前　　言

本辅导材料是原书作者亲自编写的。其宗旨是帮助读者学习和复习原书内容，帮助读者训练解题思路和技巧，逐步提高解题能力。不是代替读者学习，更不希望读者只是从本书抄袭答案。

我们如何来体现这个宗旨呢？首先是体现在本书内容上。本书对原书的每一章都写了内容提要，学习指导，以及原书习题和补充题的提示与解答。最后还选编了一些综合参考题。这就是本书的各部分内容。

其次是请读者按作者的如下建议来学习各部分内容：

(1) 内容提要是一个复习纲要。读者在学完每一章后按提要逐条复述其内容，若能整理成笔记更好。

(2) 读者通过学习指导要尽力理解各部分内容的数学涵义、重点、各部分的联系等。

学习指导中还对原书内容作了一些补充。让读者从中了解原书中某些概念(如线性相关、线性变换等)、理论提出的背景。

(3) 习题和补充题后不仅有答案和证明，部分题还列有提示。我们不希望读者遇到不会的题目立即去抄解答。我们建议读者自己按下列步骤一步步地获得答案。

1. 先看题，仔细了解题意，弄清已知条件和要得到的结论，然后尽可能地从书中查找(当然先是回忆，然后是查书)与题目有关的概念、结论、方法。若能从中找到从已知条件到所要结论的联系，就能解答出题目。

2. 如凭找到的内容还不能找出所要的联系。可以看提示。按它指出的路线寻找所要的联系，解答出题目。

3. 看了提示还作不出。这时才看解答。但不要抄袭解答。应完全弄懂后，自己独立地写出解答。

我们提醒读者，一定不要把会作若干习题作为学习的终极目标。作题的作用是帮助读者熟悉书上的内容，并加深、加宽学过的知识，而且培养和运用知识的能力。

我们编写这本辅导材料，安排各部分内容，建议各项学习方法和步骤，都是为了体现上述作用。这就是我们的宗旨。

最后我们还编写了若干综合参考题是深入的、较难的内容。这是为了加宽、加深有关知识和技巧，主要是提高的目的，不作为必学的内容。

最后说明一点。本书中常常引用一些结论，来自原书或本材料。引用时，比如引用本书第三章的学习指导中的补充内容。在本书第三章中引用时可简写为学习指导中的补充内容可省略“第三章中”几个字。在其他章中引用时才全部写出。又如引用原书第七章§8引理时，可以省去“原书”二字，简写为第七章§8引理。若在本书第七章中引用则更可简写为§8引理。

由于本材料是第一次印刷出版，错误在所难免，敬请大家批评指正。

编者

2006.9

目　　录

第一章 多 项 式

一、内容提要

1. 数域

数域概念的引入

三个重要数域:复数域 **C**,实数域 **R**,有理数域 **Q**

2. 一元多项式环

数域 P 上一元多项式的定义及一些相关概念

多项式的运算:加法、乘法及其满足的一些规律

一元多项式环 $P[x]$

3. 整除性理论

带余除法、整除

最大公因式,辗转相除法

互素

4. 因式分解定理

不可约多项式

因式分解及唯一性定理

标准分解式

三个重要数域:**C**,**R**,**Q** 上多项式的因式分解情况

5. 重因式

重因式及其判别法,去掉重因式的方法.

6. 多项式函数

多项式函数

余数定理，根与一次因式的关系

重根的定义及判别法

7. 多元多项式

多元多项式的定义，字典排列法

对称多项式、初等对称多项式，对称多项式基本定理

二、学习指导

1. 数域

这一章的中心问题是讨论一元多项式的整除性理论及因式分解定理. 由于多项式的因式分解问题与系数的取值范围有关. 例如，关于多项式 x^4-4，看成有理系数，实系数或复系数多项式，它的因式分解情况各不相同. 还有另一些问题，也由于取值范围不同，得出不同的结论. 为了一般地讨论问题，得到一般的结论. 也就是说，对于不同的取值范围，进行统一的讨论、这一章一开始就引入了数域的概念.

据上所述，我们在研究问题的时候，需要明确规定所考虑的数的范围，即取定一个数集. 又由于一般问题的讨论都离不开数的四则运算. 为了在指定的数集内能进行讨论，至少要求这个数集中任意两个数经过四则运算(作除法时，除数不得为 0)的结果仍在此数集中，所以我们引入了数域的概念(定义 1). 有了数域的概念以后，我们就可以在取定的数域内进行讨论. 所得的结论对一切数域都成立. 本课程中都是在任一个取定的数域中来讨论问题的. 所得到的结论对任一个数域都适用.

数域是一个重要的概念. 在本书中自始至终都要用到. 而且在其他数学问题及应用问题中，也总会要求明确所涉及的数的范围. 因此，熟练地掌握数域的定义对学习是非常重要的. 这也许是读者最初接触的“抽象的”概念，因此必须了解其涵意. 通过“是”“否”两方面的例子来加深数域的了解. 学会判断一个数集是否是数域并

知道如何选取或构造所需要的数域.

2. 一元多项式环 $P[x]$

一元多项式是这一章讨论的主要对象.本书中所介绍的多项式的定义(定义 2)与初等代数中所讨论的一元多项式基本上是一样的.但是概念有所推广.首先,所讨论的多项式的系数都是指定数域 P 中的数,而且一切讨论中所谈到的数都是在 P 中的.其次,多项式 $f(x)$ 表达式中的"x"是一个符号(或称文字).把 x 看成未知数,就是初等代数中的多项式.把 x 看成一个变量,$f(x)$就是数学分析中的多项式函数.多项式还可代表其他一些数学对象例如符号 x 可以代表求微商的运算 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$,这时多项式 $f(x)$就是一个微分算子.又如果 x 代表一个矩阵,$f(x)$就是一个矩阵多项式,在本书中也常用到.这种多项式与多项式函数有类似的运算性质.正因为 x 可以代表许多数学对象,故又称 x 为不定元.本书中关于多项式的定义和运算及其他概念,都是实际中的各种具体多项式的抽象.这种抽象后得到的多项式的性质适用于各种实际中的多项式.这也是我们课程中首次采用了抽象方法来研究一些可运算的对象.这种抽象的研究方法有事半功倍的效果,是数学研究中常用的手段.

多项式的运算:加法、减法与乘法也是和初等代数中一样的,不过为了讨论运算规律及处理一般性问题.书中给出了两个多项式的和与积的公式.并用公式证明了多项式运算满足的一些规律.这些规律都是以后经常用到的.为了能自然而熟练地应用运算公式及其所满足的规律(1－6),希望读者自己证明一下这些规律.最好能应用和号来证明,以便能练习关于和号的运用,并通过习题学会应用这些规律.

我们用 $P[x]$表示系数在数域 P 中的一元多项式全体,并讨论 $P[x]$在加法、乘法下的一些性质.$P[x]$称为数域 P 上的**一元多项式环**.P 称为$P[x]$的系数域.要明确 $P[x]$中两个多项式经

过加法、减法和乘法，其和、差与积仍在 $P[x]$ 中，即 $P[x]$ 对加法、减法和乘法是封闭的.

3. 整除性理论

在 $P[x]$ 中，可以进行加法、减法及乘法三种运算. 但是乘法的逆运算——除法不是能普遍进行的. 因此本书介绍了**带余除法**. 同时引入了商式及余式的概念，并证明了它们的唯一性，存在性的证明用到了第二数学归纳法. 希望读者能通过这里的证明及其他练习复习一下数学归纳法.

整除的概念是两个多项式之间的一种特殊关系. 相应的**有因式**和**倍式**的概念. 希望读者能很好地理解这些概念，并会证明书中所提出的几个关于整除的结论.

对于 $P[x]$ 中两个多项式 $f(x)$，$g(x)$，一般不一定有整除关系. 为了能普遍讨论 $f(x)$，$g(x)$ 在"整除性"方面的关系. 我们引入了最大公因式的概念(定义 6)，最大公因式的存在(定理 2)是通过具体算法——辗转相除法来证明的，因此也给出了一个计算方法，读者在看懂证明以后，希望通过具体习题学会计算最大公因式及计算满足

$$(f(x),g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x)$$

的 $u(x)$ 及 $v(x)$ 的方法.

书中的引理(第 13 页)是证明最大公因式的存在及计算最大公因式的基础，它的证明方法也是经常要用到的方法，值得注意的是：在引理中，$r(x)$ 并没有(像带余除法中那样)要求当 $r(x)\neq 0$ 时，$\partial(r(x))<\partial(g(x))$，这一点给应用带来了方便(参考习题 20).

"互素"是最大公因式为非零常数的特殊情况，很多结论可由此证明，书中提到的一些有关结论都是非常重要、非常有用的，希望读者能证明并会应用.

多个多项式的最大公因式及互素的情况也会经常要用到的，希望读者自己证明一下.

由于整除关系不因为系数域的扩大而改变，所以最大公因式、

互素等关系也不会因系数域的扩大而改变.

4. 因式分解定理

我们知道,一个多项式的因式分解,是根据它系数的范围来确定的.因此为了确定地叙述因式分解定理,书中引入了**不可约多项式**的概念(定义 8),对任一个数域 P,$P[x]$中的多项式是否是不可约的,其判别方法都是一样的(根据定义),因此可以对不同数域作统一的讨论.但是,作为 $P[x]$中的多项式,$f(x)$是否不可约是与 P 有关的.这一点在讨论问题时需要十分注意.

定理 5 给出了不可约多项式的一个重要性质,这是证明因式分解定理的主要依据.

诚如书中指出,因式分解定理在理论上有其重要性.但是它没有给出具体的分解因式的方法.实际上,对于一般情形,普遍可行的分解多项式的方法是不存在的.

多项式的**标准分解式**.可把因式分解后的表示式规范化,而且还可以通过两个多项式的标准分解式写出这两个多项式的最大公因式.

因式分解定理对任一数域 P 上多项式都成立.但是具体的分解情况依赖于 P 的性质.书中对三个主要数域:复数域、实数域及有理数域进行了讨论,为此要用到**多项式函数**的概念.

设 $f(x)$是 $P[x]$中一个多项式,把 x 看成一个变量,就得到一个多项式函数.当 P 是实数域时就是通常(例如数学分析中)所讨论的多项式函数.因此这里所讨论的一些结果在数学分析中是很有用的.

余数定理给出了根与一次因式的关系(定理 7 的推论),这在多项式的因式分解与求根问题中都是很有用的.

定理 8 说明了多项式的根的个数问题,并且用以证明了定理 9.这个结论是说 n 次多项式由 $n+1$ 个点上的值唯一确定.这在实验数据处理中是很有用的.

应用根与一次因式的关系,我们得到复系数与实系数多项式

的因式分解情况：

(1) 复数域

根据代数基本定理，可推出复系数不可约多项式都是 1 次的．由此还可得出复系数多项式的标准分解式．

(2) 实数域

证明时用到把实系数多项式看成复系数多项式的方法．这是处理实系数多项式的一种常用的方法．

实系数不可约多项式都是 1 次或 2 次的．

(3) 有理系数多项式

和复系数和实系数多项式不同，对于任意大于 0 的整数 n，都存在 n 次不可约有理系数多项式，因此如何判断一个有理系数多项式是否不可约是一个非常困难的问题．

书中讨论了关于有理系数多项式的因式分解问题．主要方法是把有理系数多项式的一些问题的讨论，归纳为整系数多项式的讨论，这也是一种处理有理系数多项式的方法．

需要指出的是：书中给出的计算有理系数多项式的有理根的方法．不仅在 $\mathbf{Q}[x]$中可以应用．对于 $\mathbf{C}[x]$，$\mathbf{R}[x]$中的多项式．如果它的系数是有理数，也可应用．从而简化这些多项式的求根及因式分解问题．

5．重因式和重根

书中给出了重因式、重根、单因式、单根的概念及其判断及计算方法．

需要注意的是：$f(x)$有没有重因式由 $f(x)$与 $f'(x)$是否互素而定，因此一个多项式有没有重因式不因为系数域的扩大而改变，但重因式的计算是与系数域有关的．当然，有没有重根也与系数域有关．

6．多元多项式

多元多项式的定义及运算是一元多项式的相关概念的推广．需要注意的是在多元多项式中，次数相同的项很多．因此书中介绍

了**字典排列法**.并可证明,两个多项式之积的首项等于首项之积.从而证明了多元多项式乘法满足消去律,而且这个结果在因式分解中也是很有用的.

多元多项式的项的另一种排法是通过齐次成分来表示的.在对称多项式的分解中可以看出这种表示法的用处.

和一元多项式函数一样,多元多项式也可看作一类多元函数.

对称多项式是多元多项式中常见的非常有用的一种.它与一元多项式根与系数的关系问题有密切联系.因此读者在阅读这一部分教材的时候,要注意初等对称多项式与一元多项式的根与系数的关系,对称多项式基本定理(定理 15)的证明给出了通过将对称多项式的首项表成初等对称多项式的单项式的首项.由此逐步降低次数而将原多项式表成初等对称多项式的方法.

最后提出的一元多项式的判别式 D 可用来判断此多项式有没有重根,并求出有重根的条件.

三、习题、提示与解答

1. 用 $g(x)$除 $f(x)$,求商 $q(x)$与余式 $r(x)$:

1) $f(x)=x^3-3x^2-x-1, g(x)=3x^2-2x+1$.

解 用分离系数的竖式进行计算.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & & & \frac{1}{3} & -\frac{7}{9} \\
\hline
3\quad -2\quad 1 & 1 & -3 & -1 & -1 \\
 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \\
\cline{2-5}
 & & -\frac{7}{3} & -\frac{4}{3} & -1 \\
 & & -\frac{7}{3} & \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} \\
\cline{3-5}
 & & & -\frac{26}{9} & -\frac{2}{9}
\end{array}
$$

所以

$$q(x)=\frac{1}{3}x-\frac{7}{9},r(x)=-\frac{26}{9}x-\frac{2}{9}.$$

2) $f(x)=x^4-2x+5,g(x)=x^2-x+2.$

答 $q(x)=x^2+x-1,r(x)=-5x+7.$

2. m,p,q 适合什么条件时,有

1) $x^2+mx-1\mid x^3+px+q.$

解 因为 x^3+px+q 被 x^2+mx-1 除所得的余式为 $(p+m^2+1)x+(q-m)$,所以 $x^2+mx-1\mid x^3+px+q$ 的充要条件是 $p+m^2+1=q-m=0$,即 $p=-m^2-1,q=m.$

2) $x^2+mx+1\mid x^4+px^2+q.$

解 $x^2+mx+1\mid x^4+px^2+q$ 的充要条件是有 $g(x)$ 使 $x^4+px^2+q=(x^2+mx+1)g(x)$,比较次数及首项系数,常数项,可设 $g(x)=x^2+ax+q$.代入,展开,得

$$\begin{cases}a+m=0,\\1+am+q=p,\\a+qm=0.\end{cases}$$

由此得 $x^2+mx+1\mid x^4+px^2+q$ 的充要条件是

$$p=2-m^2,q=1\text{ 或 }p=q+1,m=0.$$

3. 求 $g(x)$除 $f(x)$的商 $q(x)$与余式 $r(x)$:

注 用一个1次多项式除一个 n 次多项式所得的商式是一个 $n-1$ 次多项式,因此,计算的过程是简单的然而是冗长的,但是有一种简单的方法可以使计算方法简单而书写方便,这就是综合除法.因此在计算本题之前我们先介绍综合除法.

设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

并设 $f(x)$被 $x-c$ 除所得的商式为

$$q(x)=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1x+b_0,$$

并记余数为 r,则

$$\begin{cases} b_{n-1} = a_n, \\ b_{n-2} = a_{n-1} + cb_{n-1}, \\ \cdots \\ b_0 = a_1 + cb_1, \\ r = a_0 + cb_0. \end{cases}$$

证明 由假设，$f(x) = (x-c)q(x) + r$. 因此得

$$\begin{cases} b_{n-1} = a_n, \\ b_{n-2} - cb_{n-1} = a_{n-1}, \\ \cdots \\ b_0 - cb_1 = a_1, \\ r - cb_0 = a_0. \end{cases}$$

由此即得所证.

上面的公式把 $q(x)$，$r(x)$ 用 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ 及 c 来表示这就是综合除法的原理. 应用上述等式可以把 $x-c$ 除 $f(x)$ 所得的商及余数用较少的步骤及空间计算出来，并且把除法中的减法变成了加法. 计算起来方便多了，综合除法可用下面算式来实现：

$$\begin{array}{cccccc|l} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & & a_0 & \underline{c} \\ & cb_{n-1} & \cdots & cb_1 & & & \\ \hline a_n & a_{n-1}+cb_{n-1} & \cdots & a_1+cb_1 & \multicolumn{2}{|c}{a_0+cb_0} & \\ \| & \| & & & & \| & \\ b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_0 & & r & \end{array}$$

因为 c 是 $f(x)$ 的根的充要条件是 $f(c)=0$. 因此应用综合除法还可以很快地判断 c 是否是 $f(x)$ 的根.

具体计算参考下面的习题.

1) $f(x) = 2x^5 - 5x^3 - 8x$, $g(x) = x + 3$.

解 用综合除法进行计算：

$$\begin{array}{cccccc|l} 2 & 0 & -5 & 0 & -8 & 0 & -3 \\ & -6 & 18 & -39 & 117 & -327 & \\ \hline 2 & -6 & 13 & -39 & 109 & \multicolumn{1}{|c}{-327} & \end{array}$$

所以

$$q(x)=2x^4-6x^3+13x^2-39x+109,\ r(x)=-327.$$

2) $f(x)=x^3-x^2-x,g(x)=x-1+2\mathrm{i}$.

答 $q(x)=x^2-2\mathrm{i}x-(5+2\mathrm{i}),r(x)=-9+8\mathrm{i}$.

