16. 设 $f(x_1,\cdots,x_n)=X^TAX$ $(A^T=A)$ 是一个实二次型. 已知有n维 ①

实向量 X_1, X_2, 使 $X_1^TAX_1>0$. $X_2^TAX_2<0$.

则必定存在 n 维向量 $X_0\neq0$. 使得 $X_0^TAX_0=0$.

证明: 实二次型 X^TAX 经非退化线性替换 $X=CY$, 化为规范形

$$f(x_1,\dots,x_n)=X^TAX=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2.$$

由题设, $\exists X_1$, X_2, 使得 $X_1^TAX_1>0$. $X_2^TAX_2<0$.

知. f 的正惯性指数 $p>0$. 负惯性指数 $q=r-p>0$.

取 $y_1=1$. $y_{p+1}=1$. 其余均为0.

即 $Y_0=(1,0\cdots0,\underset{p+1}{1},0,0\cdots0)$

$X_0=CY_0\neq0$ 使得 $X_0^TAX_0=1-1=0$ ∎

没交过.没判过全交.
~~各组前30号.请判过~~

下周一. 交 7-17题. 不要发附件.

一. 内积及其性质. $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$ $\beta=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$

1. $(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\alpha^T\beta=\alpha\cdot\beta$

2. 性质.
$(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$
$(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$
$(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$.
$(\alpha,\alpha)\geq0$ 且 $(\alpha,\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha=0$.

二. 向量的长度 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$.

1. $\|\alpha\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$

2. $\|\alpha\|\geq 0$ 且 $\|\alpha\|=0 \Longleftrightarrow \alpha=0$.

3. $\|\lambda\alpha\|=|\lambda|\|\alpha\|$

4. $\|\alpha+\beta\|\leq\|\alpha\|+\|\beta\|$.

5. $|(\alpha,\beta)|\leq\|\alpha\|\cdot\|\beta\|$. 特别 $\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right|\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$

6. $\frac{\alpha}{\|\alpha\|}$ 是单位向量. $\alpha\neq 0$ 将非零向量单位化.

三. 非零向量 α 与 β 间的夹角.

当 $\|\alpha\|\neq 0$. $\|\beta\|\neq 0$ $\cos\theta=\frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\|\beta\|}$. $0\leq\theta\leq\pi$.

$\Longrightarrow$ $(\alpha,\beta)=\|\alpha\|\cdot\|\beta\|\cos\theta$.

四. 正交向量组.

1. 定义. 若 $(\alpha,\beta)=0$. 则称向量 α 与 β 正交. 记为 $\alpha\perp\beta$.

注: 零向量与任何向量均正交.

2. 正交向量组.

定义. 若 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是一个非零向量组. 且 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 中向量两两正交, 则称向量组为一个正交向量组.

例 R^n 中单位向量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 两两正交.

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad \varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad \cdots,\quad \varepsilon_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}.$$

$(\varepsilon_i, \varepsilon_j)=0 \quad i\neq j.$ $\qquad (\varepsilon_i, \varepsilon_i)=1.\quad i=1,\cdots,n.$

3. Th. 正交向量组一定线性无关. "正交 $\Longrightarrow$ 无关".

Th. 若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 是一组正交向量组, 则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 一定线性无关.

证明: 设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0.$

$\Longrightarrow (\alpha_i, k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r)=0$

$\Longrightarrow k_1(\alpha_i, \alpha_1)+k_2(\alpha_i, \alpha_2)+\cdots+k_r(\alpha_i, \alpha_r)=0.$

$\because \alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 是正交向量组. $\therefore (\alpha_i, \alpha_j)=0 \quad j\neq i.$

$\Longrightarrow k_i(\alpha_i, \alpha_i)=0.$

而 $\alpha_i\neq 0.$ $\Longrightarrow k_i=0.$ $\quad i=1,\cdots,n.$

$\therefore \alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性无关 ∎

但 线性无关 $\not\Longrightarrow$ 正交.

例. 显然 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 线性无关.

但 $(\alpha, \beta)=1\neq 0$ $\quad\therefore \alpha$ 与 β 不正交.

五. 规范正交基及其求法（规范正交向量组及求法）.

1. 定义. 若 R^n 中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 两两正交. 且每个向量的长度均为1. 则称该向量组为规范正交向量组或者单位正交向量组（标准正交向量组）.

2. 施密特正交化法.

把一组无关的向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 化为一组规范正交向量组.

分两个步骤进行.

(1). 正交化.

