一. 二次型. 一个关于 $x_1,\cdots,x_n$ 的n元二次齐次多项式 ①

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,\cdots,x_n) &= a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{1n}x_1x_n \\
&\quad + a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2n}x_2x_n \\
&\quad + \cdots + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

称为二次型.

称 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ $\quad a_{ij}=a_{ji} \quad \forall i,j$

为二次型的矩阵. 二次型矩阵A的秩称为二次型的秩.

二. 1.
$$
\begin{cases}
x_1=c_{11}y_1+c_{12}y_2+\cdots+c_{1n}y_n \\
x_2=c_{21}y_1+c_{22}y_2+\cdots+c_{2n}y_n \\
\vdots \\
x_n=c_{n1}y_1+c_{n2}y_2+\cdots+c_{nn}y_n
\end{cases}
$$

称为由 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的线性替换.

2. 它的矩阵表示为 $X=CY$.

$$
X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}.
$$

特别当 $|C|\neq 0$, 称 $X=CY$ 为非退化的线性替换.

三. 矩阵的合同.

1. A, B是两个同阶方阵. 若∃可逆阵C. 使 $B=C^TAC$. 则称A与B合同.

2. 合同具有①自反性 ②. 对称性. ③传递性.

3. Th. 一个二次型 X^TAX $(A^T=A)$ 经非退化的线性替换 $X=CY$ 化成新的二次型 Y^TBY. 其中 $B=C^TAC$.

$$X^TAX \xrightarrow[\substack{X=CY \\ |C|\neq 0}]{A^T=A} Y^TBY. \qquad B=C^TAC.$$

§5.2. 标准形.

一. 二次型的标准形.

只有平方项没有交叉项的二次型称为二次型的标准形.

标准形为 $d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$.

标准形的矩阵 $\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$.

二. 化二次型为标准形.

化二次型为标准形 $\begin{cases} \text{配方法.} \quad \checkmark \\ \text{正交变换法. 后面讲.} \\ \text{成套初等变换法.} \checkmark \end{cases}$

Th1. 任何一个二次型经非退化的线性替换均能化为标准形. ∎ ③

例1. 用配方法将二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$ 化为标准形.

并写出所做的非退化的线性替换.

解. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+\underline{2x_1x_2+2x_1x_3}+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$

$=\underline{x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2}-x_2^2-2x_2x_3-x_3^2+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$

$=(x_1+x_2+x_3)^2+\boxed{x_2^2+2x_2x_3}$

令 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=y_1\\ x_2=y_2\\ x_3=y_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=y_1-y_2-y_3\\ x_2=y_2\\ x_3=y_3\end{cases}$ 即 $X=C_1Y$ $C_1=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+\underline{y_2^2+2y_2y_3}$

$=y_1^2+\underline{y_2^2+2y_2y_3+y_3^2}-y_3^2$

$=y_1^2+(y_2+y_3)^2-y_3^2$

令 $\begin{cases}y_1=z_1\\ y_2+y_3=z_2\\ y_3=z_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_1=z_1\\ y_2=z_2-z_3\\ y_3=z_3\end{cases}$ 即 $Y=C_2Z$. $C_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$

$f(x_1,x_2,x_3)=z_1^2+z_2^2-z_3^2$

令 $X = C_1 Y$. $\quad Y = C_2 Z$

$X = (C_1 C_2) Z = CZ$.

$$C = C_1 C_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

所做的非退化的线性替换为 $\begin{cases} x_1 = z_1 - z_2 \\ x_2 = z_2 - z_3 \\ x_3 = z_3 \end{cases}$.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \underline{x_1^2} + \underline{2x_1x_2 + 2x_1x_3} + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= \underline{x_1^2 + 2x_1(x_2+x_3) + (x_2+x_3)^2} - x_2^2 - 2x_2x_3 - x_3^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + \underline{x_2^2 + 2x_2x_3}$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2$$

$$= y_1^2 + y_2^2 - y_3^2.$$

其中 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = y_1 \\ x_2 + x_3 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_2 - y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$ 为所做的非退化的线性替换.

$X = CY$. $\quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

二次型的标准形不唯一.

与所做的线性替换有关.

$$= z_1^2 + 4z_2^2 - 9z_3^2. \quad \begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = 2z_2 \\ y_3 = 3z_3 \end{cases}$$

$$= w_1^2 + 10w_2^2 - 16w_3^2.$$

例2. 化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$ 为标准形.

令 $\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}$ $X=C_1Y$ $C_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x_1=y_1-y_2 \\ x_2=y_1+y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=y_1 \\ x_2=y_1+y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}$

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(y_1^2-y_2^2)+2(y_1+y_2)y_3-6(y_1-y_2)y_3$$

$$=2y_1^2-2y_2^2+2y_1y_3+2y_2y_3-6y_1y_3+6y_2y_3$$

$$=2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_3+8y_2y_3$$

$$=2(y_1^2-2y_1y_3+y_3^2)-2y_3^2-2y_2^2+8y_2y_3$$

$$=2(y_1-y_3)^2-2(y_2^2-4y_2y_3+4y_3^2)+8y_3^2-2y_3^2$$

$$=2(y_1-y_3)^2-2(y_2-2y_3)^2+6y_3^2$$

$$=2z_1^2-2z_2^2+6z_3^2.$$

其中 $\begin{cases} y_1-y_3=z_1 \\ y_2-2y_3=z_2 \\ y_3=z_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1=z_1+z_3 \\ y_2=z_2+2z_3 \\ y_3=z_3 \end{cases}$ $Y=C_2Z=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}Z.$

又 $X=C_1Y$ $Y=C_2Z$

$\therefore$ $X=(C_1C_2)Z=CZ.$

$$C=C_1C_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所做非退化线性替换为 $\begin{cases} x_1=z_1+z_2+3z_3 \\ x_2=z_1-z_2-z_3 \\ x_3=z_3 \end{cases}.$

Th 2. 任何一个对称阵 A 均与一个对角阵合同.

即 $\exists$ 可逆阵 C, 使 $A=C^T\Lambda C$.

例3. 用配方法化二次型为标准形. 并写出所用的非退化线性替换的矩阵. 写出 标准形的矩阵.

$$f(x_1,x_2,x_3)=\underline{x_1}^2+2x_2^2+5x_3^2+\underline{2x_1x_2+2x_1x_3}+6x_2x_3$$

$$=x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-x_2^2-2x_2x_3-x_3^2+2x_2^2+5x_3^2+6x_2x_3$$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+4x_3^2+4x_2x_3$$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+2x_3)^2$$

$$=y_1^2+y_2^2+0\cdot y_3^2$$

其中 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=y_1 \\ x_2+2x_3=y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=y_1-y_2+y_3 \\ x_2=y_2-2y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}$

$X=CY$. $\quad C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$C^TAC=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$