一．特征值．特征向量．

1．定义．A_n．λ是一个数．若$\exists X\neq0$．使得$AX=\lambda X$．

则称λ是A的特征值．$X\neq0$称为A的对应于(属于)特征值λ的特征向量．

2．$\lambda E-A$ —— A的特征矩阵．

$|\lambda E-A|$ —— A的特征多项式．

$|\lambda E-A|=0$ —— A的特征方程．

3．求特征值．特征向量的步骤．

①．求$|\lambda E-A|=0$的全部根．这是A的全部的特征值λ_i．

②．将λ_i代入 $(\lambda_iE-A)X=0$．

解之之的全部非零解即为λ_i的全部特征向量．

4．特征值．特征向量的性质．

性质1．A与A^T的特征值相同．

$$|\lambda E-A^T|=|\lambda E-A|．$$

性质2．设$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$是$A_n$的n个特征值．$A=(a_{ij})_n$．

则 i)．$\lambda_1\cdots\lambda_n=|A|$

ii)．$\lambda_1+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$

$=\text{tr}A$ —— A的迹．

性质3. 设 $A=(a_{ij})_n$ 是一个 n 级方阵.

若 (1) $\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|<1$ $(i=1,2,\cdots,n)$

或 (2) $\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|<1$ $(j=1,2,\cdots,n)$

有一个成立. 则 A 的特征值 λ_i 的模小于1. 即 $|\lambda_i|<1$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

证明: 设 $AX=\lambda X$. $X\neq 0$ 为列向量.

即 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=\lambda x_i$ $(i=1,\cdots,n)$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

记 $\max_j |x_j|=|x_k|$.

故 $|\lambda|=\left|\lambda\cdot\frac{x_k}{x_k}\right|=\left|\sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_j\cdot\frac{1}{x_k}\right|$

$\leq\sum_{j=1}^{n}|a_{kj}|\cdot\left|\frac{x_j}{x_k}\right|\leq\sum_{j=1}^{n}|a_{kj}|$.

若条件(1)成立. 则 $|\lambda|<1$. 结论成立.

若条件(2)成立. 则对 A^T 的所有特征值结论也成立.

而 A^T 与 A 的特征值相同. ∴结论仍然成立 ∎

性质4. 属于不同特征值的特征向量线性无关.

证明: 设 n 级方阵 A 的互不相等的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$,

对应于它们的特征向量分别为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$;

(要证 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关).

用数学归纳法证明.

① 若 $m=1$. $\because \alpha_1 \neq 0$ $\therefore \alpha_1$ 线性无关.

②. 假设对应于不同特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_{m-1}$ 的特征向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{m-1}$ 线性无关. 而 $A\alpha_i = \lambda_i \alpha_i$ $i=1,\ldots,m$. $\lambda_i \neq \lambda_j$ $i \neq j$

再设 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m = 0$. ①

两边左乘 A.

$k_1 A\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}A\alpha_{m-1} + k_m A\alpha_m = 0$.

$\Rightarrow k_1\lambda_1\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}\lambda_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\lambda_m\alpha_m = 0$ ②

①×λ_m $k_1\lambda_m\alpha_1 + \cdots + k_{m-1}\lambda_m\alpha_{m-1} + k_m\lambda_m\alpha_m = 0$ ③.

②-③ $k_1(\lambda_1 - \lambda_m)\alpha_1 + k_2(\lambda_2-\lambda_m)\alpha_2 + \cdots + k_{m-1}(\lambda_{m-1}-\lambda_m)\alpha_{m-1} = 0$

由归纳假设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$ 线性无关.

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1(\lambda_1 - \lambda_m) = 0 \\ k_2(\lambda_2 - \lambda_m) = 0 \\ \vdots \\ k_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m) = 0 \end{cases}$$

$\because \lambda_i \neq \lambda_m$ $i=1,\ldots,m-1$.

$\Rightarrow k_1 = \cdots = k_{m-1} = 0$.

代入①, $k_m\alpha_m = 0$. $\because \alpha_m \neq 0$. $\Rightarrow k_m = 0$.

