上一次的作业.

4. A_n. A是反对称阵 $\Longleftrightarrow$ 对 $\forall$ n维向量 X, 有 $X^TAX=0$.

"$\Rightarrow$"

证. A是反对称阵, 则 $-A=A^T$.

$\therefore\ X^TAX \overset{?}{=} (X^TAX)^T = X^TA^T(X^T)^T = -X^TAX$

$\Rightarrow\ 2X^TAX=0 \ \Rightarrow\ X^TAX=0.$

$X^TAX = x_1^2+x_2^2+x_3^2.$

2. $A \sim \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$ } r个1. ✓ $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \lambda_r & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$. ✓

$r=r(A)$

$$A = C^T\left[\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 0 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}\right] C.$$

$$= C^T\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ & & & 0 \end{pmatrix}C + C^T\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 0 \end{pmatrix}C + \cdots + C^T\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}C.$$

$= A_1 + A_2 + \cdots + A_r$

$\neq \boxed{C^TA_1C + C^TA_2C + \cdots + C^TA_rC}$ $\quad r(A_i)=1.$

$\neq C^TCE_1 + C^TCE_2 + \cdots + C^TCE_r.$

60%

12. 设A为n阶实对称阵. 且$|A|<0$. 证明: 必存在n维实向量

$X\neq0$, 使 $X^TAX<0$.

证明: $\because |A|<0$. $\Rightarrow r(A)=n$.

且可知 X^TAX 不是正定二次型. 即负惯性指数$q>0$.

于是可经非退化线性替换化为

$$X^TAX \xrightarrow[|C|\neq0]{X=CY} \underset{0}{y_1^2}+\cdots+\underset{0}{y_p^2}-\underset{1}{y_{p+1}^2}-\underset{0}{y_{p+2}^2}-\cdots-\underset{0}{y_n^2}.$$

取 $Y_0=(0,0,\cdots,0,1,0,\cdots0)^T$.

$X_0=CY_0\neq0$.

使得 $X_0^TAX_0=-1<0$. 命题得证. ∎

9. 证明: 若A是正定阵, 则A的主子式全大于0.

Th. A是正定阵 $\Longleftrightarrow$ A的所有顺序主子式均大于0.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}.$$

证明: 设 $A=(a_{ij})_n$ 是一个n级正定阵. 再设M_k是A的任意一个k级主子式 $1\leq k\leq n$. $1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n$.

$$M_k=\begin{vmatrix}a_{i_1i_1}&a_{i_1i_2}&\cdots&a_{i_1i_k}\\a_{i_2i_1}&a_{i_2i_2}&\cdots&a_{i_2i_k}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{i_ki_1}&a_{i_ki_2}&\cdots&a_{i_ki_k}\end{vmatrix}.$$

由于A是正定阵，X^TAX是正定二次型。

即对$\forall X\neq 0$，均有 $X^TAX>0$。

令 $g(y_1,\cdots)$ M_k对应的k阶方阵为A_k，A_k所对应的二次型为 $g(y_1,\cdots,y_k)=Y^TA_kY$.

于是对任意的不全为0的 $x_{i_1},\cdots,x_{i_k}$，有

$$g(x_{i_1},\cdots,x_{i_k})=f(0,\cdots,0,x_{i_1},0\cdots0,x_{i_2},0\cdots0,x_{i_k},0,\cdots,0)>0.$$

$\therefore$ 二次型 Y^TA_kY 是正定二次型。

$\Longrightarrow$ $M_k=|A_k|>0$. 此时M_k认是A的主子式 ∎

10. 设A是实对称阵。

证明：当t充分大时，tE+A是正定阵。 $c^T\cdot c=(\ )(\ )=$数>0.

证：$\forall\ C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^T\neq 0$.

$$C^T(tE+A)C=C^TtEC+C^TAC=t\underbrace{C^TC}_{\text{固定数}}+\underbrace{C^TAC}_{\text{固定数}}=t(c_1^2+\cdots+c_n^2)+C^TAC.$$

当t充分大时，总能使 $t(c_1^2+\cdots+c_n^2)+C^TAC>0$.

$\therefore$ tE+A是正定阵 ∎

17. A是一实矩阵，证明

$r(A^TA)=r(A)$.

（若能证明 $A^TAX=0$ 与 $AX=0$ 同解，则 $\Longrightarrow n-r(A^TA)=n-r(A)$ $\Longrightarrow r(A^TA)=r(A)$）

证明：设 X_0 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的解.

$\boxed{A_{m\times n}}$ $A^T_{n\times m}$ $X_{n\times 1}$.

则 $AX_0=0$.

$(A^TA)X_0=0$.

即 X_0 也是齐次线性方程组 $(A^TA)X_0=0$ 的解.

反之，若 X_0 是齐次线性方程组 $(A^TA)X=0$ 的解.

(要证 $AX_0=0$).

即 $\underline{A^TAX_0=0}$

$\Longrightarrow x_0^TA^TAX_0=0$.

