一. 二次型的标准形 —— 只有平方项. 没有交叉项.

二. 化二次型为标准形

1、配方法.

Th. 任何一个二次型经非退化的线性替换化为标准形.

Th. 任何一个对称阵 A 都与一个对角阵 Λ 合同.

合同阵的秩是否相同? 为什么?

$$\underline{C}^T A \underline{C} = B. \qquad C \text{ 可逆}.$$

例. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$

$$= (x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+2x_3)^2+0\cdot x_3^2$$

$$= y_1^2+y_2^2+0\cdot y_3^2 \qquad X=CY.\ C\text{是可逆}.$$

$$Y=C^{-1}X.$$

$$Y=\underline{Q}X.$$

共中 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=y_1 \\ x_2+2x_3=y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=y_1-y_2+y_3 \\ x_2=y_2-2y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}$

$X=CY.\qquad C=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}.$

$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}. \qquad B=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}$

A与B合同.

2. 成套初等变换法.

$$P(i(k))=\begin{pmatrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&k&&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\\\ -i\\\\\\\end{array} \qquad P^T(i(k))=P(i(k)).$$

$$P(i,j)=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&0&\cdots&1&&\\&&\vdots&\ddots&\vdots&&\\&&1&\cdots&0&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\\\ -i\\\\ -j\\\\\\\end{array} \qquad P^T(i,j)=P(i,j).$$

$$P(i,j(k))=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&\cdots&k&&\\&&&\ddots&\vdots&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\\\ \cdots i\\\\ \cdots j\\\\\\\end{array}\\ \begin{array}{cc}\vdots&\vdots\\ i&j\end{array}\end{array} \qquad P^T(i,j(k))=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&\vdots&\ddots&&&\\&&k&\cdots&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\\\ -i\\\\ -j\\\\\\\end{array}\\ \begin{array}{cc}\vdots&\vdots\\ i&j\end{array}\end{array}$$

若 A 与 B 合同. $\exists$ 可逆阵 C. 使 $B=C^TAC$.

C 可逆. $C=E\,\underrightarrow{P_1P_2\cdots P_s}$ $\quad P_i$ 均为初等阵.

$$B=(P_1P_2\cdots P_s)^TA(P_1P_2\cdots P_s)$$

$$B=\underleftarrow{P_s^T\cdots P_2^TP_1^T}\,A\,\underrightarrow{P_1P_2\cdots P_s}.$$

$$\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{成套}}\begin{pmatrix}B\\C\end{pmatrix}\to\Lambda.$$

例. 用成套初等变换法化二次型为标准形. 并写出所做的非退化线性替换

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$$

解：f 的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc}1&1&1\\1&2&2\\1&2&1\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{\text{交换}}\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&1\\0&1&0\\\hline 1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\\\hline 1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{array}\right)\rightarrow\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\\2&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$\therefore f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+y_2^2-y_3^2$. 其中 $C=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$

即 $\begin{cases}x_1=y_1-y_2\\x_2=y_2-y_3\\x_3=y_3\end{cases}$.

例2. 用成套初等变换法化二次型为标准形

$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$.

解：f 的矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-3\\1&-3&0\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-3\\1&-3&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&-3\\-2&-3&0\\1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc}2&1&-2\\1&0&-3\\-2&-3&0\\\hline 1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{array}\right)\rightarrow\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-\frac{1}{2}&-2\\\cancel{-2}&-2&-2\\1&-\frac{1}{2}&1\\1&\frac{1}{2}&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$\times 1$ $\times(-\frac{1}{2})$ $\times 1$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-\frac{1}{2}&-2\\0&-2&-2\\1&-\frac{1}{2}&1\\1&\frac{1}{2}&1\\0&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0\\0&-2&6\\1&-\frac{1}{2}&3\\1&\frac{1}{2}&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\times(-4)}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&6\\1&-\frac{1}{2}&3\\1&\frac{1}{2}&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$\times(-4)$ $\times 2$

