- Hem vist com representar el coneixement en termes probabilístics, també amb variables independents si en tenim

- Hem vist com inferir coneixement probabilístic amb:
  - Les regles suma i producte del càlcul de probabilitats
  - El teorema de Bayes

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA