一. 维数. 基. 坐标.

①

1. 线性空间V中有n个无关的向量. 而没有更多数目无关的向量. 则称线性空间是n维的. 若能找到任意多个无关的向量. 则称V是无限维的.

2. 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是n维线性空间中n个无关的向量. 且对 $\forall \beta \in V$. 均能找到 $k_1, \cdots, k_n$. 使的

$$\beta = k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n.$$

则称 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为V的一组基. $(k_1, \cdots, k_n)$ 为 β 在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标.

3. Th. n维线性空间中n个无关的向量是V的一组基.

二. 过渡矩阵.

1. 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$; $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 是n维线性空间V中的两组基.

且 $$\begin{cases} \beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \cdots + a_{n1}\alpha_n \\ \beta_2 = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{n2}\alpha_n \\ \vdots \\ \beta_n = a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \cdots + a_{nn}\alpha_n \end{cases}$$

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ - - & - \quad - - \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}$$

则称 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdot \cdot & \cdot \quad \cdot \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}$ 为由基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \cdots \beta_n$ 的过渡矩阵.

2. 过渡矩阵是可逆的.

三. 向量与在不同基下坐标间的关系.

与在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

在基 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 下的坐标 $(x_1', x_2', \cdots, x_n')$

则
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

其中A为由基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 到 $\beta_1, \cdots \beta_n$ 的过渡矩阵.

或
$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

第九章 欧几里得空间. R^n.

§1. 定义与基本性质.

一. 概念.

定义. 设V是实数域R上的一个线性空间. 在V上定义了一个二元实函数. 称为内积, 记为 (α, β).

它具有以下性质.

1). $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$

2). $(k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta)$

3). $(\alpha+\beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$

4). $(\alpha, \alpha) \geq 0$ 当且仅当 $\alpha=0$, $(\alpha, \alpha)=0$.

其中 α, β, γ 是 V 中任意向量. k 是任意实数. 这样的线性空间称为欧几里得空间, 简称欧氏空间.

例1. R^n. $\alpha=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$. $\beta=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$.

$(\alpha, \beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$.

例2. $[a, b]$上所有的连续实函数构成线性空间 $C(a, b)$.

定义内积 $(f, g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$.

满足, 1). $(f, g)=\int_a^b f(x)g(x)dx=\int_a^b g(x)f(x)dx=(g, f)$.

2). $(kf, g)=\int_a^b kfg\,dx=k\int_a^b f\cdot g\,dx=k(f, g)$.

3). $(f+g, h)=\int_a^b (f+g)\cdot h\,dx$

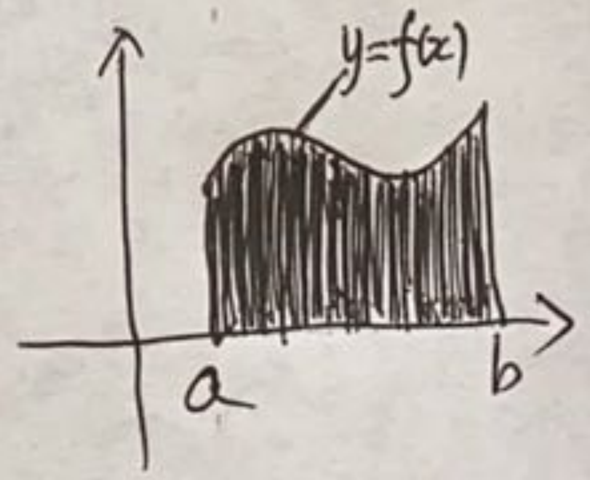
$=\int_a^b f\cdot h\,dx+\int_a^b g\cdot h\,dx$

$=(f, h)+(g, h)$.

4). $(f, f)=\int_a^b f^2 dx\geq 0$

且 $(f, f)=0 \Longleftrightarrow f=0$.

$\therefore$ $C(a, b)$ 构成一个欧氏空间.



$\sum_i x_i = x_1+x_2+\cdots$

$\int_a^b f(x)dx=S$. $\int_a^b A(x)dx=V$.

$=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

例、 $\alpha=(x_1,y_1)$，$\beta=(x_2,y_2)\in R^2$.

1. $(\alpha,\beta)=x_1x_2+y_1y_2$ 可以做 R^2 的内积.

$\boxed{\begin{array}{l} a\oplus b=ab. \\ a\oplus b=a^b. \end{array}}$

2. 设 $(\alpha,\beta)=5x_1y_1+8x_2y_2$.