4. 把 $f(x)$ 表成 $x-x_0$ 的方幂和，即表成

$$c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\cdots$$

的形式.

注 设 $f(x)$ 表成 $c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\cdots+c_n(x-x_0)^n$. 容易看出：$c_0$ 就是 $f(x)$ 被 $x-x_0$ 除所得的余数：

$$\begin{aligned}f(x)&=[c_n(x-x_0)^{n-1}+c_{n-1}(x-x_0)^{n-2}+\cdots+c_1](x-x_0)+c_0\\&=f_1(x)(x-x_0)+c_0.\end{aligned}$$

从上式又可看出 c_1 是 $f(x)$ 被 $x-x_0$ 除所得的商 $f_1(x)$ 再被 $x-x_0$ 除所得的余数. 因此逐次进行综合除法即可得出系数 $c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n$.

1) $f(x)=x^5,x_0=1$.

解 用综合除法进行计算

$$\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 & & \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & \\
 & 1 & 3 & 6 & & & \\
\hline
1 & 3 & 6 & 10 & & & \\
 & 1 & 4 & & & & \\
\hline
1 & 4 & 10 & & & & \\
 & 1 & & & & & \\
\hline
1 & 5 & & & & &
\end{array}$$

$$f(x)=(x^4+x^3+x^2+x+1)(x-1)+1$$

$$
\begin{aligned}
&=[(x^3+2x^2+3x+4)(x-1)+5](x-1)+1\\
&=(x^3+2x^2+3x+4)(x-1)^2+5(x-1)+1\\
&=[(x^2+3x+6)(x-1)+10](x-1)^2+5(x-1)+1\\
&=(x^2+3x+6)(x-1)^3+10(x-1)^2+5(x-1)+1\\
&=[(x+4)(x-10)+10](x-1)^3+10(x-1)^2+5(x-1)+1\\
&=(x+4)(x-1)^4+10(x-1)^3+10(x-1)^2+5(x-1)+1\\
&=(x-1)^5+5(x-1)^4+10(x-1)^3+10(x-1)^2+5(x-1)+1,
\end{aligned}
$$

所以

$$x^5=(x-1)^5+5(x-1)^4+10(x-1)^3+10(x-1)^2+5(x-1)+1$$

以上介绍了如何反复应用综合除法将一个多项式表成 $x-c$ 的方幂和.当熟悉了这个方法掌握了规律以后,可以根据综合除法的数据直接写出答案(参考 2 题),把一个多项式表成 $x-c$ 的方幂和,在数学分析求不定积分的部分分式法中可以用到.

2) $f(x)=x^4-2x^2+3, x_0=-2$.

解 应用综合除法

$$
\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 0 & -2 & 0 & 3 & -2\\
 & -2 & 4 & -4 & 8 & \\
\hline
1 & -2 & 2 & -4 & \multicolumn{1}{|r|}{11} & \\
 & -2 & 8 & -20 & & \\
\hline
1 & -4 & 10 & \multicolumn{1}{|r}{-24} & & \\
 & -2 & 12 & & & \\
\hline
1 & -6 & \multicolumn{1}{|r}{22} & & & \\
 & -2 & & & & \\
\hline
1 & \multicolumn{1}{|r}{-8} & & & &
\end{array}
$$

所以 $f(x)=(x+2)^4-8(x+2)^3+22(x+2)^2-24(x+2)+11$.

3) $f(x)=x^4+2ix^3-(1+i)x^2-3x+7+i, x_0=-i$.

答 $f(x)=(x+i)^4-2i(x+i)^3-(1+i)(x+i)^2-5(x+i)+7+5i$

5. 求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式：

1) $f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1, g(x)=x^3+x^2-x-1$.

解 用辗转相除法进行计算

	$f(x)$	$g(x)$	
$q_1(x)=1\quad 0$	$1\quad 1\quad -3\quad -4\quad -1$	$1\quad 1\quad -1\quad -1$	$q_2(x)=-\frac{1}{2}\quad \frac{1}{4}$
	$1\quad 1\quad -1\quad -1$	$1\quad \frac{3}{2}\quad \frac{1}{2}$	
$q_3(x)=\frac{8}{3}\quad \frac{4}{3}$	$r_1(x)=-2\quad -3\quad -1$	$-\frac{1}{2}\quad -\frac{3}{2}\quad -1$	
	$-2\quad -2$	$-\frac{1}{2}\quad -\frac{3}{4}\quad -\frac{1}{4}$	
	$-1\quad -1$	$r_2(x)=-\frac{3}{4}\quad -\frac{3}{4}$	
	$-1\quad -1$		
	$r_3(x)=0$		

所以

$$(f(x),g(x))=x+1.$$

2) $f(x)=x^4-4x^3+1, g(x)=x^3-3x^2+1$.

答 $(f(x),g(x))=1$.

3) $f(x)=x^4-10x^2+1, g(x)=x^4-4\sqrt{2}x^3+6x^2+4\sqrt{2}x+1$.

答 $(f(x),g(x))=x^2-2\sqrt{2}x-1$.

6. 求 $u(x), v(x)$ 使 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$：

1) $f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2, g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$.

解 用辗转相除法进行计算.

	$f(x)$	$g(x)$	
$q_1(x)=1$	1 2 −1 −4 2	1 1 −1 −2 −2	$q_2(x)=1\ 1$
	1 1 −1 −2 −2	1 0 −2 0	
$q_3(x)=1\ 0$	$r_1(x)=1$ 0 −2 0	1 1 −2 −2	
	1 0 −2	1 0 −2 0	
	$r_3(x)=0$	$r_2(x)=1$ 0 −2	

以上计算表明

$$f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x),$$
$$g(x)=q_2(x)r_1(x)+r_2(x),$$
$$r_1(x)=q_3(x)r_2(x)+0,$$

因此

$$\begin{aligned}(f(x),g(x))=r_2(x)&=x^2-2\\&=g(x)-q_2(x)r_1(x)\\&=g(x)-q_2(x)[f(x)-q_1(x)g(x)]\\&=-q_2(x)f(x)+[1+q_1(x)q_2(x)]g(x),\end{aligned}$$

所以

$$u(x)=-q_2(x)=-x-1,\ v(x)=1+q_1(x)q_2(x)=x+2.$$

2) $f(x)=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9,\ g(x)=2x^3-x^2-5x+4$.

答 $u(x)=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3},\ v(x)=\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{2}{3}x-1$.

3) $f(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1,\ g(x)=x^2-x-1$.

答 $u(x)=-x-1,\ v(x)=x^3+x^2-3x-2$.

7. 设 $f(x)=x^3+(1+t)x^2+2x+2u,\ g(x)=x^3+tx+u$ 的最大公因式是一个 2 次多项式，求 t,u 的值.

提示 说明 $f(x)-g(x)\neq 0$. 再利用 $(f(x),g(x))=(f(x)-g(x),g(x))$，这时等式右边必须是一个 2 次多项式.

解　$f(x)-g(x)=(1+t)x^2+(2-t)x+u$. 因为 $1+t$ 与 $2-t$ 不能同时为 0，所以 $f(x)-g(x)\neq 0$.

由 $(f(x),g(x))=(f(x)-g(x),g(x))$. 根据题目假设，它一定是一个 2 次多项式. 所以 $1+t\neq 0$，并且 $f(x)-g(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式，因此 $f(x)-g(x)$ 能整除 $g(x)$.

设

$$(1+t)g(x)=[f(x)-g(x)](x+c),$$

比较系数得

$$\begin{cases}2-t+c(1+t)=0,\\ u+c(2-t)=t(1+t),\\ cu=(1+t)u.\end{cases}$$

1) 如果 $u\neq 0$，则 $c=1+t$，代入第 1 式得

$$t=\frac{-1\pm\sqrt{11}\mathrm{i}}{2}.$$

再由 2 式得

$$\begin{cases}t=\dfrac{-1+\sqrt{11}\mathrm{i}}{2},\\ u=-7-\sqrt{11}\mathrm{i}\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}t=\dfrac{-1-\sqrt{11}\mathrm{i}}{2},\\ u=-7+\sqrt{11}\mathrm{i}.\end{cases}$$

2) 如果 $u=0$，则由 1,2 两式，解得

$$t(1+t)^2+(t-2)^2=0,$$

即有

$$(t+4)(t^2-t+1)=0,$$

因此

$$t=-4,\frac{1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}.$$

根据以上讨论，知 t,u 的值为

$$\begin{cases}t=-4,\\ u=0\end{cases}或\begin{cases}t=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},\\ u=0\end{cases}或\begin{cases}t=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},\\ u=0\end{cases}或\begin{cases}t=\dfrac{-1}{2}+\dfrac{\sqrt{11}}{2}\mathrm{i},\\ u=-7-\sqrt{11}\mathrm{i}\end{cases}或$$

$$\begin{cases} t = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{11}}{2}\mathrm{i}, \\ u = -7 + \sqrt{11}\mathrm{i}. \end{cases}$$

注 如果限制在实数域，则只有一个解即上面的第一个解.

8. 证明：如果 $d(x)|f(x), d(x)|g(x)$，且 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个组合，那么 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式.

证明 由题设，$d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个公因式，如果 $h(x)$ 是 $f(x), g(x)$ 的一个公因式. 那么，$h(x)$ 能整除 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的任一个组合，故 $h(x)$ 能整除 $d(x)$，因此，根据定义 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式.

9. 证明：$(f(x)h(x), g(x)h(x)) = (f(x), g(x))h(x)$ （$h(x)$ 的首项系数为 1）.

提示 设法应用上题.

证明 因为 $(f(x), g(x)) | f(x), g(x)$，所以 $(f(x), g(x))h(x) | f(x)h(x), g(x)h(x)$. $(f(x), g(x))h(x)$ 是 $f(x)h(x), g(x)h(x)$ 的一个公因式.

设 $(f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$. 则 $(f(x), g(x))h(x) = u(x)(f(x)h(x)) + v(x)(g(x)h(x))$

因此根据上题，$(f(x), g(x))h(x)$ 是 $f(x)h(x), g(x)h(x)$ 的一个公因式. 又因 $h(x)$ 的首项系数为 1. 因此 $(f(x), g(x))h(x)$ 的首项系数为 1. 所以

$$(f(x)h(x), g(x)h(x)) = (f(x), g(x))h(x).$$

10. 如果 $f(x), g(x)$ 不全为零. 证明：

$$\left(\frac{f(x)}{(f(x), g(x))}, \frac{g(x)}{(f(x), g(x))}\right) = 1.$$

提示 应用本章定理 2 及定理 3.

证明 根据定理 2，有多项式 $u(x), v(x)$ 使

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = (f(x), g(x)),$$

于是

$$u(x)\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}+v(x)\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}=1,$$

再根据定理 3,即得

$$\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))},\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right)=1.$$

11. 证明:如果 $f(x),g(x)$ 不全为零,且 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$,那么 $(u(x),v(x))=1$.

提示 应用本章定理 3.

证明 由 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$

可得

$$\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}u(x)+\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}v(x)=1,$$

因此根据定理 3 知

$$(u(x),v(x))=1.$$

12. 证明:如果 $(f(x),g(x))=1,(f(x),h(x))=1$,那么

$$(f(x),g(x)h(x))=1$$

提示 同上题.

证明 因为 $(f(x),g(x))=1,(f(x),h(x))=1$. 故有 $u_1(x),v_1(x)$ 及 $u_2(x),v_2(x)$ 使

$$u_1(x)f(x)+v_1(x)g(x)=1,$$

$$u_2(x)f(x)+v_2(x)h(x)=1.$$

两式相乘,得

$$[u_1(x)u_2(x)f(x)+u_1(x)v_2(x)h(x)+u_2(x)v_1(x)g(x)]f(x)+(v_1(x)v_2(x))g(x)h(x)=1.$$

因此,根据定理 3,有

$$(f(x),g(x)h(x))=1.$$

13. 设 $f_1(x),\cdots,f_m(x),g_1(x),\cdots,g_n(x)$ 都是多项式,而且

$$(f_i(x),g_j(x))=1(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),$$

求证：$(f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x),g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x))=1$.

证明 用反证法. 如果 $d(x)=(f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x),g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x))\neq 1$，则 $d(x)$有一个不可约因式，设为 $p(x)$. 于是 $p(x)\mid f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x)$. 根据不可约多项式的性质，$p(x)$能整除 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x)$中的一个. 设为 $f_s(x)$ $(1\leqslant s\leqslant m)$. 同理 $p(x)$整除 $g_1(x),\cdots,g_n(x)$中的一个，设为 $g_t(x)(1\leqslant t\leqslant n)$. 因此 $p(x)\mid(f_s(x),g_t(x))$. 与假设矛盾. 所以 $(f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x),g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x))=1$.

14. 证明：如果$(f(x),g(x))=1$，那么$(f(x)g(x),f(x)+g(x))=1$.

证明 如果$(f(x),g(x))=1$，那么$(f(x),f(x)+g(x))=1$，$(g(x),f(x)+g(x))=1$. 由 12 题，即得$(f(x)g(x),f(x)+g(x))=1$.

15. 求下列多项式的公共根：

$f(x)=x^3+2x^2+2x+1$；$g(x)=x^4+x^3+2x^2+x+1$.

解 因为

$$(f(x),g(x))=x^2+x+1,$$

所以 $f(x)$与 $g(x)$的公共根为 $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 及 $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

16. 判别下列多项式有无重因式：

1) $f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$.

解 $f'(x)=5x^4-20x^3+21x^2-4x+4$

因为

$$(f(x),f'(x))=(x-2)^2,$$

所以 $f(x)$有 3 重因式 $x-2$.

2) $f(x)=x^4+4x^2-4x-3$.

答 没有重因式.

17. 求 t 值使 $f(x)=x^3-3x^2+tx-1$ 有重根.

解 $f'(x)=3x^2-6x+t$.

因为 $f(x)$ 有重根的充分必要条件是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 有公共根.为此求 $f(x),f'(x)$ 的最大公因式.作辗转相除

$$f(x)=\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)f'(x)+\left(\frac{2}{3}t-2\right)x+\left(\frac{1}{3}t-1\right).$$

1) 如果 $t=3$.则 $f(x)=\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)f'(x)=(x-1)(x-1)^2$,

此时 $f(x)$ 有 3 重根 1.

2) 如果 $t\neq 3$,则

$$\begin{aligned}(f(x),f'(x))&=\left(f'(x),f(x)-\frac{1}{3}(x-1)f'(x)\right)\\&=(f'(x),2x+1).\end{aligned}$$

因为如果 $(f(x),f'(x))=1$,则 $f(x)$ 没有重根,所以,当 $f(x)$ 有重根时,$(f'(x),2x+1)$ 必须等于 $x+\frac{1}{2}$,即 $f(x)$ 有 2 重根 $-\frac{1}{2}$,此时必有 $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=0$,可算出 $t=-\frac{15}{4}$.

总结以上讨论,知当 $t=3$ 时 $f(x)$ 有 3 重根 1;当 $t=-\frac{15}{4}$ 时,$f(x)$ 有 2 重根 $-\frac{1}{2}$.

18. 求多项式 x^3+px+q 有重根的条件.

解 记 $f(x)=x^3+px+q$,

则

$$f'(x)=3x^2+p,$$

于是

$$\begin{aligned}(f(x),f'(x))&=\left(f(x),f(x)-\frac{1}{3}xf'(x)\right)\\&=\left(f(x),\frac{2}{3}px+q\right)\end{aligned}$$

$f(x)$有重根的条件是$(f(x),f'(x))\neq 1$.如果 $p=0$,那么$(f(x),f'(x))\neq 1$ 的条件是 $q=0$.如果 $p\neq 0$,那么$(f(x),f'(x))\neq 1$的条件是$\frac{2}{3}px-q$ 能整除 $f'(x)$.由此得 $4p^3+27q^2=0$.

因此,$f(x)$有重根的条件为 $4p^3+27q^2=0$.

注 也可直接应用 3 次多项式的判别式.

19. 如果$(x-1)^2\mid Ax^4+Bx^2+1$,求 A,B.

解法 1 作$(x-1)^2$ 除 Ax^4+Bx^2+1 的带余除法,得到余式为$(4A+2B)x+(-3A-B+1)$.因为$(x-1)^2\mid Ax^4+Bx^2+1$,所以余式为 0,即

$$4A+2B=0,$$
$$-3A-B+1=0,$$

由此解得 $A=1,B=-2$.

解法 2 因为$(x-1)^2\mid Ax^4+Bx^2+1$.所以 $x-1\mid Ax^4+Bx^2+1$.及 $x-1$ 整除$(Ax^4+Bx^2+1)'=4Ax^3+2Bx$.由余数定理,即得

$$A+B+1=0,$$
$$4A+2B=0,$$

解得

$$A=1,B=-2.$$

20. 证明:$1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$不能有重根.

提示 证明 $1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$与其导数互素.

证明 记 $f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$,则

$$f'(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=f(x)-\frac{x^n}{n!},$$

即有 $f(x)-f'(x)=\frac{x^n}{n!}$,因此

$$(f(x),f'(x))=\left(f(x),\frac{x^n}{n!}\right)=1.$$

根据定理6推论3知 $f(x)$不能有重根.

21. 如果 a 是$f'''(x)$的一个 k 重根,证明 a 是

$$g(x)=\frac{x-a}{2}[f'(x)+f'(a)]-f(x)+f(a)$$

的一个 $k+3$ 重根.

提示 应用定理6推论1.

证明 $g'(x)=\frac{x-a}{2}f''(x)+\frac{1}{2}[f'(x)+f'(a)]-f'(x)$

$$=\frac{x-a}{2}f''(x)-\frac{1}{2}f'(x)+\frac{1}{2}f'(a),$$

$$g''(x)=\frac{x-a}{2}f'''(x)+\frac{1}{2}f''(x)-\frac{1}{2}f''(x)=\frac{x-a}{2}f'''(x).$$

因为 a 是 $f'''(x)$的一个 k 重根,所以 a 是g''的一个$k+1$ 重根.又因 a 是$g(x)$及 $g'(x)$的根,因此 a 是$g(x)$的一个 $k+3$ 重根.

