§5. 矩阵的分块.（不是重点）.（不难）

1、概念. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 2 & 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}_{3\times 4}=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}_{3\times 1}$ $A_1=(1\ 2\ 3\ 4)$

$$A=\left(\begin{array}{cc|c|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right)_{6\times 6}=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 0 & A_5 & 0 \\ 0 & 0 & A_9 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

$$A=\left(\begin{array}{cc|c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 8 \end{array}\right)_{6\times 6}=\begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

准对角阵.

E. A_1. A_2 均为方阵.

2. 分块矩阵的加法（减法）. 数乘. 乘法

把子块当元素进行运算.（不包括逆）.

1 $A=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} E & A_1 \\ 0 & -E \end{pmatrix}$, $B=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 6 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_2 & E \end{pmatrix}$

用分块矩阵计算 kA. $A+B$ 及 AB.

$$kA=\begin{pmatrix} kE & kA_1 \\ 0 & -kE \end{pmatrix} \qquad A+B=\begin{pmatrix} E+B_1 & A_1+0 \\ 0+B_2 & -E+E \end{pmatrix}.$$

$$AB=\begin{pmatrix} E & A_1 \\ 0 & -E \end{pmatrix}_{2\times2}\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_2 & E \end{pmatrix}_{2\times2}=\begin{pmatrix} B_1+A_1B_2 & A_1 \\ -B_2 & -E \end{pmatrix}.$$

3. 例. 求分块矩阵 $D=\begin{pmatrix} A_{r\times r} & C \\ 0 & B_{k\times k} \end{pmatrix}$. 的逆矩阵.

其中 $A_{r\times r}$ 可逆阵. $B_{k\times k}$ 可逆. $C_{r\times k}$. $O_{k\times r}$

解: 设 D 可逆. 且 $D^{-1}=\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$.

$$DD^{-1}=\begin{pmatrix} A_{r\times r} & C_{r\times k} \\ O_{k\times r} & B_{k\times k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_{r\times r} & Y_{r\times k} \\ Z_{k\times r} & W_{k\times k} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{A_{r\times r}X_{r\times r}}\ +\ \underbrace{C_{r\times k}Z_{k\times r}}$$

$$=\begin{pmatrix} AX+CZ & AY+CW \\ BZ & BW \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_{r\times r} & 0 \\ 0 & E_{k\times k} \end{pmatrix}$$

$AY=-CB^{-1}$

$$\Rightarrow\begin{cases} AX+\underline{CZ}=E \\ \underline{AY+CW=0} \\ BZ=0 \\ BW=E \end{cases} \xrightarrow{A,B\text{可逆}} \begin{cases} X=A^{-1} \\ Y=-A^{-1}CB^{-1} \\ Z=0 \\ W=B^{-1} \end{cases} \therefore D^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$$

特例①. $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$. A.B可逆时.

② $\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$

其中 A_i 均为可逆矩阵.

4 分块矩阵的转置.

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}_{s\times t} \text{ 则 } A^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{s2}^T \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1t}^T & A_{2t}^T & \cdots & A_{st}^T \end{pmatrix}_{t\times s}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}.$$

$\cancel{A^T = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}}$ $A^T \neq (A_1\ A_2) = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8)$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = (A_1^T, A_2^T).$$

[~~习题~~ ②3.4 已讲.

§6. 初等矩阵.

一. 初等变换.

对一个矩阵施行以下三种变换之一.

(1). 交换矩阵的某两行(列).

(2). 以一个非零数 k 乘矩阵的某一行(列)

(3). 将矩阵某一行(列)的 k 倍加于另一行(列).

称为矩阵的初等变换.

二. 初等矩阵的概念.

定义. 对单位阵施行一次初等变换得到的矩阵称为初等阵.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I. E.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

把 E 的第3行的2倍加于第1行

把 E 的第1列的2倍加于第3列.

$$\begin{array}{l} p(i,j)= \\ \quad \| \\ E(i,j) \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & & \ddots \; 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \cdots i \\ \\ \cdots j \\ \\ \end{array} \\ \qquad \vdots_i \qquad \vdots_j \end{array}$$

$$P(i(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \cdots i \qquad k \neq 0.$$

$\parallel$

$E(i(k))$

$$P(i, j(k)) = \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdots i \\ \\ \cdots j \end{array} \\ \quad\quad i \qquad\quad j \end{array}$$

$\parallel$

$E(i, j(k))$

把E的第j行的k倍加到第i行.

把E的第i列的k倍加于第j列.

三. 初等阵的性质.

引理. 对一个 $s\times n$ 矩阵A作一初等行变换就相当于在A的左边乘上相应的 $s\times s$ 初等矩阵. 对A作一初等列变换就相当于在A的右边乘上相应的 $n\times n$ 初等矩阵.

$$P_{s\times s}A_{s\times n} \qquad\qquad A_{s\times n}Q_{n\times n}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = B$$

$$\parallel$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix} = C.$$

$$\parallel$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad 行.$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\xrightarrow[c_1+c_2]{}\begin{pmatrix}1&3&3\\4&9&6\end{pmatrix}_{2\times3}=C.$$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}_{2\times3}}\underline{\underline{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}_{3\times3}}}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&18&21\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}.$$

6.