一. 化二次型为标准形 方法一. 配方法 有平方项 / 没有平方项.

方法二. 成套初等变换法 有平方项 / 没有平方项.

$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{成套}} \begin{pmatrix} \Lambda \\ C \end{pmatrix}$. $\exists$可逆阵C. 使得 $C^TAC=\Lambda$

①

二. Th. 任何一个n元二次型均可经非退化的线性替换化为标准形

$\Longleftrightarrow$ 任何一个对称阵A均与一个对角阵Λ合同.

§3. 唯一性.

一. 二次型的规范形.

复数域上: 标准形非零平方项前的系数全为1 — 规范形

实数域上: 标准形非零平方项前的系数为1或-1 — 规范形

Th: 任何一个二次型. 经一个非退化的线性替换可以化为规范形. 且规范形是唯一的. (包括复数域与实数域).

$f = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$

在复数域上. $f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$. 令 $\begin{cases} x_1 = y_1 \\ \sqrt{-1}\, x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$.

在实数域上. $f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ ✓ 令 $\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_3 \\ x_3 = y_2 \end{cases}$.

$f = z_1^2 - z_2^2 + z_3^2$. ✓

$f = -w_1^2 + w_2^2 + w_3^2$. ✓

下面证明唯一性.（只要实数域）.

设 $f(x_1,\dots,x_n)=X^TAX \qquad A^T=A.$

$$f(x_1,\dots x_n)\xrightarrow[|C_1|\neq0]{X=C_1Y} y_1^2+\dots+y_p^2-y_{p+1}^2-\dots-y_r^2 \qquad r=r(A).$$

$$f(x_1,\dots,x_n)\xrightarrow[|C_2|\neq0]{X=C_2Z} z_1^2+\dots+z_q^2-z_{q+1}^2-\dots-z_r^2 \qquad r=r(A).$$

只需证明 $p=q$.

$$y_1^2+\dots+y_p^2-y_{p+1}^2-\dots-y_r^2=z_1^2+\dots+z_q^2-z_{q+1}^2-\dots-z_r^2 \quad ①.$$

（用反证法证） 假设 $p>q$.

$X=C_1Y=C_2Z$

$Z=(C_2^{-1}C_1)Y=GY.$ $\qquad G=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12}\cdots g_{1n}\\ g_{21} & g_{22}\cdots g_{2n}\\ \cdots & \cdots\\ g_{n1} & g_{n2}\cdots g_{nn}\end{pmatrix}.$

$$\begin{cases} z_1=g_{11}y_1+g_{12}y_2+\dots+g_{1n}y_n.\\ z_2=g_{21}y_1+g_{22}y_2+\dots+g_{2n}y_n\\ \vdots\\ z_n=g_{n1}y_1+g_{n2}y_2+\dots+g_{nn}y_n\end{cases} \quad ②$$

代入.

考虑. $\begin{cases} g_{11}y_1+g_{12}y_2+\dots+g_{1n}y_n=0\\ \cdots\\ g_{q1}y_1+g_{q2}y_2+\dots+g_{qn}y_n=0\\ y_{p+1}=0\\ \vdots\\ y_n=0\end{cases}$ $\quad ③$

含 n 个未知量. 会有 $q+(n-p)=n-(p-q)<n$ 个方程.

故有非零解. 不妨设非零解为 $(k_1,\dots,k_p,\ 0,\dots,0)$.

$\Rightarrow k_1^2+\dots+k_p^2>0. \Rightarrow z_1=\dots=z_q=0.$

$-z_{q+1}^2-\dots-z_r^2\leq0.$ 矛盾! $\Rightarrow p\leq q \Rightarrow p=q$!

同理 $p\geq q$

二次型规范形的唯一性 Th —— 惯性定理.
(实二次型).

四. 定义.

定义. 在实二次型的规范形中, 正平方项的个数 p 称为二次型 $f(x_1,\dots,x_n)$ 的正惯性指数. 负平方项的个数称为二次型 $f(x_1,\dots,x_n)$ 的负惯性指数. $p-q$ 称为二次型的符号差. 即 $p-q=p-(r-p)=2p-r$ 符号差.

$$f=x_1^2+x_2^2-3x_3^2 \quad = x_1^2-x_2^2+3x_3^2.$$

$$=x_1^2+x_2^2-x_3^2.\quad y_1^2+y_2^2+y_3^2 \qquad y_1^2+y_2^2+y_3^2.$$

Th. 任何一个实对称阵 A 均与 $\begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_{r-p} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ 合同.

$$= \begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccccccccc} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & -1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \}\,p \\ \}\,r-p \\ \}\,n-r \end{array} \end{array}$$

任何复对称阵 A 与 $\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \}\,r\text{个} \\ \}\,n-r\text{个} \end{array}$ 合同.

$$= \begin{pmatrix} E_r & \\ & 0 \end{pmatrix}.$$

2. 证明：秩为 r 的对称阵可表为 r 个秩为 1 的对称阵之和；

(思路：任何一个对称阵与一个对角阵合同).

