一、二次型的规范形.

1. 复数域上. 规范形的形式为 $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_r^2+0\cdot y_{r+1}^2+\cdots+0\cdot y_n^2$

2. 实数域上. $y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2+0\cdot y_{r+1}^2+\cdots+0\cdot y_n^2$.

二、Th. 任何一个复对称阵均与 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 合同. $r=r(A)$.

Th. 任何一个实对称阵均与 $\begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_q & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ 合同.

三、Th. 任何一个二次型均可经非退化线性替换化为规范形

且规范形是唯一的. 与所做的非退化的线性替换无关.

四、实数域上. 正惯性指数 p. 负惯性指数 q.

$p-q=$ 符号差.

$p+q=r$

§4. 正定二次型（实数域）.

一、定义. 设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是一个 n 元实二次型. 若对任意一组不全为零的数 $c_1,\cdots,c_n$, 均有 $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)\underline{>0}$.

则称二次型为正定二次型. 它所对应的矩阵为正定矩阵.

定义. 设 X^TAX 是一个 n 元实二次型. $(A^T=A)$, 若 $\forall X\neq 0$,

均有 $X^TA X\underline{>0}$. 则称二次型 X^TAX 是正定二次型.

A 为正定矩阵.

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2$ 正定二次型.

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ 不是正定二次型.

$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 = y_1^2 + 0\cdot y_2^2 + 0\cdot y_3^2$ 不是正定二次型.

取 $(x_1, x_2, x_3)^T = (1, -1, 0)^T$.

$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$. 不是正定二次型.

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$. 正定吗?

二. 二次型正定的条件.

1. 引理. n元实二次型 X^TAX $(A^T=A)$ 经非退化线性替换后. 其正定性不变.

非退化实线性替换保持其正定性不变.

Th. n元实二次型 X^TAX $(A^T=A)$ 正定

$\Longleftrightarrow$ 它的正惯性指数为n.

$\Longleftrightarrow$ 它的负惯性指数为0, 且秩为n.

三. Th. 实对称阵A正定 $\Longleftrightarrow$ A与E合同.

$\Longleftrightarrow$ $\exists$可逆阵C, 使 $A = C^TC$.

$|A| = |C^T||C| = |C|^2 > 0$.

$f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 + y_2^2 + 0\cdot y_3^2$. 不是正定的.

$(0, 0, 1)$.

推论：若实对称阵 A 正定，则 $|A|>0$.

四、实二次型正定的判别法.

1. 顺序主子式.

定义. 子式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$ $k=1,\cdots,n$.

称为 $A=(a_{ij})_n$ 的 k 级顺序主子式.

2. Th. 实二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=X^TAX$ $(A^T=A)$ 正定

$\Leftrightarrow A$ 的所有顺序主子式全大于0.

例1. 判别二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$

是否正定？

解：f 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

$\because |A_1|=5>0$. $|A_2|=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1>0$

$|A_3|=\begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1>0$

$\therefore f(x_1,x_2,x_3)$ 为正定二次型.

例2. 当λ取何值时，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为正定的。

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2^2+6x_2x_3+\lambda x_3^2.$$

解：f 的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&3\\2&3&\lambda\end{pmatrix}$.

$|A_1|=1>0.$ $\quad |A_2|=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1>0.$

$$|A_3|=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&2&3\\2&3&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&1&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda-5$$

∴ 当$\lambda>5$时，f正定 ■

下面看定理的证明。我们将主顺序子式

Th. n阶实对称阵A正定 $\Longleftrightarrow$ A的所有顺序主子式 $|A_k|$ $k=1,\cdots,n$ 全大于0.

证："$\Longrightarrow$". 已知实对称阵A是正定的.

它所对应的二次型 $f=X^TAX$ 也是正定的.

令 $X^T=(x_1,\cdots,x_k,0,\cdots,0)$.

$$f(x_1,\cdots,x_k,0,\cdots,0)=(x_1,\cdots,x_k,0,\cdots,0)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_k\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

$$=(x_1,\cdots,x_k)A_k\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_k\end{pmatrix}>0$$

故 A 的k阶顺序主子式 $|A_k|>0$ $\quad(k=1,\cdots,n)$.

"$\Longleftarrow$". 已知 A 的所有顺序主子式 $|A_k|>0$. $(k=1,\cdots,n)$.

