一、$\lambda\neq0$ 是 $(A_{m\times n}B_{n\times m})_{m\times m}$ 的特征值，则 $\lambda\neq0$ 也是 $(BA)_{n\times n}$ 的特征值 ①

①. $|\lambda E-(AB)^T| \overset{?}{=} |\lambda E_n-(BA)_n| \overset{?}{=} |\lambda E_m-(AB)_m|=0$?

②. $\lambda\neq0$ 是 AB 的特征值.

∴ $|AB| \overset{?}{=} \lambda\neq0$　　　$|AB|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

③. $BA=(AB)^T$.

④. $|\lambda E-AB|=0 \Rightarrow |\lambda E-AB|^T=0 \Rightarrow |(\lambda E-AB)^T|=0$.

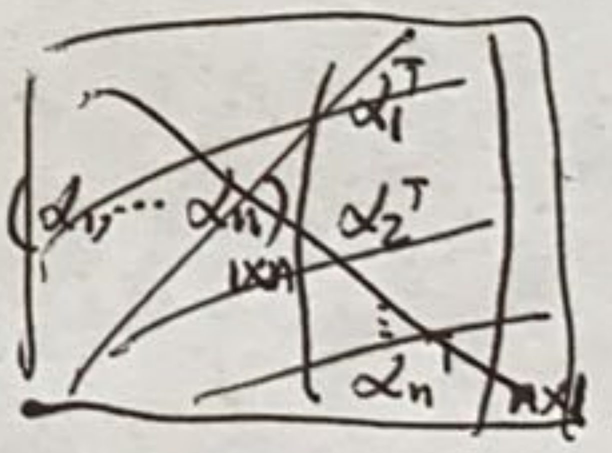
$\overset{?}{\Rightarrow} |\lambda E-B^TA^T|=0$

⑤. $BA(BX)=\lambda(BX)$.　不证 $BX\neq0$.

二、$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是规范正交向量组. A是n阶正交阵.

① 证明: $A\alpha_1,\cdots,A\alpha_n$ 也是规范正交向量组.

证明: $(A\alpha_1\cdots A\alpha_n)(A\alpha_1,\cdots,A\alpha_n)^T$



$=A(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)(\alpha_1,\cdots\alpha_n)^TA^T$

$=AEA^T=AA^T=E$.

∴ $(A\alpha_1,\cdots,A\alpha_n)$ 是正交阵.

②. $(A\alpha_1,A\alpha_2)\overset{?}{=}A^2(\alpha_1,\alpha_2)$　　$(A\alpha_1,A\alpha_2)=A(\alpha_1,\alpha_2)$.

③. $AA^T=E$.　∴ $\alpha_1,\cdots\alpha_n$ 是标准正交向量组.

∴ $\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_n^2}\overset{?}{=}1$.

§4-4. 8. 设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$. $a_1\neq 0$. $A=\alpha\alpha^T$.

(1). 证明 $\lambda=0$ 是A的n-1重特征值.

(2). 求A的特征值及A的n个线性无关的特征向量.

证明: $\alpha^T\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=k$.

$\because a_1\neq 0 \quad \therefore k\neq 0$.

$$A^2=A\cdot A=\alpha(\underline{\alpha^T\cdot\alpha})\alpha^T=kA$$

$$A^3=A^2\cdot A=kA^2$$

$$\vdots$$

$$\underline{A^n=kA^{n-1}}.$$

设 λ 是A的特征值. $\Longrightarrow \lambda^n=k\lambda^{n-1}$

$\Longrightarrow \lambda^{n-1}(\lambda-k)=0 \quad \Longrightarrow \underline{\lambda_1=0\ (n-1\text{重})}.\ \underline{\lambda_2=k\neq 0}$

是A的特征值. $\therefore$ $\lambda_1=0$ 是A的n-1重特征值.

(2). $A=\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(a_1\ a_2\cdots a_n)=\begin{pmatrix}a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n\\ a_2a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2\end{pmatrix}$.