证明：设 A 为对称阵，且 $r(A)=r$.

据 Th，∃可逆阵 C，使 $C^TAC=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \lambda_r & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0\end{pmatrix}=\Lambda$　$\lambda_1,\cdots,\lambda_r\neq 0$

$$\Rightarrow A=(C^T)^{-1}\Lambda C^{-1}$$

$$=(C^T)^{-1}\left[\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ & & & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & 0\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \lambda_r \\ & & & & 0\end{pmatrix}\right]C^{-1}$$

$$=(C^T)^{-1}\Lambda_1C^{-1}+(C^T)^{-1}\Lambda_2C^{-1}+\cdots+(C^T)^{-1}\Lambda_rC^{-1}.$$

$$=A_1+A_2+\cdots+A_r.$$

此时 $r(A_i)=1$. ∎

3. 证明：$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}\lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n}\end{pmatrix}$ 合同.

$i_1\cdots i_n$ 是 $1,\cdots,n$ 的一个排列.

证明：
$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2+\cdots+\lambda_nx_n^2.$$
$$g(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\lambda_{i_1}y_1^2+\lambda_{i_2}y_2^2+\cdots+\lambda_{i_n}y_n^2.$$

令 $\begin{cases}y_1=x_{i_1}\\ y_2=x_{i_2}\\ \vdots\\ y_n=x_{i_n}\end{cases}$　$g\longrightarrow f$，再与二次型的矩阵之合同性.

4. 设A是一个n阶方阵，证明

1)、A是反对称阵 ⟺ 对任一n维向量X，有$X^TAX=0$.

2)、如果A是对称阵，且对任何一个n维向量X，有$X^TAX=0$，那么A=

证明：1)."⟹" 已知A是反对称阵．（要证对∀X，有$X^TAX=0$）．

即 $a_{ii}=0$． $a_{ij}=-a_{ji}$． $\forall i,j$.

$\therefore$对X有 $X^TAX=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=\sum_{i<j}(a_{ij}+a_{ji})x_ix_j=0$.

"⟸"．已知对任一n维向量X．有$X^TAX=0$．（要证A是反对称阵 即要证 $a_{ii}=0$，$a_{ij}=-a_{ji}$ $\forall i,j$）

取 $X=\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0)^T$，$\varepsilon_2=(0,1,\cdots,0)^T$，…，$\varepsilon_n=(0,\cdots,0,1)^T$

则 $X^TAX=(1,0,\cdots,0)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\cdots a_{1n}\\a_{21}&a_{22}\cdots a_{2n}\\\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}\cdots a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=a_{11}=0$.

再取 $X=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\\0\\\vdots\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\\\-i\\\\\\-j\\\\\\\\\end{array}$　　$X^TAX=a_{ii}+a_{ji}+a_{ij}+a_{jj}=0$

$\Rightarrow a_{ij}+a_{ji}=0\Rightarrow a_{ij}=-a_{ji}$. $\forall i,j$

$\therefore$ A为反对称阵.

2)．由题设 ~~A~~ A是对称阵． $A^T=A$．

且由(1)知 A是反对称阵． $A^T=-A$．

$\Rightarrow\ A=-A\ \Rightarrow\ 2A=0\ \Rightarrow\ A=0$.

5. 如果把实n级对称阵按合同分类．即两个实n级对称阵属于同一类当且仅当它们合同．问共有几类？

证明：两个实n级对称阵合同 ⟺ 两个实对称矩阵正惯性指数和秩相等．（$p_1=p_2$，$r_1=r_2$）

r=0 的A只有1个　P=r=0

r=1 的A有2个．　P=0 或 P=1．

r=2 的A有3个．　P=0，1，2．

r=3 的A有4个．　P=0，1，2，3

r=n 的A有n+1个　P=0，1，…，n．

$\therefore$ 一共可分为 $1+2+\cdots+n+1=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ 类