22. 证明:x_0 是 $f(x)$的 k 重根的充分必要条件是 $f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{(k-1)}(x_0)=0$,而 $f^{(k)}(x_0)\neq0$.

证明 根据定义,x_0 是 $f(x)$的 k 重根的条件是 $x-x_0$ 是 $f(x)$的 k 重因式,再由根与一次因式的关系,即得 x_0 是 $f(x)$的 k 重根的充分必要条件是$f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{(k-1)}(x_0)=0$,而 $f^{(k)}(x_0)\neq0$.

注 这个习题说明可以由 $f(x_0),f'(x_0),\cdots,f^{(k)}(x_0)$的值直接判断 x_0 是否是 $f(x)$的根;以及当 x_0 是 $f(x)$的根时,它的重数是多少?

23. 举例说明断语"如果 α 是$f'(x)$的 m 重根,那么 α 是 $f(x)$的 $m+1$ 重根"是不对的.

解 可以用反例来说明这一结论.设

$$f(x)=(x-\alpha)^{m+1}+1,$$

则

$$f'(x)=(m+1)(x-\alpha)^m$$

因此 α 是 $f'(x)$的 m 重根,但是 α 不是$f(x)$的根.

24. 证明:如果$(x-1)\mid f(x^n)$,那么$(x^n-1)\mid f(x^n)$.

证明 设 $y=x^n$.考虑多项式 $f(y)$,于是 $f(1)=f(1^n)=0$,因此,$y-1$ 能整除 $f(y)$,即 $x^n-1\mid f(x^n)$.

25. 证明:如果$(x^2+x+1)\mid f_1(x^3)+xf_2(x^3)$,那么

$$(x-1)\mid f_1(x),(x-1)\mid f_2(x).$$

提示 令 $g(x)=f_1(x^3)+xf_2(x^3)$.由 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=(x-1)(x-\omega_1)(x-\omega_2)$,其中 $\omega_1=\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$,$\omega_2=\frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$,$\omega_1^3=\omega_2^3=1$ 及 $g(\omega_1)=g(\omega_2)=0$ 来推出 $f_1(1)=f_2(1)=0$.

证明 $x^2+x+1=(x-\omega_1)(x-\omega_2)$,其中 ω_1,ω_2 是不等于1的两个3次单位根.由题设有

$$f_1(x^3)+xf_2(x^3)=(x^2+x+1)h(x),$$

因此有

$$f_1(1)+\omega_1 f_2(1)=0,$$
$$f_1(1)+\omega_2 f_2(1)=0,$$

由此得

$$f_1(1)=f_2(1)=0,$$

即

$$(x-1)\mid f_1(x),(x-1)\mid f_2(x).$$

26. 求多项式 x^n-1 在复数范围内和在实数范围内的因式分解.

解 利用 n 次单位根的三角表示,可得在复数范围内:$x^n-1=(x-1)(x-\varepsilon)\cdots(x-\varepsilon^{n-1})$,其中

$$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n};$$

在实数范围内，当 n 为奇数时：

$x^n-1=(x-1)[x^2-(\varepsilon+\varepsilon^{n-1})x+1][x^2-(\varepsilon^2+\varepsilon^{n-2})x+1]\cdots[x^2-(\varepsilon^{\frac{n-1}{2}}+\varepsilon^{\frac{n+1}{2}})x+1]$,

其中

$$\varepsilon^i+\varepsilon^{n-i}=2\cos\frac{2i\pi}{n}\text{是一个实数},i=1,2,\cdots,\frac{n-1}{2};$$

当 n 为偶数时：

$x^n-1=(x+1)(x-1)[x^2-(\varepsilon+\varepsilon^{n-1})x+1][x^2-(\varepsilon^2+\varepsilon^{n-2})x+1]\cdots[x^2-(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}+\varepsilon^{\frac{n+2}{2}})x+1]$.

27. 求下列多项式的有理根：

1) $x^3-6x^2+15x-14$.

解 可能的有理根为 $\pm1,\pm2,\pm7,\pm14$. 经计算

$$f(1)=-4,f(-1)=-36,f(2)=0,f(-2)=-76,$$
$$f(7)=140,f(-7)=-756,f(14)=1764,f(-14)=-4144$$

而 $f'(2)\neq0$,

所以有理根为 2(单根).

2) $4x^4-7x^2-5x-1$.

答 $-\frac{1}{2}$(2 重根).

3) $x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3$.

答 -1(4 重根),3(单根).

28. 下列多项式在有理数域上是否可约？

1) x^2+1.

答 如果可约则必为 2 个 1 次因式之积. 故必有有理根，但 x^2+1无有理根，故不可约.

2) $x^4-8x^3+12x^2+2$.

解 方法 1 因为没有有理根，所以没有 1 次因式.

如果有 2 次因式则可分解成两个 2 次整系数多项式之积，有两种情况：

$$x^4-8x^3+12x^2+2=(x^2+ax+1)(x^2+bx+2)$$

或

$$x^4-8x^3+12x^2+2=(x^2+ax-1)(x^2+bx-2).$$

这两种情况都无解．故 $x^4-8x^3+12x^2+2$ 无 2 次因式．

因为这是一个 4 次多项式，如可约，则必有 1 次或 2 次因式．所以这个多项式在有理数域上不可约．

方法 2　取 $p=2$．利用艾森斯坦判别法可证这个多项式在有理数域上不可约．

3) x^6+x^3+1．

解　记 $f(x)=x^6+x^3+1$．作替换 $x=y+1$．则

$$f(x)=y^6+6y^5+15y^4+21y^3+18y^2+9y+3=g(y)$$

根据艾森斯坦判别法．$g(y)$不可约，故 $f(x)$也不可约．

4) x^p+px+1，p 为奇素数．

提示　作替换 $x=y+1$，再利用艾森斯坦判别法．

答　不可约．

5) $x^4+4kx+1$，k 为整数．

提示　同上一小题．

答　不可约．

29．用初等对称多项式表出下列对称多项式：

1) $x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2$．

解　记 $x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2=f(x_1,x_2,x_3)$，

$$f(x_1,x_2,x_3)-\sigma_1\sigma_2=-3\sigma_3,$$

所以原式$=\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3$．

2) $(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3)$．

答　$\sigma_1\sigma_2-\sigma_3$．

3) $(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$.

解 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$

$$=\sum x_1^4x_2^2-2\sum x_1^4x_2x_3-2\sum x_1^3x_2^3+2\sum x_1^3x_2^2x_3-6x_1^2x_2^2x_3^2$$

($\sum x_1^4x_2^2$ 表示 $x_1^4x_2^2$ 经对换得到的各项组成的对称多项式，余同).

$$f(x_1,x_2,x_3)-\sigma_1^2\sigma_2^2$$

$$=-4\sum x_1^4x_2x_3-4\sum x_1^3x_2^3-6\sum x_1^3x_2^2x_3-21x_1^2x_2^2x_3^2,$$

$$f(x_1,x_2,x_3)-\sigma_1^2\sigma_2^2+4\sigma_1^3\sigma_3$$

$$=-4\sum x_1^3x_2^3+6\sum x_1^3x_2^2x_3+3x_1^2x_2^2x_3^2,$$

$$f(x_1,x_2,x_3)-\sigma_1^2\sigma_2^2+4\sigma_1^3\sigma_3+4\sigma_2^3$$

$$=18\sum x_1^3x_2^2x_3+27x_1^2x_2^2x_3^2$$

$$=18\sigma_1\sigma_2\sigma_3-27\sigma_3^2,$$

所以

$$f(x_1,x_2,x_3)=\sigma_1^2\sigma_2^2-4\sigma_1^3\sigma_3-4\sigma_2^3+18\sigma_1\sigma_2\sigma_3-27\sigma_3^2.$$

4) $x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_1^2x_4^2+x_2^2x_3^2+x_2^2x_4^2+x_3^2x_4^2$.

答 $\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3+2\sigma_4$.

5) $(x_1x_2+x_3)(x_2x_3+x_1)(x_3x_1+x_2)$.

答 $-2\sigma_1\sigma_3+\sigma_3+\sigma_2^2+\sigma_1^2\sigma_3-2\sigma_2\sigma_3+\sigma_3^2$.

6) $(x_1+x_2+x_1x_2)(x_2+x_3+x_2x_3)(x_1+x_3+x_1x_3)$.

答 $\sigma_3^2-\sigma_3+\sigma_1\sigma_3+2\sigma_2\sigma_3+\sigma_2^2+\sigma_1\sigma_2$.

30. 用初等对称多项式表出下列 n 元对称多项式：

1) $\sum x_1^4$;

2) $\sum x_1^2x_2x_3$;

3) $\sum x_1^2x_2^2$;

4) $\sum x_1^2x_2^2x_3x_4\ (n\geqslant 6)$.

($\sum ax_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}$ 表示所有由 $ax_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}$ 经过对换得到的

项的和.)

答 1) $\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_1\sigma_3+2\sigma_2^2-4\sigma_4$.

2) $\sigma_1\sigma_3-4\sigma_4$.

3) $\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3+2\sigma_4$.

4) $\sigma_2\sigma_4-4\sigma_1\sigma_5+9\sigma_6$.

31. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是方程 $5x^3-6x^2+7x-8=0$ 的三个根,计算$(\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2)(\alpha_2^2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3^2)(\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_3^2)$.

提示 把$(\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2)(\alpha_2^2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3^2)(\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_3^2)$表成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的初等对称多项式 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 的多项式.根据根与系数的关系,将 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 的值代人.

解 由根与系数的关系,知

$$\sigma_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\frac{6}{5},$$

$$\sigma_2=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3=\frac{7}{5},$$

$$\sigma_3=\alpha_1\alpha_2\alpha_3=\frac{8}{5},$$

将$(\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2)(\alpha_2^2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3^2)(\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_3^2)$表成 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 的多项式,并将它们的值代人:

$$\begin{aligned}
&(\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2)(\alpha_2^2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3^2)(\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_3^2)\\
=&\sigma_1^2\sigma_2^2-\sigma_1^3\sigma_3-\sigma_2^3\\
=&\left(\frac{6}{5}\right)^2\left(\frac{7}{5}\right)^2-\left(\frac{6}{5}\right)^3\left(\frac{8}{5}\right)-\left(\frac{7}{5}\right)^3\\
=&-\frac{1679}{625}.
\end{aligned}$$

32. 证明:三次方程 $x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ 的三个根成等差数列的充分必要条件为 $2a_1^3-9a_1a_2+27a_3=0$.

证明 设此方程的三个根为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$,则三根成等差数列的充分必要条件为

$$\alpha_1=\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_3)\text{，或 }\alpha_2=\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_3)\text{，或 }\alpha_3=\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2).$$

也即为

$$(2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3)(\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3)=0.$$

将左式表成初等对称多项式 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 的多项式：

$$\begin{aligned}&(2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3)(\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3)\\=&2\sigma_1^3-9\sigma_1\sigma_2+27\sigma_3,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\sigma_1&=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=-a_1,\\\sigma_2&=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3=a_2,\\\sigma_3&=\alpha_1\alpha_2\alpha_3=-a_3,\end{aligned}$$

因此这个方程的三个根成等差数列的充要条件为

$$2a_1^3-9a_1a_2+27a_3=0.$$

四、补充题、提示与解答

1. 设 $f_1(x)=af(x)+bg(x)$，$g_1(x)=cf(x)+dg(x)$，$ad-bc\neq0$，证明：$(f(x),g(x))=(f_1(x),g_1(x))$.

提示 证明 $f(x),g(x)$ 可表成 $f_1(x),g_1(x)$ 的组合.于是 $f(x),g(x)$ 的公因式是 $f_1(x),g_1(x)$ 的公因式.反之亦然.

证明 由假设 $f_1(x),g_1(x)$ 都是 $f(x),g(x)$ 的组合，因此 $f(x),g(x)$ 的公因式都是 $f_1(x),g_1(x)$ 的公因式.

因为 $ad-bc\neq0$，所以

$$f(x)=\frac{d}{ad-bc}f_1(x)-\frac{b}{ad-bc}g_1(x),$$

$$g(x)=\frac{-c}{ad-bc}f_1(x)+\frac{a}{ad-bc}g_1(x),$$

所以 $f(x),g(x)$ 也都是 $f_1(x),g_1(x)$ 的组合. $f_1(x),g_1(x)$ 的公因式也都是 $f(x),g(x)$ 的公因式.

所以，$(f_1(x),g_1(x))=(f(x),g(x))$.

2. 证明：只要 $\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}$, $\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}$ 的次数都大于零，就可以适当选择适合等式

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$$

的 $u(x)$ 与 $v(x)$，使

$$\partial(u(x))<\partial\left(\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right),$$

$$\partial v(x)<\partial\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}\right).$$

证明 根据定理 2，有多项式 $u_1(x)$，$v_1(x)$满足

$$u_1(x)f(x)+v_1(x)g(x)=(f(x),g(x))$$

根据带余除法，有 $q(x)$，$u(x)$使

$$u_1(x)=\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}q(x)+u(x),$$

其中

$$u(x)=0\text{ 或}\partial(u(x))<\partial\left(\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right).$$

如果

$$u(x)=0,$$

则有

$$\begin{aligned}(f(x),g(x))&=\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}q(x)f(x)+v_1(x)g(x)\\&=g(x)\left[\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}q(x)+v_1(x)\right].\end{aligned}$$

因此 $g(x)$ 是 $f(x)$，$g(x)$ 的一个最大公因式. 与题设 $\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}$ 的次数大于零矛盾. 因此 $\partial(u(x))<$

$\partial\left(\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right)$.

再令

$$v(x)=v_1(x)+\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}q(x),$$

于是

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x)).$$

下面来证$\partial v(x)<\partial\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}\right)$.将上式改写成

$$u(x)\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}+v(x)\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}=1.$$

因为上式左边的次数等于0.因此左边两项次数必相等.而

$$\partial\left(u(x)\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}\right)=\partial(u(x))+\partial(f(x))-\partial(f(x),g(x)),$$

$$\partial\left(v(x)\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right)=\partial(v(x))+\partial(g(x))-\partial(f(x),g(x)),$$

因此

$$\partial(v(x))=\partial(u(x))+\partial(f(x))-\partial(g(x))=\partial\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}\right)-$$
$$\left[\partial\left(\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right)-\partial(u(x))\right]<\partial\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}\right).$$

3.证明:如果$f(x)$与$g(x)$互素,那么$f(x^m)$与$g(x^m)$($m\geqslant 1$)也互素.

提示 应用定理3.

证明 因为$f(x),g(x)$互素,所以有多项式$u(x),v(x)$使得

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1,$$

于是

$$u(x^m)f(x^m)+v(x^m)g(x^m)=1,$$

因此 $f(x^m)$与 $g(x^m)$也互素.

4. 证明:如果 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_{s-1}(x)$的最大公因式存在,那么 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_{s-1}(x),f_s(x)$的最大公因式也存在,且 $(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_{s-1}(x),f_s(x))=((f_1(x),f_2(x),\cdots,f_{s-1}(x)),f_s(x))$.
再利用上式证明,存在多项式 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_s(x)$使
$u_1(x)f_1(x)+u_2(x)f_2(x)+\cdots+u_s(x)f_s(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x))$.

提示 证明$(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_{s-1}(x),f_s(x))$是 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$的一个最大公因式.

证明 记

$$d(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_{s-1}(x)),$$

根据定义,有

$$d(x)\mid f_i(x),i=1,2,\cdots,s-1,$$

并且如果

$$\varphi(x)\mid f_i(x),i=1,2,\cdots,s-1,$$

那么

$$\varphi(x)\mid d(x).$$

因此

$$(d(x),f_s(x))\mid f_i(x),i=1,2,\cdots,s,$$

如果

$$\varphi(x)\mid f_i(x),i=1,2,\cdots,s,$$

那么

$$\varphi(x)\mid d(x),f_s(x),$$

因而

$$\varphi(x)\mid(d(x),f_s(x)).$$

又因为$(d(x),f_s(x))$的首项系数为 1,那么,根据定义

$$(d(x),f_s(x))=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)),$$

即

$$((f_1(x),f_2(x),\cdots,f_{s-1}(x)),f_s(x))=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)).$$

再由 $d(x)$ 及 $(d(x),f_s(x))$ 分别是 $f_1(x),\cdots,f_{s-1}(x)$ 及 $d(x),f_s(x)$ 的最大公因式. 故有 $v_1(x),\cdots,v_{s-1}(x)$ 及 $v_{s1}(x)$, $v_{s2}(x)$ 使得

$$v_1(x)f_1(x)+\cdots+v_{s-1}(x)f_{s-1}(x)=d(x),$$
$$v_{s1}(x)d(x)+v_{s2}f_s(x)=(d(x),f_s(x)),$$

于是

$$v_1v_{s1}f_1(x)+v_2v_{s1}f_2(x)+\cdots+v_{s-1}v_{s1}f_{s-1}(x)+v_{s2}f_s(x)$$
$$=(d(x),f_s(x)).$$

令

$$u_1=v_1v_{s1},u_2=v_2v_{s1},\cdots,u_{s-1}=v_{s-1}v_{s1},u_s=v_{s2},$$

即有

$$u_1(x)f_1(x)+\cdots+u_{s-1}(x)f_{s-1}(x)+u_s(x)f_s(x)$$
$$=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)).$$

5. 多项式 $m(x)$ 称为多项式 $f(x),g(x)$ 的一个最小公倍式,如果 1) $f(x)\mid m(x),g(x)\mid m(x)$,2) $f(x),g(x)$ 的任一个公倍式都是 $m(x)$ 的倍式. 我们以 $[f(x),g(x)]$ 表示首项系数是 1 的那个最小公倍式. 证明:如果 $f(x),g(x)$ 的首项系数都是 1,那么

$$[f(x),g(x)]=\frac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))}.$$

提示 直接应用定义或应用因式分解唯一性定理.

证明 因为

$$\frac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))}=f(x)\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}=g(x)\frac{f(x)}{(f(x),g(x))},$$

所以 $\frac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))}$ 是 $f(x),g(x)$ 的公倍式.

如果 $h(x)$是 $f(x),g(x)$的一个公倍式,那么

$$f(x)\mid h(x),g(x)\mid h(x),$$

于是

$$\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}\Bigg|\frac{h(x)}{(f(x),g(x))},\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\Bigg|\frac{h(x)}{(f(x),g(x))}.$$

因为

$$\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))},\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right)=1,$$

所以

$$\frac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))}\Bigg|\frac{h(x)}{(f(x),g(x))},$$

$$\frac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))}\Bigg|h(x).$$

又因 $f(x),g(x)$的首项系数为 1. 所以$\frac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))}$的首项系数也是 1. 根据定义

$$[f(x),g(x)]=\frac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))}.$$

6. 证明定理 5 的逆,即:设 $p(x)$是次数大于零的多项式,如果对于任何两个多项式 $f(x),g(x)$,由 $p(x)\mid f(x)g(x)$可以推出 $p(x)\mid f(x)$或者 $p(x)\mid g(x)$,那么 $p(x)$是不可约多项式.

提示 应用反证法.

证明 如果 $p(x)$不是不可约多项式.那么 $p(x)$可分解成次数都低于 $p(x)$的多项式的乘积:

$$p(x)=h_1(x)h_2(x),\quad \partial(h_i(x))<\partial(p(x))\quad i=1,2.$$

令

$$f(x)=h_1(x),g(x)=h_2(x),$$

则

$$p(x)\mid f(x)g(x).$$

但是

$$p(x)\nmid f(x),\ p(x)\nmid g(x)$$

与假设矛盾.所以 $p(x)$一定是不可约多项式.

7. 证明:次数>0且首项系数为1的多项式 $f(x)$是一个不可约多项式的方幂的充分必要条件为:对任意的多项式 $g(x)$必有 $(f(x),g(x))=1$,或者对某一正整数 m,$f(x)\mid g^m(x)$.

提示 充分条件的证明可应用反证法.

证明 必要性.如果 $f(x)$是一个不可约多项式 $p(x)$的方幂:

$$f(x)=p^m(x),\ m\geqslant 1,$$

那么

$$(f(x),g(x))=1 \quad \text{或}(f(x),g(x))=p^k(x),1\leqslant k\leqslant m.$$

后一情况

$$p^k(x)\mid g(x),$$

故有

$$f(x)\mid g^m(x).$$

充分性.如果 $f(x)$不是一个不可约多项式的方幂,那么 $f(x)$可表成

$$f(x)=p^k(x)g(x),$$

其中 $p(x)$不可约,$k\geqslant 1$,$p(x)\nmid g(x)$,$\partial(g(x))\geqslant 1$.对上式中的 $g(x)$,就有

$$(f(x),g(x))=cg(x)\neq 1$$

而且对任一正整数 m,

$$f(x)\nmid g^m(x),$$

与假设矛盾,所以 $f(x)$必须是一个不可约多项式的方幂

8. 证明:次数>0且首项系数为1的多项式 $f(x)$是某一不可约多项式的方幂的充分必要条件是:对任意的多项式 $g(x)$,$h(x)$,由 $f(x)\mid g(x)h(x)$可以推出 $f(x)\mid g(x)$,或者对某一正整数 m,$f(x)\mid h^m(x)$.

提示 充分条件的证明可应用反证法.

证明 必要性. 设 $f(x)$是不可约多项式 $p(x)$的方幂.

$$f(x)=p^m(x),\ m\geqslant 1$$

如果

$$f(x)\mid g(x)h(x),$$

那么由 $p(x)$的不可约性:

$$(p(x),h(x))=1 \text{ 或 } p(x)\mid h(x),$$

即可推出

$$(f(x),h(x))=1,$$

从而 $f(x)\mid g(x)$,或

$$f(x)=p^m(x)\mid h^m(x).$$

充分性. 设 $f(x)$不是一个不可约多项式的方幂,则

$$f(x)=p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\varphi(x),$$

其中 $p_1(x),p_2(x)$是不同的不可约多项式,$k_1,k_2\geqslant 1$,$p_i(x)\nmid\varphi(x)$,$i=1,2$. 令

$$h(x)=p_1^{k_1}(x)\quad g(x)=p_2^{k_2}(x)\varphi(x),$$

则

$$f(x)\nmid g(x),f(x)\nmid h^m(x)\quad (m \text{ 为任一正整数}),$$

与假设矛盾. 故 $f(x)$一定是某个不可约多项式的方幂.

9. 证明:$x^n+ax^{n-m}+b$ 不能有不为零的重数大于 2 的根.

提示 $f(x)$的重数大于 2 的根,必须是 $f(x),f'(x),f''(x)$的公共根.

证明 记 $f(x)=x^n+ax^{n-m}+b$,

于是

$$\begin{aligned}f'(x)&=nx^{n-1}+a(n-m)x^{n-m-1}\\&=[nx^m+a(n-m)]x^{n-m-1},\\f''(x)&=n(n-1)x^{n-2}+a(n-m)(n-m-1)x^{n-m-2}\\&=[n(n-1)x^m+a(n-m)(n-m-1)]x^{n-m-2},\end{aligned}$$

若 $f(x)$有重数大于 2 的非零根必须是 $f(x),f'(x),f''(x)$的公

共非零根. 因此必须是

$$nx^m + a(n-m)$$

与

$$n(n-1)x^m + a(n-m)(n+m-1)$$

的公共非零根, 因此 $a(n-m)\neq 0$. 由于 $m\neq 0$, 这时两个多项式是互素的, 不可能有公共根.

所以 $x^n + ax^{n-m} + b$ 不可能有重数大于 2 的非零根.

10. 证明: 如果 $f(x)\mid f(x^n)$, 那么 $f(x)$ 的根只能是零或单位根.

提示 如果 α 是 $f(x)$ 的一个根, 则 α^n 也是.

证明 如果 α 是 $f(x)$ 的一个根, 则

$$f(\alpha)=0,$$

于是

$$f(x)\mid f(x^n)$$

可推出 α^n 也是 $f(x)$ 的一个根. 因而 $(\alpha^n)^n=\alpha^{n^2}$, $(\alpha^{n^2})^n=\alpha^{n^3}$, ……都是 $f(x)$ 的根. 因为 $f(x)$ 只能有有限多个根, 因此必有 $1<k<l$ 使

$$\alpha^{n^k}=\alpha^{n^l}.$$

若 $\alpha\neq 0$, 则

$$\alpha^{n^l-n^k}=1,$$

故 α 是一个单位根或零.

11. 如果 $f'(x)\mid f(x)$, 证明: $f(x)$ 是 n 重根, 其中 $n=\partial(f(x))$.

提示 由 $f'(x)\mid f(x)$ 可推出 $f'(x)$ 的根都是 $f(x)$ 的重根.

证明 因为 $f'(x)\mid f(x)$, 所以 $f'(x)$ 的根都是 $f(x)$ 的根, 因而是 $f(x)$ 的重根.

如果 $f'(x)$ 有 s 个不同的根, 分别有 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 重. 则 $k_1+k_2+\cdots+k_s=n-1$. 于是这 s 个根是 $f(x)$ 的根, 且分别有 k_1+1,

$k_2+1,\cdots,k_s+1$ 重，于是 $k_1+1+\cdots+k_s+1=(n-1)+s\leqslant n$. 这只能是 $s=1,k_1=n-1$. 所以 $f'(x)$有 $n-1$ 重根. 这就是 $f(x)$的 n 重根.

12. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个不同的数，而

$$F(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n).$$

证明：

1) $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}=1$;

2) 任意多项式 $f(x)$ 用 $F(x)$ 除所得的余式为 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{f(a_i)F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}$.

提示 1) 应用本章定理 3.

2) 利用带余除法的唯一性.

证明 1) 设

$$\begin{aligned}H(x)&=\sum_{i=1}^{n}\frac{F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_n)}{(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)}\end{aligned}$$

$H(x)$是一个次数不超过 $n-1$ 的多项式，而且

$$H(a_j)=1\quad j=1,2,\cdots,n,$$

所以根据定理 9, $H(x)=1$.

2) 对任意多项式 $f(x)$, 设

$$f(x)=F(x)q(x)+r(x),r(x)=0\text{ 或}\partial(r(x))<n,$$

那么

$$\begin{aligned}r(a_j)&=f(a_j)\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{f(a_i)(a_j-a_1)\cdots(a_j-a_{i-1})(a_j-a_{i+1})\cdots(a_j-a_n)}{(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)},\end{aligned}$$

$$j=1,2,\cdots,n,$$

由余式的唯一性及 $r(x)$(不等于 0 时)的次数,即得

$$r(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{f(a_i)F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}.$$

13. $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 与 $F(x)$同上题,$b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是任意 n 个数,显然

$$L(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_iF(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}$$

适合条件

$$L(a_i)=b_i,i=1,2,\cdots,n.$$

这称为拉格朗日(Lagrange)插值公式.

利用上面的公式求:

1) 一个次数<4 的多项式 $f(x)$,它适合条件:$f(2)=3,f(3)=-1,f(4)=0,f(5)=2$.

解 根据拉格朗日插值公式,由 $a_1=2,a_2=3,a_3=4,a_4=5$;$b_1=3,b_2=-1,b_3=0,b_4=2$,得

$$\begin{aligned}f(x)=&\frac{3(x-3)(x-4)(x-5)}{(2-3)(2-4)(2-5)}+\frac{(-1)(x-2)(x-4)(x-5)}{(3-2)(3-4)(3-5)}+\\&0+\frac{2(x-2)(x-3)(x-4)}{(5-2)(5-3)(5-4)}\\=&-\frac{1}{2}(x-3)(x-4)(x-5)-\frac{1}{2}(x-2)(x-4)(x-5)+\\&\frac{1}{3}(x-2)(x-3)(x-4)\\=&-\frac{2}{3}x^3+\frac{17}{2}x^2-\frac{203}{6}x+42.\end{aligned}$$

2) 一个二次多项式 $f(x)$,它在 $x=0,\frac{\pi}{2},\pi$ 处与函数 $\sin x$ 有相同的值.

答 $-\frac{4}{\pi^2}x^2+\frac{4}{\pi}x$.

3) 一个次数尽可能低的多项式 $f(x)$，使得 $f(0)=1, f(1)=2, f(2)=5, f(3)=10$.

答 x^2+1.

14. 设 $f(x)$是一个整系数多项式，试证：如果 $f(0)$与 $f(1)$都是奇数，那么 $f(x)$不能有整数根.

提示 利用反证法.假如 $f(x)$有一个整数根 c，则有 $c\mid f(0)$，且 $f(0)$与 $f(1)$同为奇数.

证明 设 c 为 $f(x)$的整根，则 $f(x)=(x-c)q(x)$. $q(x)$是整系数多项式，由 $f(0)=-cq(0)$，及 $f(0)$为奇数，则 c 为奇数.由 $f(1)=(1-c)q(1)$及 $f(1)$为奇数，$1-c$ 为奇数，但 c 及 $c-1$ 是不能同时为奇数的，矛盾.故 $f(x)$不能有整根.

15. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是方程 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 的根，证明：$x_2,\cdots,x_n$ 的对称多项式可以表成 x_1 与 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 的多项式.

提示 用 $x-x_1$ 除 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$.将 $x_2,\cdots,x_n$ 的初等对称多项式用 x_1 和 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$的多项式表出.

证明 记 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$.因为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 $f(x)$的根，所以

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) \\
&= (x-x_1)[(x-x_2)\cdots(x-x_n)],
\end{aligned}
$$

用 $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{n-1}$ 表示 $x_2, x_3, \cdots, x_n$ 的初等对称多项式：

$$
\begin{gathered}
\tau_1 = x_2+\cdots+x_n, \\
\tau_2 = x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n, \\
\cdots\cdots \\
\tau_{n-1} = x_2\cdots x_n,
\end{gathered}
$$

则

$$
\begin{aligned}
f(x) = (x-x_1)[&x^{n-1}-\tau_1x^{n-2}+\tau_2x^{n-3}+\cdots+ \\
&(-1)^{n-2}\tau_{n-2}x+(-1)^{n-1}\tau_{n-1}],
\end{aligned}
$$

于是

$$-x_1-\tau_1=a_1,$$
$$x_1\tau_1+\tau_2=a_2,$$
$$(-1)^{n-1}x_1\tau_{n-2}+(-1)^{n-1}\tau_{n-1}=a_{n-1},$$

因此由第一式逐步递推，可知 $x_2,\cdots,x_n$ 的初等对称多项式 $\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_{n-1}$ 可以表成 x_1 与 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 的多项式. $x_2,\cdots,x_n$ 的任一对称多项式 $g(x_2,\cdots,x_n)$ 是 $\tau_1,\cdots,\tau_{n-1}$ 的多项式 $h(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_{n-1})$，因而是 $x_1,a_1,\cdots,a_{n-1}$ 的多项式.

16. $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_n$. 令 $s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k(k=0,1,2,\cdots)$.

1) 证明：$x^{k+1}f'(x)=(s_0x^k+s_1x^{k-1}+\cdots+s_{k-1}x+s_k)f(x)+g(x)$，其中 $g(x)$ 的次数 $<n$ 或 $g(x)=0$；

2) 由上式证明牛顿(Newton)公式：

$s_k-\sigma_1s_{k-1}+\sigma_2s_{k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1+(-1)^kk\sigma_k=0$，对于 $1\leqslant k\leqslant n$；

$s_k-\sigma_1s_{k-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_ns_{k-n}=0$，对于 $k>n$.

提示 1) 应用恒等式

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-x_i}\text{ 和 }\frac{1}{x-x_i}=\frac{1}{x}\sum_{r=0}^{k}\left(\frac{x_i}{x}\right)^r+\frac{\left(\frac{x_i}{x}\right)^{k+1}}{x-x_i}.$$

证明 1) 由 $\dfrac{1}{x-x_i}=\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{x}{x-x_i}=\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{x_i}{x}}$

$$=\frac{1}{x}\sum_{r=0}^{k}\left(\frac{x_i}{x}\right)^r+\frac{1}{x}\,\frac{\left(\frac{x_i}{x}\right)^{k+1}}{1-\frac{x_i}{x}}$$

$$=\frac{1}{x}\sum_{r=0}^{k}\left(\frac{x_i}{x}\right)^r+\frac{\left(\frac{x_i}{x}\right)^{k+1}}{x-x_i},$$

得

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-x_i}=\frac{1}{x}\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{r=0}^{k}\left(\frac{x_i}{x}\right)^r+\frac{\left(\frac{x_i}{x}\right)^{k+1}}{x-x_i}\right\}$$

$$\begin{aligned}x^{k+1}f'(x)&=\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{r=0}^{k}x_i^r x^{k-r}+\frac{x_i^{k+1}}{x-x_i}\right]\right\}f(x)\\&=(s_0x^k+s_1x^{k-1}+\cdots+s_{k-1}x+s_k)f(x)+\\&\quad\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{k+1}}{x-x_i}f(x),\end{aligned}$$

令

$$g(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{k+1}}{x-x_i}f(x),$$

则

$$g(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i^{k+1}\frac{f(x)}{x-x_i},$$

因此 $g(x)$是一个多项式．或者 $g(x)=0$，或者 $g(x)$的次数$<n$．

2）由 1)中公式可得

$$\begin{aligned}&x^{k+1}[nx^{n-1}-(n-1)\sigma_1x^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}\sigma_{n-1}]\\&=(s_0x^k+s_1x^{k-1}+\cdots+s_k)[x^n-\sigma_1x^{n-1}+\cdots+(-1)\sigma_n]+g(x).\end{aligned}$$

当$1\leqslant k\leqslant n$ 时，比较两端 x^n 的系数．由于$\partial(g(x))<n$，不含 x^n 项，即得

$$s_k-\sigma_1s_{k-1}+\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1+(-1)^k\sigma_ks_0=(-1)^k(n-k)\sigma_k,$$

即

$$s_k-\sigma_1s_{k-1}+\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1+(-1)^kk\sigma_k=0.$$

对于 $k>n$，上式中左端设有 x^n 的项，而右端 x^n 项的系数和为

$$s_k-\sigma_1s_{k-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_ns_{k-n}=0.$$

17．根据牛顿公式用初等对称多项式表示 s_2,s_3,s_4,s_5,s_6．

提示 对 n 分别 $1\leqslant k\leqslant n$ 及 $k>n$ 两种情形应用上题的公

式.

