高等数学A1

1. 单项选择题(每小题3分，共15分)

(1) 当$x \to 0$时，与$\sqrt[3]{1+x}-1$是等价无穷小量的为(D) $(P_{76}, 4(1))$

A. x B.$x^{\frac{1}{3}}$ C. $\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}$ D. $\frac{1}{3}x$

(2) 设$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}}, & x \geq 0, \\ \frac{1}{\sin x}\ln(1+x), & -1<x<0, \end{cases}$ 则下述结论正确的是(A)$(P_{77}, 10)$

A.$x=0$是$f(x)$的跳跃间断点 B. $x=0$是$f(x)$的连续点

C.$x=1$是$f(x)$的跳跃间断点 D. $x=1$是$f(x)$的连续点

(3) 下列式子可作为$f'(x_0)$的定义式的为(B)$(P_{86}, 4)$

A. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ B. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

C. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$ D. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0+\Delta x)}{2\Delta x}$

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x\ln x}=$ (B)$(P_{76}, 5(4))$

A.0 B.1 C.2 D.3

(5)$\int_0^{+\infty} xe^{-2x}dx$的值为(C)$(P_{254}, 1(3))$

A. 发散 B. 0 C.$\frac{1}{4}$ D.$\frac{1}{2}$

2. (每小题3分，共15分)填空题

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt}{x^2}=\underline{\frac{1}{2e}}$$(P_{211}$ 例6)

(2)曲线$y(x)=e^{\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}}$在点$(\frac{\pi}{6},1)$处的切线方程为$\underline{y=-\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{12}+1}$$(P_{87}, 9$ 类型)

(3)e^{-x}的麦克劳林展开式为$\underline{e^{-x}=1-x+\frac{1}{2!}x^2-\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}x^n+o(x^n)}$$(P_{132})$

(4)$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^2\sin x}{x^4+1}dx=\underline{0}$$(P_{220}, 3(1))$(奇偶性)

(5)$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\sqrt{x}}{y\sqrt{x}}$的通解为$\underline{y^2=-4\cos\sqrt{x}+C}$(可分离变量的微分方程)

3. 计算题((每小题5分，共35分))

(1) 计算$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3x-2}{3x+1})^{2x-1}$.

提示：利用$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$；或者化成指数函数.

解：方法(1)$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3x-2}{3x+1})^{2x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3x+1-3}{3x+1})^{2x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{3}{3x+1})^{(-\frac{3x+1}{3})\cdot(-\frac{3(2x-1)}{3x+1})}=e^{-2}$.

方法(2)$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3x-2}{3x+1})^{2x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{2x-1\ln(\frac{3x-2}{3x+1})}$.

因为$\lim\limits_{x\to\infty}(2x-1)\ln(\frac{3x-2}{3x+1})=\lim\limits_{x\to\infty}(2x-1)\ln(\frac{3x+1-3}{3x+1})=\lim\limits_{x\to\infty}(2x-1)\ln(1-\frac{3}{3x+1})=\lim\limits_{x\to\infty}(2x-1)(-\frac{3}{3x-1})=-2$. 所以原式$=e^{-2}$

(2) 设$y=\frac{x\sqrt{x+1}}{(x+2)^2}$,计算$\frac{dy}{dx}$.

提示：利用对数求导法.

解：在方程两端取对数，得$\ln y=\ln x+\frac{1}{2}\ln(x+1)-2\ln(x+2)$.

上式两端对x求导，得

$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{2}{x+2}$,

于是$\frac{dy}{dx}=\frac{x\sqrt{x+1}}{(x+2)^2}(\frac{1}{x}+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{2}{x+2})$.

(3) 求定积分$\int_0^3(\sin x)^{[x]}dx$,其中$[x]$表示不超过x的最大整数.

提示：利用积分的区间可加性.

$\int_0^3(\sin x)^{[x]}dx=\int_0^1 dx+\int_1^2\sin x dx+\int_2^3(\sin x)^2dx=1+[-\cos x]_1^2+\frac{1}{2}\int_2^3(1-\cos 2x)dx=1-\cos 2+\cos 1+\frac{1}{2}[x-\frac{1}{2}\sin 2x]_2^3=\frac{3}{2}-\cos 2+\cos 1-\frac{1}{4}\sin 6+\frac{1}{4}\sin 4$.

(4) 计算$y=\cos x\ (-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2})$与$x$轴围成的图形绕$y$轴所的旋转体体积. $P_{236},7(4)$

$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\arccos y)^2dy$

(5) 计算对数螺线$\rho=e^{2\phi}$上$\phi=0$到$\phi=2\pi$的一段弧的弧长.$P_{237},10(4)$

(6) 求微分方程$xy'=xe^{\frac{y}{x}}+y$的通解$P_{281},1(3)$.

(7) 求初值问题$y''-2y'+y=12x^2e^x$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$的解.

4. 证明题((1),(2)小题每小题5分,(3)小题10分,共20分)

(1)$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}\ (x>0)$, $P_{126},7(1)$.

(2)$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)(a>b>0,n>1)$.$P_{126},9(1)$

(3)设$f(x)$在$[0,1]$上连续且严格单调减少，证明对任意的$x\in[0,1]$成立

$$\int_0^x f(t)dt\ge x\int_0^1 f(t)dt.$$

令$F(x)=\int_0^x f(t)dt\ge x\int_0^1 f(t)dt$，对等式两边求导，得$F'(x)=f(x)-\int_0^1 f(t)dt=f(x)-f(\xi)$,其中$\xi\in(0,1)$. 由于，$f(x)$是单调递减的,当$x<\xi$时, $f(x)>f(\xi)$,得$F'(x)>0$,即$F(x)>F(0)=0$; 当$x>\xi$时，$f(\xi)>f(x)$,得$F'(x)<0$,即$F(x)>F(1)=0$.
综上所述，$F(x)>0$,结论成立.

5. 应用题(15分)

讨论函数$y=\frac{x^2+2x+4}{2x}$的单调性、凹凸性及渐近性并作图.