1. 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$ ①

(2018)

其中 a 是参数. (1). 求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解.

(2). 求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形.

解: (1) 据题意.
$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ x_2+x_3=0 \\ x_1+ax_3=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$$

①. $a\neq 2$ 只有零解. 即 $x_1=x_2=x_3=0$.

②. $a=2$ 时, 有无穷多解. $\begin{cases} x_1=-2x_3 \\ x_2=-x_3 \end{cases}$. 全部解为 $k\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. k 为任意常数.

(2) ① 由(1)当 $a\neq 2$ 时. $f(x_1,x_2,x_3)$ 正定.

$\therefore f$ 的规范形为 $y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

② 当 $a=2$ 时.

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+2x_3)^2$$
$$=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3+x_2^2+2x_2x_3+x_3^2+x_1^2+4x_3^2+4x_1x_3$$
$$=2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3$$
$$=2\left[x_1^2-x_1x_2+3x_1x_3\right]+2x_2^2+6x_3^2$$
$$=2\left[x_1^2-2x_1\left(\tfrac{1}{2}x_2-\tfrac{3}{2}x_3\right)+\left(\tfrac{1}{2}x_2-\tfrac{3}{2}x_3\right)^2\right]-\tfrac{1}{2}x_2^2-\tfrac{9}{2}x_3^2+3x_2x_3+2x_2^2+6x_3^2$$

$$= 2\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{2}x_2^2 + 3x_2x_3 + \frac{3}{2}x_3^2$$

$$= 2\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{2}\left(x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2\right)$$

$$= 2\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{2}\left(x_2 + x_3\right)^2$$

$$= 2y_1^2 + \frac{3}{2}y_2^2$$

$$= z_1^2 + z_2^2.$$

$\therefore$ 规范形为 $z_1^2 + z_2^2$.

方法二. 当 $a=2$ 时.

f 的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\therefore r(A) = 2$. $\because$ f 半正定.

$\therefore$ f 的规范形为 $\underline{y_1^2 + y_2^2}$.

2.(2018). 已知 a 是常数, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为

矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1). 求 a

(2). 求满足 $AP = B$ 的可逆阵 P.

解: (1) $\because A \xrightarrow[\text{列}]{} \cdots \to B$ $\quad r(A) = r(B)$.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&a\\1&3&0\\3&9&0\end{pmatrix}\qquad r(A)=2$$

$$\Rightarrow\ 0=|B|=\begin{vmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&0&0\end{vmatrix}=-(a-2)\Rightarrow a=2$$

(2). 求满足 $AP=B$ 的可逆阵 P. (解矩阵方程). $AX=$

$$\underbrace{A_{3\times3}P_{3\times3}}=B_{3\times3}.\qquad \underbrace{A_{3\times3}P_{3\times3}}=B_{3\times3}$$

$AX=B\overset{A可逆}{\Longrightarrow}X=A^{-1}B$

$(A,B)\to(E,X)$

$$A(P_1,P_2,P_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3).$$

$$(AP_1,AP_2,AP_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3).$$

$$\Rightarrow\ AP_1=\beta_1.\quad AP_2=\beta_2.\quad AP_3=\beta_3.$$

$$(A,B)=\begin{pmatrix}1&2&2&1&2&2\\1&3&0&0&1&1\\2&7&-2&-1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&2&1&2&2\\0&1&-2&-1&-1&-1\\0&3&-6&-3&-3&-3\end{pmatrix}\ \boxed{\times(-3)}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&6&3&4&4\\0&1&-2&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

记 $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$.

$AX=\beta_1$ 与 $\begin{cases}x_1=3-6x_3\\x_2=-1+2x_3\end{cases}$ 同解.

$\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$ 为特解.

其导出组与 $\begin{cases}x_1=-6x_3\\x_2=2x_3\end{cases}$ 同解

令 $x_3=1$. $\begin{pmatrix}-6\\2\\1\end{pmatrix}$.

$c_1\begin{pmatrix}-6\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$.

则 $AX=\beta_1$ 的全部解为 $\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-6\\2\\1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}3-6c_1\\-1+2c_1\\c_1\end{pmatrix}$$

$AX=\beta_2$ 的全部解为 $\begin{pmatrix}4-6c_2\\-1+2c_2\\c_2\end{pmatrix}$.

$c_1.c_2.c_3$ 为任意常数.

$AX=\beta_3$ 的全部解 $\begin{pmatrix}4-6c_3\\-1+2c_3\\c_3\end{pmatrix}$.

④

$$\therefore |X| = \begin{vmatrix} 3-6c_1 & 4-6c_2 & 4-6c_3 \\ -1+2c_1 & -1+2c_2 & -1+2c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

$-(-c_3+c_2)=c_3-c_2$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = c_3-c_2$$

$\therefore$ 当 $c_2 \neq c_3$ 时. $|X| \neq 0$ X 可逆.

$$\therefore P = \begin{pmatrix} 3-6c_1 & 4-6c_2 & 4-6c_3 \\ -1+2c_1 & -1+2c_2 & -1+2c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}. \text{ 其中 } c_2 \neq c_3.$$

3. 2014. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\underset{m\times n}{A} X_{n\times t} = B_{m\times t}$

(I). 求 $AX=0$ 的一个基础解系.