答 1) 当 $n\geqslant 6$ 时,

$s_2=\sigma_1^2-2\sigma_2$,

$s_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$,

$s_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_1\sigma_3+2\sigma_2^2-4\sigma_4$,

$s_5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1^2\sigma_3+5\sigma_1\sigma_2^2-5\sigma_1\sigma_4-5\sigma_2\sigma_3+5\sigma_5$,

$$s_6=\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+6\sigma_1^3\sigma_3+9\sigma_1^2\sigma_2^2-6\sigma_1^2\sigma_4-12\sigma_1\sigma_2\sigma_3+6\sigma_1\sigma_5-2\sigma_2^3+6\sigma_2\sigma_4+3\sigma_3^2-6\sigma_6.$$

2) 当 $n=5$ 时,

s_2, s_3, s_4, s_5 同 1),

$$s_6=\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+6\sigma_1^3\sigma_3+9\sigma_1^2\sigma_2^2-6\sigma_1^2\sigma_4-12\sigma_1\sigma_2\sigma_3+6\sigma_1\sigma_5-2\sigma_2^3+6\sigma_2\sigma_4+3\sigma_3^2.$$

3) 当 $n=4$ 时,

s_2, s_3, s_4 同 1),

$$s_5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1^2\sigma_3+5\sigma_1\sigma_2^2-5\sigma_1\sigma_4-5\sigma_2\sigma_3,$$

$$s_6=\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+6\sigma_1^3\sigma_3+9\sigma_1^2\sigma_2^2-6\sigma_1^2\sigma_4-12\sigma_1\sigma_2\sigma_3-2\sigma_2^3+6\sigma_2\sigma_4+3\sigma_3^2.$$

4) 当 $n=3$ 时,

s_2, s_3 同 1),

$$s_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_1\sigma_3+2\sigma_2^2,$$

$$s_5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1^2\sigma_3+5\sigma_1\sigma_2^2-5\sigma_2\sigma_3,$$

$$s_6=\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+6\sigma_1^3\sigma_3+9\sigma_1^2\sigma_2^2-12\sigma_1\sigma_2\sigma_3-2\sigma_2^3+3\sigma_3^2.$$

5) 当 $n=2$ 时,

s_2 同 1),

$s_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2$,

$s_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2$,

$s_5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2$,

$s_6=\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+9\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_2^3$.

18. 证明:如果对于某一个6次方程有 $s_1=s_3=0$,那么

$$\frac{s_7}{7}=\frac{s_5}{5}\cdot\frac{s_2}{2}.$$

提示 应用上题公式,并用牛顿公式表示 s_7.

证明 由 $s_1=s_3=0$,故由上题 $n=6$ 时公式可得

$$\sigma_1=s_1=0,s_2=-2\sigma_2,\sigma_3=0,s_5=5\sigma_5,$$

由牛顿公式

$$\begin{aligned}s_7&=\sigma_1s_6-\sigma_2s_5+\sigma_3s_4-\sigma_4s_3+\sigma_5s_2-\sigma_6s_1\\&=-5\sigma_2\sigma_5-2\sigma_2\sigma_5=-7\sigma_2\sigma_5,\end{aligned}$$

所以

$$\frac{s_7}{7}=\frac{s_5}{5}\cdot\frac{s_2}{2}.$$

19. 求一个 n 次方程使

$$s_1=s_2=\cdots=s_{n-1}=0.$$

提示 由 $s_1=s_2=\cdots=s_{n-1}=0$ 可推出 $\sigma_1=\sigma_2=\cdots=\sigma_{n-1}=0$ 反之亦然.

答 $x^n+a=0$,a 是任意常数.

20. 求一个 n 次方程使

$$s_2=s_3=\cdots=s_n=0.$$

提示 以 σ_1 为已知量,由牛顿公式及条件 $s_2=s_3=\cdots=s_n=0$,求出 $\sigma_2,\cdots,\sigma_n$.

答 $x^n-\sigma_1x^{n-1}+\frac{\sigma_1^2}{2!}x^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{\sigma_1^{n-1}}{(n-1)!}x+(-1)^n\frac{\sigma_1^n}{n!}=0.$

第二章　行　列　式

一、内容提要

1. 二级、三级行列式

二级、三级行列式的定义及其对二元、三元线性方程组的应用.

2. n 元排列

n 元排列的定义、逆序、逆序数，排列的奇偶性.

n 元排列的重要性质.

3. n 级行列式的定义及性质

n 级行列式的定义.

n 级行列式的性质 1—7.

4. 行列式按一行(列)展开

余子式 M_{ij}，代数余子式 A_{ij}.

行列式按一行(列)展开公式.

5. 行列式的计算

(1) 简单行列式应用定义计算

(2) 化为上(下)三角形行列式

(3) 应用一行(列)展开公式

(4) 应用下列公式

i) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|$.

ii) 范德蒙德行列式.

6. 克拉默法则

克拉默法则.

齐次线性方程组.

*7. 拉普拉斯定理,行列式的乘法定理

二、学习指导

1. 关于行列式的定义

许多数学问题和实际问题在处理时往往归结为线性代数问题.在线性代数中,行列式是一个基本的工具.由于行列式的应用非常广泛,它与很多数学问题有联系,所以根据行列式的由来,行列式的定义有很多种.本书讨论行列式,从代数角度由线性方程组的解的一般形式来定义行列式.对 2、3 级行列式项的结构以及前面符号的决定,推广到 n 级行列式的项的构造和前面符号的决定方法,用展开式来定义行列式.

如果读者参考其他高等代数或线性代数教材,可能看到行列式还有其他两种常见的定义方法.一种是从 2 阶行列式可以由 1 阶子式表示,3 阶行列式可由 2 阶子式表示.因此可以用归纳法定义行列式.用 $n-1$ 级子式来表示 n 级行列式.还有一种方法是把 n 级行列式看成它的 n 个行向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的函数:$f(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$.用公理化的方法来定义行列式,即规定行列式满足:

(1) $f(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_i,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_j,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=-f(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_j,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_i,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$;

(2) $f(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,k\boldsymbol{\alpha}_i,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=kf(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_i,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$;

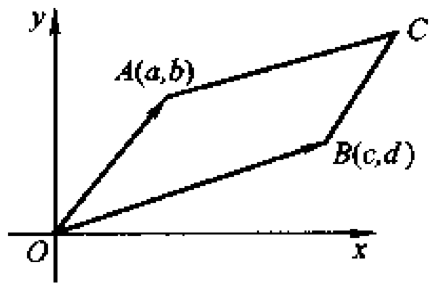
(3) $f(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_1}+\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=f(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)+f(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$;

(4) 规定当 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,\cdots,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0,\cdots,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,\cdots,0,1)$时,$f(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=1$.

当然，这三种定义都是等价的. 例如从本书中行列式的定义可直接推出这两种定义.

为了应用行列式必须计算行列式. 为此，必须讨论行列式的性质. 不论用哪个定义都必须用到行列式的展开式，所以为了简便易用起见，我们就直接用展开式作为行列式的定义.

2. 关于行列式的几何意义



当 $n=2$ 时，在平面上取定两个向量，在直角坐标下它们表示为 $\overrightarrow{OA}=(a,b)$，$\overrightarrow{OB}=(c,d)$. 那么平行四边形 $OACB$ 的面积就等于 2 阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 的绝对值.

当 $n=3$ 时，设在空间中有三个由原点出发的向量. $\boldsymbol{\alpha}_1=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(b_1,b_2,b_3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(c_1,c_2,c_3)$. 那么这三个向量构成的平行六面体的体积等于这三个向量的混合积 $\boldsymbol{\alpha}_1\times(\boldsymbol{\alpha}_2\cdot\boldsymbol{\alpha}_3)$ 的绝对值. 我们复习一下混合积的定义.

$\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 的内积定义为 $\boldsymbol{\alpha}_1\cdot\boldsymbol{\alpha}_2=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$；

$\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 的外积定义为 $\boldsymbol{\alpha}_1\times\boldsymbol{\alpha}_2=(a_2b_3-a_3b_2,b_1a_3-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)$；

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的混合积定义为

$\boldsymbol{\alpha}_1\times(\boldsymbol{\alpha}_2\cdot\boldsymbol{\alpha}_3)=a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(c_1b_3-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)$.

应用 3 级行列式的按第一行展开公式可知

$$\boldsymbol{\alpha}_1\times(\boldsymbol{\alpha}_2\cdot\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

因此 3 级行列式的绝对值就是 3 个行向量所构成的平行六面体的体积.

因此可以赋与 n 级行列式一个"几何"意义：n 级行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的绝对值可看成由 n 个 n 维向量(详细定义见第 5 章) $\boldsymbol{\alpha}_1=(a_{11}, a_{12},\cdots,a_{1n}), \boldsymbol{\alpha}_2=(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n}),\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n=(a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{nn})$ 所构成的平行 $2n$ 面体的体积.

3. 2 级、3 级行列式

2 级、3 级行列式及其对 2 元、3 元线性方程组的解的公式很好理解也很好应用. 为了将这个结论应用到 n 个未知量的线性方程组，我们必须定义 n 级行列式.

我们定义 n 级行列式是根据对 2 级、3 级行列式的展开式及各个项的分析. 总结出各个项的构造及前面所带符号的决定方法来得到 n 级行列式的展开式的. 读者可通过 2、3 级行列式的构造来理解 n 级行列式的定义.

2、3 级行列式及其对线性方程组的应用是 n 级行列式及对线性方程组的应用的基础. 因此对 n 级行列式的结论及算法可以通过 2、3 级行列式来熟悉概念及加深理解.

4. n 级排列

为了决定行列式展开式中各项前面所带的符号，必须学习 n 级排列，其逆序数及奇偶性. 在中学数学中，定义了从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列的概念以及 n 个不同元素的全排列的概念. 这里定义的 n 级排列就是由 $1,2,\cdots,n$ 构成的全排列. 因此 n 级排列一共有 $n!$ 个，这就是 n 级行列式展开式中项的总数.

排列的逆序、逆序数及奇偶性是 n 级排列才有的性质，这是很重要的性质，它把 n 级排列分成两类：奇排列和偶排列，这是定义 n 级行列式需要用到的，必须清楚地理解.

关于对换及对换对于排列作用的结果是研究行列式的性质时所需要的,希望读者通过一些具体的例子把排列这一命题中一些概念及结论深刻了解.

5. n 级行列式的定义

在学习 n 级行列式的定义(定义 4)时,可以通过 $n=2,3$ 的情形以加深印象及理解.

书中的例 2 说明 4 级行列式中反对角线上元素所成的项 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ 前面所带的符号是“+”号,这一点与 2 级、3 级行列式的情形是不同的.读者可以总结一下 n 级行列式中反对角线上元素所组成的项 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$,前面所带符号的规律.

6. n 级行列式的性质

性质 1 说明行列式中行与列的对称性,这一性质通常称为“行列式转置,值不变”理解了这一点就可以把关于行列式行(列)的性质转移到列(行)上,不必加以说明.

书中给出了 n 级行列式的另外 6 条性质(性质 2—性质 7)希望读者对每一个性质的涵意加以理解并会证明.这样才能将这些性质熟练地应用.读者可以通过例题及习题总结一下每条性质的作用.

除了这些基本性质以外,行列式还有一些常用的主要性质,如一行展开公式等,这些基本性质就是以后讨论行列式的基础.

另外行列式的计算是一个很重要的问题,但是直接通过定义来计算时,需要计算 $n!$ 项.当 n 较大时,$n!$ 是一个很大的数字,所以直接来计算 n 级行列式几乎是不可能的.因此必须进一步讨论行列式的性质,利用这些性质来简化行列式的计算.

7. 行列式按一行(列)展开公式

行列式按一行(列)展开公式在行列式的理论,计算及应用上都有意义.

所谓行列式按一行(列)展开,就是通过行列式的子行列式来表示行列式.希望读者能熟记公式及其中符号(M_{ij},A_{ij} 等)的意义.

一行(列)展开公式的证明也提示了关于行列式的性质的证明的一种方法,希望读者能把证明读懂,并按自己的想法把证明用自己的语言表达出来,从而学会证明的方法.

8. 矩阵及初等变换

为了应用行列式的性质来计算行列式,有时需要对行列式的行、列进行变换,为此我们介绍了矩阵以及矩阵的初等变换的概念,以及应用初等行变换把矩阵化为阶梯形矩阵的方法以及其可行性.这些结论我们在解线性方程组,求矩阵的逆矩阵,化二次型为标准形等问题中还要用到.

9. n 级行列式的计算

n 级行列式的计算是一个很复杂的问题,作为高等代数课程的教材,我们不要求读者去做行列式方面的难题,只要会做一些不太复杂的数学计算题以及有一定规律的文字行列式.

计算行列式有以下一些基本方法:

(1) 数字行列式的计算一般通过初等变换把行列式化为上三角形,或配合一行(列)展开公式简化计算,参考第 73 页例及第 79 页例 1.

(2) 一般方法

1) 应用行列式的定义

只有在简单的(即含 0 很多的行列式)才能应用定义来计算,一般行列式须先化简才能应用定义.

2) 应用行列式的性质

3) 应用一行(列)展开公式

2),3)可混合应用.

4) 应用范德蒙德行列式

第 79 页例 2 给出了范德蒙德行列式的公式及证明,这是一个很重要的公式,以后经常要用到.

5) 应用准三角形公式

$$\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

以及其推广(参考第 81 页例 3).

*6) 应用行列式的乘积公式

这一方法在以后学了矩阵的乘积(第四章 §2)以后,可以更深的了解,有兴趣的读者可以参考综合题 9,18.

10. 克拉默法则

克拉默法则(定理 4)给出了一类特殊的(即系数行列式不为 0 的)n 个未知量 n 个方程的线性方程组的解的存在、个数(唯一)以及解的公式. 在公式中解由线性方程组的系数及常数项来表示. 这是一个很重要的结论,希望读者会叙述、会证明,并会应用. 并通过习题学会用克拉默法则来解满足条件的线性方程组.

定理 5 给出了克拉默法则对 n 个未知量 n 个方程的齐次线性方程组的应用,以后要经常用到,读者必须熟记结论.

这两个结论(定理 4,定理 5)虽然初看起来是关于 n 个未知数、n 个方程的特殊(系数行列式不等于 0)线性方程组的结论,但是以后读者会看到,它们可以用于一般有解的线性方程组. 这一点说明了这两个定理特别是克拉默法则的重要性.

*11. 拉普拉斯定理,行列式乘法公式

拉普拉斯定理只是理论上有用,在计算行列式时很少用到. 读者只要知道结论就可以了. 关于应用拉普拉斯定理来计算行列式,有兴趣的读者可以参考综合题 11.

关于行列式的乘法公式除了用来计算行列式外(见 p,18),更重要的是在矩阵运算、特别是关于逆矩阵的讨论及计算中有重要的应用.

三、习题、提示与解答

1. 决定以下 9 级排列的逆序数,从而决定它们的奇偶性:

1) 134782695;2) 217986354;3) 987654321.

答 1) $\tau(134782695)=10$,134782695 是一个偶排列.

2) $\tau(217986354)=18$,217986354 是一个偶排列.

3) $\tau(987654321)=36$,987654321 是一个偶排列.

2. 选择 i 与 k 使

1) $1274i56k9$ 成偶排列;

2) $1i25k4897$ 成奇排列.

答 1) $i=8,k=3$;

2) $i=3,k=6$.

3. 写出把排列 12435 变成排列 25341 的那些对换.

答 $(12435)\xrightarrow{(12)}(21435)\xrightarrow{(15)}(25431)\xrightarrow{(4,3)}(25341)$.

4. 决定排列 $n(n-1)\cdots21$ 的逆序数,并讨论它的奇偶性.

解 $\tau(n(n-1)\cdots21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{1}{2}n(n-1)$.

下面讨论$\frac{1}{2}n(n-1)$的奇偶性.

① 当 $n=2k$ 为偶数时

$\frac{1}{2}n(n-1)=k(2k-1)$,其中 $2k-1$ 为奇数.因此$\frac{1}{2}n(n-1)$的奇偶与 k 一致.

$k=2l$,即 $n=4l$ 时,$\frac{1}{2}n(n-1)$为偶数.

$k=2l+1$,即 $n=4l+2$ 时,$\frac{1}{2}n(n-1)$为奇数.

② 当 $n=2k+1$ 为奇数时

$\frac{1}{2}n(n-1)=k(2k+1)$,其中 $2k+1$ 为奇数,因此$\frac{1}{2}n(n-1)$的奇偶与 k 一致.

$k=2l$,即 $n=4l+1$ 时,$\frac{1}{2}n(n-1)$为偶数.

$k=2l+1$,即 $n=4l+3$ 时,$\frac{1}{2}n(n-1)$为奇数.

根据以上讨论,得到下述结论:

$$\begin{cases}\text{当 } n=4l,4l+1 \text{ 时,排列 } n(n-1)\cdots 21 \text{ 是偶排列,}\\ \text{当 } n=4l+2,4l+3 \text{ 时,排列 } n(n-1)\cdots 21 \text{ 是奇排列.}\end{cases}$$

注 由此公式可见,2 级、3 级行列式中,$a_{12}a_{21}$,$a_{13}a_{22}a_{31}$这种项前面带负号,在而 4 级、5 级行列式中,反对角线上元素乘积所成之项前面带正号.这一点在计算行列式时应该注意,读者可以总结一下,当 $n=2,3,\cdots$时,这种反对角线所带符号的规律.

5. 如果排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 的逆序数为 k,排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数是多少?

答 $\frac{1}{2}n(n-1)-k$.

6. 在 6 级行列式中,$a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$;$a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$这两项应带有什么符号?

答 $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$带正号;

$a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$带正号.

7. 写出 4 级行列式中所有带有负号并且包含因子 a_{23}的项.

答 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$,$a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$,$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$.

8. 按定义计算行列式:

1) $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 原行列式$=(-1)^{\tau(n,n-1,\cdots,2,1)}n!=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n!$.

2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

答 $(-1)^{n-1}n!$.

3) $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$.

答 $(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!$.

9. 由行列式定义证明：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

提示 展开式中每一项至少含有一个0.

证明 由定义，行列式中一般项为

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_5)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4} a_{5j_5},$$

其中 $j_1 j_2 j_3 j_4 j_5$ 是一个5级排列. 因为在这个行列式中

$$a_{ij} = 0, i, j = 3, 4, 5,$$

所以当 j_3, j_4, j_5 中有一个等于3或4或5时，此项为0. 但是 $1 \leqslant j_3, j_4, j_5 \leqslant 5$ 而且各不相同，因此至少有一个 $j_k(k=3,4,5)$ 大于或等于3，由此可知每项都为0，因而行列式为0.

10. 由行列式定义计算

$$f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

中 x^4 与 x^3 的系数，并说明理由.

