①

一. Th. n级方阵A可对角化 $\Longleftrightarrow$ A_n有n个无关的特征向量.

推论: 若n级方阵A有n个互异的特征值, 则A一定可对角化.

Th. n级方阵A可对角化

$\Longleftrightarrow$ 对每一个n_i重特征值λ_i有n_i个线性无关的特征向量.

$\Longleftrightarrow$ $r(\lambda_i E-A)=n-n_i$.

二. 应用. 1. 求A^k. $P^{-1}AP=\Lambda$.

$A=P\Lambda P^{-1}$. $A^k=P\Lambda^k P^{-1}$

$f(A)=a_0A^k+a_1A^{k-1}+\cdots+a_{k-1}A+a_kE$.

$=P(a_0\Lambda^k+a_1\Lambda^{k-1}+\cdots+a_{k-1}\Lambda+a_kE)P^{-1}$.

§4. 实对称阵的对角化.

$A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1\\1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1$. $\lambda=\pm i$.

$\lambda=a+bi$.
$\bar{\lambda}=a-bi$.

Th. 实对称阵的特征值都是实数.

证明: 设实对称阵A的特征值为复数λ.

其对应的特征向量X为复向量.

即证 $AX=\lambda X$ $X\neq 0$的向量. $A^T=A$.

以$\bar{\lambda}$表示λ的共轭复数. $\bar{X}$表示X的共轭复向量.

则 $A\bar{X}=\bar{A}\bar{X}=\overline{AX}=\overline{\lambda X}=\bar{\lambda}\bar{X}$ ②.

$\bar{X}^T A X=\bar{X}^T\lambda X=\lambda\bar{X}^T X$.

$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$. $\bar{X}=\begin{pmatrix}\bar{x}_1\\\bar{x}_2\\\vdots\\\bar{x}_n\end{pmatrix}$.

另一方面 $\bar{X}^T A X=(A\bar{X})^T X=\bar{\lambda}\bar{X}^T X$.

两式相减 $(\lambda-\bar{\lambda})\bar{X}^T X=0$.

$\because X\neq 0$.

$\bar{X}^T X=\sum_{i=1}^n \bar{x}_i x_i=\sum_{i=1}^n |x_i|^2\neq 0$.

$\bar{X}^T X=(\bar{x}_1\ \bar{x}_2\cdots\bar{x}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\bar{x}_1x_1+\bar{x}_2x_2+\cdots+\bar{x}_nx_n$

$\Rightarrow \lambda-\bar{\lambda}=0 \Rightarrow \lambda=\bar{\lambda}$

即 λ 是实数. ∎

Th. 实对称矩阵属于不同特征值的特征向量不仅线性无关.

而且正交.

证: 设 λ_1, λ_2 是实对称阵 A 的两个不同的特征值,

P_1, P_2 是对应的特征向量.

(正交 $P_1\perp P_2$
正交 $(P_1,P_2)=0$
$(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta$.)

即 $AP_1=\lambda_1P_1$, $AP_2=\lambda_2P_2$. $P_1\neq 0$. $P_2\neq 0$.

$(AP_1,P_2)=(AP_1)^TP_2=P_1^TA^TP_2$

$=P_1^T(AP_2)=(P_1,AP_2)$.

$\Rightarrow(\lambda_1P_1,P_2)=(P_1,\lambda_2P_2)$

$\Rightarrow \lambda_1(P_1,P_2)=\lambda_2(P_1,P_2)$

$\Rightarrow(\lambda_1-\lambda_2)(P_1,P_2)=0$. $\because \lambda_1\neq\lambda_2$, $\Rightarrow(P_1,P_2)=0$

$\therefore$ P_1 与 P_2 正交. 即 $P_1\perp P_2$ ∎

Th. 设 A 为 n 阶实对称阵. λ 是 A 的特征方程的 r 重根. ③.

则矩阵 $\lambda E-A$ 的秩 $r(\lambda E-A)=n-r$.

即对应于特征值 λ 恰有 r 个线性无关的特征向量. ∎

即实对称阵一定可对角化.

相似. ∃可逆阵 P. $P^{-1}AP=B$. 正交阵.

合同 ∃可逆阵 Q. $Q^{T}AQ=B$.

∃可逆阵 P. 使 $P^{-1}AP=\Lambda$.

Th. 设 A 为 n 阶实对称阵. 则必有正交阵 P. 使 $P^{-1}AP=\Lambda$.

其中 Λ 是以 A 的 n 个特征值为对角元素的对角阵 ∎. 正交相似.

例 1. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 2 & -2\\ 0 & -2 & 3\end{pmatrix}$.

求正交阵. 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵 Λ. 并写出 Λ.

解: $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 0\\ 2 & \lambda-2 & 2\\ 0 & 2 & \lambda-3\end{vmatrix}=\underline{(\lambda-1)(\lambda-2)}\underline{(\lambda-3)}-4(\lambda-3)-4(\lambda-1)$

$=(\lambda-3)(\lambda^2-3\lambda+2)-4\lambda+12-4\lambda+4$.

