相似矩阵.

一 1. A、B 均为n阶方阵. 若∃可逆阵P. 使 $P^{-1}AP=B$.
则称 A与B相似.

2.
- 反身性.
- 对称性
- 传递性

二. 相似阵的性质.

若A与B相似，则
- $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$.
- $r(A)=r(B)$
- $|A|=|B|$
- $trA=trB$
- A.B具有相同的可逆性
- A、B均可逆时. A^{-1}与B^{-1}也相似
- A与B等价 $(A\to\cdots\to B)$.

∃可逆阵P. 使 $P^{-1}AP=B$.

$$\underleftarrow{Q_t\cdots Q_2Q_1}\,A\,\underrightarrow{P_1P_2\cdots P_s}=B$$

三. 矩阵与对角阵相似的条件.

Th. n阶方阵A与对角阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$ 相似

$\Longleftrightarrow A_n$ 有n个线性无关的特征向量 $P_1,P_2,\dots,P_n$.

令 $P=(P_1, P_2, \cdots, P_n)$

则 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$. 其中 $AP_i=\lambda_i P_i$.

推论：若 A_n 有 n 个互异的特征值，则 A 一定与对角阵相似.

(则 A 一定可对角化)

Th. n 级方阵 A 可对角化

$\Longleftrightarrow$ 对应于 A 的每个 n_i 重特征值的线性无关的特征向量的个数为 n_i 个

$\Longleftrightarrow r(\lambda_i E-A)=n-n_i$.

$AX=0$.

证明：设 λ_i 是 A 的 n_i 重特征值.

齐次线性方程组 $(\lambda_i E-A)X=0$

的基础解系中有 $n-r(\lambda_i E-A)$ 个解 (A的线性无关的特征向量).

所以 A 能对角化

$\Longleftrightarrow n-r(\lambda_i E-A)=n_i$.

$\Longleftrightarrow r(\lambda_i E-A)=n-n_i$.

例. 设 $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & a\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

问 $a=?$ 时. A 能对角化?

解：$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & -a \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+1)$.

∴ A的特征值为 $\lambda_1 = 1$（二重） $\lambda_2 = -1$.

而 $1\cdot E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -a \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

∴ 当 $a=-1$ 时. $r(1\cdot E - A) = 1 = \underset{n}{\underset{\shortparallel}{3}} - \underset{n_i}{\underset{\shortparallel}{2}}$

此时. A能对角化.

五. 矩阵对角化的应用举例.

1. 利用矩阵的对角化可计算矩阵的多项式.

A为n级方阵. 计算 A^k. $\begin{cases} \text{找规律.} \\ \text{特征值. 特征向量} \checkmark \end{cases}$

A^{10}. A^2. A^3. A^5. A^{10}.

A^2. A^4. A^8. A^{10}.

A^{2020}. A^2. A^3, $A^4 \cdots$, 找规律.

若A能对角化. 求 A^k.

∃可逆阵 P. 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$. $A = Q^{-1}\Lambda Q$.

$\Rightarrow A = P\Lambda P^{-1}$.

$\Rightarrow A^k = P\underbrace{\Lambda(P^{-1}\cdot P)\Lambda P^{-1}\cdots(\cdots P)\Lambda}_{k\text{组}}P^{-1}$

$= P\Lambda^k P^{-1}$.

④

例. 9. $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. 求 A^{2020}.

例. $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. 求 $\varphi(A)=A^{10}-5A^{9}$.

解: 方法一. $A^k=P\Lambda^k P^{-1}$.

$$\varphi(A)=P\Lambda^{10}P^{-1}-5P\Lambda^{9}P^{-1}.$$

方法二. $\varphi(A)=P(\Lambda^{10}-5\Lambda^{9})P^{-1}$.

$$\varphi(A)=a_0A^k+a_1A^{k-1}+\cdots+a_{k-1}A+a_kE$$
$$=a_0P\Lambda^kP^{-1}+a_1P\Lambda^{k-1}P^{-1}+\cdots+a_{k-1}P\Lambda P^{-1}+a_kPEP^{-1}$$
$$=P(a_0\Lambda^k+a_1\Lambda^{k-1}+\cdots+a_{k-1}\Lambda+a_kE)P^{-1}.$$

2. 利用矩阵的对角化解线性方程组.

例. 在某城市有15万具有本科以上学历的人, 其中1.5万是教师. 据调查, 平均每年有10%的人从教师转为其它职业, 又有1%的人从其他职业转为教师. 试预测10年后这15万人中有多少人在从事教师职业?

解: 设 $X^{(i)}$ 表示第i年后做教师和其它职业的人数.

则 $X^{(0)}=\begin{pmatrix} 1.5 \\ 13.5 \end{pmatrix}$

用 $A=\begin{pmatrix} 0.90 & 0.01 \\ 0.10 & 0.99 \end{pmatrix}$

表示教师与其他职业之间的转移. (5)

则 $X^{(1)}=AX^{(0)}=\begin{pmatrix}0.90 & 0.01\\ 0.10 & 0.99\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1.5\\ 13.5\end{pmatrix}$

$X^{(2)}=AX^{(1)}=A^2X^{(0)}$

$\vdots$

$X^{(10)}=A^{10}X^{(0)}$

令 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-0.9 & -0.01\\ -0.1 & \lambda-0.99\end{vmatrix}=\lambda^2-1.89\lambda+0.89=0$.

$\lambda_1=1$. $\lambda_2=0.89$. $\therefore$ A可对角化.