$\therefore \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性无关. 综上. 命题成立 ∎

问题：属于同一特征值的特征向量线性相关还是线性无关？ ④

可能有相关的，也可能有无关的。

注①. 若n级方阵有n个不同的特征值，则A有n个无关的特征向量

②. 属于同一特征值的特征向量的非零的线性组合仍是A的属于这个特征值的特征向量。

③. 一个特征值有无穷多特征向量属于它，但是一个特征向量只能属于A的一个特征值。

例. 证明：A的一个特征向量只能属于A的一个特征值。

证明：设 $AX=\lambda_1 X$, $X\neq 0$ 为特征向量 (要证 $\lambda_1=\lambda_2$).

$AX=\lambda_2 X$.

两式相减 $(\lambda_1-\lambda_2)X=0$.

$\because X\neq 0 \Rightarrow \lambda_1-\lambda_2=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2$. ∎

例. 设 λ 是 A 的特征值. 证明

1). λ^k 是 A^k 的特征值. k是正整数

2). 当A可逆时. $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值.

3). 当A可逆时. $\frac{|A|}{\lambda}$ 是 A^* 的特征值.

} 当结论记住!

A^* 是A的伴随阵

证明: 已知 $AX=\lambda X$. $X\neq 0$ 为列向量.

1). 两边左乘 A. $\underline{A^2X}=\lambda AX=\underline{\lambda^2 X}$

$\therefore$ λ^2 是 A^2 的特征值. (X 是 A^2 的对应于特征值 λ^2 的特征向量)

$A^3X=\cancel{\lambda^2 AX}\ A(A^2X)=\lambda^2 AX=\lambda^3 X$. ....

2). $\because$ $AX=\lambda X$. $X\neq 0$ 为列向量.

$\because$ A 可逆. $\therefore$ A^{-1} 存在. $0\neq|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$

两边左乘 A^{-1}. $X=\lambda A^{-1}X$.

$\underline{\because A \text{可逆} \ \therefore \lambda\neq 0}$ $\Longrightarrow A^{-1}X=\frac{1}{\lambda}X$.

$\therefore$ $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值.

3). 设 $AX=\lambda X$. $X\neq 0$ 列向量. (或证 $A^*X_1=\frac{|A|}{\lambda}X_1$).

(A^*. 联系到 $AA^*=A^*A=|A|E$)

$\Longrightarrow$ 两边左乘 A^*

$$\underline{A^*A}X=\lambda \underline{A^*X}.$$

$\because$ A 可逆. $\therefore$ $\lambda\neq 0$. 且 $A^*A=|A|E$

$$\Longrightarrow \quad A^*X=\frac{|A|}{\lambda}X.$$

$\therefore$ $\frac{|A|}{\lambda}$ 是 A^* 的特征值.

法2). $A^{-1}X=\frac{1}{\lambda}X$.

$$\Longrightarrow \quad \frac{A^*}{|A|}X=\frac{1}{\lambda}X. \quad \Longrightarrow \quad A^*X=\frac{|A|}{\lambda}X.$$

例. 设 A_3 的特征值为 1, -1, 2. 求 $|3A+A^*-2E|$.

解: 设 $AX=\lambda X$. $X\neq 0$ 为特征向量.

$$(3A+A^*-2E)X = 3AX+A^*X-2X$$
$$= 3\lambda X+\frac{|A|}{\lambda}X-2X$$
$$= \left(3\lambda+\frac{|A|}{\lambda}-2\right)X. \quad 而 |A|=-2$$

$\therefore$ $3\lambda-\frac{2}{\lambda}-2$ 为 $3A+A^*-2E$ 的特征值.

即为 -1, -3, 3

$\therefore$ $|3A+A^*-2E| = (-1)\times(-3)\times 3 = 9$.

推广: λ是A的特征值. $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_nx^0$.

则 $f(\lambda)$ 是 $f(A)$ 的特征值. $f(A)=a_0A^n+a_1A^{n-1}+\cdots+a_{n-1}A+a_nE$

$A^3+2A^2-3A+5E$ $\qquad$ $A^0=E$.

的特征值 $\lambda^3+2\lambda^2-3\lambda+5$.

设 $AX=\lambda X$.

$(A^3+2A^2-3A+5E)X$

今晚上作业全体同学提交.