一、1. $$P(i,j)=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&0&\cdots&1&&\\&&\vdots&\ddots&\vdots&&\\&&1&\cdots&0&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\\\ i\\\\ j\\\\\\\end{array}$$

$$P(i(k))=\begin{pmatrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&k&&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\\\ \cdots i\\\\\\\end{array}\quad k\neq 0.$$

$$P(i,j(k))=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}1&&&&\\&1&\cdots&k&\\&&\ddots&\vdots&\\&&&1&\\&&&&\ddots\ 1\end{pmatrix}&\begin{array}{l}\\ i\\\\ j\\\\\end{array}\\ \begin{array}{cc}\quad\quad i&\quad\quad j\end{array}&\end{array}$$

2. 初等阵是可逆的.

初等阵的逆还是初等阵.

$P^{-1}(i,j)=P(i,j)$ $\quad P^{-1}(i(k))=P(i(\frac{1}{k}))$ $\quad P^{-1}(i,j(k))=P(i,j(-k))$

二. Th. 对A施行一次初等行(列)变换所得到的矩阵B等于用同种类型的初等阵左(右)乘A.

三. 矩阵的等价.

1. 若 $A\to\cdots\to B$，则称A与B等价.

2. 等价具有 $\left\{\begin{array}{l}\text{自反性}\\\text{对称性}\\\text{传递性.}\end{array}\right.$

3. $\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}$ 称为A的标准形.

四 初等变换求逆法.

1. Th1. 任何一个矩阵 A 均与它的标准形 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 等价. $r=r(A)$

Th.2. A 与 B 等价 $\Longleftrightarrow$ ∃初等阵 $\underbrace{P_1,\cdots,P_s}_{P}$; $\underbrace{Q_1,\cdots,Q_t}_{Q}$.

使得 $A=P_1P_2\cdots P_s\, B\, Q_1Q_2\cdots Q_t$.

Th.3. A 与 B 等价 $\Longleftrightarrow$ ∃可逆阵 P,Q，使得 $A=PBQ$.

Th.4. 方阵 A_n 可逆 $\Longleftrightarrow$ 它能表示为一系列初等阵的乘积.

$\Longleftrightarrow r(A)=n$

$\Longleftrightarrow A$ 与 E 等价.

Th.5. 可逆阵总可以仅经初等行变换化为单位阵.

2. 初等变换求逆法.

若 A 可逆. A^{-1} 也可逆.

$A^{-1}=P_1P_2\cdots P_sE$ 　　P_i 均为初等阵

$E=P_1P_2\cdots P_sA$.

$(A,E)\xrightarrow{行}\cdots\longrightarrow(E,A^{-1})$.

例1. 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. 求 A^{-1}. 　　行变换

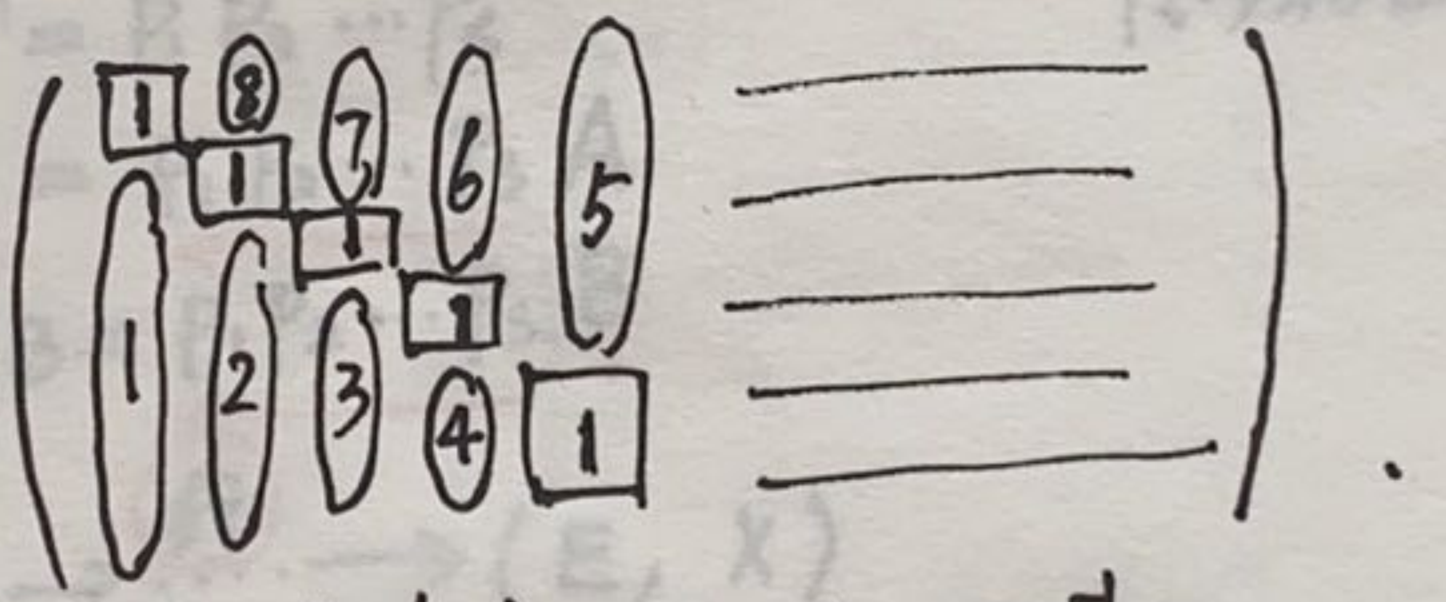
解: $(A,E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&4&0&1&0\\0&1&2&1&0&0\\2&-1&0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&4&0&1&0\\0&1&2&1&0&0\\0&-3&-8&0&-2&1\end{pmatrix}\boxed{\times 3}$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&4&0&1&0\\0&1&2&1&0&0\\0&0&-2&3&-2&1\end{array}\right)\to\begin{pmatrix}1&1&0&6&-3&2\\0&1&0&4&-2&1\\0&0&1&-\frac{3}{2}&1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\boxed{\times(-1)}$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&-1&1\\0&1&0&4&-2&1\\0&0&1&-\frac{3}{2}&1&-\frac{1}{2}\end{array}\right).\quad\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\4&-2&1\\-\frac{3}{2}&1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

