第七章 线性空间

§2. 线性空间的定义与简单性质.

一.定义.

定义. 设V是一个非空集合. P是一个数域, 在V中定义了一种叫做加法的运算. 也就是说. 对 $\alpha\in V$. $\beta\in V$, 有V中唯一确定的元素 γ 与之对应. 称为 α 与 β 的和. 记为 $\gamma=\alpha\oplus\beta$.

在数域P与集合V的元素之间定义了一个叫做数量乘积的运算. 也即 对 $\forall k\in P$ 及 $\alpha\in V$. 在V中有唯一确定的一个元素 δ 与之对应. 称为k与 α 的数量乘积. 记为 $\delta=k\circ\alpha$.

若加法与数量乘法满足以下8条规则, 则称V为数域P上的线性空间.

1°. $\alpha\oplus\beta=\beta\oplus\alpha$

2°. $(\alpha\oplus\beta)\oplus\gamma=\alpha\oplus(\beta\oplus\gamma)$

3°. 对 $\forall\alpha\in V$. 有 $0\oplus\alpha=\alpha$ (存在零元素)

4°. 对 $\forall\alpha\in V$, 有 $\alpha\oplus\beta=0$ (存在负元素).

5°. $1\circ\alpha=\alpha$

6°. $k\circ(l\circ\alpha)=(k\cdot l)\circ\alpha$

7°. $(k+l)\circ\alpha=k\circ\alpha\oplus l\circ\alpha$

8°. $k\circ(\alpha\oplus\beta)=k\circ\alpha\oplus k\circ\beta$.

k. l 是数域P中的数.

α. β. γ 是V中的元素.

$3\oplus 5=3\times 5$. $3\oplus 5=3^5$. $3\oplus 5=\sqrt[3]{5}$. $3\oplus 5=\frac{3}{5}$.

例1. ~~数域P~~ 实数域R上的 $m\times n$ 矩阵，按矩阵的加法和矩阵的数乘运算，构成数域P上的线性空间，记为 $P^{m\times n}$，$\underline{R}^{m\times n}$.

V: "R中 $m\times n$ 矩阵". $P=R=$ 实数域. $A\oplus B=A+B$

1°. $A\oplus B=B\oplus A$. $A+B=B+A$.

2°. $(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$ $(A+B)+C=A+(B+C)$

3°. $A+O=A$ （O 是零元素）.

4°. $A+(-A)=O$ （$-A$ 是 A 的负元素）.

$k\circ A=kA$.

5°. $(k+l)A=kA+lA$

6°. $k(A+B)=kA+kB$

7°. $(kl)A=k(lA)$.

8°. $1\circ A=A$.

P181. 习题 3.(8). 下列集合对于所指的线性运算是否构成<u>实数域</u>上的线性空间.

8). 全体正实数 R^+. 加法与数乘运算定义为

$$a\oplus b=ab \qquad k\circ a=a^k.$$

$R=$ 实数域. $V=R^+=\{$全体正实数$\}$.

显然 $\forall a\in R^+=V$ $b\in R^+=V$ $a\oplus b=ab\in R^+=V$.

$\forall a\in R^+=V$. $k\in R$. $k\circ a=a^k\in R^+=V$.

也即 V 对这里的两种运算之封闭性.

下面验证这两种运算满足 8 条运算律.

① $a\oplus b = ab = ba = b\oplus a$.

② $(a\oplus b)\oplus c = (ab)\oplus c = abc = a(bc) = a(b\oplus c) = a\oplus(b\oplus c)$

③ $a\oplus 1 = a$. (1 是零元素).

④ $a\oplus \frac{1}{a} = 1$ ($\frac{1}{a}$ 是 a 的负元素).

⑤ $1\circ a = a^1 = a$

⑥ $\cancel{(k+l)\circ a}$ $(k+l)\circ a = a^{k+l} = a^k \cdot a^l = a^k \oplus a^l = k\circ a\oplus l\circ a$

⑦ $k\circ(a\oplus b) = k\circ(ab) = (ab)^k = a^k \cdot b^k$
$= a^k \oplus b^k = (k\circ a)\oplus(k\circ b)$.