解 $f(x)$的展开式中 x 的 4 次项只有一项：$2x\cdot x\cdot x\cdot x$，故 x^4 的系数为 2；x 的 3 次项也只有一项$(-1)^{\tau(2134)}x\cdot 1\cdot x\cdot x$，故 x^3 的系数为 -1.

11. 由

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=0,$$

证明：奇偶排列各半.

证明 由于 $j_1\cdots j_n$ 为奇排列时$(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}$为 -1，而偶排列时为 1. 设有 k 个奇排列和 l 个偶排列，则上述行列式 $=\sum\limits_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}+\sum\limits_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}=l-k=0$. 故 $l=k$，即奇偶排列各占一半.

12. 设

$$P(x)=\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}，其中\ a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$$

是互不相同的数.

1）由行列式定义，说明 $P(x)$是一个$(n-1)$次多项式；

2）由行列式性质，求 $P(x)$的根.

解 1）$P(x)$的展开式中，各项的最高次数为 $n-1$，而且 $P(x)$的 x^{n-1}的系数为

$$(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} \neq 0,$$

所以 $P(x)$是一个 $n-1$ 次多项式.

2) $P(x)$的根为 $a_1,\cdots,a_{n-1}$.

13. 计算下面的行列式:

1) $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$.

解

$$\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 246 & 427 & -100 \\ 1014 & 543 & -100 \\ 342 & 721 & -100 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 246 & 427 & -100 \\ 768 & 116 & 0 \\ -588 & 294 & 0 \end{vmatrix} = 100\begin{vmatrix} 246 & 427 & -1 \\ 768 & 116 & 0 \\ -588 & 294 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 100\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 768 & 116 & 0 \\ -588 & 294 & 0 \end{vmatrix} = 100\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1000 & 116 & 0 \\ 0 & 294 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -294\times 10^5.$$

2) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

答 $-2(x^3+y^3)$.

3) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

解

$$原行列式=\begin{vmatrix}6&1&1&1\\6&3&1&1\\6&1&3&1\\6&1&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}=48.$$

4) $\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}$.

答　160.

5) $\begin{vmatrix}1+x&1&1&1\\1&1-x&1&1\\1&1&1+y&1\\1&1&1&1-y\end{vmatrix}$.

提示　先将第 2 行减去第 1 行;第 4 行减去第 3 行.

答　x^2y^2.

6) $\begin{vmatrix}a^2&(a+1)^2&(a+2)^2&(a+3)^2\\b^2&(b+1)^2&(b+2)^2&(b+3)^2\\c^2&(c+1)^2&(c+2)^2&(c+3)^2\\d^2&(d+1)^2&(d+2)^2&(d+3)^2\end{vmatrix}$.

提示　把行列式中的括号展开,作列变换化简行列式.

答　0.

14. 证明

$$\begin{vmatrix}b+c&c+a&a+b\\b_1+c_1&c_1+a_1&a_1+b_1\\b_2+c_2&c_2+a_2&a_2+b_2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}a&b&c\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{vmatrix}.$$

证明　$\begin{vmatrix}b+c&c+a&a+b\\b_1+c_1&c_1+a_1&a_1+b_1\\b_2+c_2&c_2+a_2&a_2+b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2a&c+a&a+b\\-2a_1&c_1+a_1&a_1+b_1\\-2a_2&c_2+a_2&a_2+b_2\end{vmatrix}$

$$=2\begin{vmatrix} a & a+b & a+c \\ a_1 & a_1+b_1 & a_1+c_1 \\ a_2 & a_2+b_2 & a_2+c_2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

15. 算出行列式

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$；2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

的全部代数余子式.

解 1) $A_{11}=-6, A_{12}=A_{13}=A_{14}=0$;

$A_{21}=-12, A_{22}=6, A_{23}=A_{24}=0$;

$A_{31}=15, A_{32}=-6, A_{33}=-3, A_{34}=0$;

$A_{41}=7, A_{42}=0, A_{43}=1, A_{44}=-2$.

2) $A_{11}=7, A_{12}=-12, A_{13}=3$;

$A_{21}=6, A_{22}=4, A_{23}=-1$;

$A_{31}=-5, A_{32}=5, A_{33}=5$.

16. 计算下面的行列式：

1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

解

$$原式=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

2) $\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$.

答　$-\frac{13}{12}$.

3) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

答　-483.

4) $\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$

答　$\frac{3}{8}$.

17. 计算下列 n 级行列式:

1) $\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$.

提示 应用一列展开公式,按第一列展开.

解

$$原行列式 = x\begin{vmatrix} x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}y\begin{vmatrix} y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}$$

$$= x^n + (-1)^{n+1}y^n.$$

2) $\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & \cdots & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & \cdots & a_2 - b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n - b_1 & a_n - b_2 & \cdots & a_n - b_n \end{vmatrix}$.

提示 $n = 1, 2$ 单独计算,$n \geqslant 3$ 时证明行列式等于零.

答 当 $n = 1$ 时,为 $a_1 - b_1$;当 $n = 2$ 时,为$(a_1 - a_2)(b_1 - b_2)$;当 $n \geqslant 3$ 时为零.

3) $\begin{vmatrix} x_1 - m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix}$.

提示 注意各行元素之和相等.

解

$$
\text{原行列式}=\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{n}x_i-m & x_2 & \cdots & x_n\\ \sum_{i=1}^{n}x_i-m & x_2-m & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \sum_{i=1}^{n}x_i-m & x_2 & \cdots & x_n-m\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{n}x_i-m & x_2 & \cdots & x_n\\ 0 & -m & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & -m\end{vmatrix}
$$

$$
=(-1)^{n-1}m^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-m\right).
$$

4) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n\end{vmatrix}$.

提示 利用第2行(列)的特点.

解

$$
\text{原行列式}=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2\end{vmatrix}
$$

$$= -2\cdot(n-2)! \quad (n\geqslant 2).$$

5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}$.

提示 从左起，依次将前一列加到后一列.

答 $(-1)^{n-1}\dfrac{(n+1)!}{2}$.

18. 证明

1) $\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}\right)$.

提示 按第 1 行展开.

2) $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix} = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots$

$+$

提示 应用数学归纳法.

证明 记

$$D_n=\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}$$

用归纳法证明.

当 $n=1$ 时,$|x+a_0|=x+a_0$,结论正确.

假设结论对 $n-1$ 级行列式成立,则

$$D_n=x\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ -1 & x & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}+$$

$$(-1)^{1+n}a_0\begin{vmatrix} -1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}_{(n-1级)}$$

$$=x(x^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_2x+a_1)+a_0$$

$$=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0.$$

这说明结论对 n 级行列式成立.

因此根据归纳法,结论对一切正整数 n 都成立.

3) $$\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}.$$

提示 应用第二数学归纳法，先从第一行展开.

4) $$\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} = \cos n\alpha$$

提示 应用第二数学归纳法，从第 n 行展开.

5) $$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right).$$

提示 先将第 1 列元素的 -1 倍加到其余各列. 再将各列的适当倍数加到第 1 列，使第 1 列的元素(除 $1+a_1$ 外)全化为零，或用 1)中结果.

19. 用克拉默法则解下列线性方程组.

1) $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 4. \end{cases}$$

解

$$d = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -70 \neq 0,$$

所以可以应用克拉默法则求解. 又因

$$d_1=\begin{vmatrix}6&-1&3&2\\5&-3&3&2\\3&-1&-1&2\\4&-1&3&-1\end{vmatrix}=-70,$$

$$d_2=\begin{vmatrix}2&6&3&2\\3&5&3&2\\3&3&-1&2\\3&4&3&-1\end{vmatrix}=-70,$$

$$d_3=\begin{vmatrix}2&-1&6&2\\3&-3&5&2\\3&-1&3&2\\3&-1&4&-1\end{vmatrix}=-70,$$

$$d_4=\begin{vmatrix}2&-1&3&6\\3&3&3&5\\3&-1&-1&3\\3&-1&3&4\end{vmatrix}=-70,$$

所以此线性方程组有唯一解,解为

$$x_1=1,x_2=1,x_3=1,x_4=1.$$

2) $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6,\\2x_1-x_2-2x_3-3x_4=8,\\3x_1+2x_2-x_3+2x_4=4,\\2x_1-3x_2+2x_3+x_4=-8;\end{cases}$

3) $\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3+4x_4-x_5=-1,\\2x_1-x_2+3x_3-4x_4+2x_5=8,\\3x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5=3,\\4x_1+3x_2+4x_3+2x_4+2x_5=-2,\\x_1-x_2-x_3+2x_4-3x_5=-3;\end{cases}$

$$4)\begin{cases}5x_1+6x_2=1,\\ x_1+5x_2+6x_3=0,\\ x_2+5x_3+6x_4=0,\\ x_3+5x_4+6x_5=0,\\ x_4+5x_5=1.\end{cases}$$

答 2) $x_1=1,x_2=2,x_3=-1,x_4=-2$;

3) $x_1=4,x_2=-14,x_3=-4,x_4=7,x_5=13$;

4) $x_1=\frac{1507}{665},x_2=-\frac{229}{133},x_3=\frac{37}{35},x_4=-\frac{79}{133},x_5=\frac{212}{665}$.

20. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是数域 P 中互不相同的数，$b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是数域 P 中任一组给定的数，用克拉默法则证明：存在唯一的数域 P 上的多项式 $f(x)=c_0x^{n-1}+c_1x^{n-2}+\cdots+c_{n-1}$ 使

$$f(a_i)=b_i,i=1,2,\cdots,n.$$

证明 设数域 P 上 $n-1$ 次多项式

$$f(x)=c_0x^{n-1}+c_1x^{n-2}+\cdots+c_{n-1}$$

满足条件

$$f(a_i)=b_i,i=1,2,\cdots,n.$$

将 $a_i,i=1,2,\cdots,n$ 代入 $f(x)$ 得

$$\begin{gathered}f(a_1)=a_1^{n-1}c_0+a_1^{n-2}c_1+\cdots+a_1c_{n-2}+c_{n-1}=b_1,\\ f(a_2)=a_2^{n-1}c_0+a_2^{n-2}c_1+\cdots+a_2c_{n-2}+c_{n-1}=b_2,\\ \cdots\cdots\\ f(a_n)=a_n^{n-1}c_0+a_n^{n-2}c_1+\cdots+a_nc_{n-2}+c_{n-1}=b_n,\end{gathered}$$

看成 $c_0,c_1,\cdots,c_{n-1}$ 的线性方程组．未知量与方程的个数都等于 n，其系数行列式为

$$d=\begin{vmatrix}a_1^{n-1}&a_1^{n-2}&\cdots&a_1&1\\ a_2^{n-1}&a_2^{n-2}&\cdots&a_2&1\\ \vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\ a_n^{n-1}&a_n^{n-2}&\cdots&a_n&1\end{vmatrix}.$$

这是一个范德蒙德行列式.因为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 各不相同,所以 $d\neq0$.根据克拉默法则,$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 有解且唯一.所以满足题设条件的多项式 $f(x)$存在且唯一.

21. 设水银密度 h 与温度 t 的关系为

$$h=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3.$$

由实验测定得以下数据:

t	0℃	10℃	20℃	30℃
h	13.60	13.57	13.55	13.52

求 $t=15$℃,40℃时水银密度(准确到小数两位).

提示 根据上题,求出 a_0,a_1,a_2,a_3.

解 设

$$h(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3,$$

则 $h(t)$满足

$$h(0)=13.6,$$
$$h(10)=13.57,$$
$$h(20)=13.55,$$
$$h(30)=13.52.$$

因此 a_0,a_1,a_2,a_3 是线性方程组

$$\begin{cases}a_0=13.6,\\ a_0+10a_1+100a_2+1000a_3=13.57,\\ a_0+20a_1+400a_2+8000a_3=13.55,\\ a_0+30a_1+900a_2+27000a_3=13.52,\end{cases}$$

此线性方程组有唯一解.解为

$$a_0=13.6,a_1=-4.1667\times10^{-3},a_2=0.15\times10^{-3},a_3=-3.3333\times10^{-6}.$$

将 $t=15$ 及 40 代入 $h(t)$.即知

$t=15$℃时,水银密度 $h=13.56$.

$t=40$℃时,水银密度 $h=13.46$.

四、补充题、提示与解答

1. 求

$$\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} \begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_n} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} & \cdots & a_{nj_n} \end{vmatrix},$$

这里 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 是对所有 n 级排列求和.

解 对每个排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$,都有

$$\begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_n} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} & \cdots & a_{nj_n} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

因为在全部 n 级排列中,奇偶排列个数相同,各有$\dfrac{n!}{2}$个.所以

$$\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} \begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_n} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} & \cdots & a_{nj_n} \end{vmatrix} = 0.$$

2. 证明:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{1j}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{2j}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{nj}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

提示　在展开式中，对每项应用

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{i_11}(t)\cdots a_{i_jj}(t)\cdots a_{i_nn}=\sum_{j=1}^{n}a_{i_11}(t)\cdots\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{i_jj}(t)\cdots a_{i_nn}(t),$$

再合并成 n 个行列式.

3. 证明：

1)
$$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+x\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij},$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式；

2)
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & 1 \\ a_{21}-a_{22} & a_{22}-a_{23} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & 1 \end{vmatrix}.$$

提示　逐列应用行列式性质 3，或累次应用行列式性质 3，将它拆成 2^n 个行列式之和.

证明

1)
$$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21} & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & x & a_{13}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21} & x & a_{23}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & x & a_{n3}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} x & a_{12} & \cdots & a_{1n}+x \\ x & a_{22} & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & a_{n2} & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix}$$

$\cdots$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & x & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & x & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & x & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + x\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}.$$

2) $$\begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & 1 \\ a_{21}-a_{22} & a_{22}-a_{23} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & 1 \\ a_{21} & a_{22}-a_{23} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & 1 \\ -a_{22} & a_{22}-a_{23} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & 1 \end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13} & a_{13}-a_{14} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & 1 \\ a_{21} & -a_{23} & a_{23}-a_{24} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & -a_{n3} & a_{n3}-a_{n4} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & 1 \end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix} -a_{12} & -a_{13} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & 1 \\ -a_{22} & -a_{23} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\cdots=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & 1 & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 1 & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 1 & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}.$$

4．计算下面的 n 级行列式：

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$.

提示 先将各列加到第一列，提出公因子$\frac{n(n+1)}{2}$，然后依次第 n 行减第 $n-1$ 行，第 $n-1$ 行减第 $n-2$ 行，…，第二行减第一行，再按第一列展开，最后计算下述 $n-1$ 级行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n \\ \frac{n(n+1)}{2} & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ \frac{n(n+1)}{2} & 4 & 5 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{n(n+1)}{2} & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$$

$$
=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(n-1)\text{级}}
$$

$$
=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ -1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ -1 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(-1)^{n-1}n^{n-2}
$$

$$
=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n^{n-1}(n+1)}{2}.
$$

2) $\begin{vmatrix} \lambda & a & a & a & \cdots & a \\ b & \alpha & \beta & \beta & \cdots & \beta \\ b & \beta & \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ b & \beta & \beta & \alpha & \cdots & \beta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & \beta & \beta & \beta & \cdots & \alpha \end{vmatrix}$.

提示 第 2 行起到第 $n-1$ 行都减去第 n 行，然后将第 2 列以后的各列都加到最后一列.再按第一列来展开行列式.

解 先设 $n\geqslant 2$.这时将行列式按提示的步骤去做，逐步得到

$$原式=\begin{vmatrix} \lambda & a & a & \cdots & a & a \\ 0 & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & \beta-\alpha \\ 0 & 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 & \beta-\alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta & \beta-\alpha \\ b & \beta & \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda & a & a & \cdots & a & (n-1)a \\ 0 & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta & 0 \\ b & \beta & \beta & \cdots & \beta & \alpha+(n-2)\beta \end{vmatrix}$$

$$=\lambda\begin{vmatrix} \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta & 0 \\ \beta & \beta & \cdots & \beta & \alpha+(n-2)\beta \end{vmatrix}+$$

$$(-1)^{n+1}b\begin{vmatrix} a & a & \cdots & a & (n-1)a \\ \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\lambda(\alpha-\beta)^{n-2}((n-2)\beta+\alpha)+(-1)^{n+1}b(-1)^{n}(n-1)a(\alpha-\beta)^{n-2}$$

$$=[\lambda\alpha+(n-2)\lambda\beta-(n-1)ab](\alpha-\beta)^{n-2}.$$

又 $n=1$ 时，原行列式 $=\lambda$.

3) $\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ -a & x & a & \cdots & a & a \\ -a & -a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & -a & x \end{vmatrix}$.

提示 记此行列式为 D_n，依次将第二列的 (-1) 倍加到第一列，然后按第一列展开，得到递推公式：

$$D_n=(x-a)D_{n-1}+a(x+a)^{n-1},n\geqslant 2.$$

将 D_n 中的 a 换成 $-a$，得到 D_n 的转置，同样得 D_n 关于 $(-a)$ 的递推公式，从而算出 D_n.

解 当 $n=1$，$D_1=x$，以下 $n\geqslant 2$.

$$D_n=\begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a & a \\ -x-a & x & a & \cdots & a & a \\ 0 & -a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -a & -a & \cdots & -a & x \end{vmatrix}$$

$$=(x-a)\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a & a \\ -a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a & -a & \cdots & -a & x \end{vmatrix}+(x+a)\begin{vmatrix} a & a & \cdots & a & a \\ -a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a & -a & \cdots & x & a \\ -a & -a & \cdots & -a & x \end{vmatrix}$$

$$
=(x-a)D_{n-1}+(x+a)\begin{vmatrix} a & a & \cdots & a & a \\ 0 & x+a & \cdots & 2a & 2a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (x+a) & 2a \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x+a \end{vmatrix}
$$

$=(x-a)D_{n-1}+a(x+a)^{n-1}$.

