Raonament probabilístic: variables contínues i regla de Bayes

Alfons Juan
Albert Sanchis
Jorge Civera

Departament de Sistemes Informàtics i Computació

Objectius formatius

- Representar el coneixement amb variables contínues
- Inferir coneixement a partir de variables contínues i el teorema de Bayes
- Aplicar la regla de Bayes en general i, en particular, en el cas del reconeixement de formes i aprenentatge automàtic

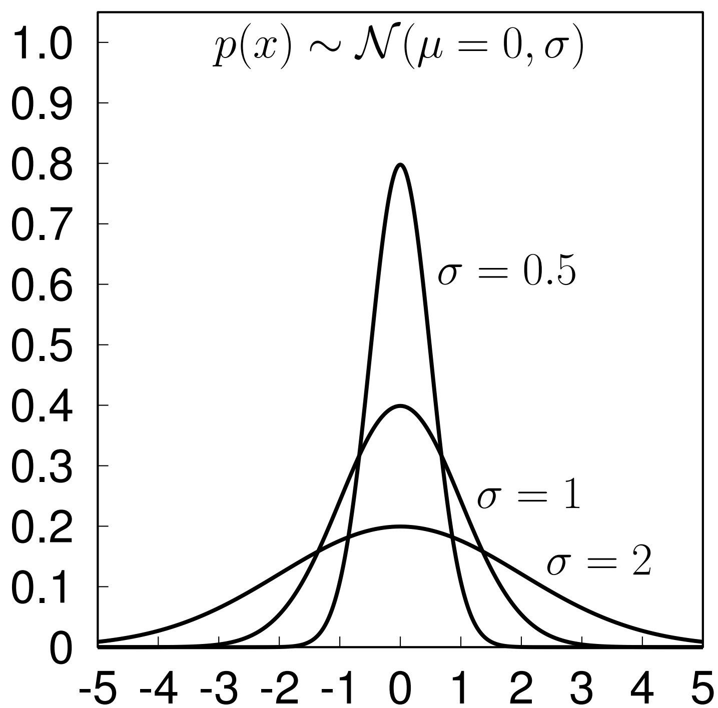
Índex

1 Variables contínues

El coneixement sol expressar-se mitjançant ***variables contínues*** caracteritzades amb funcions de ***densitat de probabilitat:***

$$p(x) \geq 0 \quad \text{per a tot } x \qquad \text{i} \qquad \int p(x)\, dx = 1$$

Exemple: la distribució normal



$$p(x) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}\right)$$

$$P(x \in [\mu \pm 2\sigma]) = 0.95$$

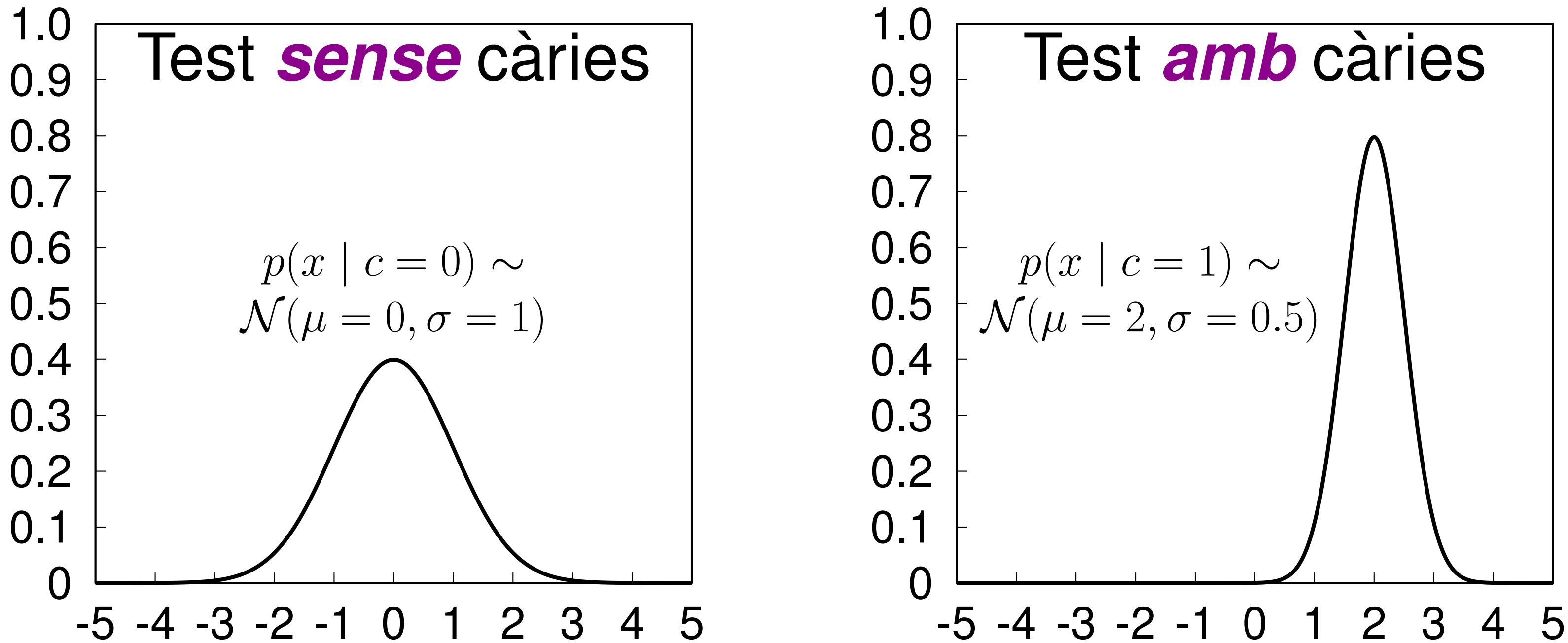
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