当 $\lambda_1=0$ 时. 将 $\lambda_1=0$ 代入 $\underline{(\lambda_1E-A)}X=0$

$$(0\cdot E-A)=\begin{pmatrix}-a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n\\ -a_2a_1 & -a_2^2 & \cdots & -a_2a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -a_na_1 & -a_na_2 & \cdots & -a_n^2\end{pmatrix}\xrightarrow{a_1\neq 0}\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_2a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & \frac{a_2}{a_1} & \frac{a_3}{a_1} & \cdots & \frac{a_n}{a_1}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ - & - & - & & -\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

$\therefore\ x_1 = -\frac{a_2}{a_1}x_2 - \frac{a_3}{a_1}x_3 - \cdots - \frac{a_n}{a_1}x_n.$

$\therefore\ \lambda_1=0$ 的 $n-1$ 个线性无关的特征向量为

$$\alpha_2=\begin{pmatrix}-\frac{a_2}{a_1}\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}-\frac{a_3}{a_1}\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad \cdots\ \alpha_n=\begin{pmatrix}-\frac{a_n}{a_1}\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}.$$

当 $\lambda_2=\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = k \neq 0$ 时

~~由~~ $\cancel{(\alpha\alpha^T)\alpha = \alpha(\alpha^T\alpha)}$ 由 $(\alpha\alpha^T)\alpha = \alpha(\alpha^T\alpha)$

$\Rightarrow \cancel{A\alpha}$ $\quad \Rightarrow\ A\alpha = k\alpha$

即 α 即为 $\lambda_2=k$ 的一个无关的特征向量.

即 $\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 为 A 的 n 个无关的特征向量. ∎

4-4 6. A 为三阶实对称阵. 特征值为 $1, -1, 0$.

而 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$ 的特征向量分别是 $\begin{pmatrix}a\\2a-1\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}a\\1\\1-3a\end{pmatrix}$. 求 A.

解: $\because \lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$ 的特征向量线性无关且正交.

$\Rightarrow\ a^2+2a-1+1-3a=0.\qquad a^2-a=0 \Rightarrow a(a-1)=0.$

$\Rightarrow\ a=0$ 或 $a=1$. $\quad \cancel{\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}}$

若 $a=0$ ~~再设 $\lambda=0$ 的特征向~~, 则 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$. $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

再设 $\lambda=0$ 的特征向量为 $\alpha_3=(x_1, x_2, x_3)^T$.

则 $\begin{matrix}(\alpha_1,\alpha_3)=0\\(\alpha_2,\alpha_3)=0\end{matrix} \Rightarrow \begin{cases}-x_2+x_3=0.\\x_2+x_3=0\end{cases} \Rightarrow x_2=x_3=0.\ \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$

$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}.\qquad P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}$

$A=P\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}P^{-1}$

7. 设三阶实对称阵 A 的特征值为6, 3, 3. 特征值6的特征向量为 $P_1=(1,1,1)^T$. 求 A. ④

解: 设 $\lambda=3$ 的特征向量为 $P=(x_1, x_2, x_3)^T$.

则 $(P_1, P_2)=0 \Rightarrow x_1+x_2+x_3=0$.

$x_1=-x_2-x_3$.

$\therefore P_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$. $P_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

$P=(P_1, P_2, P_3)$ $\qquad P^{-1}AP=\begin{pmatrix}6&&\\&3&\\&&3\end{pmatrix}$.

4-3. 12. A_3 有3个特征值 $\underset{\lambda_1}{1}, \underset{\lambda_2}{0}, \underset{\lambda_3}{-1}$. 对应的特征向量分别为 $\underset{\alpha_1}{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}, \underset{\alpha_2}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}$, $\underset{\alpha_3}{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}$. 又知3阶方阵 B 满足 $B=PAP^{-1}$. $P=\begin{pmatrix}3&0&1\\0&1&-2\\1&4&0\end{pmatrix}$.

求 B 的特征值与特征向量.

解: 方法一. ① $A=P\Lambda P^{-1}=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&-1\end{pmatrix}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1}$.

② 求B.

③ 求 B 的特征值. 特征向量.

方法二. $B=PAP^{-1}$. $\therefore$ A与B相似. 相似阵的特征值相同.

$\therefore$ B的特征值也为 $\lambda_1=1$. $\lambda_2=0$. $\lambda_3=-1$

又 $\underline{B=PAP^{-1}}$. $\qquad$ 设 $A\alpha=\lambda\alpha$. $\alpha\neq0$ 则

$\Rightarrow BP=PA \Rightarrow B(P\alpha)=P\underline{A\alpha}=\lambda(P\alpha)$

$\Rightarrow P\alpha$ 是 B 的属于特征值 λ 的特征向量.

