一. 内积.

二. 长度

三. 两个非零向量间的夹角.

四. 正交向量. 正交向量组.

1. $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow (\alpha, \beta)=0$.

零向量与任何一个向量都正交.

2. 若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 均为同维的非零向量. 且 $(\alpha_i, \alpha_j)=0$ $i\neq j$

则称向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 是一个正交向量组.

3. Th. 正交向量组一定线性无关.

4. 若正交向量组中每个向量的长度均为1. 称它为规范(单位)(标准)正交向量组.

五. 施密特正交化法.

设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性无关.

则 $\beta_1=\alpha_1$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1$$

$$\vdots$$

$$\beta_r=\alpha_r-\frac{(\alpha_r, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_r, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_r, \beta_{r-1})}{(\beta_{r-1}, \beta_{r-1})}\beta_{r-1}$$

就这一正交向量组.

再令 $\gamma_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}$, $\gamma_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}$, $\cdots$, $\gamma_r=\frac{\beta_r}{\|\beta_r\|}$

就这一个规范正交向量组.

六. 正交矩阵与正交变换.

1. 定义. 若n级方阵A满足 $A^TA=E$.

则称A为正交矩阵. 简称正交阵.

2. 正交阵的性质.

1°. 若A是正交阵, 则 $A^{-1}=A^T$.

2°. 若A是正交阵. 则 A^{-1}(或 A^T)也是正交阵.

3°. 两个正交阵的乘积仍为正交阵. (可推广到有限个).

4°. 正交阵的行列式等于1或-1.

例 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. $|A|=-1$. 但A不是正交阵.

3. Th. 方阵A为正交阵 $\Longleftrightarrow$ A的列向量组为规范正交向量组.

4. 定义. 若P为正交阵. 则线性替换 $X=PY$ 称为正交变换.

5. 正交变换的性质.

性质: 正交变换保持向量的内积及长度不变.

证明: 设 $Y=PX$ 为正交变换.

且 $\beta_1=P\alpha_1$, $\beta_2=P\alpha_2$.

$$(\beta_1,\beta_2)=(P\alpha_1,P\alpha_2)=(P\alpha_1)^T(P\alpha_2)=(\alpha_1^TP^TP\alpha_2)$$

$$=\alpha_1^T(P^TP)\alpha_2 \xlongequal{P\text{是正交阵}} \alpha_1^T\alpha_2=(\alpha_1,\alpha_2)$$

$$\|\beta_1\| = \sqrt{(\beta_1,\beta_1)} = \sqrt{\beta_1^T\beta_1} = \sqrt{(P\alpha_1)^T\cdot P\alpha_1}$$

$$= \sqrt{\alpha_1^T(P^TP)\alpha_1} = \sqrt{\alpha_1^T\alpha} = \|\alpha_1\|. \quad \blacksquare$$

§6.2. 矩阵的特征值与特征向量.

一. 特征值及特征向量.

1. 定义. 设A为n阶方阵. λ是一个数. 若存在非零列向量

X, 使得 $AX = \lambda X$.

则称λ为方阵A的特征值. 而非零列向量X称为A的对应于(属于)特征值λ的特征向量.

假设λ是A的特征值. X是A的属于λ的特征向量.

则 $\longrightarrow AX = \lambda X$ 成立.

齐次线性方程组 $(\lambda E - A)X = 0$ 有非零解.

代入 $|\lambda E - A| = 0$

解出λ,

2. 特征值. 特征向量的求法.

$\lambda E - A$ —— A的特征矩阵

$|\lambda E - A|$ —— A的特征多项式.

$|\lambda E - A| = 0$ —— A的特征方程.

例. 求 $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & -1\end{pmatrix}$ 的特征值及特征向量.

解: $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1\\ -5 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda-3-5=\lambda^2-2\lambda-8$

$=(\lambda+2)(\lambda-4)=0.$

$\therefore$ A的特征值为 $\lambda_1=-2$. $\lambda_2=4$.

将 $\lambda_1=-2$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda_1E-A)X=0$, 得

$\begin{cases}-5x_1-x_2=0\\ -5x_1-x_2=0\end{cases}$ 即 $x_2=-5x_1$

$\therefore$ $\lambda_1=-2$ 对应的一个无关特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\ -5\end{pmatrix}$

$\therefore$ $k_1\xi_1=k_1\begin{pmatrix}1\\ -5\end{pmatrix}$ $k\neq0$ 为 $\lambda_1=-2$ 的全部特征向量.

再将 $\lambda_2=4$. 代入齐次线性方程组 $(\lambda_2E-A)X=0$. 得.

得 $\begin{cases}x_1-x_2=0\\ -5x_1+5x_2=0\end{cases}\Rightarrow x_1=x_2.$

$\therefore$ $\lambda_2=4$ 的一个无关的特征向量为 $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$.

