

# 数学分析1(试卷A)

得分	
----	--

## 1. 单项选择题(每小题3分, 共15分)

(1) 函数  $f(x) = 1 + \arctan x$  是 ( )

- A. 奇函数      B. 偶函数      C. 周期函数      D. 有界函数

(2) 与  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$  等价的陈述是 ( )

- A.  $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \text{ s. t. } x \geq X \Rightarrow |f(x) - a| \leq \varepsilon$   
 B.  $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \text{ s. t. } x \leq -X \Rightarrow |f(x) - a| \leq \varepsilon$   
 C.  $\forall \varepsilon > 0, \exists X < 0, \text{ s. t. } x \leq X \Rightarrow |f(x) - a| \leq \varepsilon$   
 D.  $\exists X < 0, \forall \varepsilon > 0, \text{ s. t. } x \leq X \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$

(3) 设数列  $\{x_n\}$  有上界,  $y_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$ , 则数列  $\{y_n\}$

- A. 单调增加      B. 有界但不收敛      C. 收敛      D. 无界

(4) 已知函数  $f(x)$  在 0 点可微, 且当  $x \neq 0$  时有  $f(x) = x^p \sin \frac{1}{x}$ , 则 ( )

- A.  $p > f(0)$       B.  $p > 1 + f(0)$       C.  $p < f(0)$       D.  $p < 1 + f(0)$

(5) 函数  $f(x) = \sin x$  在  $x = 0$  点的泰勒公式中,  $x^7$  的系数是 ( )

- A.  $-\frac{1}{7!}$       B.  $\frac{1}{7!}$       C.  $-\frac{1}{7}$       D.  $\frac{1}{7}$

得分	
----	--

## 2. 填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

(1) 函数  $f(x) = \sin x, x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$  的反函数为\_\_\_\_\_.

(2) 已知当  $x \rightarrow 0$  时,  $1 - \cos x \sim ax^b$ , 则  $ab =$ \_\_\_\_\_.

(3) 曲线  $y = \sin x$  过点  $(\pi, 0)$  点的法线方程为\_\_\_\_\_.

(4) 数列  $\{x_n\}$  无上界的定义是:  $\forall$ \_\_\_\_\_,  $\exists$ \_\_\_\_\_, s. t. \_\_\_\_\_

(5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  的定义是:  $\forall$ \_\_\_\_\_,  $\exists$ \_\_\_\_\_, s. t. \_\_\_\_\_

得分	
----	--

## 3. (每小题10分, 共20分) 计算下列极限:

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^{\sin x};$       (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \right).$

得分	
----	--

4. (每小题5分, 共20分)计算下列导数或微分:

(1)  $y = x^2 e^{2x}$ , 求  $y^{(n)}$ ;      (2)  $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ , 求  $dy$ ;

(3)  $y = x + \cos y$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ ;      (4)  $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$ , 求  $\frac{d^2 y}{dx^2}$

得分	
----	--

5. (10分) 证明: 对于任意实数  $a, b, c$ , 三次方程  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  都至少存在一个实根.

得分	
----	--

6. (10分) 若函数  $f(x)$  在  $(0, 1)$  内可导且  $f'(x)$  有界, 证明  $f(x)$  在  $x = 0$  点存在右极限.

得分	
----	--

7. (10分) 若函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  一阶可导且满足

$$f(x) = -x f'(x), \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

证明必有  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

# 数学分析1(试卷B)

得分	
----	--

## 1. 单项选择题(每小题3分, 共15分)

(1) 函数  $f(x) = x \arctan x$  是 ( )

- A. 奇函数      B. 偶函数      C. 周期函数      D. 有界函数

(2) 与  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$  等价的陈述是 ( )

- A.  $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \text{ s. t. } x \geq X \Rightarrow |f(x) - a| \leq \varepsilon$   
 B.  $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \text{ s. t. } |x| \geq X \Rightarrow |f(x) - a| \leq \varepsilon$   
 C.  $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \text{ s. t. } x \geq X \Rightarrow f(x) - a \leq \varepsilon$   
 D.  $\exists X > 0, \forall \varepsilon > 0, \text{ s. t. } x \geq X \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$

(3) 设数列  $\{x_n\}$  有上界,  $y_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$ , 则数列  $\{y_n\}$

- A. 单调减少      B. 有界但不收敛      C. 收敛      D. 无界

(4) 已知函数  $f(x)$  在 0 点可微, 且当  $x \neq 0$  时有  $f(x) = x^p \sin \frac{1}{x}$ , 则 ( )

- A.  $p > f(0)$       B.  $p < f(0)$       C.  $p < 1 + f(0)$       D.  $p > 1 + f(0)$

(5) 函数  $f(x) = \cos x$  在  $x = 0$  点的泰勒公式中,  $x^6$  的系数是 ( )

- A.  $-\frac{1}{6!}$       B.  $\frac{1}{6!}$       C.  $-\frac{1}{6}$       D.  $\frac{1}{6}$

得分	
----	--

## 2. 填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

(1) 函数  $f(x) = \cos x, x \in [\pi, 2\pi]$  的反函数为\_\_\_\_\_.

(2) 已知当  $x \rightarrow 0$  时,  $1 - \cos x \sim ax^b$ , 则  $a + b =$ \_\_\_\_\_.

(3) 曲线  $y = \sin x$  过点  $(\pi, 0)$  点的切线方程为\_\_\_\_\_.

(4) 数列  $\{x_n\}$  无下界的定义是:  $\forall$ \_\_\_\_\_,  $\exists$ \_\_\_\_\_, s. t. \_\_\_\_\_

(5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$  的定义是:  $\forall$ \_\_\_\_\_,  $\exists$ \_\_\_\_\_, s. t. \_\_\_\_\_

得分	
----	--

## 3. (每小题10分, 共20分) 计算下列极限:

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^{\tan x};$       (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right).$

得分	
----	--

4. (每小题5分, 共20分)计算下列导数或微分:

(1)  $y = x^2 e^{3x}$ , 求  $y^{(n)}$ ;

(2)  $y = \ln(x - \sqrt{1+x^2})$ , 求  $dy$ ;

(3)  $y = x - \cos y$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ ;

(4)  $x = \sin t, y = \cos t$ , 求  $\frac{d^2 y}{dx^2}$

得分	
----	--

5. (10分) 证明: 对于任意实数 $a, b$ , 三次方程 $x^3 - x^2 + ax + b = 0$ 都至少存在一个实根.

得分	
----	--

6. (10分) 若函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内可导且 $f'(x)$ 有界, 证明 $f(x)$ 在 $x = 1$ 点存在左极限.

得分	
----	--

7. (10分) 若函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 一阶可导且满足

$$f(x) = -f'(x), \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

证明必有  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

数学分析1—1    数学分析1—2    数学分析1—3