

高等数学A1 模2

1. 单项选择题(每小题2分, 共20分)

- (1) 设 $f(x) = \frac{1-3x}{x-2}$ 与 $g(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称, 则 $g(x) =$ ()
 A. $\frac{1+2x}{x+3}$ B. $\frac{1-3x}{x-2}$ C. $\frac{x+3}{1+2x}$ D. $\frac{x-2}{1-3x}$
- (2) $\lim_{x \rightarrow \pi} (1 - \cos x)^{2 \sec x} =$ ()
 A. e^{-2} B. e^2 C. 4 D. $\frac{1}{4}$
- (3) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} =$ ()
 A. $f'(x_0)$ B. $2f'(x_0)$ C. $\frac{1}{2}f'(x_0)$ D. $-f'(x_0)$
- (4) 若 $f(x) = x(x-2)(x-3)(x-4)$, 则方程 $f'(x) = 0$ 的实根个数是 ()
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- (5) 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ 在 $x = 1$ 处取得极值 -2, 则 ()
 A. $a = -3, b = 0$, 且 $x = 1$ 为函数 $f(x)$ 的极小值点
 B. $a = 0, b = -3$, 且 $x = 1$ 为函数 $f(x)$ 的极小值点
 C. $a = -3, b = 0$, 且 $x = 1$ 为函数 $f(x)$ 的极大值点
 D. $a = 0, b = -3$, 且 $x = 1$ 为函数 $f(x)$ 的极大值点
- (6) 若 $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ e^x, & x < 0 \end{cases}$, 则 $\int_{-1}^2 f(x) dx =$ ()
 A. $3 + e$ B. $3 - e$ C. $3 + e^{-1}$ D. $3 - e^{-1}$
- (7) 若 $\int_{-\infty}^0 e^{kx} dx = \frac{1}{3}$, 则 $k =$ ()
 A. $\frac{1}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. 3 D. -3
- (8) 设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 为三个单位向量, 且满足 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} =$ ()
 A. 1 B. -1 C. $\frac{3}{2}$ D. $-\frac{3}{2}$
- (9) 在空间直角坐标系下, 方程 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 的图形是 ()
 A. 球面 B. 双曲面 C. 抛物面 D. 椭圆锥面
- (10) 微分方程 $2ydy - dx = 0$ 的通解是 ()
 A. $y^2 - x = C$ B. $y - \sqrt{x} = C$ C. $y = x + C$ D. $y = -x + C$

2. (每小题3分, 共15分) 填空题

- (1) 函数 $y = \frac{\sqrt{\ln(x+2)}}{x(x-4)}$ 的定义域为_____
- (2) $x = 1$ 是函数 $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$ 的_____间断点.
- (3) 过点 $(0, 1)$ 且曲线上任一点 x 处的切线斜率为 x^2 的曲线方程为_____
- (4) $\int x^2 \sqrt{1+x^3} dx =$ _____
- (5) 设两点 $M(-1, 0, 3), N(1, -4, 7)$, 则与 \overrightarrow{MN} 同方向的单位向量为_____

3. 计算下列各题(每小题5分, 共40分)

(1) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{\sin x}}$;

(2) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} [\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{n}{(n+n)^2}]$;

(3) 设 $y = y(x)$ 是摆线方程 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($a > 0$) 所确定的函数, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=a\pi}$;

(4) 利用微分近似计算 $\sin 31^\circ$;

(5) 求不定积分 $\int [\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}] dx$;

(6) 求过点 $(3, 1, 2)$, 且与平面 $x + 2z = 1$ 和 $y - 3z = 2$ 平行的直线方程;

(7) 设曲线 $x = \sqrt{y}$, $x = \sqrt{2 - y^2}$ 及 $y = 0$ 围成一平面图形, 求此平面图形绕 x 轴旋转而成的立体的体积;

(8) 求微分方程 $y'' - 2y' - 3y = 3x + 1$ 的通解.

4. (15分) 讨论函数 $y = (x - 1)\sqrt[3]{x^5}$ 的单调性, 凹凸性, 极值及拐点.

5. (10分) 设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内的点 x_0 处取得最大值, 且 $|f''(x)| \leq K$ ($a \leq x \leq b$). 证明: $|f'(a)| + |f'(b)| \leq K(b - a)$.