2 Teorema de Bayes en el cas continu

En el cas continu, el ***teorema de Bayes*** pot expressar-se com:

$$\text{"}P(\text{efecte} \mid \text{causa})\text{"} = P(y \mid x) = P(y)\,\frac{p(x \mid y)}{p(x)}$$

Exemple: $x =$ test de saliva per al diagnòstic de càries



Si $P(c=1) = 0.34$ però el test dóna $x = 2$, per Bayes tenim:

$$P(c=1 \mid x=2) = P(c=1)\,\frac{p(x=2 \mid c=1)}{p(x=2)} = 0.340\,\frac{0.798}{0.307} = 0.884$$

3 La regla de decisió de Bayes

La ***regla de decisió de Bayes*** prediu l'efecte que produirà una causa x triant, entre un conjunt d'efectes possibles $\mathcal{C}$, un de màxima ***probabilitat a posteriori*** (de l'observació de la causa):

$$c^*(x) = \operatorname*{arg\,max}_{c \in \mathcal{C}} \; P(c \mid x)$$

Probabilitat d'error (efecte predit distint del realment produït):

$$P(\text{error} \mid x) = 1 - P(c^*(x) \mid x)$$

Cap altra tria milloraria aquesta probabilitat d'error!

Exemple del diagnòstic de càries:

$$c^*(x=2) = \operatorname*{arg\,max}_{c} \begin{pmatrix} P(c=0 \mid x=2) & = 0.116 \\ P(c=1 \mid x=2) & = 0.884 \end{pmatrix} = 1$$

Regla de Bayes: altra versió

Pel teorema de Bayes, la regla de Bayes es pot re-escriure com:

$$\begin{aligned} c^*(x) &= \underset{c \in \mathcal{C}}{\arg\max}\; P(c \mid x) \\ &= \underset{c \in \mathcal{C}}{\arg\max}\; P(c)\,\frac{p(x \mid c)}{p(x)} \\ &= \underset{c \in \mathcal{C}}{\arg\max}\; P(c)\,p(x \mid c) \end{aligned}$$

on $P(c)$ és la ***probabilitat a priori*** de l'efecte c; i $p(x \mid c)$ és la ***(densitat de) probabilitat*** de que x siga la causa de l'efecte c.

Exemple del diagnòstic de càries:

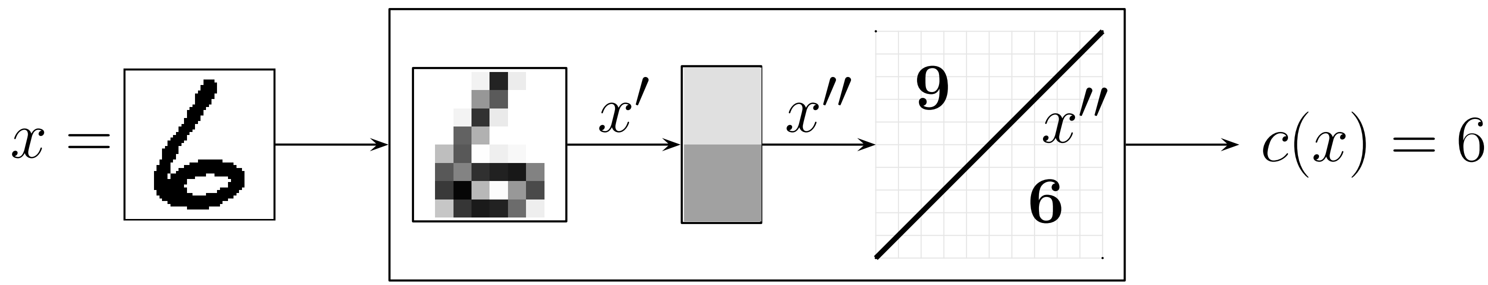
$$c^*(x=2) = \underset{c}{\arg\max} \begin{pmatrix} P(c=0)\,p(x=2 \mid c=0) = 0.036 \\ P(c=1)\,p(x=2 \mid c=1) = 0.271 \end{pmatrix} = 1$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

4 Reconeixement de Formes i Apr. Automàtic

El ***Reconeixement de Formes*** i l'***Aprenentatge Automàtic*** estudien sistemes capaços d'aprendre i predir a partir de dades.

Un problema clàssic és la construcció de classificadors per a objectes percebuts amb sensors apropiats; p.e. un OCR de 6 o 9:



L'aproximació convencional es basa en la regla de Bayes:

$$c^*(x) = \arg\max_{c \in \mathcal{C}} \; P(c \mid x) = \arg\max_{c \in \mathcal{C}} \; P(c)\, p(x \mid c)$$

on $P(c \mid x)$, o $P(c)$ i $p(x \mid c)$, s'aprenen a partir d'exemples.

5 Conclusions

- Hem vist com emprar variables contínues per a representar coneixement i inferir-ne de nou mitjançant el teorema de Bayes

- També hem vist com aplicar la regla de Bayes per a decidir / predir amb mínima probabilitat d'error