一. 初等变换求逆法.

若 A可逆, 则 A^{-1} 也可逆.

$A^{-1} = P_1 P_2 \cdots P_s E$ P_i 均为初等阵.

$E = P_1 P_2 \cdots P_s A$

$(A, E) \xrightarrow{\text{行}} \cdots \longrightarrow (E, A^{-1})$.

二. 初等变换法解矩阵方程.

$AX = B \xRightarrow{\text{若A可逆}} \begin{cases} \text{方法一.} & X = A^{-1}B \\ \text{方法二.} & (A, B) \xrightarrow{\text{行}} \cdots \longrightarrow (E, X) \end{cases}$

$XA = B \xRightarrow{\text{若A可逆}} \begin{cases} \text{方法一.} & X = BA^{-1} \\ \text{方法二.} & \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \rightarrow \underset{\text{列}}{\cdots} \longrightarrow \begin{pmatrix} E \\ X \end{pmatrix} \end{cases}$

第五章 二次型.

§5.1. 二次型及其矩阵.

1. 定义. 一个关于 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的 n元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n$$
$$+ a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n$$
$$+ \cdots + a_{nn}x_n^2$$

称为一个n元二次型.

称 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}$ 其中 $a_{ij} = a_{ji}$ 为二次型的矩阵.

例. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 3x_2x_3 + 5x_3^2$

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_2x_3 + 2x_3^2$.

$f(x_1, x_2, x_3) = \underline{x_1^2} + x_1 + \underline{x_2^2} + x_3 + 5X$

例. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_2^2 - 3x_2x_3$

的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. 计算 X^TAX.

$$X^TAX = (x_1, x_2, \cdots, x_n)_{1\times n} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= (\underline{a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{n1}x_n}, \underline{a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{n2}x_n}, \cdots, \underline{a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n})_{1\times n} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

$$= a_{11}x_1^2 + \underline{a_{21}x_2x_1} + \cdots + a_{n1}x_nx_1$$
$$+ \underline{a_{12}x_1x_2} + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{n2}x_nx_2$$
$$+ \cdots$$
$$+ a_{1n}x_1x_n + a_{2n}x_2x_n + \cdots + a_{nn}x_n^2.$$

$$= a_{11}x_1^2 + (a_{12}+a_{21})x_1x_2 + \cdots + (a_{1n}+a_{n1})x_1x_n$$
$$+ a_{22}x_2^2 + (a_{23}+a_{32})x_2x_3 + \cdots + (a_{2n}+a_{n2})x_2x_n$$
$$+ \cdots + a_{nn}x_n^2$$

$$\xlongequal[a_{ij}=a_{ji}]{\text{特别当}} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n$$
$$+ a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n$$
$$+ \cdots + a_{nn}x_n^2 .$$

例. $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$. $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$.

计算 $\underline{X^TAX} = x_1^2+5x_2^2+9x_3^2+6x_1x_2+10x_1x_3+14x_2x_3$.

$= X^T\underline{B}X$. $B=\begin{pmatrix}1&3&5\\3&5&7\\5&7&9\end{pmatrix}$

B 是二次型 X^TAX 的矩阵.

二、二次型的秩

—— 二次型矩阵的秩.

三、线性替换.

1. 关系式 $\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$.

称为由 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 到 $y_1, y_2, \dots, y_n$ 的线性替换.

它的矩阵表示式为 $X=CY$.

其中 $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$. $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

称 C 为线性替换的矩阵.

2. 特别当 $|C|\neq 0$ 时. 称 $X=CY$ 为非退化的线性替换

四. 二次型的矩阵形式.

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n \\ & + \cdots \\ & + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ & \overset{\text{当}a_{ij}=a_{ji}\text{时}}{=\!=\!=\!=} X^TAX. \end{aligned}$$

A 为二次型的矩阵.

五. 矩阵的合同.

1. 定义. 设 A. B 为两个同阶方阵. 若存在可逆阵 C. 使得 $B=C^TAC$.

找

则称矩阵 A 与 B 是合同的.

2. 合同阵的性质. A. B. C 是同阶方阵.

1°.(自反性). A与A合同.

找可逆阵C. 使 $A=C^TAC$

$\because$ $A=E^TAE$

$\therefore$ A与A合同.

2°.(对称性). 若A与B合同. 则B与A也合同.

证: $\because$ A与B合同. $\therefore$ $\exists$可逆阵C, 使得 $B=C^TAC$.

找可逆阵Q, 使$Q^TBQ=A$

于是存在可逆阵C^{-1}.

使得 $A=(C^T)^{-1}BC^{-1}=(C^{-1})^TB(C^{-1})$

$\therefore$ B与A也合同.

3°.(传递性) 若A与B合同. B与C合同, 则A与C也合同.

证: $\because$ A与B合同. B与C合同.

(要找可逆阵Q, 使得$C=Q^TAQ$).

$\therefore$ $\exists$可逆阵Q_1, Q_2 使得

$B=Q_1^TAQ_1$. $\quad C=Q_2^TBQ_2$

$(Q_1Q_2)^T=Q_2^TQ_1^T$

于是存在可逆阵Q_1Q_2,

使得 $C=Q_2^TQ_1^TAQ_1Q_2=(Q_1Q_2)^TA(Q_1Q_2)$

所以. A与C合同.

3. Th. 一个二次型 X^TAX $(A^T=A)$ 经非退化线性替换 $X=CY$ 化为新的二次型 Y^TBY. 其中 $B=C^TAC$. 即新旧二次型的矩阵是合同的.

$$X^TAX \xlongequal[\substack{X=CY\\ |C|\neq 0}]{A^T=A} (CY)^TA(CY)=Y^T(C^TAC)Y \xlongequal{C^TAC=B} Y^TBY.$$

又 $B^T=(C^TAC)^T=C^TA^T(C^T)^T=C^TAC=B$.