$-1-6+3+10$

$=\lambda^3-6\lambda^2+3\lambda+10$

$=(\lambda+1)(\lambda^2-7\lambda+10)$

$=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5)$.

$\therefore\ \lambda_1=-1.\ \lambda_2=2.\ \lambda_3=5.$

$$\begin{array}{r}
\lambda^2-7\lambda+10\\
\lambda+1\,\overline{)\,\lambda^3-6\lambda^2+3\lambda+10}\\
\underline{\lambda^3+\lambda^2\qquad\qquad}\\
-7\lambda^2+3\lambda+10\\
\underline{-7\lambda^2-7\lambda\qquad}\\
10\lambda+10\\
\underline{10\lambda+10}\\
0
\end{array}$$

将 $\lambda_1=-1$ 代入 $(\lambda_1 E-A)X=0$ 得

$$\begin{cases}-2x_1+2x_2=0\\ 2x_1-3x_2+2x_3=0\\ 2x_2-4x_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=2x_3\\ x_2=2x_3.\end{cases}$$

$\therefore$ $\lambda_1=-1$ 的一个无关的特征向量为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$.

$\lambda_2=2$ - - - ... $\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$.

将 $\lambda_3=5$ 代入 $(\lambda_3 E-A)X=0$ 得

$$\begin{cases}4x_1+2x_2=0\\ 2x_1+3x_2+2x_3=0\\ 2x_2+2x_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}x_2\\ x_3=-x_2\end{cases}$$

$\therefore$ $\lambda_3=5$ 的一个无关的特征向量为 $\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}$.

$\because$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 正交.

$\therefore$ 只需把 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 单位化.

$\beta_1=\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$. $\beta_2=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$. $\beta_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

$\therefore$ $\exists$ 正交阵 $P=(\beta_1, \beta_2, \beta_3)=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

使得 $\underset{\underset{P^TAP.}{\parallel}}{P^{-1}AP}=\Lambda=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 2 & \\ & & 5\end{pmatrix}$.

A与Λ正交相似.

A与Λ合同.

例2. 设 $A=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&3&1\\0&1&3\end{pmatrix}$. 求正交阵，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵 Λ.

解: $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4&0&0\\0&\lambda-3&-1\\0&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-4)^2(\lambda-2)$

$\therefore\ \lambda_1=4$ (二重). $\lambda_2=2$.

将 $\lambda_1=4$ 代入 $(\lambda_1E-A)X=0$ 得

$$\begin{cases}x_2-x_3=0\\-x_2+x_3=0\end{cases}\qquad x_2=0\cdot x_1+x_3.$$

$\therefore\ \lambda_1=4$ 的两个无关的特征向量为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$\lambda_2=2$ 的一个无关的特征向量为 $\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

$\because\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 正交. $\therefore$ 只需将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 单位化.

$$P^{-1}AP=\Lambda\qquad P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\0&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\qquad \Lambda=\begin{pmatrix}4&&\\&4&\\&&2\end{pmatrix}.$$

例3. 设 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&a&2\\0&2&a\end{pmatrix}$ ($a>0$ 实数). 求正交阵 P. 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

有一个特征值为1.

解: $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-a&-2\\0&-2&\lambda-a\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-a+2)(\lambda-a-2)$.

$\lambda_1=2\quad \lambda_2=a-2\quad \lambda_3=a+2$.

$\because$ 1 是特征值. $\Rightarrow a=3$ 或 $a=-1$ (不合题意. 舍去)

$\therefore$ A 的特征值为 $\lambda_1=2\quad \lambda_2=1.\quad \lambda_3=5.$

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\0&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\qquad \Lambda=\begin{pmatrix}2&&\\&1&\\&&5\end{pmatrix}.$$

应用.—— 用正交变换法化二次型为标准形.

Th. 对于任意实二次型.

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i,j}^{n} a_{ij}x_ix_j \quad (a_{ij}=a_{ji})$$

总有正交变换 $X=PY$ 使 f 化为标准形

$$f=\underline{\underline{\lambda_1}}y_1^2+\underline{\underline{\lambda_2}}y_2^2+\cdots+\underline{\underline{\lambda_n}}y_n^2.$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 f 矩阵 A 的 n 个特征值.

步骤: ① 写出 f 的矩阵 A.

② 求 A 的特征值及无关特征向量.

③ 将求出的特征向量施密特正交化.单位化.

记 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots\gamma_n$.

④ $P=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)$ $\quad \Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$.

注: 只有用正交变换法化二次型为标准形. 平方项前的系数才一定是 A 的特征值.

化二次型为标准形的方法.
$\begin{cases}\text{配方法.}\\ \text{初等变换法.}\\ \text{正交变换法.}\end{cases}$

$$f=y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$$
$$=w_1^2+w_2^2-w_3^2$$
$$=4v_1^2+9v_2^2-16v_3^2.$$