$A_{m\times n}X_{n\times 1}=O_{m\times 1}$

$\Longrightarrow (AX_0)^T(AX_0)=0$.

$\Longrightarrow AX_0=0$.

即齐次线性方程组 $AX=0$ 与 $A^TAX=0$ 同解.

$\Longrightarrow n-r(A)=n-r(A^TA)$

$\Longrightarrow r(A)=r(A^TA)$. ∎

11. 证明：若 A 是正定阵，则 A^{-1} 也是正定阵. 当作证明.

证明：A 是正定阵. 则 $A^T=A$. 且 $|A|>0$. 即 $\underline{A^{-1}\text{存在}}$.

$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=A^{-1}$.

$\therefore A^{-1}$ 也是实对称阵.

方法一. 若 A 是正定阵. 存在可逆阵. 使得 $\underline{A=C^TC}$.

(要证 ∃ 可逆阵 Q，使 $\underline{\underline{A^{-1}}}=Q^TQ$).

$$\Longrightarrow \quad A^{-1}=(C^TC)^{-1}=C^{-1}(C^T)^{-1}=\left[(C^{-1})^T\right]^T(C^{-1})^T.$$ ④

$\therefore$ A^{-1}与E合同，即A^{-1}也是正定阵 ▮

方法二，$\because$ A是正定阵.

$\therefore$ 二次型 X^TAX 是正定二次型.

$$\underline{X^TAX} \xlongequal{X=A^{-1}Y} (A^{-1}Y)^TA(A^{-1}Y)=Y^T(A^{-1})^TAA^{-1}Y$$

$$=Y^T(A^{-1})^TA^TA^{-1}Y=\underline{Y^TA^{-1}Y}.$$

据非退化线性替换不改变二次型的正定性. $\therefore$ A^{-1}也是正定阵 ▮

14. 证明：二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是半正定 $\Longleftrightarrow$ 它的正惯性指数与秩相等.

证明："$\Longleftarrow$". 已知f的正惯性指数与秩相等. 即 $p=r$.

于是可将二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=X^TAX$ 通过非退化线性替换

$X=CY$ 化为规范形.

$$f(x_1,\cdots x_n)=X^TAX \xlongequal[|C|\neq 0]{X=CY} Y^T(C^TAC)Y.$$

$$=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_r^2+0\cdot y_{r+1}^2+\cdots+0\cdot y_n^2 \qquad \left(\begin{array}{l}\text{要证 } \forall X_0\neq 0.\\ X_0^TAX_0\geq 0\end{array}\right).$$

于是对 $\forall$ $X_0=(c_1,\cdots,c_n)^T\neq 0$.

$Y_0=C^{-1}X_0=(d_1,d_2,\cdots d_n)^T\neq 0$.

$f(x_1,\cdots x_n)\geq 0$. $\therefore$ $f(x_1,\cdots,x_n)$ 半正定.

"$\Longrightarrow$". 已知 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是半正定的. (要证 $p=r$).

用反证法．假设 $p \neq r$，即 $p<r$．

f 可经一非退化的线性替换 $X=CY$．

$$X^TAX = y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2.$$

取 $Y_1=(0,\cdots,0,\underset{p+1}{1},0,\cdots)^T$

$$X_1 = CY_1 \neq 0.$$

$X^TAX=-1<0$ 与 f 半正定矛盾！ $\therefore p=r$ ∎

15．证明：$n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2$ 是半正定的．

证明：

$$(x_1+\cdots+x_n)^2$$

$$n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2$$

$$= n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+2x_1x_2+2x_1x_3+\cdots+2x_1x_n$$

$$+2x_2x_3+\cdots+2x_2x_n+\cdots+2x_{n-1}x_n)$$

$$=(n-1)\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j.$$

$$=(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+\cdots+(x_1-x_n)^2$$

$$+(x_2-x_3)^2+\cdots+(x_2-x_n)^2$$

$$+\cdots+(x_{n-1}-x_n)^2.$$

故对任意一组不全为 0 的数 $c_1,\cdots,c_n$．

$$n\sum_{i=1}^{n}c_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}c_i\right)^2\ge 0.$$

$\therefore$ 所给的二次型半正定．

7. (4). $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$ $\Longrightarrow$ $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \cdots + x_{n-1}x_n$ ⑥

解：f的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & & 1 & \frac{1}{2} \\ & & & \ddots & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}_n$

$a_{ii} = 1$, $a_{i\,i+1} = \frac{1}{2}$　$a_{i+1\,i} = \frac{1}{2}$.

$$|A_k| = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}_k}_{D_k} \boxed{\times\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^k \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}_k$$

$2 - \frac{2}{3}$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^k \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{k+1}{k} \end{vmatrix}$$

$D_k = 2D_{k-1} - D_{k-1}$

$D_{k-1} = 2D_{k-2} - D_{k-3}$

$\vdots$

$D_4 = 2D_3 - D_2$

$D_3 = 2D_2 - D_1$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^k (k+1) > 0$.　∴ 正定.　$D_k = k+1$.