

年级：2016 专业：大类招生 课程：数学分析 I 试卷 (A)

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

本试题满分 100 分。

得分	
----	--

一、单项选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1、设 $x_n \leq z_n \leq y_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ 为 ()

(A) 存在且等于零 (B) 存在但不一定等于零 (C) 不一定存在 (D) 一定不存在

2、极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$ 等于 ()

(A) 0 (B) 1 (C) ∞ (D) 无极限

3、设函数 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, 则 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的 ()

(A) 连续点 (B) 可移不连续点 (C) 第二类不连续点 (D) 第一类不连续点

4、设 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - b}{x - a} = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin f(x) - \sin b}{x - a}$ 等于 ()

(A) A (B) $\sin b$ (C) $A \sin b$ (D) $A \cos b$

5、设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不恒为常数且连续可导, 如果 $f(0) = f(1)$, 则在 $(0, 1)$ 内 ()

(A) $f'(x)$ 恒为零 (B) $f'(x) > 0$ (C) $f'(x) < 0$

(D) 在 $(0, 1)$ 内存在两点 ξ_1 和 ξ_2 , 使得 $f'(\xi_1)$ 和 $f'(\xi_2)$ 异号

得分	
----	--

二、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sin n!) \left(\frac{n-1}{n^2+1} \right)^{10} =$ _____.

2. 设函数 $f(x)$ 连续且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos[xf(x)]}{(e^{x^2} - 1)f(x)} = 1$, 则 $f(0) =$ _____.

3. $y = \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处带有佩亚诺余项的泰勒展式为 _____.

4. 设曲线 $y = \log_a x$ 与直线 $y = x$ 相切, 则 $a =$ _____.

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{x}} =$ _____.

得分	
----	--

三、计算题 (每小题 5 分, 共 40 分)

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

2. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$.

3. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 0$, 求常数 a 和 b .

4. 若 $y(x)$ 是方程 $e^y = xy$ 所确定的函数, 求 $\frac{dy}{dx}$.

5. 设 $y = x^3 \sin x$, 求 $y^{(20)}$.

6、设 $x = a \cos t, y = a \sin t$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

7、求函数 $y = (1+2x)^{\frac{1}{x}} (x > 0)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$.

8、求数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$.

得分	
----	--

四、讨论作图题 (20 分)

讨论函数 $y = f(x) = \frac{x^2}{1+x}$ 的单调性、极值、凸性、拐点、渐近线等性质，并作出函数图

得分	
----	--

五、证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

1、证明不等式: $x > \sin x > \frac{2}{\pi}x$, 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

2、证明函数 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是一致连续的.