一、特征值特征向量的性质.

1. A与A^T的特征值相同. 即 $|\lambda E-A|=|\lambda E-A^T|$.

2. 设$A=(a_{ij})_n$的特征值为$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$.

则 i). $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$

ii). $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=t_rA$ — A的迹

3. 设$A=(a_{ij})_n$.

若 i). $\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|<1 \quad (i=1,\cdots,n)$

ii). $\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|<1 \quad (j=1,\cdots,n)$

有一个成立, 则A的所有特征值λ_i的模小于1.

即 $|\lambda_i|<1 \quad (i=1,\cdots,n)$.

4. 属于不同特征值的特征向量一定线性无关.

二、n个结论.

1. 一个特征向量只能属于A的一个特征值.

2. 设λ是A的特征值.

则 i). λ^k是A^k的特征值.

ii). 若A可逆. 则$\frac{1}{\lambda}$是A^{-1}的特征值.

iii). 若A可逆. 则$\frac{|A|}{\lambda}$是A^*的特征值.

3. 设 $\varphi(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m$

则 $\varphi(\lambda)$ 就是 $\varphi(A)$ 的特征值. 其中 λ 是 A 的特征值.

例. ~~设~~设三阶方阵 A 的特征值为 $1, -1, 2$.

求: $|A^3-5A^2+7A|$.

§3. 相似矩阵

一. 相似矩阵的概念.

1. 定义. A, B 均为 n 阶方阵. 若存在可逆阵 P. 使得

$P^{-1}AP=B$.

则称 B 是 A 的相似矩阵. 并称 A 与 B 相似.

对 A 进行运算 $P^{-1}AP$. 称对 A 施行相似变换.

P 相似变换矩阵.

2. 矩阵的相似是一种等价关系.

即具有 1°. 自反性. A_n 与 A_n 相似.

2°. 对称性. 若 A 与 B 相似. 则 B 与 A 也相似

证实上, $\because$ A 与 B 相似. $\exists$ 可逆阵 P. (要找可逆 Q. 使 $Q^{-1}BQ=A$)

使 $P^{-1}AP=B$.

$\Rightarrow$ $A=PBP^{-1}=(P^{-1})^{-1}B(P^{-1})$

$\therefore$ B 与 A 相似.

3°. 传递性. 若A与B相似. B与C相似. 则A与C相似.

证明: ∵ A与B相似, B与C相似.

∃可逆阵 P_1, P_2. 使

$$P_1^{-1}AP_1=B, \quad P_2^{-1}BP_2=C.$$

(要找可逆 Q 使 $Q^{-1}AQ=C$).

于是∃可逆阵 P_1P_2, 使得

$$C=P_2^{-1}P_1^{-1}AP_1P_2=(P_1P_2)^{-1}A(P_1P_2)$$

∴ A与C相似.

注: 有两个常用的运算式子:

1°. $P^{-1}ABP=P^{-1}AP\cdot P^{-1}BP$

2°. $P^{-1}(kA+lB)P=kP^{-1}AP+lP^{-1}BP$.

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1\\ -5 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda-8=(\lambda-4)(\lambda+2)$.

$\lambda_1=4$. $\lambda_2=-2$.

$\lambda_1=4$. $\begin{cases}x_1-x_2=0\\ -5x_1+5x_2=0\end{cases}$ $x_1=x_2$. $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\lambda_2=-2$ $\begin{cases}-5x_1-x_2=0\\ -5x_1-x_2=0\end{cases}$ $x_2=-5x_1$ $\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$

例. $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & -1\end{pmatrix}$. $B=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$.

验证 ∃可逆阵 $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -5\end{pmatrix}$ 使A与B相似. 即 $P^{-1}AP=B$.

解: $P^{-1}=\frac{1}{-6}\begin{pmatrix}-5 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

$$P^{-1}AP=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-5 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -5\end{pmatrix}$$

$$=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-20 & -4\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -5\end{pmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-24 & 0\\ 0 & 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}=B.$$

∴ A与B相似.

二. 相似阵其它的性质.

1. Th. 若 n 级矩阵 A 与 B 相似, 则 A 与 B 的特征多项式相同.

从而 A 与 B 的特征值也相同.

也即 $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$.

证: 因为 A 与 B 相似.

所以. ∃可逆阵 P. 使 $P^{-1}AP = B$. $\lambda E = \lambda P^{-1}P = P^{-1}\lambda EP$

$|\lambda E - B| = |\lambda E - \underline{P^{-1}AP}| = |P^{-1}\lambda EP - P^{-1}AP|$

$= |P^{-1}(\lambda E - A)P| = |P^{-1}||\lambda E - A||P| = |\lambda E - A|$. ∎

2. 相似阵的秩相同.

∵ A 与 B 相似. $P^{-1}AP = B$. ∴ $r(A) = r(B)$.

3. 相似矩阵的行列式相同.

即若 A 与 B 相似. 则 $|A| = |B|$.

$|A| = |P^{-1}||A||P| = |P^{-1}AP| = |B|$

4. 相似矩阵具有相同的可逆性. 当它们可逆时. 则它们的逆也相似

即若 A 与 B 相似. 且 A 可逆. 则 A^{-1} 与 B^{-1} 也相似.

