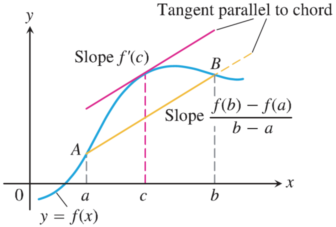
# 高等数学习题课

## 微分中值定理补充




牛兆宏

山西大学数学科学学院

# 补充例题

# 补充题 1 — 构造函数 $F(x)$

已知 $f(1) = 1$,

(1) 若 $f(x)$ 满足方程 $xf'(x) + f(x) = 0$, 求 $f(2)$;

(2) 若 $f(x)$ 满足方程 $xf'(x) - f(x) = 0$, 求 $f(2)$.

# 补充题 2 — 存在 $\xi, \eta$

设 $a > 0$, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $f'(x) \neq 0$. 求证: 存在 $\xi, \eta \in (a, b)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{b+a}{2\eta} f'(\eta).$$

# 补充题 2 — 存在 $\xi, \eta$

设 $a > 0$, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $f'(x) \neq 0$. 求证: 存在 $\xi, \eta \in (a, b)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{b + a}{2\eta} f'(\eta).$$

- $\xi, \eta \in (a, b) \Rightarrow$ 应用两次中值定理;

## 补充题 2 — 存在 $\xi, \eta$

设 $a > 0$, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $f'(x) \neq 0$. 求证: 存在 $\xi, \eta \in (a, b)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{b+a}{2\eta} f'(\eta).$$

- $\xi, \eta \in (a, b) \Rightarrow$ 应用两次中值定理;
- $f'(\eta)$ 和 $2\eta \Rightarrow f(x)$ 和 $g(x) = x^2$ 在 $[a, b]$ 上应用柯西中值定理;

# 补充题 2 — 存在 $\xi, \eta$

设 $a>0$, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $f'(x)\neq 0$. 求证: 存在 $\xi,\eta\in(a,b)$, 使得

$$f'(\xi)=\frac{b+a}{2\eta}f'(\eta).$$

- $\xi,\eta\in(a,b)\Rightarrow$ 应用两次中值定理;
- $f'(\eta)$ 和 $2\eta\Rightarrow f(x)$ 和 $g(x)=x^2$ 在 $[a,b]$ 上应用柯西中值定理;
- $f'(\xi)$ 怎么来的? 结合上一条结果, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上应用拉格朗日中值定理.

# 补充题 3 — 存在 $\xi, \eta$

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 $(a, b)$ 内可导, 且 $f'(x) \neq 0$. 试证: 存在 $\xi, \eta \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{e^b - e^a}{b - a} \cdot e^{-\eta}.$$

# 补充题 3 — 存在 $\xi, \eta$

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 $(a, b)$ 内可导, 且 $f'(x) \neq 0$. 试证: 存在 $\xi, \eta \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{e^b - e^a}{b - a} \cdot e^{-\eta}.$$

- $\xi, \eta \in (a, b) \Rightarrow$ 应用两次中值定理;

# 补充题 3 — 存在 $\xi, \eta$

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 $(a, b)$ 内可导, 且 $f'(x) \neq 0$. 试证: 存在 $\xi, \eta \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{e^b - e^a}{b - a} \cdot e^{-\eta}.$$

- $\xi, \eta \in (a, b) \Rightarrow$ 应用两次中值定理;
- $\xi$ 出现一次, 考虑用拉格朗日中值定理;

# 补充题 3 — 存在 $\xi, \eta$

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 $(a, b)$ 内可导, 且 $f'(x) \neq 0$. 试证: 存在 $\xi, \eta \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{e^b - e^a}{b - a} \cdot e^{-\eta}.$$

- $\xi, \eta \in (a, b) \Rightarrow$ 应用两次中值定理;
- $\xi$ 出现一次, 考虑用拉格朗日中值定理;
- $\eta$ 出现两次, 考虑用柯西中值定理. 哪两个函数?

# 补充题 4 — 存在不同的 $\eta, \zeta$

已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0$, $f(1)=1$. 证明:

(1) 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi)=1-\xi$;

(2) 存在两个不同的点 $\eta, \zeta \in (0,1)$, 使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

# 补充题 4 — 存在不同的 $\eta, \zeta$

已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0$, $f(1)=1$. 证明:

(1) 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi) = 1-\xi$;

(2) 存在两个不同的点 $\eta, \zeta \in (0,1)$, 使得 $f'(\eta)f'(\zeta) = 1$.

- 要证第一问, 需要说明 $F(x) = f(x) - 1 + x$ 在 $(0,1)$ 内存在零点, 用零点定理;

# 补充题 4 — 存在不同的 $\eta, \zeta$

已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0$, $f(1)=1$. 证明:

(1) 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi) = 1-\xi$;

(2) 存在两个不同的点 $\eta, \zeta \in (0,1)$, 使得 $f'(\eta)f'(\zeta) = 1$.

- 要证第一问, 需要说明 $F(x) = f(x) - 1 + x$ 在 $(0,1)$ 内存在零点, 用零点定理;
- 两个不同的点, 所以需要将 $(0,1)$ 区间分割, 两次应用中值定理;

# 补充题 4 — 存在不同的 $\eta, \zeta$

已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0$, $f(1)=1$. 证明:

(1) 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi) = 1-\xi$;

(2) 存在两个不同的点 $\eta, \zeta \in (0,1)$, 使得 $f'(\eta)f'(\zeta) = 1$.

- 要证第一问, 需要说明 $F(x) = f(x) - 1 + x$ 在 $(0,1)$ 内存在零点, 用零点定理;
- 两个不同的点, 所以需要将 $(0,1)$ 区间分割, 两次应用中值定理;
- 在 $[0,\xi]$ 和 $[\xi,1]$ 上对 $F(x)$ 分别应用拉格朗日中值定理.

# 思考题

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续, 在 $(0,2)$ 内可导, 且 $f(0)+f(1)=2$, $f(2)=1$. 证明: 存在 $\xi \in (0,2)$, 使得 $f'(\xi)=0$.
2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上可导, 且在 $(0,3)$ 内 $f'(x) \geq 2$. 如果 $f(0) \geq 4$, 证明: $f(3) \geq 10$.