$\lambda_2=4$ 的全部特征向量为 $k_2\xi_2=k_2\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$. $k_2\neq0$.

3. ~~例~~ 求特征值. 特征向量的步骤.

①. 先求 $|\lambda E-A|$ 并计算.

求出 $|\lambda E-A|=0$ 的全部根即为 A 的全部特征值 λ_i

②、将求出的特征值 λ_i 分别代入齐次线性方程组

$(\lambda_i E-A)X=0$，求出其全部非零解向量即为 A 的属于特征值 λ_i 的全部特征向量.

例2. 求 $A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{pmatrix}$ 的特征值及特征向量.

$|A|=\begin{vmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-2&1\\-4&3\end{vmatrix}=2(-2)=-4.$

解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+2&-1&-1\\0&\lambda-2&0\\4&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda+2&-1\\4&\lambda-3\end{vmatrix}$

$=(\lambda-2)(\lambda^2-\lambda-2)=(\lambda-2)^2(\lambda+1)$.

$\therefore$ A 的特征值为 $\lambda_1=-1$. $\lambda_2=2$ (二重). $(\lambda_2=\lambda_3=2)$

将 $\lambda_1=-1$ 代入 $(\lambda_1 E-A)X=0$ 得

$$\begin{cases}x_1-x_2-x_3=0\\ \quad -3x_2 \quad =0\\ 4x_1-x_2-4x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=0\end{cases}$$

$\therefore$ 属于 $\lambda_1=-1$ 的全部特征向量为 $k_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $k_1\neq0$.

再将 $\lambda_2=2$ (二重) 代入 $(\lambda_2E-A)X=0$. 得.

$4x_1-x_2-x_3=0$ 即 $x_3=4x_1-x_2$.

$\therefore$ 属于 $\lambda_2=2$ (二重) 的全部特征向量为 $k_2\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$. k_2, k_3 不全为0.

例3. 求 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&-1&-1\\1&\lambda&-1\\1&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&0&0\\1&\lambda+1&0\\1&0&\lambda+1\end{vmatrix}$

$= (\lambda-2)(\lambda+1)^2$.

$\therefore$ A的特征值为 $\lambda_1=2$. $\lambda_2=-1$ (二重).

将 $\lambda_1=2$ 代入 $(\lambda_1E-A)X=0$ 得.

$$\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=0 \\ -x_1+2x_2-x_3=0 \\ -x_1-x_2+2x_3=0 \end{cases}$$

$$B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore \begin{cases} x_1=x_3 \\ x_2=x_3 \end{cases}$ 0

$\lambda_1=2$ 的一个无关的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

它的全部特征向量为 $k_1\xi_1=k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $k_1\neq 0$.

再将 $\lambda_2=-1$ (二重) 代入 $(\lambda_2E-A)X=0$.

得它全部特征向量为 $k_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. k_2, k_3 不全为0.

例4. 求 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值. 此矩阵是实矩阵.

解: $|\lambda E-A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+1$. 特征值可能为复数.

$\therefore$ A的特征值为 $\lambda=\pm i$. 可能没有实特征值.

例5. 求 $A=\begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix}$ 的全部特征值及特征向量.

解: $|\lambda E-A| = \begin{vmatrix} \lambda-a & & & \\ & \lambda-a & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda-a \end{vmatrix} = (\lambda-a)^n$.

⑦

∵ A 的全部特征值为 $\lambda=a$ (n重).

将 $\lambda=a$ 代入 $(\lambda E-A)X=0$

得 $0\cdot x_1+0\cdot x_2+\cdots+0\cdot x_n=0$.

∴ $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, $\cdots$, $\xi_n=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$

为 A 的属于特征值 $\lambda=a$ 的无关的特征向量,

而 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_n\xi_n=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}$ 为 $\lambda=a$ 的全部特征向量,

其中 $k_1,\cdots,k_n$ 不全为 0.

4. 特征值. 特征向量的性质.

性质1. n 阶方阵 A 与 A^T 的特征值相同.

证明: ∵ $|\lambda E-A^T|=|(\lambda E-A)^T|=|\lambda E-A|$

∴ A 与 A^T 的特征值相同. (A 与 A^T 有相同的特征多项式)

性质2. 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})_n$ 的 n 个特征值 (重根以重数计算). 则

1). $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$

2). $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$

$=tr A$ —— A 的迹.

仅以二阶矩阵为例，证明.

设. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. λ_1, λ_2 为 A 的特征值.

则 $\lambda_1\lambda_2 = |A|$.

$\lambda_1+\lambda_2 = a_{11}+a_{22}$.

证明: $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix}$

$= \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

由韦达 Th. 知 $\lambda_1+\lambda_2 = a_{11}+a_{22}$

$\lambda_1\lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = |A|$. ∎