∵ A 与 B 相似. ∃可逆阵 P. 使 $P^{-1}AP = B$. (找可逆 Q. 使 $Q^{-1}A^{-1}Q = B^{-1}$)

于是 $B^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$

∴ A^{-1} 与 B^{-1} 相似 ∎

A与O矩阵相似.

$A=P^{-1}OP=O$.

A与E相似.

$A=P^{-1}EP=E$

A与λE相似. $A=P^{-1}\lambda EP=\lambda E$.

三. 方阵与对角阵Λ相似的条件

Th. n级方阵A与对角阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$ 相似

$\Longleftrightarrow$ A有n个线性无关的特征向量.

证: "$\Longrightarrow$". 若A与Λ相似.

则存在可逆阵P. 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$.

$\Longrightarrow AP=P\Lambda$

设 $P=(P_1,P_2,\cdots,P_n)$

其中 P_i是P的第i列组成的列向量.

$\Rightarrow A_{1\times1}(P_1\ P_2\cdots P_n)_{1\times n}=(P_1\ P_2\cdots P_n)_{1\times n}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}_{n\times n}$

$\Rightarrow (AP_1,AP_2\cdots AP_n)=(\lambda_1P_1,\lambda_2P_2\cdots\lambda_nP_n)$

$AX=\lambda X\quad X\neq 0$ 时

$\Rightarrow\begin{cases}AP_1=\lambda_1P_1\\ AP_2=\lambda_2P_2\\ \vdots\\ AP_n=\lambda_nP_n\end{cases}$

∵ P可逆. ∴ $p_i \neq 0$ $\quad i=1,\cdots,n$.

即 $p_1, p_2, \cdots p_n$ 是A的n个特征向量，而 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是A的n个特征值.

∵ P可逆. ∴ $p_1, \cdots, p_n$ 是A的n个线性无关的特征向量.

"$\Longleftarrow$". 设A有n个线性无关的特征向量 $p_1, p_2, \cdots p_n$，它们所对应的A的特征值分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.

即 $\quad Ap_i = \lambda_i p_i \quad (i=1,\cdots,n)$.

令 $\quad P=(p_1, p_2, \cdots, p_n)$

则
$$
\begin{aligned}
AP &= A(p_1\ p_2 \cdots p_n) \\
&= (Ap_1, Ap_2, \cdots, Ap_n) \\
&= (\lambda_1 p_1, \lambda_2 p_2, \cdots, \lambda_n p_n) \\
&= (p_1, p_2 \cdots p_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix} = P\Lambda
\end{aligned}
$$

∵ $p_1, p_2 \cdots, p_n$ 线性无关. ∴ P可逆.

$\Rightarrow \quad P^{-1}AP = \Lambda$. 即 A与$\Lambda$相似 ∎

推论：若n阶方阵A有n个互异的特征值. 则A一定能与对角阵Λ相似.

$\begin{pmatrix}0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ & & 2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{pmatrix}$.

例1. 设 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ 能否与对角阵相似. 若能. 求出对角阵 Λ 及可逆阵 P. 使 $P^{-1}AP=\Lambda$.

解: $|\lambda E-A|=(\lambda-2)(\lambda+1)^2$.

特征值 $\lambda_1=2$. $\lambda_2=\lambda_3=-1$. (二重). $(\lambda_2E-A)X=0$ 的基础解系.

$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. $\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

$\therefore$ A能与对角阵 Λ 相似.

且 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$. $\Lambda=\begin{pmatrix}2&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$.

使得 $P^{-1}AP=\Lambda$.

$P_1=(\xi_2,\xi_3,\xi_1)=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$. $\Lambda_1=\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix}$.

$P_1^{-1}AP_1=\Lambda_1$.

$P_2=(\xi_2,\xi_1,\xi_3)=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ $\Lambda_2=\begin{pmatrix}-1&&\\&2&\\&&-1\end{pmatrix}$.

$P_3=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\2&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$. $\Lambda=\begin{pmatrix}2&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$.

$P_3^{-1}AP_3=\Lambda$.

例2. 问 $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 能否与对角阵相似?

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda+1)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2.$$

$\therefore\ \lambda_1=2 \qquad \lambda_2=\lambda_3=1$ (二重).

$\lambda_1=2$ 代入 $(\lambda E-A)X=0$. 得 $\begin{cases}3x_1-x_2 & =0\\ 4x_1-x_2 & =0\\ -x_1 & =0\end{cases}$

$\lambda_1=2$ 有一个无关的特征向量 $\xi_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\lambda_2=1$ (二重) 代入 $(\lambda_2 E-A)X=0$ 得 $\begin{cases}2x_1-x_2 & =0\\ 4x_1-2x_2 & =0\\ -x_1-x_3 & =0.\end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases}x_2=2x_1\\ x_3=-x_1\end{cases}$

$\lambda_2=1$ (二重) 只有一个无关的特征向量 $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

三阶方阵只有两个无关的特征向量.

$\therefore$ A不能与对角阵相似. ∎