一. $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=X^TAX$ $(A^T=A)$ 是一个n元二次型.(实) ①

1. 若 $\forall X\neq 0$，均有 $X^TAX>0$. 则称二次型 X^TAX 为正定二次型.
它所对应的矩阵 A 为正定矩阵.

2. n元二次型 X^TAX $(A^T=A)$ 正定

$\Longleftrightarrow$ 它的正惯性指数为 n.（它的负惯性指数为0. 且秩为n）

$\Longleftrightarrow$ A 的所有顺序主子式均大于0.

$\Longleftrightarrow$ A 与单位阵合同

$\Longleftrightarrow$ ∃可逆阵 C. 使得 $A=C^TC$.

二. 1. 若对 $\forall X\neq 0$，均有 $X^TAX<0$.
则称二次型 X^TAX 是负定二次型. A为负定矩阵.

2. 若 X^TAX 负定，则 $-X^TAX$ 正定.

3. n元二次型 X^TAX 为负定

$\Longleftrightarrow$ 它的负惯性指数为 n.

$\Longleftrightarrow$ A 的所有奇数阶顺序主子式 <0.
偶数阶顺序主子式 >0.

三. 1. 若对 $\forall X\neq 0$. 均有 $X^TAX\geq 0$ (≤ 0).
则称 X^TAX 是半正定（半负定）二次型.
A 为半正定（半负定）矩阵.

2. 不定二次型.

3. 关于二次型半正定的几个等价条件.

1). $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是半正定

2). 它的正惯性指数 $= r(A)$

3). 存在可逆阵 C. 使 $C^TAC = \begin{pmatrix} d_1 & & & & & & \\ & d_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$ $r = r(A)$.

4). 存在实矩阵 C. 使得 $A = C^TC$.

5). A 的所有主子式均大于或者等于 0. ■

作业: 习题 6—17.

今天. 7. 8. 周一. 各班 1—20. 没交(且没判)的同学交.

点拨 $\boxed{2—6 题}$.

- 二次型
  - 二次型及其矩阵表示.
    - 二次型的线性替换(非退化)及矩阵表示.
    - 矩阵的合同.
  - 标准形
    - 标准形不唯一. 与所做的非退化线性替换有关.
    - 化标准形的方法
      - 配方法
      - 成套初等变换法.
  - 唯一性
    - 复数域上的规范形.
    - 实数域上的规范形.
    - } 规范形是唯一的.
  - 正定二次型的有定性
    - 正定二次型及其判别 $\leftrightarrow$ 正定矩阵及其判别
    - 其它类型的二次型及其判别法.

6. 证明：一个实二次型可分解成两个实系数的一次齐次多项式的乘积的充要条件是它的秩等于2，符号差等于0，或者秩等于1. ③

证明："$\Longrightarrow$"，已知实二次型可分解成两个实系数的一次齐次多项式的乘积，

即 $f(x_1,x_2,\cdots x_n)=(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)\cdot(b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n)$

① 若 a_i，b_i ~~都~~不成比例，不妨设 $\frac{a_1}{b_1}\neq\frac{a_2}{b_2}$.

令 $\begin{cases} a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=y_1 \\ b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=y_2 \\ x_3=y_3 \\ \vdots \\ x_n=y_n \end{cases}$

为一非退化的线性替换，$f=y_1y_2$.

再令 $\begin{cases} y_1=z_1+z_2 \\ y_2=z_1-z_2 \\ y_3=z_3 \\ \vdots \\ y_n=z_n \end{cases}$

这又是一个非退化的线性替换，$f=z_1^2-z_2^2$.

说明 f 的秩为 2，符号差为 0.

② 若 a_i, b_i 均成比例. 即 $b_i = k a_i$. ④

$$f(x_1, \cdots x_n) = (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)(b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n)$$

$$= k(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)^2 = k y_1^2.$$

其中 令 $\begin{cases} y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \\ y_2 = x_2 \\ \vdots \\ y_n = x_n \end{cases}$

此时. f 的秩为 1.

"$\Leftarrow$". ① 若 f 的秩为 2. 符号差为 0

$$f = y_1^2 - y_2^2 = (y_1 + y_2)(y_1 - y_2).$$

令 $\begin{cases} y_1 + y_2 = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \\ y_1 - y_2 = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n \\ y_3 = x_3 \\ \vdots \\ y_n = x_n \end{cases}$

$$f = (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n) \cdot (b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n)$$

②. 若 f 的秩为 1. 则 $f = y_1^2$. 或 $f = -y_1^2$.

$$f = \pm(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)^2.$$

第六章 矩阵的特征值与特征向量.