$\therefore f=2y_1^2-\frac{1}{2}y_2^2+6y_3^2$

$X=C_1Y$

$C_1=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&3\\1&\frac{1}{2}&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&6\\1&-1&3\\1&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\times 2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&6\\1&-1&3\\1&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}\times\frac{1}{\sqrt2}&\times\frac{1}{\sqrt2}&\times\frac{1}{\sqrt6}\end{matrix}$$

$$\therefore f=2z_1^2-2z_2^2+6z_3^2$$

$$x=C_2z,\quad C_2=\begin{pmatrix}1&-1&3\\1&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt2}&0&0\\0&-\frac{2}{\sqrt2}&0\\0&0&\frac{6}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{3}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}\\0&0&\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}\begin{matrix}\times\frac{1}{\sqrt2}\\\times\frac{1}{\sqrt2}\\\times\frac{1}{\sqrt6}\end{matrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{3}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}\\0&0&\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{3}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt2}\\0&\frac{1}{\sqrt6}&0\end{pmatrix}$$

$$\therefore f=w_1^2+w_2^2-w_3^2.$$

§3. 唯一性.

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$$

$$=2y_1^2-2y_2^2+6y_3^2 \quad ✓ \qquad \begin{cases}y_1=\frac{1}{\sqrt2}z_1\\y_2=\frac{1}{\sqrt2}z_2\\y_3=\frac{1}{\sqrt6}z_3\end{cases}$$

$$=z_1^2-z_2^2+z_3^2. \quad ✓$$

$$=w_1^2+w_2^2-w_3^2. \quad \text{实数域} \qquad \begin{cases}w_1=z_1\\w_2=z_3\\w_3=z_2\end{cases}$$

$\sqrt{-1}=i.$

$i^2=-1.$

$$=v_1^2+v_2^2+v_3^2 \quad \text{复数域.}$$

结论：二次型的标准形不唯一．而与所做的非退化的线性替换有关．

一. 二次型的规范形.

在复数域上，若标准形非零平方项前的系数全为1.

在实数域上，若标准形非零平方项前的系数为1或者-1.

这样的标准形称为二次型的规范形.

1. 在复数域上讲.

Th. 任何一个复系数的二次型. 经过一个适当的非退化线性替换可以化为规范形，且规范形是唯一的.

证明：先证可以化为规范形.

$$X^TAX \xrightarrow[\substack{X=C_1Y \\ |C_1|\neq 0}]{A^T=A} d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ry_r^2+0\cdot y_{r+1}^2+\cdots+0\cdot y_n^2.$$

其中 $r=r(A)$ 　　$d_i\neq 0$. $i=1,\cdots,r$.

再令
$$\begin{cases} y_1=\dfrac{z_1}{\sqrt{d_1}} \\ \vdots \\ y_r=\dfrac{z_r}{\sqrt{d_r}} \\ y_{r+1}=z_{r+1} \\ \vdots \\ y_n=z_n \end{cases}$$

$Y=C_2Z$. $C_2=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{d_1}} & & & \\ & \frac{1}{\sqrt{d_2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{d_n}} \end{pmatrix}$

则 $X^TAX=z_1^2+\cdots+z_r^2+0\cdot z_{r+1}^2+\cdots+0\cdot z_n^2$.

例. $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 2x_2^2 + 6x_3^2$.

在复数域看

令 $\begin{cases} \sqrt{2}\, x_1 = y_1 \\ \sqrt{-2}\, x_2 = y_2 \\ \sqrt{6}\, x_3 = y_3 \end{cases}$ $\quad f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

规范形.

$i^2 = -1$. $\sqrt{-1} = i$.

Th. 在实数域上的二次型，经一非退化的线性替换可以化为规范形，且规范形是唯一的.

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 2x_2^2 + 6x_3^2$$

在实数域上看. $f(x_1, x_2, x_3) = \underline{y_1^2 + y_2^2 - y_3^2}$.

规范形.