$\neq$

$(\beta,\alpha)=5x_2y_2+8x_1y_1$.

$\therefore$ $(\alpha,\beta)=5x_1y_1+8x_2y_2$ 不能做为内积.

3. $(\alpha,\beta)=x_1y_1+x_2^2y_2^2$

$\neq$

$(\beta,\alpha)=x_2y_2+x_1^2y_1^2$.

$(\alpha,\beta)=x_1y_1+x_2^2y_2^2$ 不能做内积.

理想.
主理想.
素理想.

二、欧几里得空间的一些性质.

1. 长度.

1°. $|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$

$|\alpha|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$ $\quad\alpha\in R^n$.

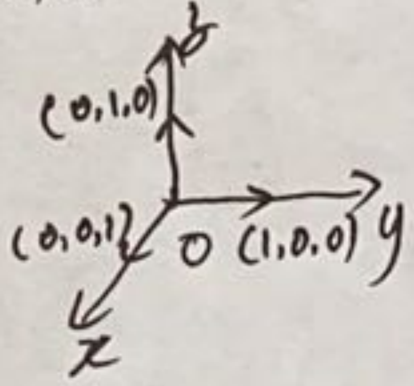
2°. $|k\alpha|=|k||\alpha|$

$|k\alpha|=\sqrt{(k\alpha,k\alpha)}=\sqrt{k^2(\alpha,\alpha)}=|k|\sqrt{(\alpha,\alpha)}=|k||\alpha|$.

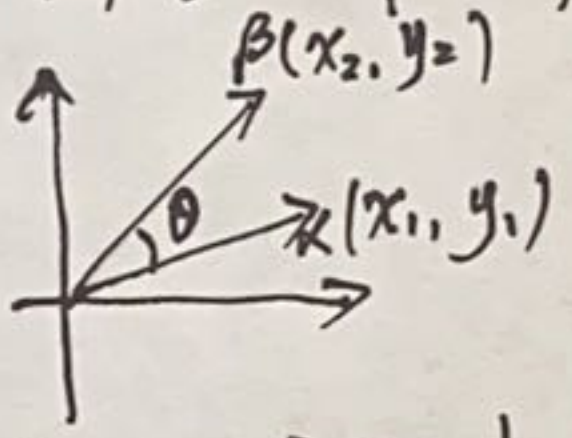
3°. 长度为1的向量称为单位向量.

若 $\alpha\neq0$，$\frac{\alpha}{|\alpha|}$ 是一个与α方向一致，长度为1的向量，也是单位向量.

将向量α单位化 $\alpha\neq0$.



2. 非零向量 α, β 间的夹角θ.



R^2.

推广到欧氏空间中.

$\cos\theta = \dfrac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}$　　$\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$.　　$0 \leq \theta \leq \pi$.

$(\alpha,\beta) = |\alpha||\beta|\cos\theta$.　　$\theta = \arccos\dfrac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}$.　　$0 \leq \theta \leq \pi$.

3. 柯西—布涅亚科夫斯基不等式.

$$|(\alpha,\beta)| \leq |\alpha|\cdot|\beta|$$

当且仅当 α, β 线性相关时, 等号成立.

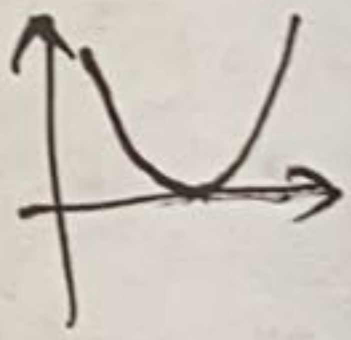
证: 若 $\beta = 0$, 等式显然成立.

若 $\beta \neq 0$.

$0 \leq (\alpha+t\beta, \alpha+t\beta)$　　$\forall t \in R$.

$= (\alpha, \alpha+t\beta) + (t\beta, \alpha+t\beta)$

$= (\alpha,\alpha) + t(\alpha,\beta) + t(\beta,\alpha) + t^2(\beta,\beta)$.



即 $t^2(\beta,\beta) + 2t(\alpha,\beta) + (\alpha,\alpha) \geq 0$.

这是一条开口朝上且与t轴最多有一个交点的抛物线 ($b^2-4ac \leq 0$)

$\Rightarrow 4(\alpha,\beta)^2 \leq 4(\beta,\beta)(\alpha,\alpha)$

两边开方　$|(\alpha,\beta)| \leq |\alpha||\beta|$.