将 D_n 中的 a 以 $-a$ 代替后，恰是 D_n 的转置行列式，它等于 D_n，又有关于 $-a$ 的递推关系.

$$
D_n=(x+a)D_{n-1}+(-a)(x-a)^{n-1}.
$$

将两式联立，可解出

$$
D_n=\frac{1}{2}[(x+a)^n-(x-a)^n].
$$

4) $\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z & x & y & \cdots & y & y \\ z & z & x & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x & y \\ z & z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix}$.

提示 参照 3)题.

答 当 $y\neq z$ 时，$D=\dfrac{y(x-z)^n-z(x-y)^n}{y-z}$；

当 $y=z$ 时，$D=[x+(n-1)y](x-y)^{n-1}$.

5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$.

提示 引进第 $n+1$ 个量 x_{n+1}，考虑由 $1,x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$ 构成的范德蒙德行列式，此行列式的展开式中的 x_{n+1}^{n-1} 的系数的 (-1) 倍就是所要求的行列式.

解 作范德蒙德行列式.

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & x_{n+1}^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & x_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

将这个行列式按最后一列展开，展开式中 x_{n+1}^{n-1} 的系数的 $(-1)^{n+1+n}$ 倍就是所求行列式 D. 因为

$$D_1=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(x_j-x_i),$$

所以

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{n+1+n}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\sum_{k=1}^{n}(-x_k) \\ &= \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\sum_{k=1}^{n}x_k. \end{aligned}$$

5. 计算 $f(x+1)-f(x)$，其中

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^2 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & \cdots & 0 & x^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n & C_n^2 & C_n^3 & \cdots & C_n^{n-1} & x^n \\ 1 & n+1 & C_{n+1}^2 & C_{n+1}^3 & \cdots & C_{n+1}^{n-1} & x^{n+1} \end{vmatrix}$$

提示 先应用行列式的性质 3，将 $f(x+1)-f(x)$ 表示成一个行列式，再将此行列式的最后一列的每一项按二项式展开，最后将最后一列逐次减去第一列的一倍，第二列的 x 倍，$\cdots$，第 n 列的 x^{n-1} 倍.

解

$$
f(x+1)-f(x)=\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x+1 \\
1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (x+1)^2 \\
1 & 3 & 3 & 0 & \cdots & 0 & (x+1)^3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
1 & n & C_n^2 & C_n^3 & \cdots & C_n^{n-1} & (x+1)^n \\
1 & n+1 & C_{n+1}^2 & C_{n+1}^3 & \cdots & C_{n+1}^{n-1} & (x+1)^{n+1}
\end{vmatrix}
-
\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \\
1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^2 \\
1 & 3 & 3 & 0 & \cdots & 0 & x^3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
1 & n & C_n^2 & C_n^3 & \cdots & C_n^{n-1} & x^n \\
1 & n+1 & C_{n+1}^2 & C_{n+1}^3 & \cdots & C_{n+1}^{n-1} & x^{n+1}
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (x+1)-x \\
1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (x+1)^2-x^2 \\
1 & 3 & 3 & 0 & \cdots & 0 & (x+1)^3-x^3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
1 & n & C_n^2 & C_n^3 & \cdots & C_n^{n-1} & (x+1)^n-x^n \\
1 & n+1 & C_{n-1}^2 & C_{n+1}^3 & \cdots & C_{n+1}^{n-1} & (x+1)^{n+1}-x^{n+1}
\end{vmatrix}
$$

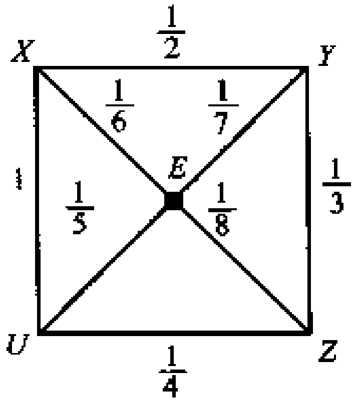
$$
=\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
1 & 3 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
1 & n & C_n^2 & C_n^3 & \cdots & C_n^{n-1} & 0 \\
1 & n+1 & C_{n+1}^2 & C_{n+1}^3 & \cdots & C_n^{n-1} & (n+1)x^n
\end{vmatrix}
$$

$=(n+1)x^n$.

6. 下图表示一个电路网络，每条线上标出的数字是电阻（单

位是欧姆)，E 点接地，由 X, Y, U, Z 点通入的电流皆为 100 安培，求这四点的电位.

(用基尔霍夫定律.)



答 U, X, Y, Z 点的电位分别为

$\frac{223400}{12907}, \frac{210100}{12907}, \frac{188400}{12907}, \frac{183300}{12907}$(单位是伏特).

第三章　线性方程组

一、内 容 提 要

1．消元法解线性方程组

线性方程组的解的基本概念(解、解集合、同解).

线性方程组的初等变换及化为阶梯形.

消元法解线性方程组的一般结论(一般解与自由未知量)

齐次线性方程组有非零解的一个充分条件(定理 1)

对增广矩阵用初等行变换化成阶梯形来作消元法

2．n 维向量及 n 维向量空间的引入

n 维向量、加法与数量乘法

基本运算性质

线性组合　线性表出　线性相关　线性无关

向量组的等价　极大无关组

向量组的两个基本性质(定理 2 及定理 3)

向量组的秩

3．矩阵的秩

矩阵的行秩与列秩,行秩与列秩相等

齐次方程组有非零解的充分必要条件

用子式的性质刻画矩阵的秩

4．线性方程组解的存在与结构定理

线性方程组有解的判别准则(增广矩阵的秩等于系数矩阵的秩)

齐次线性方程组的基础解系及解的结构

非齐次线性方程组解的结构

5. 二元高次方程组

多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的结式 $R(f,g)$

结式为零的充分必要条件

利用结式求解二元高次多项式方程组

$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ g(x,y)=0. \end{cases}$$

二、学习指导

这一章的中心是讨论线性方程组的求解问题.代数上讨论问题的方式是要给出一个普遍方法,它是对任何线性方程组都适用的求解方法.并且在有解时要求给出全部解.本章给出的普遍解法是消元法.实际上对于大规模工程和科学计算问题,消元法在计算量和误差积累上还有缺陷,还需要有专门的算法.但是消元法仍是最基本的一种算法.

对线性方程组求解问题进行理论分析的过程中引入了 n 维向量空间这个代数运算系统,它是 n 维向量的集合,在其中可进行加法和数量乘法.利用它的运算性质(线性相关、线性无关、极大无关组、向量组的秩等)解决了理论分析问题.这是代数学的特色.

n 维向量空间是数学中的很基本的代数运算系统,到第六章时还要抽象成 n 维线性空间,是高等数学的必备工具.高等代数的重要任务之一就是让读者掌握这个运算系统的各项运算性质.

全体二维实向量的集合就是几何平面上全体向量的集合,全体三维实向量的集合就是几何空间中全体向量的集合.二维(三维)向量的加法和数量乘法正是几何平面上(几何空间中)向量的和及倍数.因此二维实向量空间与几何平面上全体向量的集合是同一个代数运算系统,三维实向量空间与几何空间中全体向量集

合是同一个代数运算系统.而全体 n 维向量的集合这个代数运算系统是二维向量空间和三维向量空间这两个运算系统的推广.并借用"空间"一词将它称为 n 维向量空间.

下面对与 n 维向量有关的一些抽象概念补充一点背景来源.

1. 多余方程与线性相关的关系.

设线性方程组(设全体系数和常数项不全为零)

$$(\mathrm{I}):\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, & \cdots \quad (1)\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, & \cdots \quad (2)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{s-1,1}x_1+a_{s-1,2}x_2+\cdots+a_{s-1,n}x_n=b_{s-1}, & \cdots \quad (s-1)\\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s. & \cdots \quad (s)\end{cases}$$

它的每一个方程都对应一个 $n+1$ 维向量.例如第 i 个方程对应了

$$\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in},b_i),i=1,2,\cdots,s. \qquad (s+1)$$

如果其中有一个方程,不妨设为第 s 个方程是其余 $s-1$ 个方程的线性组合,设为

$$(s)=l_1\cdot(1)+l_2\cdot(2)+\cdots+l_{s-1}\cdot(s-1).$$

详细写出来就是

$$\begin{aligned} & a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n\\ =\ & l_1(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n)+\\ & l_2(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n)+\cdots+\\ & l_{s-1}(a_{s-1,1}x_1+a_{s-1,2}x_2+\cdots+a_{s-1,n}x_n)\end{aligned}$$

及

$$b_s=l_1b_1+l_2b_2+\cdots+l_{s-1}b_{s-1} \qquad (s+2)$$

若 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 是(1),(2),…,$(s-1)$ 这前 $s-1$ 个方程的解,即有

$$a_{i1}c_1+a_{i2}c_2+\cdots+a_{in}c_n=b_i, \qquad (s+3)$$

由 $(s+2)$ 及 $(s+3)$ 式有

$$a_{s1}c_1+a_{s2}c_2+\cdots+a_{sn}c_n$$

$$\xlongequal{(s+2)} l_1(a_{11}c_1+\cdots+a_{1n}c_n)+l_2(a_{21}c_1+a_{22}c_2+\cdots+a_{2n}c_n)+\cdots+$$

$$l_{s-1}(a_{s-1,1}c_1+a_{s-1,2}c_2+\cdots+a_{s-1,n}c_n)$$

$$\xlongequal{(s+3)} l_1b_1+l_2b_2+\cdots+l_{s-1}b_{s-1}$$

$$\xlongequal{(s+2)} b_s,$$

即$(c_1,c_2,\cdots,c_n)$也是方程(s)的解.

于是易知方程组(Ⅰ)与

$$(\text{Ⅱ}):\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, & \cdots\quad(1)\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, & \cdots\quad(2)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{s-1,1}x_1+a_{s-1,2}x_2+\cdots+a_{s-1,n}x_n=b_{s-1} & \cdots\quad(s-1)\end{cases}$$

是同解的.这即说明,若方程组(Ⅰ)中有一个方程(第 s 个)是其余方程的线性组合,则去掉这个方程后的方程组(Ⅱ)与(Ⅰ)同解.我们称这第 s 个方程是方程组(Ⅰ)中的多余方程.多余方程可以去掉而不影响解(即保持同解).

由方程的多余性(即$(s+2)$式)可得各未知数的系数及各方程的常数项之间的关系,实际上就是下列向量的关系式

$$\boldsymbol{\alpha}_s=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_{s-1}\boldsymbol{\alpha}_{s-1},$$

即向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中有一个向量(向量 $\boldsymbol{\alpha}_s$)是其余向量的线性组合.这个性质在原书中表达为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是线性相关的(定义 11).这说明,某线性方程组中有多余方程的性质是线性相关概念产生的背景来源之一.

自然地,方程组(Ⅰ)中没有多余方程时,即向量组$(s+1)$中任一向量都不是其余向量的线性组合时,向量组$(s+1)$称为是线性无关的.

2. 极大线性无关组概念的产生

如方程组(Ⅱ)中还有多余方程,则可继续删除.这过程可以继

续，直到剩下的方程组没有多余的方程为止．不妨设这剩下的方程组由前 r 个方程组成．

$$(\text{Ⅲ}):\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, & \cdots \quad (1)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=b_r, & \cdots \quad (r)\end{cases}$$

其中 $r\leqslant s$（$r=s$ 时，表明一开始的方程组（Ⅰ）就没有多余方程）．这时若 $r\geqslant 2$，则（Ⅲ）中任一方程不是其他方程的线性组合，故（Ⅲ）对应的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 就是线性无关的．由于方程组（Ⅰ）经删去多余方程成为方程组（Ⅱ），第 s 个方程是（Ⅰ）中多余方程，即 $\boldsymbol{\alpha}_s$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 的线性组合．故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1},\boldsymbol{\alpha}_s$ 可互相线性表出，即等价．故删除多余方程的过程能保持前后两个向量组等价．于是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与最后剩下的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 等价．

这 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的线性无关的部分组，它们又互相等价，前者正是后者的极大线性无关组．这个例子提供极大线性无关组概念的一种背景来源．

注 上面讨论中，只是对多于 2 个向量的向量组提供了线性相关、线性无关、极大线性无关组概念的背景来源．后来在进一步讨论它们的性质时，把线性相关、…这些概念又扩充到一个向量的情形．这儿就不细说了．

3．向量组的秩的问题的提出

设方程组（Ⅰ）经过两个不同的删除多余方程的过程得到两个方程组

$$(\text{Ⅳ}):\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=b_r.\end{cases} \quad (r\leqslant s)$$

$$(\mathrm{IV}'):\begin{cases} a_{i_11}x_1+a_{i_12}x_2+\cdots+a_{i_1n}x_n=b_{i_1}, \\ a_{i_21}x_1+a_{i_22}x_2+\cdots+a_{i_2n}x_n=b_{i_2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i_l1}x_1+a_{i_l2}x_2+\cdots+a_{i_ln}x_n=b_{i_l}, \end{cases} \quad (l\leqslant s)$$

它们都已没有多余方程,且都与(Ⅰ)同解,故(Ⅳ)与(Ⅳ′)同解.

问题:两个皆无多余方程的线性方程组,又是同解的.它们的方程数目是否相同?

实际上(Ⅳ)与(Ⅳ′)对应的向量组是

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r \quad 及 \quad \boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_l}.$$

它们皆是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的极大线性无关组.上述问题就是:一个向量组的两个极大线性无关组是否具有相同数目的向量?

答案是肯定的.这个数目称为向量组的秩.

下面我们介绍初等变换的一个有趣且有用的性质.

4. 矩阵的初等行变换不改变任意部分列向量之间的线性关系;同样初等列变换不改变任意部分行向量之间的线性关系.

证明 设 $\boldsymbol{A}$ 为一个矩阵,设它经有限次初等行变换变为矩阵 $\boldsymbol{B}$.任取 $\boldsymbol{A}$ 的 k 列作成矩阵 $\boldsymbol{A}_k$.在 $\boldsymbol{A}$ 上作的初等行变换在 $\boldsymbol{A}_k$ 上引起的变换正是在 $\boldsymbol{A}_k$ 上作初等行变换.设它经 $\boldsymbol{A}$ 的那些初等行变换变成了 $\boldsymbol{B}_k$,$\boldsymbol{B}_k$ 就是由 $\boldsymbol{A}_k$ 经自身的初等行变换变化而来的.不妨设

$$\boldsymbol{A}_k=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sk} \end{pmatrix},\boldsymbol{B}_k=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sk} \end{pmatrix}.$$

若 $\boldsymbol{A}_k$ 的列向量的一个线性组合为零,其系数为 $l_1,l_2,\cdots,l_k$,则

$$l_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{s1}\end{pmatrix}+l_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{s2}\end{pmatrix}+\cdots+l_k\begin{pmatrix}a_{1k}\\a_{2k}\\\vdots\\a_{sk}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}l_1+a_{12}l_2+\cdots+a_{1k}l_k\\a_{21}l_1+a_{22}l_2+\cdots+a_{2k}l_k\\\cdots\\a_{s1}l_1+a_{s2}l_2+\cdots+a_{sk}l_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}. \tag{1}$$

即 $l_1,l_2,\cdots,l_k$ 是齐次方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1k}x_k=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2k}x_k=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sk}x_k=0\end{cases}$$

的解.这方程组的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}_k$.因 $\boldsymbol{B}_k$ 是由 $\boldsymbol{A}_k$ 经初等行变换而得,上述方程组经相应的初等变换而变为方程组

$$\begin{cases}b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1k}x_k=0,\\b_{21}x_1+b_{22}x_2+\cdots+b_{2k}x_k=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\b_{s1}x_1+b_{s2}x_2+\cdots+b_{sk}x_k=0.\end{cases}$$

这两个齐次方程组是同解的.故 $l_1,l_2,\cdots,l_k$ 也是后一方程组的解,必有

$$l_1\begin{pmatrix}b_{11}\\b_{21}\\\vdots\\b_{s1}\end{pmatrix}+l_2\begin{pmatrix}b_{12}\\b_{22}\\\vdots\\b_{s2}\end{pmatrix}+\cdots+l_k\begin{pmatrix}b_{1k}\\b_{2k}\\\vdots\\b_{sk}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}l_1+b_{12}l_2+\cdots+b_{1k}l_k\\b_{21}l_1+b_{22}l_2+\cdots+b_{2k}l_k\\\cdots\\b_{s1}l_1+b_{s2}l_2+\cdots+b_{sk}l_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}. \tag{2}$$

同样地,若有 $\boldsymbol{B}_k$ 的列向量的一个线性关系(2)也能推出 $\boldsymbol{A}_k$ 的列向量适合线性关系(1).故 $\boldsymbol{A}_k$ 的列向量组与 $\boldsymbol{B}_k$ 的列向量组有相同的线性关系.这就证明了本例题的第一部分结论.

把 $\boldsymbol{A}$ 的行和列互换,得新矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.例如

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 4\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 4\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A}$ 的行向量就是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的列向量，而 $\boldsymbol{A}$ 的初等列变换就是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的初等行变换. 由于 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 对本例题的第一部分结论成立，故 $\boldsymbol{A}$ 对于本例题的第二部分结论成立.

本例题的结论可用于找寻一个给定向量组的极大无关组.

5. 设向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\3\\6\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}3\\5\\7\\5\end{pmatrix},$$

求出它的一个极大线性无关组.

解 作矩阵 $\boldsymbol{A}$，它以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 为 5 个列向量：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1 & 3\\1 & 3 & 0 & 3 & 5\\1 & 4 & -1 & 6 & 7\\1 & 3 & 0 & 4 & 5\end{pmatrix}.$$

易计算，经一些初等行变换后可化成下列阶梯形矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1 & 3\\0 & 1 & -1 & 2 & 2\\0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

由前一例题知 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组有相同的线性关系. 由 $\boldsymbol{B}$ 的形状知它的第 1,2,4 列三个向量是线性无关的，其他列向量都可由它们线性表出. 于是 $\boldsymbol{A}$ 的第 1,2,4 列三个向量线性无关，$\boldsymbol{A}$ 的其他列向量都可由 $\boldsymbol{A}$ 的第 1,2,4 列线性表出. 故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是原向量组的一个极大线性无关组.

