线性空间的维数、基、坐标.

1. V中有n个无关的向量，但没有更多数目无关的向量，则称V为n维的. 能找到任意多个无关的向量，则称V是无限的.

2. V_n 线性空间中n个无关的向量称为V的一组基.

3. $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是n维线性空间中的一组基.
   则 $\forall \alpha$，$\exists k_1, \dots, k_n \in P$.
   使 $\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n$.
   则称 $(k_1, \dots, k_n)$ 为 α 在基 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 下的坐标.
   R^n.

§4. 基变换与坐标变换.

设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 与 $\beta_1, \dots, \beta_n$ 是V中的两组基.

$\gamma = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n$.

$\gamma = k_1'\beta_1 + \cancel{k_2'}\beta_2 + \dots + k_n'\beta_n$.

一. 过渡矩阵.

1. 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 与 $\beta_1, \dots, \beta_n$ 是n维线性空间V中的两组基.

且 $\begin{cases} \beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \dots + a_{n1}\alpha_n \\ \beta_2 = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{n2}\alpha_n \\ \vdots \\ \beta_n = a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \dots + a_{nn}\alpha_n \end{cases}$

将上式写成形式表示式.

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

或 $$(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\underline{\underline{\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}}}\quad\cdots\cdots(1).$$

称 $$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

为由基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵.

2. 过渡矩阵是可逆的.

二. 运算律.

设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 是线性空间 V 中的两个向量组.

$A=(a_{ij})_n$. $B=(b_{ij})_n$.

则. 1°. $((\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A)B=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)(AB)$

2°. $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A+(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)B$

$=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)(A+B)$.

3°. $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A+(\beta_1,\cdots,\beta_n)A$

$=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n)A$.

三、ξ在两组基下坐标间的关系.

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$；$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 是 V_n 中两组不同的基.
再设向量ξ在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$；$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 下的坐标分别为
$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. $(x_1', x_2', \cdots, x_n')$.

即 $\xi = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$.

$\xi = x_1'\beta_1 + x_2'\beta_2 + \cdots + x_n'\beta_n$.

$$\xi = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{把(1)式代入}}{=\!=\!=} (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

又 $$\xi = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关.

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

由基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的过渡矩阵.

或
$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

例. 在n维线性空间 P^n 中.

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = (1, 0, \cdots, 0) \\ \varepsilon_2 = (0, 1, \cdots, 0) \\ \vdots \\ \varepsilon_n = (0, 0, \cdots, 1) \end{cases}$$ 是一组基.
$$\begin{cases} \varepsilon_1' = (1, 1, \cdots, 1) \\ \varepsilon_2' = (0, 1, \cdots, 1) \\ \vdots \\ \varepsilon_n' = (0, 0, \cdots, 0, 1) \end{cases}$$ 也是一组基.

$\forall \xi = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$

在基 $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ 下的坐标为 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

在基 $(\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_n')$ 下的坐标为 $(a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_2, \cdots, a_n - a_{n-1})$.

下面用过渡矩阵来做.

显然
$$\begin{cases} \varepsilon_1' = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n. \\ \varepsilon_2' = \quad\quad \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n. \\ \cdots\cdots \\ \varepsilon_n' = \quad\quad\quad\quad\quad \varepsilon_n \end{cases}$$

$\therefore$ 从基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 到基 $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_n'$ 的过渡矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

而
$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

而 $(A,E)=\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1&0&0&\cdots&0&0&1&0&0&\cdots&0&0\\ 1&1&0&\cdots&0&0&0&1&0&\cdots&0&0\\ 1&1&1&\cdots&0&0&0&0&1&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\ 1&1&1&\cdots&1&0&0&0&0&\cdots&1&0\\ 1&1&1&\cdots&1&1&0&0&0&\cdots&0&1 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[\text{每行减上一行}]{\text{从最后一行开始}}\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1&0&0&\cdots&0&0&1&0&0&\cdots&0&0\\ 0&1&0&\cdots&0&0&-1&1&0&\cdots&0&0\\ 0&0&1&\cdots&0&0&0&-1&1&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&\cdots&1&0&0&0&0&\cdots&1&0\\ 0&0&0&\cdots&0&1&0&0&0&\cdots&-1&1 \end{array}\right)$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix} 1&0&0&\cdots&0&0\\ -1&1&0&\cdots&0&0\\ 0&-1&1&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&\cdots&-1&1 \end{pmatrix}.$$

因此，$\begin{pmatrix} x_1'\\ x_2'\\ \vdots\\ x_n' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1&0&0&\cdots&0&0\\ -1&1&0&\cdots&0&0\\ 0&-1&1&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&\cdots&-1&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3\\ \vdots\\ a_n \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow\begin{cases} x_1'=a_1\\ x_2'=a_2-a_1\\ x_3'=a_3-a_2\\ \vdots\\ x_n'=a_n-a_{n-1} \end{cases}$$

$\therefore\ \xi=(a_1,\cdots,a_n)$ 在基 $\varepsilon_1',\cdots,\varepsilon_n'$ 下的坐标为

$(a_1,\ a_2-a_1,\ a_3-a_2,\cdots,a_n-a_{n-1})$.

