二. 分块矩阵.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

§6. 初等矩阵.

一. 初等变换.

二. 初等矩阵. —— 对单位阵施行一次初等变换得到的矩阵.

$$P(i,j) = E(i,j) = \begin{array}{c@{}l} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ -i \\ -j \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} \quad & \quad & i & j & \quad & \quad \end{array} & \end{array}$$

$$P(i(k)) = \begin{array}{c@{}l} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & k & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \cdots i \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} \quad & \quad & \quad & i & \quad & \quad & \quad \end{array} & \end{array}$$

$$P(i,j(k)) = \begin{array}{c@{}l} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & k & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ -i \\ \\ -j \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} \quad & \quad & i & j & \quad & \quad & \quad \end{array} & \end{array}$$

把E的第j行的k倍加于第i行.

或把E的第i列的k倍加于第j列.

三、初等阵的性质.

1. 引理. 对矩阵A施行一次初等行(列)变换得到的矩阵B就等于用同种类型的初等阵左(右)乘A.

证明: 设
$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}_{s\times n} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_s \end{pmatrix}_{s\times 1}$$

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{ss} \end{pmatrix}_{s\times s}$$

$$BA=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{ss} \end{pmatrix}_{s\times s}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_s \end{pmatrix}_{s\times 1} = \begin{pmatrix} b_{11}A_1+b_{12}A_2+\cdots+b_{1s}A_s \\ b_{21}A_1+b_{22}A_2+\cdots+b_{2s}A_s \\ \cdots\cdots \\ b_{s1}A_1+b_{s2}A_2+\cdots+b_{ss}A_s \end{pmatrix}$$

特别，当 $B=P(i,j)$

$$P(i,j)A=BA=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_s \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \cdots i \\ \\ \cdots j \\ \\ \\ \end{array}$$

当 $B=P(i(k))=\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ kA_i \\ \vdots \\ A_s \end{pmatrix}$

同理 $P(i,j(k))A=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i+kA_j \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_s \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \cdots i \\ \\ \cdots j \\ \\ \\ \end{array}$ ▮

2. 初等阵是可逆的.

初等阵的逆还是初等阵.

且 $P^{-1}(i,j)=P(i,j)$

$P^{-1}(i(k))=P(i(\frac{1}{k}))$ $k\neq 0$.

$P^{-1}(i,j(k))=P(i,j(-k))$.

要证 $A^{-1}=B$. 只需证 $AB=E$ 即可

证明: $\because$ $P(i,j)\cdot\underbrace{P(i,j)}_{A}=E$.

$\therefore$ $P(i,j)$ 可逆. 且 $P^{-1}(i,j)=P(i,j)$.

同理 $P(i(k))\cdot\underbrace{P(i(\frac{1}{k}))}_{A}=E$.

$|P(i,j)|=-1$ $\quad$ $|P(i(k))|=k$ $\quad$ $|P(i,j(k))|=1$

$|A|=3$. $\quad$ $\underbrace{|P(i,j)A|}_{=\,|P(i,j)|\,|A|}=-3$ $\quad$ $|A_nB_n|=|A||B|$.

四. 矩阵的等价.

1. 定义. 若矩阵A经若干次初等变换变为B. 则称A与B等价.

2. 等价的性质 $\begin{cases} \text{自反性.} \\ \text{对称性} \\ \text{传递性.} \end{cases}$

例 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\end{pmatrix}=B\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-3&-6\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\end{pmatrix}\to\left(\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&1&0\end{array}\right).$

3. 定义. 形如 $\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}$ 的矩阵称为矩阵的标准形.

五. 初等变换求逆法.

1. Th.1. 任何一个矩阵A都与形如 $\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}$ 的矩阵等价.

(它的标准形等价)

其中 $r=r(A)$.

证明: $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{s1}&a_{s2}&\cdots&a_{sn}\end{pmatrix}_{s\times n}$

① 若 $A=0$. 结论成立.

② 若 $A\neq0$. 不妨设 $a_{11}\neq0$

$A\to\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\cdots a_{1n}\\0&A_1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a_{11}&0\\0&A_1\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&0\\0&A_1\end{pmatrix}$ ......

例. 化下列矩阵为标准形.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&3&1\\1&3&2&5\\2&2&6&7\\2&4&5&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&3&1\\0&2&-1&4\\0&0&0&5\\0&2&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&-1&4\\0&0&0&5\\0&2&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&-1&4\\0&0&0&1\\0&0&0&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Th.2. A与B等价.

$\Longleftrightarrow$ $\exists$初等阵$P_1,\cdots P_l$; $Q_1,\cdots,Q_t$, 使得 $A=\overbrace{P_1P_2\cdots P_l}^{P}B\overbrace{Q_1\cdots Q_t}^{Q}$ ∎

推论: A与B等价 $\Longleftrightarrow$ $\exists$可逆阵$P\cdot Q$, 使得 $A=PBQ$ ∎

Th.3. n阶方阵A可逆

$\Longleftrightarrow$ 它能表为一系列初等阵的乘积

$\Longleftrightarrow$ 存在一系列阵 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_m$, 使 $A=Q_1Q_2\cdots Q_m$.

证明: 因为 A_n 可逆. 所以 $r(A)=n$.

$\Longrightarrow$ A与E等价.

$\xRightarrow{Th.2}$ ~~∃可逆阵~~ 存在初等阵 $Q_1,\cdots,Q_m$.

使 $A=Q_1Q_2\cdots Q_m$ ∎

Th.4. 可逆阵总可以仅经初等行变换化为单位阵. ∎

证明 由 Th.3. A 可逆 $\Longleftrightarrow A = Q_1 Q_2 \cdots Q_m E$ Q_i 均为初等阵.

$$\Longrightarrow (Q_1 Q_2 \cdots Q_m)^{-1} A = E.$$

$$\Longrightarrow Q_m^{-1} Q_{m-1}^{-1} \cdots Q_1^{-1} A = E.$$