

高等数学A1 2005年

1. 单项选择题(每小题2分, 共10分)

- (1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, x^3 与 $a(x - \arcsin x)$ 是等价无穷小量, 则 $a =$ (A)
 A. -6 B. 6 C. -2 D. 2
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} [\cos x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \dots \cos \frac{x}{2^n}] =$ (B)
 A. 0 B. 1 C. -1 D. e
- (3) 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2n+1}}{1+x^{2n}}$, 则 $f(x)$ 的间断点为 (C)
 A. $x = -1$ B. $x = 0$ C. $x = 1$ D. $x = 2$
- (4) 设 $f(x)$ 在点 a 的某领域内有定义, 则 $f(x)$ 在点 a 可导的充分条件为 (A)
 A. $\lim_{h \rightarrow 0} h[f(a + \frac{1}{h}) - f(a)]$ 存在 B. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(a) - f(a-h)]}{h}$ 存在
 C. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(a+h) - f(a-h)]}{2h}$ 存在 D. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(a+2h) - f(a+h)]}{h}$ 存在
- (5) 设在 $[0, 1]$ 上有 $f''(x) < 0$, 则 (D)
 A. $f(1) - f(0) > f'(1) > f'(0)$ B. $f'(0) > f(0) - f(1) > f'(1)$
 C. $f'(0) > f'(1) > f(1) - f(0)$ D. $f'(0) > f(1) - f(0) > f'(1)$

2. (每小题2分, 共10分)填空题

- (1) 已知 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - a}{x - 3} = 4$, 则 $a = \underline{3}$
- (2) 曲线 $y(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x}$ 的渐近线为 $x = \underline{0}$
- (3) 抛物线 $y = x^2 - 4x + 5$ 在其顶点处的曲率半径为 $\frac{1}{\underline{2}}$
- (4) 函数 $y = \ln(1 - x)$ 的 n 阶麦克劳林公式为_____
- (5) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ ax + b, & x > 1 \end{cases}$ 可导, 则 $a - b = \underline{1}$

3. (10分) 设 $f(x) = \int_0^x x\sqrt{1+t^2}dt$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 1$.

4. (10分) 求曲线 $f(x) = \begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = \ln(1+t) \end{cases}$ 过 $(3, \ln 2)$ 点的法线与 x 轴的交点.

5. 计算下列积分(每小题5分, 共10分)

(1) $\int x(e^x + \ln x)dx$; (2) $\int_0^\pi \sqrt{1 - \sin 2x}dx$

6. (10分) 讨论函数 $f(x) = \frac{2x}{(x-1)^2}$ 的单调性与凹凸性, 并求出其极值和拐点.

7. 微分学应用题(每小题5分, 共10分)

(a) 确定常数 a, b, c , 使三次曲线 $y = ax^3 + bx^2 + cx$ 有拐点 $(1, 2)$, 且在该拐点处的切线斜率为-1.

(b) 欲制造一个容积为 $2\pi m^3$ 的圆柱形带盖的封闭储油桶, 试问它的半径 r 和高 h 各为多少时才能用料最省? 说明理由.

8. 积分学应用题(每小题5分, 共10分)

(a) 求心脏线 $r = a(1 + \cos \theta)$ ($a > 0$) 上对应 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 的弧线段的长度.

(b) D 是由抛物线 $y = 2x(2 - x)$ 与 x 轴所围成的区域, 直线 $y = kx$ 将区域 D 分为面积相等的两部分, 求 k 的值.