(书第四章 §4. §5. 第五章 §4.).

§6.1. 向量的内积(点积).(数积).

一. 内积及其性质.

1. 定义. 设有n维向量 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$. $\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$. $\alpha^T\beta=\underset{1\times n}{(a_1,\cdots,a_n)}\underset{n\times 1}{\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}}$

称 $(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\alpha^T\beta$

为向量 α 与 β 的内积. 记为 (α,β) 或 $\alpha\cdot\beta$ $\quad \alpha\cdot\beta\neq\alpha\times\beta$

$$(\alpha.\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$
$$=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=\alpha\beta^T.$$

其中 $\alpha=(a_1,\cdots,a_n)$. $\beta=(b_1,\cdots,b_n)$.

$\alpha\times\beta$ 叉积, 3×5 $=3\cdot5$

2. 内积的性质.

1°. $(\alpha,\beta)=(\beta.\alpha)$

2°. $(\lambda\alpha,\beta)=\lambda(\alpha,\beta)$ $\quad\lambda$是数.

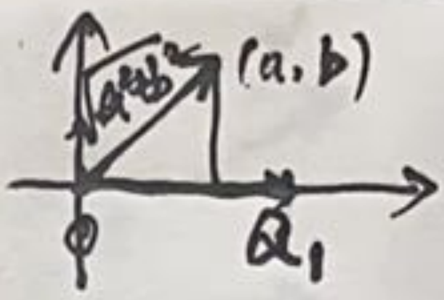
3°. $(\alpha+\beta.\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta.\gamma)$.

4°. $(\alpha.\alpha)\geqslant0$. $\quad(\alpha$为实向量$)$.

且 $(\alpha.\alpha)=0\iff\alpha=0$.

二．向量的长度及性质．

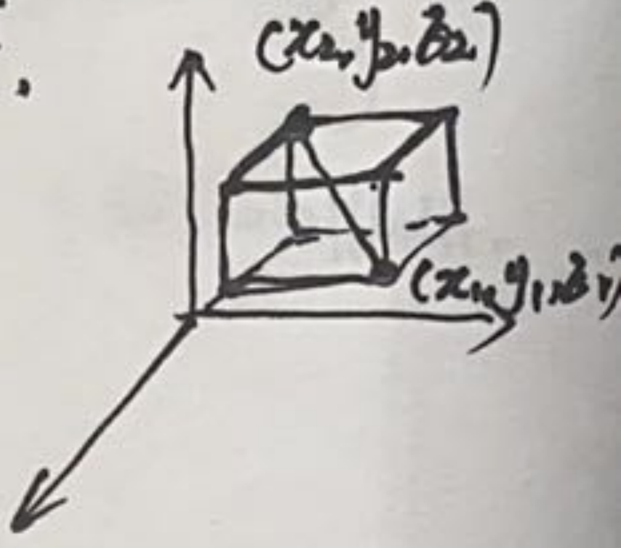
$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$． $|\alpha|=\sqrt{a^2}$



⑥

1．定义．令 $\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$.

称 $\|\alpha\|$ 为 n 维向量 α 的长度（范数）.



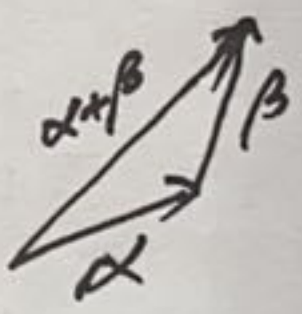
2．向量长度的性质．（实数）

(1)．非负性．$\|\alpha\|\geq 0$．且 $\|\alpha\|=0 \Longleftrightarrow \alpha=0$．

(2)．齐次性．$\|\lambda\alpha\|=|\lambda|\,\|\alpha\|$

$$\|\lambda\alpha\|=\sqrt{(\lambda\alpha,\lambda\alpha)}=\sqrt{\lambda^2(\alpha,\alpha)}=|\lambda|\sqrt{(\alpha,\alpha)}=|\lambda|\|\alpha\|.$$