$\lambda_1=1$ 的特征向量 $p_1=\begin{pmatrix}1\\10\end{pmatrix}$

$\lambda_2=0.89$ - - - . $p_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

令 $P=(p_1\ p_2)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 10 & -1\end{pmatrix}$.

则 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}1 & \\ & 0.89\end{pmatrix}$ $A=P\Lambda P^{-1}$ $A^{10}=P\Lambda^{10}P^{-1}$.

$X^{(10)}=P\Lambda^{10}P^{-1}X^{(0)}=\frac{1}{-11}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 10 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.89\end{pmatrix}^{10}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -10 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1.5\\ 13.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.5425\\ 13.4575\end{pmatrix}$.

10年后, 有1.54万人当教师.

例. 判断矩阵A能否与矩阵B相似. 若能相似. 求可逆阵P.

使得 $P^{-1}AP=B$.

(1). $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$. $B=\begin{pmatrix}3 & & \\ & 3 & \\ & & 3\end{pmatrix}$.

解 A、B 的特征值均为 $\lambda=3$（三重）. 而B为对角阵.

$$r(3E-A)=r\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}=2\neq n-n_i=3-3$$

∴ A不能与B相似.

(2). $A=\begin{pmatrix}\overset{\lambda_1}{1}&&\\&3\ \lambda_3&\\&&2\ \lambda_2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}$. $\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda-1&-1&0\\0&\lambda-2&-1\\0&0&\lambda-3\end{pmatrix}$

解: A.B 的特征值均为 1、2、3. $P^{-1}AP=\Lambda$.

B. A.

当B的特征值为$\lambda_1=1$时. 由$(1\cdot E-A)X=0$

设 $\begin{cases}-x_2=0\\-x_2-x_3=0\\-2x_3=0\end{cases}\Rightarrow x_2=x_3=0.$

∴ $\lambda_1=1$ 的一个无关的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

同理 $\lambda_2=2$ - - - - - - $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

$\lambda_3=3$ - - - - - - $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$.

取 $P=(\xi_1,\xi_3,\xi_2)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&2&0\end{pmatrix}$.

则 $P^{-1}BP=A$. $\Rightarrow PAP^{-1}=B$;

即 $B=(P^{-1})^{-1}A(P^{-1})$ 求P^{-1}.

题型: ① 已知A. 求A的特征值. 特征向量.

② 已知A的部分(全部)特征值. 特征向量. 反求A.

例. 设3阶矩阵A的特征值为 $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-2$, $\lambda_3=1$.

对应的特征向量依次为 $p_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $p_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $p_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. 求A.

取 $P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&\\&-2&\\&&1\end{pmatrix}$. $A=P\begin{pmatrix}2&&\\&-2&\\&&1\end{pmatrix}P^{-1}$.

例. 设三阶矩阵A满足 $A\alpha_i=\overset{i}{\cancel{\lambda_i}}\alpha_i$ $(i=1,2,3)$.

~~其中~~列向量 $\alpha_1=(1,2,2)^T$. $\alpha_2=(2,-2,1)^T$. $\alpha_3=(-2,-1,2)^T$.

$\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$.

求A.

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}.$$

$P^{-1}\Lambda P=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}$

$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$.

例. 三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&2&-1\\x&-2&2\\3&y&1\end{pmatrix}$ 有一个特征向量 $p_1=(1,-2,3)^T$.

则 $x=$____. $y=$____. 所对应的特征向量 $\lambda_1=$____.

解: $(\lambda_1E-A)p_1=0$.

$$\begin{pmatrix}\lambda_1-3&-2&1\\-x&\lambda_1+2&-2\\-3&-y&\lambda_1-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}=0.$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1-3+4+3=0\\-x-2\lambda-4-6=0\\-3+2y+3\lambda-3=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\lambda_1=-4\\x=-2.\\y=9\end{cases}$$

例. 判断下列矩阵 A 与 B 是否相似. 若相似.

求出可逆阵 M 使 $M^{-1}AM=B$.

(1). $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&5\\0&1&2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3&1&0\\7&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

显然
$|A|=|B|$.
$r(A)=r(B)=3$.
$trA=trB$.

~~$|\lambda E-A|$ A 有一个特征值为 2. 而 B 没有为 2.~~

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-3&-5\\0&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=\underline{(\lambda-2)}\begin{vmatrix}\lambda-3&-5\\-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-5\lambda+1)$$
$$=\lambda^3-5\lambda^2+\lambda-2\lambda^2+10\lambda-2$$
$$=\lambda^3-7\lambda^2+11\lambda-2$$

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-1&0\\-7&\lambda-3&0\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-6\lambda+2)$$
$$=\lambda^3-6\lambda^2+2\lambda-\lambda^2+6\lambda-2$$
$$=\lambda^3-7\lambda^2+8\lambda-2$$

$\therefore$ A 与 B 的特征值不同. $\therefore$ A 与 B 不相似.

(2) $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&-6&2\end{pmatrix}$. $\underline{1,-1,2.}$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda&-1\\0&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-1)=(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1).$$

1, -1. 2.

A 与 B 相似.

$$P^{-1}AP=\Lambda=Q^{-1}BQ$$

$$P^{-1}\Lambda P=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix}=Q^{-1}BQ.$$

$$QP^{-1}APQ^{-1}=B \qquad (PQ^{-1})^{-1}A\underbrace{(PQ^{-1})}_{M}=B$$