3. 3). 全体n阶实对称阵 V，对于矩阵的加法和数量乘法，构成线性空间. P—实数域.

5). 全体实数的二元数列，对于如下的运算

$$(a_1, b_1)\oplus(a_2, b_2)=(a_1+a_2,\ b_1+b_2+a_1a_2)$$

$$k\circ(a_1, b_1)=\left(ka_1,\ kb_1+\frac{k(k-1)}{2}a_1^2\right),$$

$V=\{(a, b)\mid a, b \text{是实数}\}$. P—实数域.

解：显然 V 是非空的. V 对两种运算是封闭的.

$a\oplus b=a^b$, $b\oplus a=b^a$.

且这两种运算满足：

①. $(a_1, b_1)\oplus(a_2, b_2)=(a_1+a_2,\ b_1+b_2+a_1a_2)$

$=(a_2+a_1,\ b_2+b_1+a_2a_1)=(a_2, b_2)\oplus(a_1, b_1)$.

②. 结合 $((a_1, b_1)\oplus(a_2, b_2))\oplus(a_3, b_3)$

$=(a_1, b_1)\oplus((a_2, b_2)\oplus(a_3, b_3))$.

③. $(a_1, b_1)\oplus(0, 0)=(a_1+0,\ b_1+0+a_1\cdot 0)=(a_1, b_1)$.

$\therefore (0, 0)$ 是 V 中的零元素.

④. 若 $(a_1, b_1)+(x, y)=(a_1+x,\ b_1+y+a_1x)=(0, 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1+x=0 \\ b_1+y+a_1x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-a_1 \\ y=a_1^2-b_1 \end{cases}$$

$\therefore (-a_1,\ a_1^2-b_1)$ 是 (a_1, b_1) 的负元素.

$l-1+kl-l.$

⑤. $1\circ(a,b)=\left(1\cdot a,\ 1\cdot b+\frac{1\cdot(1-1)}{2}a^2\right)=(a,b)$

⑥. $k\circ[l\circ(a,b)]=k\circ\left[la,\ lb+\frac{l(l-1)}{2}a^2\right]$

$=\left(kla,\ klb+\frac{kl(l-1)}{2}a^2+\frac{k(k-1)}{2}l^2a^2\right)$

$=\left(kla,\ klb+\frac{kl(kl-1)}{2}a^2\right)=(kl)\circ(a,b)$

⑦. $k\circ(a,b)\oplus l\circ(a,b)$

$=\left(ka,\ kb+\frac{k(k-1)}{2}a^2\right)\oplus\left(la,\ lb+\frac{l(l-1)}{2}a^2\right).$

$=\left(ka+la,\ kb+\frac{k(k-1)}{2}a^2+lb+\frac{l(l-1)}{2}a^2+kla^2\right).$

$=\left[(k+l)a,\ (k+l)b+\frac{(k+l)(k+l-1)}{2}a^2\right]$

$=(k+l)\circ(a,b).$

⑧. $k\circ[(a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2)]$

$=k\circ(a_1,b_1)\oplus k\circ(a_2,b_2).$

∴ V能构成实数域上的线性空间.

8. 4). $A=\begin{pmatrix}1 & & \\ & \omega & \\ & & \omega^2\end{pmatrix}.$ $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}.$ 实数域.

$V=\left\{f(A)\ \middle|\ A=\begin{pmatrix}1 & & \\ & \omega & \\ & & \omega^2\end{pmatrix}\ \ \omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right\}.$

$f(A)=a_0E+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_nA^n.$ a_i是实数.

解: $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$. $\omega^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$. $\omega^3=1$. $1,\omega,\omega^2$.

$$\omega^n=\begin{cases}1 & n=3k.\\ \omega & n=3k+1\\ \omega^2 & n=3k+2.\end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&&\\&\omega&\\&&\omega^2\end{pmatrix}\quad A^2=\begin{pmatrix}1&&\\&\omega^2&\\&&\omega\end{pmatrix}.\quad A^3=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}=E.$$

....

作业 P182. 9, (1). (2).
10.

$$A^n=\begin{cases}E & n=3k\\ A & n=3k+1\\ A^2 & n=3k+2.\end{cases}$$

因此. 对于 V 的任意向量

$$f(A)=a_0E+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_nA^n.$$

均可写成 $f(A)=b_0E+b_1A+b_2A^2$.

E. A. A^2 是 V 的一组基. V 是3维的.

下面验证 E, A. A^2 线性无关.

设 $k_0E+k_1A+k_2A^2=0$.

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}k_0&&\\&k_0&\\&&k_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}k_1&&\\&k_1\omega&\\&&k_1\omega^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}k_2&&\\&k_2\omega^2&\\&&k_2\omega\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}k_0+k_1+k_2=0\\ k_0+\omega k_1+\omega^2k_2=0\\ k_0+\omega^2k_1+\omega k_2=0\end{cases}$$

其系数矩阵行列式 $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\omega&\omega^2\\1&\omega^2&\omega\end{vmatrix}$

$=3(\omega^2-\omega)=-3\sqrt{3}i\neq0$

故 $k_0=k_1=k_2=0$. $\therefore$ E. A. A^2 线性无关.