(II). 求满足 $AB=E$ 的所有矩阵 B. $A_{3\times 4} B_{4\times 3} = E_{3\times 3}$

$AX=\varepsilon_1$. $AX=\varepsilon_2$ $AX=\varepsilon_3$

$$(A,E) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (k_1\alpha, k_2\alpha, k_3\alpha).$$

$\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ k_1, k_2, k_3 为任意常数.

5. (2014). 证明: n阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}$ 相似

解: $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&\cdots&-1\\-1&\lambda-1&\cdots&-1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-1&-1&\cdots&\lambda-1\end{vmatrix}_n=(\lambda-n)\begin{vmatrix}1&-1&\cdots&-1\\1&\lambda-1&\cdots&-1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&-1&\cdots&\lambda-1\end{vmatrix}_n$

$=(\lambda-n)\begin{vmatrix}1&-1&-1&\cdots&-1\\0&\lambda&0&\cdots&0\\0&0&\lambda&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&\lambda\end{vmatrix}_n=(\lambda-n)\lambda^{n-1}$.

$\therefore$ A的特征值为 $\lambda_1=n$ $\lambda_2=0$ ($n-1$重).

又A为实对称阵. $\therefore$ A与对角阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}n&&\\&0&\\&&\ddots\\&&&0\end{pmatrix}$ 相似.

$|\mu E-B|=\begin{vmatrix}\mu&&&-1\\&\mu&\cdots&-2\\&&\ddots&\\&&\mu&-(n-1)\\&&&\mu-n\end{vmatrix}=\mu^{n-1}(\mu-n)$

$\therefore$ B的特征值为 $\mu_1=n$ $\underline{\mu_2=0}$ ($n-1$重).

又 $r(\mu_2E-B)=r(B)=1=n-(n-1)$

$\therefore$ B也相似于对角阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}n&&\\&0&\\&&\ddots\\&&&0\end{pmatrix}$.

$\therefore$ A与B相似 ∎

5.（2015）. 设 $A=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{pmatrix}$ 相似.

（Ⅰ）. 求 a. b.

（Ⅱ）. 求可逆阵 P. 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

解：（Ⅰ）由于 A 与 B 相似. $\therefore trA=trB$. $|A|=|B|$.

$\Rightarrow \quad 3+a=b+2$. ——①.

$|A|=\begin{vmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&2&-3\\0&1&a-3\\1&-2&a\end{vmatrix}=2a-3 \qquad |B|=b.$

$\Rightarrow \quad 2a-3=b$ ——②

由①.②得 $\quad a=4 \quad b=5.$

（Ⅱ）. $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&0\\0&\lambda-5&0\\0&-3&\lambda-1\end{vmatrix}$

$=(\lambda-1)^2(\lambda-5)$. $\quad\therefore$ A 的特征值为 $\lambda_1=1$(二重) $\lambda_2=5$.

6. 设 $\alpha=(1,0,-1)^T$. 矩阵 $A=\alpha\alpha^T$. n为正整数. 则

$|aE-A^n|=$ _____. 其中 a 为常数.

解：

方法一.

$A=\alpha\cdot\alpha^T=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}(1\ 0\ -1)=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$. $\qquad \alpha^T\alpha=(1\ 0\ -1)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=2$

$A^n=\alpha\cdot\underbrace{(\alpha^T\cdot\alpha)(\alpha^T)\cdots\alpha}_{n对}\alpha^T=2^{n-1}A=\begin{pmatrix}2^{n-1}&0&-2^{n-1}\\0&0&0\\-2^{n-1}&0&2^{n-1}\end{pmatrix}$

$|aE-A^n|=\begin{vmatrix}a-2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&a&0\\2^{n-1}&0&a-2^{n-1}\end{vmatrix}\cancel{=a(a-2^{n-1})^2}=a[(a-2^{n-1})^2-(2^{n-1})^2]$

$$=a^2[a-2^n]$$

方法二. 由 $A^2=\alpha(\alpha^T\cdot\alpha)\alpha^T=2A$. $\lambda^2-2\lambda=0 \Rightarrow \lambda(\lambda-2)=0$

知 A 的特征值为 0 或 2.

又 $r(A)=1$, $\therefore$ A 的特征值为 2, 0, 0.

$\Rightarrow A^n$ 的特征值为 2^n, 0, 0.

$\Rightarrow aE-A^n$ 的特征值为 $a-2^n$, a, a.

$\therefore |aE-A^n|=a^2(a-2^n)$.

例. 已知 A 是 n 阶矩阵. 且 $(A+E)^3=0$. 证明: A 可逆.

法一. $(A+E)^3=0$

$\Rightarrow A^3+3A^2+3A+E=0 \Rightarrow A(A^2+3A+3E)=-E$.

$\therefore$ A 可逆. 且 $A^{-1}=-A^2-3A-3E$.

法二. 设 λ 为 A 的特征值.

由 $(A+E)^3=0 \Rightarrow (\lambda+1)^3=0 \Rightarrow \lambda=-1$.

A 的所有特征值均为 -1. $\therefore$ A 可逆.

A_n 是~~非~~奇异阵 $\Leftrightarrow$ A 至少有一个特征值为 0.

A ~~非~~奇异 $\Leftrightarrow |A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=0 \Leftrightarrow$ 至少有一个 $\lambda_i=0$.