当 α, β 线性相关，等号成立.

反过来，若等号成立，$(\alpha+t\beta, \alpha+t\beta)=0$.

$\Longrightarrow \alpha+t_0\beta=0$. ~~要么 $\beta=0$ 要么 $\alpha+t_0\beta=0$~~

α 与 β 线性相关 ∎

4. 向量间的正交.

1°. 若 $(\alpha, \beta)=0$，则称向量 α, β 正交. 记为 $\alpha \perp \beta$.

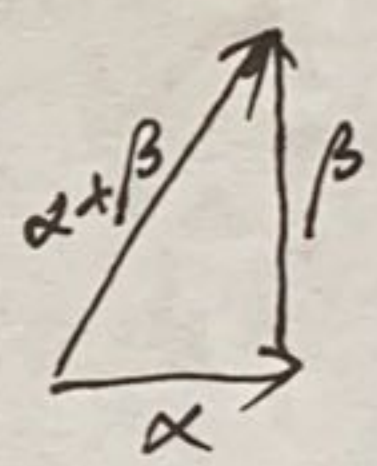
只有零向量与自己正交.

2°. 两个非零向量正交 $\Longleftrightarrow$ 夹角 $\theta=\frac{\pi}{2}$.

规定. 0 向量与任何一个向量的夹角为 $\frac{\pi}{2}$.

0 向量与任何向量正交.

3°. 欧几里得空间仍然有勾股Th.



$|\alpha+\beta|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2$ 当 α, β 正交时.

验证

$$|\alpha+\beta|^2=(\alpha+\beta, \alpha+\beta)$$
$$=(\alpha, \alpha)+(\beta, \beta)+2\underbrace{(\alpha, \beta)}_{=0}$$
$$=|\alpha|^2+|\beta|^2.$$

推广：如果向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 两两正交.

则 $|\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n|^2=|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2+\cdots+|\alpha_n|^2$.

§2. 标准正交基

一、1. 定义．欧氏空间 V 中一组非零向量．若它们两两正交，则称它们为一正交向量组．

2. Th. 正交向量组一定线性无关．

证明：设 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 为一组正交向量组．

即 $(\alpha_i, \alpha_j) = 0 \quad \forall i \neq j \quad i.j = 1, \dots, s.$

再设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0.$

$(\alpha_i, k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s) = (\alpha_i, 0)$

$\Rightarrow k_1(\alpha_i, \alpha_1) + k_2(\alpha_i, \alpha_2) + \dots + k_s(\alpha_i, \alpha_s) = 0.$

$\Rightarrow \quad k_i(\alpha_i, \alpha_i) = 0$

$\because \quad \alpha_i \neq 0 \Rightarrow (\alpha_i, \alpha_i) \neq 0 \Longrightarrow k_i = 0 \quad i = 1, \dots, s.$

$\therefore \quad \alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性无关 ∎

二、标准正交基．

1. 定义．在 n 维欧氏空间中．由 n 个向量组成的正交向量组称为正交基．由单位向量组成的正交基称为标准（规范．单位）正交基．

2. 施密特正交化．

把一组无关的向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 化为一组标准正交向量组．

正交化

$$\begin{cases} \beta_1=\alpha_1 \\ \beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 \\ \beta_3=\alpha_3-\dfrac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\dfrac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2 \\ \vdots \end{cases}$$

单位化、

$$\begin{cases} \gamma_1=\dfrac{\beta_1}{\|\beta_1\|} \\ \gamma_2=\dfrac{\beta_2}{\|\beta_2\|} \\ \vdots \end{cases}$$

三、正交矩阵.

1. 正交矩阵.

定义. n级实矩阵A称为正交阵. 如果 $A^TA=E$.

2. $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$为正交阵

$\Longleftrightarrow$ $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$为一组标准正交向量组.

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (\alpha_i,\alpha_j)=0 & i\neq j \quad i,j=1,\cdots,n \\ (\alpha_i,\alpha_i)=1 & i=1,\cdots,n. \end{cases}$$

其中 $\alpha=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. $a_i\in R$.

第六章. §1. §2. §6. 实对称阵的标准形.

化实二次型为标准形.

作业. P268. 1. 1). 2. 1). 4. 6. 17. 1). 18. 1), 3).