$\therefore \beta_1=P\alpha_1$. $\beta_2=P\alpha_2$. $\beta_3=P\alpha_3$ 即为 B 的属于特征值 λ_1. λ_2. λ_3 的特征向量.

4-3. 证若 A 与 B 相似，则 $(\lambda E-A)^k$ 与 $(\lambda E-B)^k$ 相似。 5.

k 为任意正整数。

~~证明：∵ A 与 B 相似 ∴ $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$.~~

~~即 A 与 B 的特征值相同.~~

~~$(\lambda E-A)^k$ 与 $(\lambda E-B)^k$ 的特征值也相同.~~

~~∴ $(\lambda E-A)^k$ 与 $(\lambda E-B)^k$ 相似.~~

证明： ∵ A 与 B 相似. ∴ $P^{-1}AP=B$.

$$(\lambda E-B)^k=(\lambda E-P^{-1}AP)^k=\underline{P^{-1}}(\lambda E-A)^k\underline{P}.$$

∴ $(\lambda E-B)^k$ 与 $(\lambda E-A)^k$ 相似.

11. A_5. 有5个无关的特征向量. 证明：A^T 也有5个无关的特征向量.

证明：据题意 ∴ A 可对角化.

即存在可逆阵 P. 使 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_5\end{pmatrix}$.

两边转置 $P^TA^T(P^{-1})^T=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_5\end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow [(P^T)^{-1}]^{-1}A^T\underline{(P^T)^{-1}}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_5\end{pmatrix}.$$

$\exists\ Q=(P^T)^{-1}$ 使 $Q^{-1}A^TQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_5\end{pmatrix}$

A^T 与对角阵相似. ∴ A^T 有5个无关的特征向量.

3. 设 A与B 相似, C与D 相似. 证明 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ 相似.

证明: ∵ A与B 相似, C与D 相似.

∴ ∃可逆阵 P_1, P_2, 使 $P_1^{-1}AP_1=B$, $P_2^{-1}CP_2=D$.

取 $Q=\begin{pmatrix} P_1 & \\ & P_2 \end{pmatrix}$ 则 Q可逆. ($|Q|=|P_1||P_2|\neq 0$).

且 $Q^{-1}\begin{pmatrix} A & \\ & C \end{pmatrix}Q=\begin{pmatrix} P_1^{-1} & \\ & P_2^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \\ & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_1 & \\ & P_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P_1^{-1}AP_1 & \\ & P_2^{-1}CP_2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} B & \\ & D \end{pmatrix}$. ∴ $\begin{pmatrix} A & \\ & C \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} B & \\ & D \end{pmatrix}$ 相似 ∎

2. A, B 都是 n 阶方阵, 且 $|A|\neq 0$. 证明 AB 与 BA 相似.

证明: ∵ $|A|\neq 0$. ∴ A可逆. A^{-1}存在.

$A^{-1}AB=B$.

两边右乘 $A^{-1}(AB)A=BA$.

∴ AB 与 BA 相似.

4-3. 6. 设 $p=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量.

(1). 求 a. b 及 p 所对应的特征向量.

(2). A能否相似对角化. 并说明理由.

解: 设 $Ap=\lambda p$.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2-1-2=\lambda_1 \\ 5+a-3=\lambda_1 \\ -1+b+2=-\lambda_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=-1 \\ \cancel{a=-3} \\ b=0. \end{cases} \qquad (\lambda+1)$$

(2). $$|\lambda E-A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & -2 \\ -5 & \lambda+3 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_2-c_3} \begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 & -2 \\ \lambda+1 & \lambda+3 & -3 \\ -(\lambda+1) & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & \lambda+3 & -3 \\ -1 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & \lambda+3 & \lambda+1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)(\lambda^2+3\lambda-\lambda+1) = (\lambda+1)(\lambda^2+2\lambda+1) = (\lambda+1)^3.$$

$\lambda=-1$ (三重).

$$-1E-A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(-1\cdot E-A)=2 \neq 3-3$. ∴ 不能对角化.

$$\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}. \qquad \alpha = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\alpha_1.$$

$$\beta = \frac{\alpha}{\|\alpha\|} = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad \beta = \frac{\cancel{\|\frac{1}{6}\alpha_1\|}\ \frac{1}{6}\alpha_1}{\|\frac{1}{6}\alpha_1\|} = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}.$$