$$(A,E)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&1&&&\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&&1&&\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&&&\ddots&\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}&&&&1\end{array}\right)$$

$\to$ 

例2. 已知 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{pmatrix}$. 求$(E-A)^{-1}$.

解: $E-A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\-2&0&0\\3&-2&6\end{pmatrix}$

$$(E-A,E)=\begin{pmatrix}0&0&-1&1&0&0\\-2&0&0&0&1&0\\3&-2&6&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}-2&0&0&0&1&0\\3&-2&6&0&0&1\\0&0&-1&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}-1&0&0&0&\frac{1}{2}&0\\3&-2&6&0&0&1\\0&0&-1&1&0&0\end{pmatrix}\begin{matrix}\times 3\\ \times 6\\ \end{matrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-1&0&0&0&\frac{1}{2}&0\\0&-2&0&6&\frac{3}{2}&1\\0&0&-1&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&-\frac{1}{2}&0\\0&1&0&-3&-\frac{3}{4}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&-1&0&0\end{pmatrix}. \quad \therefore (E-A)^{-1}=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{2}&0\\-3&-\frac{3}{4}&-\frac{1}{2}\\-1&0&0\end{pmatrix}$$

3. 初等变换法解矩阵方程.

1°. $AX=B \xRightarrow{\text{若}A\text{可逆}} \begin{cases}\text{方法一. } X=A^{-1}B \\ \text{方法二. } (A,B)\xrightarrow{\text{行}}\cdots\rightarrow(E,X).\end{cases}$ P120

A可逆. A^{-1}也可逆.

$A^{-1}=P_1P_2\cdots P_s$ P_i为初等阵.

$E=P_1P_2\cdots P_s A$

$X=A^{-1}B=P_1P_2\cdots P_s B$

$(A,B)\xrightarrow{\text{行}}\cdots\rightarrow(E,X)$

例. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$. $B=\begin{pmatrix}2&5\\3&1\\4&3\end{pmatrix}$ 设 $AX=B$. 求X.

解: $(A,B)=\left(\begin{array}{ccc:cc}1&2&3&2&5\\2&2&1&3&1\\3&4&3&4&3\end{array}\right)\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&2&5\\0&-2&-5&-1&-9\\0&-2&-6&-2&-12\end{pmatrix}\begin{matrix}\times 1\\ \times(-1)\end{matrix}$

方法一.

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-2&1&-4\\0&-2&-5&-1&-9\\0&0&-1&-1&-3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&3&2\\0&-2&0&4&6\\0&0&1&1&3\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&3&2\\0&1&0&-2&-3\\0&0&1&1&3\end{pmatrix} \quad \therefore X=\begin{pmatrix}3&2\\-2&-3\\1&3\end{pmatrix}.$$

方法二 $(A,E)=\begin{pmatrix}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&-2&-6&-3&0&1\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&0&-2&-1&1&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&0&1&1&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&3&-2\\0&-2&0&3&6&-5\\0&0&1&1&1&-1\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&3&-2\\0&1&0&-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\0&0&1&1&1&-1\end{pmatrix}$ $\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}$ $-\frac{15}{2}-3+\frac{15}{2}$

$\therefore X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}_{3\times3}\begin{pmatrix}2&5\\3&1\\4&3\end{pmatrix}_{3\times2}=\begin{pmatrix}3&2\\-2&-3\\1&3\end{pmatrix}.$

方法三. $A_{3\times3}X_{3\times2}=B_{3\times2}$.

设 $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\\e&f\end{pmatrix}$.

2°. $XA=B \xrightarrow{\text{若}A\text{可逆}} \begin{cases}\text{方法一. } X=BA^{-1}.\\ \text{方法二. } \begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{列}}\begin{pmatrix}E\\X\end{pmatrix}.\end{cases}$

若A可逆. A^{-1}也可逆.

$A^{-1}=P_1P_2\cdots P_s$.

$X=BA^{-1}=BP_1P_2\cdots P_s$

$E=AP_1P_2\cdots P_s$.

例. 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

求 X, 使得 $XA=B$.

解:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \to \underset{\times(-2)}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}} \to \underset{\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 2 \\ -4 & 11 & -3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}}$$

$$\to \underset{\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}} \to \underset{\times 4 \quad \times(-2)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}} \to \underset{\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 17 & -7 & 4 \end{pmatrix}} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ X=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

$\cancel{AX=B}$ $\quad AXB=C \xRightarrow[B\text{可逆}]{A\text{可逆}} X=A^{-1}CB^{-1}$.

作业. 教材. P134. 21—23.

20. (4)—(10)

周一晚上交.