(3)．三角不等式．$\|\alpha+\beta\|\leq\|\alpha\|+\|\beta\|$．



(4)．对任意的 n 维向量 α, β，

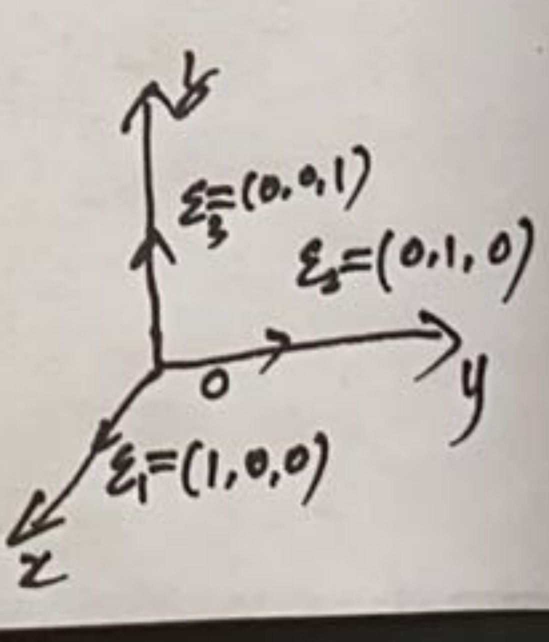
有 $|(\alpha,\beta)|\leq\|\alpha\|\,\|\beta\|$.

特别．若 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$．$\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$

则 $\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right|\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$.

柯西一布涅可夫斯基不等式．

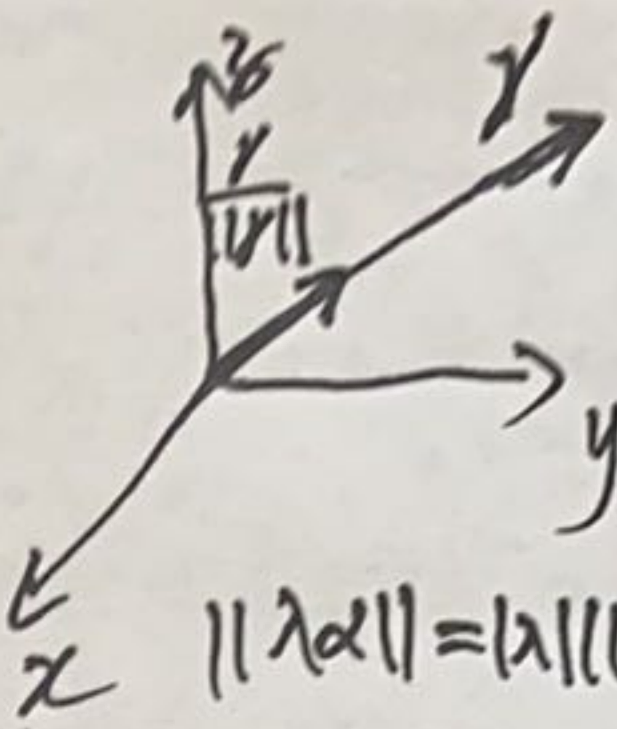
3．若 $\|\alpha\|=1$．称 α 为单位向量.



4. 将非零向量α单位化.

若 $\alpha\neq 0$. $\frac{\alpha}{\|\alpha\|}$ 是单位向量.

$\because \left\|\frac{\alpha}{\|\alpha\|}\right\| = \frac{\|\alpha\|}{\|\alpha\|} = 1$.



$\|\lambda\alpha\| = |\lambda|\,\|\alpha\|$.

三. 向量α与β间的夹角.

1. 当 $\|\alpha\|\neq 0$. $\|\beta\|\neq 0$.

定义. $\theta = \arccos \frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\,\|\beta\|}$ $\quad 0\le\theta\le\pi$.

称θ为n维向量α与β的夹角.

$$\boxed{(\alpha,\beta) = \|\alpha\|\,\|\beta\|\cos\theta.}$$

例. $\alpha=(1,2,2,3)^T$ $\quad \beta=(3,1,5,1)^T$.

求α. β的夹角

解: $\|\alpha\| = \sqrt{1^2+2^2+2^2+3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

$\|\beta\| = \sqrt{3^2+1^2+5^2+1^2} = 6$.

$\therefore \cos\theta = \frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\,\|\beta\|} = \frac{18}{3\cdot\sqrt{2}\cdot 6} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$.