第一章 多项式.

复数 $a+bi$. $a.b$为实数. $i=\sqrt{-1}$ 为虚数单位. $i^2=-1$

特别当 $a=0$. $b\neq 0$时. bi 纯虚数.

$b=0$ 实数.

复数 $a+bi$

- 实数 ($b=0$)
  - 有理数 {整数、分数} $\frac{q}{p}$ $p\neq 0$. $p.q$ 均为整数.
    (有限小数或无限循环小数)
  - 无理数 (无限不循环小数).
- 纯虚数 ($a=0$. $b\neq 0$)

§1. 数域.

定义. 设P是由一些复数组成的集合. 其中包含0和1. 且P中任意两个数的和.差.积.商(除数不为0)仍是P中的数(P对数的加.减.乘.除四则运算是封闭的). 那么称P是一个数域.

复数域 C.

实数域 R.

有理数域 Q.

全体整数组成的集合不构成数域.

例1. 所有具有形式 $a+b\sqrt{2}$ 的数 ($a.b$ 是任何有理数)
能构成一个数域. 记为 $Q(\sqrt{2})$.

证明: 显然 $Q(\sqrt{2})$ 包含数 0 和 1.

设 $a+b\sqrt{2}$, $c+d\sqrt{2}$ 为 $Q(\sqrt{2})$ 中的任意两个数.

$$a+b\sqrt{2}+(c+d\sqrt{2}) = (a+c)+(b+d)\sqrt{2} \in Q(\sqrt{2}).$$

$$a+b\sqrt{2}-(c+d\sqrt{2}) = (a-c)+(b-d)\sqrt{2} \in Q(\sqrt{2}).$$

$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})$$
$$=(ac+2bd)+(bc+ad)\sqrt{2} \in Q(\sqrt{2}).$$

设 $a+b\sqrt{2}\neq 0$. 于是 $a-b\sqrt{2}\neq 0$?

$$\frac{c+d\sqrt{2}}{a+b\sqrt{2}} = \frac{(c+d\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}{(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}$$

$$=\frac{ac-2bd+(ad-bc)\sqrt{2}}{a^2-2b^2} = \frac{ac-2bd}{a^2-2b^2}+\frac{ad-bc}{a^2-2b^2}\sqrt{2} \in Q(\sqrt{2})$$

$\Rightarrow$ $Q(\sqrt{2})$ 对加.减.乘.除四则运算封闭.

$\Longrightarrow$ $Q(\sqrt{2})$ 就构成数域 ∎

设 $a+b\sqrt{2}\neq 0$.

若 $a-b\sqrt{2}=0$. $a=b\sqrt{2}$ $\boxed{2b\sqrt{2}\neq 0}$. $a=0$. $b=0$.

例2. 所有可表成形式 $\dfrac{a_0+a_1\pi+\cdots+a_n\pi^n}{b_0+b_1\pi+\cdots+b_m\pi^m}$ 的数组成一个数域. 其 $m.n$ 是任意非负整数. a_i. b_j $i=0,1\ldots n$. $j=0,1\ldots m$ 是整数.

例3.（结论）．所有数域都包含有理数域作为它的一部分

证明：设 P 是一个数域．P 中含有 0 和 1．

由于 P 对加法的封闭性，

$\therefore$ $1+1=2$　$2+1=3$．$3+1=4$，…，$n-1+1=n$，…

即所有的自然数均在 P 中．

又由于 P 对减法也是封闭的．

$0-1=-1$，$-1-1=-2$，$-2-1=-3$，…，$-n-1=-(n+1)$，…

也都在 P 中．

P 对除法也封闭．且任何一个有理数都可以表示为两个整数

的商（$\frac{q}{p}$　$p\neq 0$．$p.q$ 均为整数）．

$\therefore$ 任何有理数均在 P 中．∎

例．所有偶数组成的集合不构成数域．

正的整数倍的全体不构成数域．

§2．一元多项式．

一．多项式的定义．

1．定义．设 n 为一个非负整数．x 是一个符号．形式表达式

$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$　其中 a_0．a_1，…，$a_n\in P$（P 是数域）

称为系数在数域 P 上的一元多项式．简称为数域 P 上的一元多项式．

其中 $a_i x^k$ 称为多项式的 k 次项.

a_i 称为多项式 k 次项的系数.

多项式一般用 $f(x)$, $g(x)$, … 或 f, g … 表示.

2. 定义. 在多项式 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ 中, 若 $a_n \neq 0$. $a_n x^n$ 称为它的首项. a_n 称为它的首项系数. n 称为多项式的次数, 记为 $\partial(f(x))$ 此时. 总假定 $f(x) \neq 0$.

3 定义. 系数全为 0 的多项式称为零多项式. 记为 0.

