一. 线性空间.

$V\neq\Phi$. P—数域

①. $\forall\alpha\in V$. $\beta\in V$. 有唯一确定的 $\gamma=\alpha\oplus\beta\in V$ 与之对应.

②. $\forall\alpha\in V$. $k\in P$. 有唯一确定的 $\delta=k\circ\alpha\in V$ 与之对应.

且两种运算满足以下8条规律

$$\begin{cases}\alpha\oplus\beta=\beta\oplus\alpha\\(\alpha\oplus\beta)\oplus\gamma=\alpha\oplus(\beta\oplus\gamma)\\\alpha\oplus 0=\alpha & (\text{存在零元素})\\\alpha\oplus(-\alpha)=0 & (\text{存在负元素}).\end{cases}$$

$$\begin{cases}1\circ\alpha=\alpha\\(kl)\circ\alpha=k\circ(l\circ\alpha)\\k\circ(\alpha\oplus\beta)=k\circ\alpha\oplus k\circ\beta\\(k+l)\circ\alpha=k\circ\alpha\oplus l\circ\alpha.\end{cases}$$

称V为数域P上的线性空间(向量空间. 定义).

二. 1°. 线性空间V中零元素是唯一的.

2°. 线性空间V中 α 的负元素 $-\alpha$ 也是唯一的.

3°. $\underbrace{0}_{\text{数}}\circ\alpha=\underbrace{0}_{\text{向量}}$ $\qquad(-1)\circ\alpha=-\alpha$ $\qquad k\cdot 0=0$ 向量零.

4°. 若 $k\circ\alpha=0\Longrightarrow$ 要么 $k=0$. 要么 $\alpha=0$.

例题. Q:有理数域. R:实数域. C:复数域.

按照数的加法与乘法. 下列结论正确的是:

A. $\underset{V}{Q}$构成$\underset{P}{R}$上的向量空间　　B. Q构成C上的向量空间

C. R构成C上的向量空间　　D. C构成Q上的向量空间.

$P=R$, $V=Q$. 数量乘法不封闭.

范围大的数域可以作为范围小的数域上的线性空间.

取 $k=\sqrt{2}\in R$　$\alpha=1\in Q$, $\sqrt{2}\cdot 1=\sqrt{2}\notin Q=V$

§3. 维数. 基. 坐标.

R^n. $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.　$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ $a_i\in C$. C^n.

一. 线性表示.

1. 定义. 设V是数域P上的线性空间. $\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_r\ (r\geq 1)$ 是V中一组向量. 若$\exists$一组数$k_1,\dots,k_r\in P$.

使得　$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\dots+k_r\alpha_r$

则称α是向量组$\alpha_1,\dots,\alpha_r$的一个线性组合. 也称向量α可由$\alpha_1,\dots,\alpha_r$线性表示(出).

2. 定义. 设向量组(I) $\alpha_1,\dots,\alpha_r$.
　　向量组(II) $\beta_1,\dots,\beta_t$,

均为线性空间V中的向量组.

若向量组(I)中每一个向量均可由向量组(II)中向量表示，
那么则称向量组(I)可由向量组(II)表示。
若向量组(I)与向量组(II)可相互线性表示，则称向量组(I)与(II)等价。

二、线性相关、线性无关。

1. 定义：设 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ ($r \geq 1$) 是线性空间V中的r个向量，
若∃一组不全为零的数 $k_1, \dots, k_r \in P$，
使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = 0$
则称 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性相关，否则称 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性无关。
若对任意一组不全为0的数 $k_1, \dots, k_r \in P$，
$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r \neq \underline{0}$（零元素），
则称 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性无关。
或者：只有当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$ 时，数，
$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = \underline{0}$，
则称 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性无关。

2. 几个常用的结论：

1°. α 线性相关 $\Longleftrightarrow \alpha = 0$。
（单个零向量线性相关，单个非零向量线性无关）。

2°. 两个向量 α. β 线性相关 $\Longleftrightarrow$ $\alpha=k\beta$ (或 $\beta=k\alpha$).

($\Longleftrightarrow$ α 与 β 对应分量成比例 ~~在~~ R^n).

实函数. $\frac{f(x)}{g(x)}\neq c$ 无关. $\frac{f(x)}{g(x)}=c$. $f.g$ 相关

x. x^2 线性无关.

3°. $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ $(r\geq 2)$ 线性相关

$\Longleftrightarrow$ 其中至少有一个向量是其余向量的线性组合.

例. $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$. $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$. $\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\7\\9\end{pmatrix}$ 线性相关.

例. $R^{\cancel{2\times 2}}$. $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}$. A, B 线性相关.

4°. 如果向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关. 且可被 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 线性表示, 则 $r\leq s$.

5°. 等价的(无关)向量组所含向量个数相同.

$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$;
$\beta_1,\cdots,\beta_t$; 等价且均无关. 则 $r=t$.

$\xrightarrow{\text{据4°}} \begin{cases} r\leq t \\ t\leq r\end{cases} \Longrightarrow t=r$.

6°. 如果 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关, 但 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta$ 线性相关. 则 β 一定可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性表示. 且表示法是唯一的.