令
$$\begin{cases}\beta_1=\alpha_1\\ \beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1\\ \beta_3=\alpha_3-\dfrac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\dfrac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2,\\ \vdots\\ \beta_r=\alpha_r-\dfrac{(\alpha_r,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\dfrac{(\alpha_r,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\dfrac{(\alpha_r,\beta_{r-1})}{(\beta_{r-1},\beta_{r-1})}\beta_{r-1}\end{cases}$$

则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 两两正交.

且 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 等价. 这个过程称为施密特正交化过程.

(2) 单位化. 令
$$\begin{cases}\gamma_1=\dfrac{\beta_1}{\|\beta_1\|}\\ \gamma_2=\dfrac{\beta_2}{\|\beta_2\|}\\ \vdots\\ \gamma_r=\dfrac{\beta_r}{\|\beta_r\|}\end{cases}$$
则 $\gamma_1,\cdots,\gamma_r$ 就是一个规范正交向量组.

例. 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$. $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$. $\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}$

将 α_1, α_2, α_3 化为规范正交向量组.

解: $\because |\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=\begin{vmatrix}1&-1&4\\2&3&-1\\-1&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&4\\2&5&-1\\-1&0&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}0&4\\5&-1\end{vmatrix}=20\neq0$.

$\therefore$ α_1, α_2, α_3 线性无关.

$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$. $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$ $\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}-\frac{4}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{3}\\\frac{5}{3}\\\frac{5}{3}\end{pmatrix}=\frac{5}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2.$$

$$=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}-\frac{2}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\cancel{\frac{5}{3}}\cdot\frac{5}{(\cancel{\frac{5}{3}})^2\cdot3}\cdot\cancel{\frac{5}{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

$\gamma_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$. $\gamma_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$. $\gamma_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

则 γ_1, γ_2, γ_3 为一个规范正交向量组.

六. 正交矩阵与正交变换.

1. 定义. 若A为n级实矩阵. 满足 $A^TA=E$,

则称A为正交矩阵. 简称正交阵.

2. 正交阵的性质.

$AB_n = E.$

$A^{-1} = B \quad B^{-1} = A.$

1°. 若 A 是正交阵, 则 $A^T = A^{-1}$.

A 是正交阵 $\Longleftrightarrow$ $A^TA = E$

于是有 $A^TA = AA^T = E$.

2°. 若 A 是正交阵, 则 A^{-1} (A^T) 也是正交阵.

3°. 两个正交阵的乘积还是正交阵. (可推广到有限个).

事实上, 设 A, B 为两个同阶正交阵.

即 $\underline{A^TA} = E$, $B^TB = E$.

$(AB)^T(AB) = B^T(A^TA)B = B^TB = E$. $\therefore$ AB 仍为正交阵.

4°. 正交阵的行列式等于 1 或 -1.

$\because$ $A^TA = E \Rightarrow |A|^2 = |A^T||A| = |A^TA| = |E| = 1 \Rightarrow |A| = 1$ or $|A| = -1$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $|A| = 1$ 但不是正交阵.

3. Th. 方阵 A 为正交阵 $\Longleftrightarrow$ A 的列向量组是规范正交向量组.

证明: $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, 其中 α_i 为 A 的第 i 列组成的列向量. $i=1,\cdots,n$

而 $A^TA = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix}_{n\times 1} (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)_{1\times n} = \begin{pmatrix} \underline{\alpha_1^T\alpha_1} & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ \alpha_2^T\alpha_1 & \underline{\alpha_2^T\alpha_2} & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \underline{\alpha_n^T\alpha_n} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & (\alpha_1, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_n) \\ (\alpha_2, \alpha_1) & (\alpha_2, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_2, \alpha_n) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ (\alpha_n, \alpha_1) & (\alpha_n, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_n, \alpha_n) \end{pmatrix}$

A为正交阵 $\Longleftrightarrow A^TA=E$

$\Longleftrightarrow \begin{cases}(\alpha_i,\alpha_i)=1 & i=1,\cdots n\\ (\alpha_i,\alpha_j)=0 & \forall i\neq j.\end{cases}$

$\Longleftrightarrow \alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是标准正交向量组

$\Longleftrightarrow$ A的列向量组是标准正交向量组 ∎

例. 判别下列矩阵是否为正交阵.

(1). $A=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}.$ 看A的前两列.

$1\times(-\frac{1}{2})+(-\frac{1}{2})\times1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\neq0.$

$\therefore$ A不是正交阵.

(2). $B=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9}\\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9}\\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9}\end{pmatrix}.\\ \beta_1 \quad\ \ \beta_2 \quad\ \ \beta_3\end{array}$

方法一

B中的列向量 $\beta_1.\beta_2.\beta_3$ 为标准正交向量组.

B是正交阵.

方法二. $B^TB=E$. $\therefore$ B为正交阵.