注意 ① 零多项式及零次多项式的不同.

一般来说. 零次多项式是任意不为 0 的常数.

② 零多项式是唯一不定义次数的多项式.

例 $f(x) = 2x^3 + 3x - 2$. $\partial(f(x)) = 3$.

二. 多项式的相等.

定义. 如果在多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 中. 除去系数为 0 的项外. 同次项系数全相等. 那么就称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等. 记为 $f(x) = g(x)$.

三. 多项式的运算.

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$

$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j$.

是数域P上的两个多项式. $a_n\neq 0$. $b_m\neq 0$

1. 加法. 当 $n\geq m$ 时. 在$g(x)$中令 $b_{m+1}=b_{m+2}=\cdots=b_n=0$.

$$f(x)+g(x)$$
$$=(a_n+b_n)x^n+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}+\cdots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)$$
$$=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i.$$

例. $f(x)=x^3+x^2+x+1$

$g(x)=3x^2+2$

$$f(x)+g(x)=x^3+4x^2+x+3.$$

~~2. 减法.~~ $\cancel{f(x)-g(x)=f(x)+(-g}$

2. 乘法.

$$f(x)g(x)=a_nb_mx^{n+m}+(a_nb_{m-1}+a_{n-1}b_m)x^{n+m-1}+\cdots+(a_1b_0+a_0b_1)x+a_0b_0$$
$$=\sum_{s=0}^{m+n}\left(\sum_{i+j=s}a_ib_j\right)x^s.$$

3. 减法. $f(x)-g(x)=f(x)+(-g(x))$.

显然, 数域P上两个多项式相加. 相减. 相乘后所得的结果仍然是数域P上的多项式.

且显然有 $\partial(f(x)\pm g(x))\leq \max(\partial(f(x)),\partial(g(x)))$.

$\partial(f(x)g(x))=\partial(f(x))+\partial(g(x))$. $f(x)g(x)\neq 0$.

综上，设

$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ $a_n\neq 0$

$g(x)=b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0$ $b_m\neq 0$.

$\Rightarrow f(x)g(x)$ 的首项为 $a_n b_m x^{m+n}$.

$\because a_n\neq 0.\ b_m\neq 0 \Longrightarrow a_n b_m\neq 0 \Rightarrow \partial(f(x)g(x))=m+n$ ∎

四. 多项式加、乘的运算律 (可推广到有限个).

1. $f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$.
   $f(x)g(x)=g(x)f(x)$ } 加、乘交换律.

2. $[f(x)+g(x)]+h(x)=f(x)+[g(x)+h(x)]$.
   $[f(x)g(x)]h(x)=f(x)[g(x)h(x)]$ } 结合律.

3. $f(x)[g(x)+h(x)]=f(x)g(x)+f(x)h(x)$. 分配律.

下面证 $[f(x)g(x)]h(x)=f(x)[g(x)h(x)]$.

证明: 设 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i x^i$. $g(x)=\sum_{j=0}^{m}b_j x^j$.

$h(x)=\sum_{k=0}^{l}c_k x^k$. $a_n\neq 0$. $b_m\neq 0$. $c_l\neq 0$.

$[f(x)g(x)]h(x)$ 中 $[f(x)g(x)]$ s 次项的系数为 $\sum_{i+j=s}a_i b_j$

$\Longrightarrow [f(x)g(x)]h(x)$ t次项的系数为

$$\sum_{s+k=t}\Big(\sum_{i+j=s} a_i b_j\Big) c_k = \sum_{i+j+k=t} a_i b_j c_k$$

而等式右边 $f(x)[g(x)h(x)]$ 中 $[g(x)f(x)]$ 中的r次项的系数

为 $\sum_{j+k=r} b_j c_k$

$\Longrightarrow f(x)[g(x)h(x)]$ t次项的系数为

$$\sum_{i+r=t} a_i\Big(\sum_{j+k=r} b_j c_k\Big) = \sum_{i+j+k=t} a_i b_j c_k.$$

$\therefore [f(x)g(x)]h(x) = f(x)[g(x)h(x)]$ ∎

4. 乘法消去律.

若 $f(x)g(x)=f(x)h(x)$. 且 $f(x)\neq 0$. 则 $g(x)=h(x)$.

这是因为 若 $f(x)g(x)=f(x)h(x)$.

$\Longrightarrow f(x)[g(x)-h(x)]=0$.

而 $f(x)\neq 0$. $\Rightarrow g(x)-h(x)=0 \Longrightarrow g(x)=h(x)$ ∎

五. 定义. 所有数域P上的一元多项式的全体, 称为数域P上的一元多项式环, 记为 $P[x]$. 称 P 为 $P[x]$ 的系数域.