⑧ $k\circ(l\circ a) = k\circ(a^l) = (a^l)^k = a^{lk} = a^{kl} = (kl)\circ a$.

$\alpha\oplus 0 = \alpha$
$\alpha+\beta = 0$.
β 叫 α 的负元素
$a\oplus\frac{1}{b} = \frac{a}{b}$.
$a\oplus b = ab$
$k\circ a = a^k$.

∴ $V=R^+$ 构成实数域 R 上的一个线性空间.

证明 V 是数域 P 上的线性空间,

需证 11 条.
1°. $V\neq\Phi$.
2°. 3°. } 对两种运算封闭.
4° 8 条运算律.

V：次数等于n ($n\geq1$) 的实系数多项式的全体，对于多项式的加法和数量乘法.

R：实数域.

V不构成R上的线性空间.

对加法不封闭.　　$x+(-x)=0$.

$x^2+2x+(-x^2)=2x$.

作业 P181. 习3.

5).

例2. 全体实正数，按照正数的加法与数与正数的数量乘法，构成实数域R上的线性空间.

例3. 数域R按自身的加法与乘法构成自身上的一个线性空间.

例4. 实数域上的全体n维向量构成一个线性空间，记为R^n.　$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\\vdots\\n\end{pmatrix}$.

二、线性空间中的元素也称为向量.

线性空间有时也称为向量空间.

三、线性空间的一些简单性质.

1. 零元素是唯一的（零元素记为0）.

证明：设 0_1，0_2 是线性空间V中的两个零元素.（要证 $0_1=0_2$）.

$$0_1 = 0_1\oplus\underbrace{0_2}_{\text{零元素}} = 0_2\oplus\underbrace{0_1}_{\text{零元素}} = 0_2 \ \blacksquare$$

2. 负元素也是唯一的.

证明: 假设 β, γ 均为 α 的负元素 (要证 $\beta=\gamma$).

即 $\alpha\oplus\beta=0$ $\alpha\oplus\gamma=0$.

$$\beta=\beta\oplus 0=\beta\oplus(\alpha\oplus\gamma)=(\beta\oplus\alpha)\oplus\gamma=0\oplus\gamma=\gamma \blacksquare$$

记 α 的负元素为 $-\alpha$.

利用负元素, 可以定义线性空间中的减法运算

$$\alpha\ominus\beta=\alpha\oplus(-\beta).$$

3. $\underset{\text{数}}{0}\circ\underset{\text{向量}}{\alpha}=\underset{\text{向量}}{0}$. $\underset{\text{数}}{k}\circ\underset{\text{向量}}{0}=\underset{\text{向量}}{0}$. $(-1)\circ\alpha=-\alpha$

先证 $\underset{\text{数}}{0}\circ\alpha=\underset{\text{向量}}{0}$

$$\alpha=1\circ\alpha=(1+\overset{\text{数}}{0})\circ\alpha=1\circ\alpha\oplus 0\circ\alpha=\alpha\oplus 0\circ\alpha$$

两边再加上 $-\alpha$. 即 $\underset{\text{向量}}{0}=\underset{\text{数}}{0}\circ\alpha$ $\blacksquare$

下面证 $(-1)\circ\alpha=-\alpha$.

$$\alpha\oplus(-1)\circ\alpha=1\circ\alpha+(-1)\circ\alpha=(1+(-1))\circ\alpha=0\circ\alpha=0.$$

两边再加 $(-\alpha)$. $\Longrightarrow$ $(-1)\circ\alpha=-\alpha$.

4. 如果 $k\circ\alpha=0$, 那么 $\overset{\text{数}}{k=0}$ 要么 $\overset{\text{向量}}{\alpha=0}$.

假设 $k\neq 0$, 一方面有 $\frac{1}{k}\circ(k\circ\alpha)=\frac{1}{k}\circ 0=0$

另一方面又有 $\frac{1}{k}\circ(k\circ\alpha)=(\frac{1}{k}\cdot k)\circ\alpha=\alpha$

$\Rightarrow \alpha=0$. $\blacksquare$