

2014 高等数学A1 期中考试

1. (每小题3分, 共15分) 填空题

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin(n!)}{n+1} = \underline{\hspace{1cm}};$
- (2) 曲线 $y = \frac{x}{1+x^2}$ 的渐近线为 $\underline{\hspace{1cm}}$
- (3) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x+2^{\frac{1}{x-3}}} = \underline{\hspace{1cm}};$
- (4) 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ ax - 1, & x > 1 \end{cases}$ 可导, 则 $a = \underline{\hspace{1cm}}$
- (5) 函数 $y = \frac{1}{x+1}$ 的 n 阶麦克劳林公式为 $\underline{\hspace{1cm}}$

2. 计算下列各题(每小题5分, 共30分)

- (1) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \cdots + \frac{1}{4n^2-1})$;
- (2) 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$;
- (3) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^2 \sin x}$;
- (4) 已知函数 $y = \tan^2(1-2x)$, 求 dy ;
- (5) 设函数 $y = y(x)$ 由 $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$ 所确定, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$;
- (6) 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $e^{2x+y} - \cos(xy) = e - 1$ 所确定, 求函数 $y = f(x)$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程.

3. 证明题(每小题10分, 共20分)

- (1) 证明多项式 $f(x) = x^3 - 3x + a$ 在 $[0, 1]$ 上不可能有两个零点.
- (2) 证明不等式: $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x (x > 0)$.
4. (15分) 求出函数 $f(x) = -3x^5 + 5x^3$ 的单调区间, 凹凸区间, 极值点, 拐点, 并作出 $f(x)$ 的图形.
5. (10分) 要制造一圆柱形油罐, 体积为 V , 顶盖的厚度为罐身(侧面和底面)厚度的3倍. 问如何确定底面半径 r 和高 h , 才能使得用料最省?
6. (10分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上有二阶导数, 且 $f(2) = 0$, 又 $F(x) = (x-1)^2 f(x)$, 那么在区间 $(1, 2)$ 内至少有一点 c 存在, 使得 $F''(c) = 0$.