

## 高等数学A1 2004年

### 1. 单项选择题(每小题2分, 共10分)

- (1)  $f(x)$ 在 $a$ 点连续, 且 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^m} = c > 0$ , 其中 $m$ 是偶数, 则 ( B )
- A.  $a$ 是 $f(x)$ 的极大值点;                      B.  $a$ 是 $f(x)$ 的极小值点;  
C.  $a$ 不是 $f(x)$ 的极值点;                      D. 不能判断 $a$ 是否 $f(x)$ 的极值点.
- (2)  $f(x), g(x)$ 均为恒不为零的可微函数, 且 $f'(x)g(x) - g'(x)f(x) > 0$ , 则当 $x > a$ 时, 成立( A )
- A.  $f(x)g(a) > f(a)g(x)$ ;                      B.  $f(x)g(x) > f(a)g(a)$ ;  
C.  $f(a)g(x) > f(x)g(a)$ ;                      D.  $f(a)g(a) > f(x)g(x)$ .
- (3) 函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^{2n}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续且 ( )
- A. 处处可导;                                      B. 仅有一个不可导点;  
C. 仅有两个不可导点;                          D. 至少有三个不可导点.
- (4)  $\int_{-1}^1 \frac{1+x \sin^2 x}{1+x^2} dx =$  ( B )
- A.  $\frac{\pi}{4}$ ;              B.  $\frac{\pi}{2}$ ;              C.  $\pi$ ;              D. 0.
- (5) 下列反常积分收敛的是 ( D )
- A.  $\int_3^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$               B.  $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}$               C.  $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$               D.  $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

### 2. (每小题2分, 共10分)填空题

- (1) 若 $f(x) = \begin{cases} \ln(1+ax^b), & x \geq 0 \\ \frac{e^{x^2}-1}{\sin 2x}, & x < 0 \end{cases}$  在 $x=0$ 可导, 则 $a =$ \_\_\_\_\_
- (2) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y = \int_0^{2x+y} \sin t^2 dt - \int_0^{x^2} e^{-\sqrt{t}} dx$  (其中 $x > 0$ ) 所确定, 则其导数 $\frac{dy}{dx} =$ \_\_\_\_\_
- (3)  $\int_0^2 x^4 \sqrt{4-x^2} dx =$ \_\_\_\_\_
- (4) 当 $x \rightarrow 0$ 时,  $\int_0^{x^3} \sin \sqrt[3]{t} dt$ 是 $\beta x^\alpha$ 的等价无穷小, 则 $\alpha =$ \_\_\_\_\_
- (5) 设 $f(x)$ 为连续函数,  $F(x) = \int_0^{2x} f(x+t) dt$ , 则 $F'(x) =$ \_\_\_\_\_

### 3. (10分) 求极限(每小题5分, 共10分)

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\cos x}^1 e^{t^2} dt}{x^2}$ ;              (2)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x$ .

### 4. (10分) 求导数或微分(每小题5分, 共10分)

- (1) 设函数 $y = f(x)$ 由 $\begin{cases} x = 2t + 3t^2 \\ y = t^2 + 2t^3 \end{cases}$  所确定, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ;
- (2) 设 $y = \arctan \frac{1+x}{1-x}$ , 求 $dy$ .

### 5. 计算下列积分(每小题5分, 共10分)

(1)  $\int x(e^x + \ln x) dx$ ;              (2)  $\int_0^\pi \frac{dx}{2+\cos x}$

6. (10分) 解下列方程(每小题5分, 共10分)

(1)  $(xy - x^2)y' = y^2$ ; (2) 设  $f(x) = \ln x - 2x^2 \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx$ , 求  $f(x)$ .

7. 微分学应用题(每小题5分, 共10分)

(a) 确定常数  $a, b, c$ , 使三次曲线  $y = ax^3 + bx^2 + cx$  有拐点  $(1, 2)$ , 且在该拐点处的切线斜率为  $-1$ .

(b) 欲制造一个容积为  $2\pi m^3$  的圆柱形带盖的封闭储油桶, 试问它的半径  $r$  和高  $h$  各为多少时才能用料最省? 说明理由.

8. 积分学应用题(每小题5分, 共10分)

(a) 求心脏线  $r = a(1 + \cos \theta)$  ( $a > 0$ ) 上对应  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  的弧线段的长度.

(b)  $D$  是由抛物线  $y = 2x(2 - x)$  与  $x$  轴所围成的区域, 直线  $y = kx$  将区域  $D$  分为面积相等的两部分, 求  $k$  的值.