用数学归纳法证明.

当 $n=1$ 时. 因为 $|A_1|>0$. 所以 $f(x_1)=a_{11}x_1^2>0$. 显然成立.

假设 $n-1$ 元时二次型充分条件成立.

欲证 n 元时二次型的充分条件也成立.

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}\left(x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\cdots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2$$
$$+a_{22}'x_2^2+2a_{23}'x_2x_3+\cdots+2a_{2n}'x_2x_n$$
$$+a_{33}'x_3^2+2a_{34}'x_3x_4+\cdots\cdots+a_{nn}'x_n^2.$$

其中 $a_{ij}'=\dfrac{1}{a_{11}}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{1j}\\ a_{i1} & a_{ij}\end{vmatrix}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$

因为 $a_{ij}=a_{ji}$. 故 $a_{ji}'=a_{ij}'$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$

为此, 只要证明上式中

$a_{22}'x_2^2+2a_{23}'x_2x_3+\cdots+2a_{2n}'x_2x_n+\cdots+a_{nn}'x_n^2$ 为正定二次型即可.

即只需证明 $\begin{vmatrix}a_{22}' & \cdots & a_{2k}'\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{k2}' & \cdots & a_{kk}'\end{vmatrix}>0$ $k=2,\cdots n$.

因 $0<|A_k|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & 0 \\ 0 & \begin{matrix}a_{22}' & \cdots & a_{2k}'\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{k2}' & \cdots & a_{kk}'\end{matrix}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}' & \cdots & a_{2k}'\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{k2}' & \cdots & a_{kk}'\end{vmatrix}$

$a_{11}>0$. $\Rightarrow \begin{vmatrix}a_{22}' & \cdots & a_{2k}'\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{k2}' & \cdots & a_{kk}'\end{vmatrix}>0$. ∎

五. 二次型的有定性.

1. 负定二次型.

定义. 设 $X^TAX=f(x_1,\dots,x_n)$. ($A^T=A$) 为一个n元实二次型.

若对 $\forall X\neq 0$ (一组不全为0的数 $x_1,\dots,x_n$). 均有 $X^TAX<0$.

则称 X^TAX 为负定二次型 (A为负定矩阵).

例. $f(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2-x_2^2-x_3^2$ 是负定二次型.

2. 半正定. 半负定.

定义. 若对 $\forall X\neq 0$, 均有 $X^TAX\geq 0$ (≤ 0)

则称二次型 X^TAX 为半正定(半负定)二次型.

它所对应的实对称阵称为半正定(半负定)阵.

例. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+2x_2x_3+x_3^2$

$$=x_1^2+(x_2+x_3)^2=y_1^2+y_2^2+0\cdot y_3^2.$$

半正定, $(x_1,x_2,x_3)=(0,1,-1)$.

3. 不定二次型.

定义. 若一个二次型既不是半正定也不是半负定的. 则称它为不定二次型.

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-x_3^2$ 不定二次型.

我们认为
是正定一定是半正定.√ "≥" "≥5"

否则 对 $\forall X\neq 0$. 有 $X^TAX\geqslant 0$
上述. 且有 $X_0\neq 0$. 使 $X_0^TAX_0=0$ } ⇒ 则 A 是半正定.

4. 实对称阵 A 是负定矩阵、则 $-A$ 是正定矩阵.

∴ A 是负定矩阵 ⟺ 负惯性指数为 n.

⟺ $(-1)^k|A_k|>0 \quad (k=1,2,\cdots,n)$.

证明: $A=\begin{pmatrix}-5 & 2 & 2\\ 2 & -6 & 0\\ 2 & 0 & -4\end{pmatrix}$ 为负定矩阵.

∵ $|A_1|=-5<0$.

$|A_2|=\begin{vmatrix}-5 & 2\\ 2 & -6\end{vmatrix}=26>0$.

$|A_3|=|A|=\begin{vmatrix}-5 & 2 & 2\\ 2 & -6 & 0\\ 2 & 0 & -4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5 & 2 & 2\\ 2 & -6 & 0\\ -8 & 4 & 0\end{vmatrix}$

$=2\begin{vmatrix}2 & -6\\ -8 & 4\end{vmatrix}=-80<0$.

∴A 为负定矩阵.

$f(x,y,z)=-5x^2-6y^2-4z^2+4xy+4xz$ 为负定二次型.