⑤

7°、R^n中，$n+1$个n维向量线性相关．

$(n+k)\ k\geq 1$.

$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}-1\\8\\2\end{pmatrix}$．$\begin{pmatrix}3\\7\\-10\end{pmatrix}$ 线性相关．

三．线性空间的维数．基．坐标．

1、定义．若在线性空间V中有n个线性无关的向量．但没有更多数目线性无关的向量．那么称V是n维的．

如果在V中可以找到任意多个线性无关的向量．那么称V是无限维的．

例．R^3．是3维的．$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$．$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$．$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 线性无关．

$R^{3\times3}$ 是9维的．$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$．$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，…$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 线性无关

例．$\forall n$．$1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}, x^n$ 线性无关．

由所有实系数多项式组成的线性空间是无限维的．

2、定义．在n维线性空间V中．n个线性无关的向量 (R^n．

$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 称为V的一组基．

假若对$\forall \beta\in V$．

β均可由基$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$线性表示．

即$\exists\ k_1, \cdots,\ k_n\in P$．

使得 $\beta=\underline{k_1}\alpha_1+\underline{k_2}\alpha_2+\cdots+\underline{k_n}\alpha_n$

称 $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ 为 β 在基 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 下的坐标。

且这个坐标是唯一的。

Th. 如果 V 中有 n 个线性无关的向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$，且 V 中任何一个向量可由 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性表示，则 V 是 n 维的，而 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 就是 V 的一组基。

证明： $\because$ $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性无关，

$\therefore$ V 的维数 $\geq n$。

下面来证 V 中任意 $n+1$ 个向量 $\beta_1, \dots, \beta_n, \beta_{n+1}$ 线性相关。

由题设 $\beta_1, \dots, \beta_{n+1}$ 可由 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性表示，

反证：假若 $\beta_1, \dots, \beta_{n+1}$ 线性无关，

$\Longrightarrow$ $n+1 \leq n$ 矛盾！

$\therefore$ $\beta_1, \dots, \beta_{n+1}$ 线性相关。

即 V 中任意 $n+1$ 个向量均相关。$\therefore$ V 的维数是 n 维的，

$\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 就是 V 的一组基。∎

例. R^3 中，$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 是 R^3 的一组基。

$\alpha = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = 1\cdot\varepsilon_1 + 2\cdot\varepsilon_2 + 3\cdot\varepsilon_3$，　$(1, 2, 3)$ 就是 α 在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的坐标。

取 $\varepsilon_1' = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\varepsilon_2' = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$, $\varepsilon_3' = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$.

$$\alpha=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=1\cdot\varepsilon_1'+1\cdot\varepsilon_2'+1\cdot\varepsilon_3'$$

$(1,1,1)$ 为 α 在基 $\varepsilon_1'.\varepsilon_2'.\varepsilon_3'$ 下的坐标.

例. 求 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$

在基(底) $\varepsilon_1'=(1,1,\cdots,1)$
$\varepsilon_2'=(0,1,\cdots,1)$
$\vdots$
$\varepsilon_n'=(0,0,\cdots1)$

(底)下的坐标.

解: 设 $k_1\varepsilon_1'+k_2\varepsilon_2'+\cdots+k_n\varepsilon_n'=\alpha$.

$$\Rightarrow\quad k_1(1,1,\cdots1)+k_2(0,1,\cdots1)+\cdots+k_n(0,0,\cdots1)=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}k_1=a_1\\k_1+k_2=a_2\\k_1+k_2+k_3=a_3\\\cdots\cdots\\k_1+k_2+k_3+\cdots+k_n=a_n.\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}k_1=a_1\\k_2=a_2-a_1\\k_3=a_3-a_2\\\vdots\\k_n=a_n-a_{n-1}\end{cases}$$

$\therefore$ α 在基 $\varepsilon_1',\varepsilon_2'\cdots,\varepsilon_n'$ 下的坐标为 $(a_1,a_2-a_1,a_3-a_2,\cdots,a_n-a_{n-1})$.

例. 实数域 R 上所有次数小于 n 的多项式构成的线性空间 $R[x]_n$ 中,

$1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$

是 n 个线性无关的向量.

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$.

$\therefore$ $R[x]_n$ 是 n 维的.

$1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ 是 $R[x]_n$ 的一组基.

$f(x)$ 在基 $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ 下的坐标 $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$.

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}.$$

$\therefore$ $f(x)$ 在基 $1, x-a, (x-a)^2, \dots, (x-a)^{n-1}$ 下的坐标

$$\left(f(a), f'(a), \frac{f''(a)}{2!}, \dots, \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\right).$$

例. 设 $V=C$ (复数). $P=C$ (复数).

则 复数域构成自己数域上的线性空间.

这时 $V=C$ 是 1 维的. 1 是一组基. $c\neq 0$ 是一组基.

$i=i\cdot 1$,

$a=a\cdot 1$.

$a+bi=(a+bi)\cdot 1$.

$V=C$ (复数). $P=R$ (实数),

构成 R 上的线性空间,

$V=C$ 是 2 维. $1, i$ 是一组基.

$$a+bi=a\cdot 1+b\cdot i.$$

大家记得做测试题

作业. P181. 5. 7. 8.