三、习题、提示与解答

1. 用消元法解下列线性方程组：

1) $\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3-4x_4 \qquad =1, \\ x_1+3x_2+2x_3-2x_4+x_5=-1, \\ x_1-2x_2+x_3-x_4-x_5=3, \\ x_1-4x_2+x_3+x_4-x_5=3, \\ x_1+2x_2+x_3-x_4+x_5=-1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1+2x_2 \qquad -3x_4+2x_5=1, \\ x_1-x_2-3x_3+x_4-3x_5=2, \\ 2x_1-3x_2+4x_3-5x_4+2x_5=7 \\ 9x_1-9x_2+6x_3-16x_4+2x_5=25; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4, \\ x_2-x_3+x_4=-3, \\ x_1+3x_2 \qquad +x_4=1, \\ -7x_2+3x_3+x_4=-3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x_1+4x_2-5x_3+7x_4=0, \\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4=0, \\ 4x_1+11x_2-13x_3+16x_4=0, \\ 7x_1-2x_2+x_3+3x_4=0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=1, \\ 3x_1-2x_2+2x_3-3x_4=2, \\ 5x_1+x_2-x_3+2x_4=-1, \\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4=4; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=1, \\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4=1, \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4=1, \\ 2x_1+2x_2+2x_3-x_4=1, \\ 5x_1+5x_2+2x_3=2. \end{cases}$

解 1) 对它的增广矩阵作初等行变换,把它化成阶梯形.

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}1&3&5&-4&0&1\\1&3&2&-2&1&-1\\1&-2&1&-1&-1&3\\1&-4&1&1&-1&3\\1&2&1&-1&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&5&-4&0&1\\0&0&-3&2&1&-2\\0&-5&-4&3&-1&2\\0&-7&-4&5&-1&2\\0&-1&-4&3&1&-2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&3&5&-4&0&1\\0&-1&-4&3&1&-2\\0&-5&-4&3&-1&2\\0&-7&-4&5&-1&2\\0&0&-3&2&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&5&-4&0&1\\0&-1&-4&3&1&-2\\0&0&16&-12&-6&12\\0&0&24&-16&-8&16\\0&0&-3&2&1&-2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&3&5&-4&0&1\\0&-1&-4&3&1&-2\\0&0&1&-2&-1&2\\0&0&3&-2&-1&2\\0&0&-3&2&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&5&-4&0&1\\0&-1&-4&3&1&-2\\0&0&1&-2&-1&2\\0&0&3&-2&-1&2\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&3&5&-4&0&1\\0&-1&-4&3&1&-2\\0&0&1&-2&-1&2\\0&0&0&4&2&-4\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

即得同解方程组

$$\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3-4x_4 \qquad =1, \\ \quad -x_2-4x_3+3x_4+x_5=-2, \\ \qquad x_3-2x_4-x_5=2, \\ \qquad\quad 4x_4+2x_5=-4. \end{cases}$$

以 x_5 为自由未知量,逐次解之,得一般解为

$$\begin{cases} x_1=-\dfrac{1}{2}x_5, \\ x_2=-1-\dfrac{1}{2}x_5, \\ x_3=0, \\ x_4=-1-\dfrac{1}{2}x_5, \end{cases}$$

其中 x_5 为自由未知量.

2) 对它的增广矩阵作初等行变换,化为阶梯形.

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & -5 & 2 & 7 \\ 9 & -9 & 6 & -16 & 2 & 25 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & -7 & 4 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & -27 & 6 & 11 & -16 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & -21 & 12 & 3 & -6 & 15 \\ 0 & 0 & 33 & -25 & 29 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 33 & -25 & 29 & 8 \\ 0 & 0 & 33 & -25 & 29 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 33 & -25 & 29 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

出现了矛盾方程“$0=-1$”. 故原方程组无解.

3) 有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = -8, \\ x_2 = 3, \\ x_3 = 6, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

4）一般解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{17}x_3 - \dfrac{13}{17}x_4, \\ x_2 = \dfrac{19}{17}x_3 - \dfrac{20}{17}x_4, \end{cases}$$

其中 x_3, x_4 为自由未知量.

5）无解.

6）一般解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{6} + \dfrac{5}{6}x_4, \\ x_2 = \dfrac{1}{6} - \dfrac{7}{6}x_4, \\ x_3 = \dfrac{1}{6} + \dfrac{5}{6}x_4. \end{cases}$$

其中 x_4 为自由未知量.

2. 把向量 $\boldsymbol{\beta}$ 表成向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合：

1）$\boldsymbol{\beta} = (1,2,1,1)$，　$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1,1)$，

$\boldsymbol{\alpha}_2 = (1,1,-1,-1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3 = (1,-1,1,-1)$，

$\boldsymbol{\alpha}_4 = (1,-1,-1,1)$；

2）$\boldsymbol{\beta} = (0,0,0,1)$，　$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,0,1)$，

$\boldsymbol{\alpha}_2 = (2,1,3,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3 = (1,1,0,0)$，

$\boldsymbol{\alpha}_4 = (0,1,-1,-1)$.

解　1）设 $\boldsymbol{\beta} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 + x_4\boldsymbol{\alpha}_4$，按各分量写出等式，得方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1, \\ x_1+x_2-x_3-x_4=2, \\ x_1-x_2+x_3-x_4=1, \\ x_1-x_2-x_3+x_4=1. \end{cases}$$

对它求解,得

$$x_1=\frac{5}{4},x_2=\frac{1}{4},x_3=-\frac{1}{4},x_4=-\frac{1}{4},$$

故 $$\boldsymbol{\beta}=\frac{5}{4}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{4}\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{1}{4}\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{1}{4}\boldsymbol{\alpha}_4.$$

2) 设 $\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4$,按各分量写出等式,得方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3 \qquad =0, \\ x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ 3x_2 \qquad -x_4=0, \\ x_1+x_2 \qquad -x_4=1. \end{cases}$$

对它求解得 $x_1=1,x_2=0,x_3=-1,x_4=0$. 故 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$.

3. 证明:如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关,而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关,则向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出.

提示 由已知条件,$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关,即有不全为零的数 $l,l_1,\cdots,l_r$ 使 $l\boldsymbol{\beta}+l_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+l_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0}$. 要证有一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 使 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r$,想到将第一式中 $l\boldsymbol{\beta}$ 移项至等式左边可得 $(-l)\boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+l_r\boldsymbol{\alpha}_r$. 若能证明 $l\neq0$,可用 $\frac{1}{(-l)}$ 乘两端,就可证得所要的结论.

证明 由题设有不全为零的数 $l,l_1,\cdots,l_r$ 使 $l\boldsymbol{\beta}+l_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+l_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0}$. 将 $l\boldsymbol{\beta}$ 移项,得 $(-l)\boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+l_r\boldsymbol{\alpha}_r$. 现来证 $l\neq0$. 用反证法,若 $l=0$,由 $l,l_1,\cdots,l_r$ 不全为零,故 $l_1,\cdots,l_r$ 不全为零,且有 $\mathbf{0}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+l_r\boldsymbol{\alpha}_r$. 与题设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关矛

盾. 故 $l\neq 0$. 将 $(-l)\boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+l_r\boldsymbol{\alpha}_r$ 两端同乘以 $\frac{1}{(-l)}$, 则得

$$\boldsymbol{\beta}=\frac{l_1}{(-l)}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{l_2}{(-l)}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\frac{l_r}{(-l)}\boldsymbol{\alpha}_r,$$

即 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出.

4. $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}),i=1,2,\cdots,n$. 证明: 如果 $|a_{ij}|\neq 0$, 那么 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

证明 设有一组数 $l_1,l_2,\cdots,l_n$ 使 $l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$. 按各分量写出等式, 得等式组

$$\begin{cases}a_{11}l_1+a_{21}l_2+\cdots+a_{n1}l_n=0,\\a_{12}l_1+a_{22}l_2+\cdots+a_{n2}l_n=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{1n}l_1+a_{2n}l_2+\cdots+a_{nn}l_n=0,\end{cases}$$

即 $l_1,l_2,\cdots,l_n$ 是齐次方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{n1}x_1=0,\\a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{n2}x_n=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}$$

的解. 此方程组的系数行列式 $|a_{ij}|\neq 0$, 只有零解. 得 $l_1=l_2=\cdots=l_n=0$, 故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是线性无关的向量组.

5. 设 $t_1,t_2,\cdots,t_r$ 是互不相同的数, $r\leqslant n$. 证明: $\boldsymbol{\alpha}_i=(1,t_i,\cdots,t_i^{n-1}),i=1,2,\cdots,r$, 是线性无关的.

证明 可利用第4题的结论. 将每个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 的前 r 个分量组成新向量组 $\boldsymbol{\alpha}_i'=(1,t_i,\cdots,t_i^{r-1}),i=1,2,\cdots,r$. 这时 $|t_i^j|_{\substack{0\leqslant j\leqslant r-1\\1\leqslant i\leqslant r}}$ 是范德蒙德行列式, 其值为 $\prod\limits_{1\leqslant i<l\leqslant r}(t_l-t_i)\neq 0$. 于是 $\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_2',\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r'$ 线性无关, 因而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 也线性无关.

6. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 证明: $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$

也线性无关.

证明 设有 l_1,l_2,l_3 使 $l_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+l_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+l_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$. 经整理后有 $(l_1+l_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(l_1+l_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(l_2+l_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$. 因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,得

$$\begin{cases} l_1+l_3=0, \\ l_1+l_2=0, \\ l_2+l_3=0. \end{cases}$$

解之,得 $l_1=l_2=l_3=0$. 故 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

7. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 r,证明:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意 r 个线性无关的向量都构成它的一极大线性无关组.

提示 先用定理 2 来证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意 $r+1$ 个向量(允许重复)都线性相关. 任给 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中 r 个无关的向量 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}$, $\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$,再证任一 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 都是它们的线性组合.

证明 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 r,必有一极大线性无关组由 r 个向量组成,不妨设为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$. 又设 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_{r+1}}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中的 $r+1$ 个向量(允许重复),则任一 $\boldsymbol{\alpha}_{j_t}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的线性组合,又 $r+1>r$,由定理 2,$\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_{r+1}}$ 是线性相关的.

任给 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中的 r 个无关的向量 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$. 任意 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 与它们合成 $r+1$ 个向量. 第一段中已证明 $\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性相关. 由定义 13 知 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个极大线性无关组.

8. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 r,$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中的 r 个向量,使得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中每个向量都可被它们线性表出. 证明:$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一极大线性无关组.

提示 只要证明 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 的秩是 r，再由第 7 题就得到所要的结论.

证明 由题设易知 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 等价.等价的向量组有相同的秩，故 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 的秩也是 r，因而是线性无关的.再由习题 7 可得所要的结论.

9. 证明：一个向量组的任何一个线性无关组都可扩充成一个极大线性无关组.

提示 采取每次扩充一个向量使新向量组保持线性无关.说清扩充过程终止(不能继续扩充)时的情况，这最后得到的线性无关部分组就是所要的极大线性无关组.

证明 设向量组为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，它的一个线性无关部分组不妨设为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l$，$l\leqslant s$.

(i) $l=s$，则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 自身就是它的极大线性无关组.

(ii) $l<s$，但是 $\alpha_{l+1},\cdots,\alpha_s$ 中任何向量加入 $\alpha_1,\cdots,\alpha_l$ 后成为线性相关向量组，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l$ 就是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的极大无关组.

(iii) $l<s$，$\alpha_{l+1},\cdots,\alpha_s$ 中有向量，不妨设为 α_{l+1}，使得 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l,\alpha_{l+1}$ 仍是线性无关的.

再从 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{l+1}$ 这个线性无关组出发，若还是属于第(iii)种情形，则还可再扩大.但 s 是有限数，不能无限扩大.必然在扩充到某个无关组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l,\cdots,\alpha_r$ 时属于情形(i)或情形(ii).这时 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l,\cdots,\alpha_r$ 就是所要的极大线性无关组.

10. 设 $\alpha_1=(1,-1,2,4)$，$\alpha_2=(0,3,1,2)$，$\alpha_3=(3,0,7,14)$，$\alpha_4=(1,-1,2,0)$，$\alpha_5=(2,1,5,6)$

1) 证明：α_1,α_2 线性无关；

2) 把 α_1,α_2 扩充成一个极大线性无关组.

解 1) α_1 及 α_2 都不是另一向量的倍数，故线性无关.

2）想利用学习指导中第 5 点补充中的结论. 作矩阵 $\boldsymbol{A}$，它分别把 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 排为第 1,2,3,4,5 列，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-1&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&6\end{pmatrix}.$$

对它作初等行变换化成阶梯形.

$$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&3&3&0&3\\0&1&1&0&1\\0&2&2&-4&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&-4&-4\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}.$$

由于初等行变换保持列向量之间的线性关系，以及 $\boldsymbol{B}$ 的第 3 列是第 1 列及第 2 列的线性组合，第 1 列，第 2 列，第 4 列线性无关，第 5 列又是第 1 列，第 2 列及第 4 列的线性组合. 故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合，即 $\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 分别添加到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 中都成为线性相关向量组. 于是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是极大无关组，且是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 的扩充.

11. 用消元法求下列向量组的极大线性无关组与秩：

1）$\boldsymbol{\alpha}_1=(6,4,1,-1,2)$，　　$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,2,3,-4)$，

$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,4,-9,-16,22)$，　　$\boldsymbol{\alpha}_4=(7,1,0,-1,3)$；

2）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4)$，　　$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2)$，

$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7,14)$，　　$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,2,0)$，

$\boldsymbol{\alpha}_5=(2,1,5,6)$.

解　1）我们采取学习指导中第 5 点补充中的方法. 作下列矩

阵 $\boldsymbol{A}$，把 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 分别排为它的 1,2,3,4 列.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}6&1&1&7\\4&0&4&1\\1&2&-9&0\\-1&3&-16&-1\\2&-4&22&3\end{pmatrix}.$$

对它作初等行变换化成阶梯形.

$$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1&2&-9&0\\4&0&4&1\\6&1&1&7\\-1&3&-16&-1\\2&-4&22&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-9&0\\0&-8&40&1\\0&-11&55&7\\0&5&-25&-1\\0&-8&40&3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&-9&0\\0&-1&5&3\\0&8&40&1\\0&5&-25&-1\\0&-8&40&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-9&0\\0&-1&5&3\\0&0&0&-23\\0&0&0&14\\0&0&0&-21\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&-9&0\\0&-1&5&5\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

最后的矩阵中第 1,2,4 列构成列向量组的极大线性无关组，秩为 3. 而初等行变换不改变列向量之间的线性关系. 故 $\boldsymbol{A}$ 的第 1,2,4 列也构成 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的极大线性无关组，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组，秩为 3.

2) 类似于 1)中的计算过程可得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是一个极大线性无关组，秩为 3.

12. 证明：如果向量组（Ⅰ）可以由向量组（Ⅱ）线性表出，那么（Ⅰ）的秩不超过（Ⅱ）的秩.

提示 注意到极大线性无关组与原向量组等价，并利用定理2的推论1.

证明 （Ⅰ）的极大线性无关组可由（Ⅰ）线性表出，（Ⅰ）可由（Ⅱ）线性表出，（Ⅱ）与它的极大线性无关组等价，（Ⅱ）能由（Ⅱ）的极大线性无关组线性表出. 由线性表出的传递性，（Ⅰ）的极大线性无关组可由（Ⅱ）的极大线性无关组表出. 这时可利用定理2的推论1，（Ⅰ）的极大线性无关组中向量数≤（Ⅱ）的极大线性无关组中向量数，即（Ⅰ）的秩≤（Ⅱ）的秩.

13. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是一组 n 维向量，已知单位向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 可被它们线性表出，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

提示 可利用习题12的结论.

证明 由习题12，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的秩 $\geqslant \boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的秩. 因单位向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性无关，其秩为 n. 故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的秩 $\geqslant n$. 但 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 仅有 n 个向量，其秩又 $\leqslant n$. 故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的秩 $=n$，即它们是线性无关的.

14. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是一组 n 维向量，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充分必要条件是任一 n 维向量都可被它们线性表出.

提示 利用习题13，并注意到任意 $n+1$ 个 n 维向量皆相关.

证明 充分性. 由题设，单位向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 也能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出，由习题13，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

必要性. 任给 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}$，则 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $n+1$ 个 n 维向量，由定理2的推论2，它们线性相关. 再由习题3，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的线性组合.

15. 证明：方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

对任何 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 都有解的充分必要条件是系数行列式 $|a_{ij}| \neq 0$.

提示 上述方程组有解等价于常数项列向量是 n 个系数列向量的线性组合.再利用习题 14.

证明 令

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}, i = 1, 2, \cdots, n.$$

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

$|a_{ij}| \neq 0$,即系数矩阵的秩为 n,也即 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.再由习题 14,得

$|a_{ij}| \neq 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 任一 n 维向量 $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 的线性组合 $\Leftrightarrow$ 对任何 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 原线性方程组有解.

16. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 有相同秩,证明:$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 等价.

提示 利用习题 7.

证明 取 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 的一个极大线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_t}$.后者也是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的无关组.由题设,其向量数 t 恰为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩.由习题 7,$\boldsymbol{\alpha}_{i_1}$,

$\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的极大线性无关组. 它又是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的极大线性无关组,于是它与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 及 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 都等价. 因而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 等价.

17. 设 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_r,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{r-1}$,证明:$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 有相同的秩.

提示 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 也能由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性表出,再利用习题 12.

证明 由题设 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 可经 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出,用习题 12,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 的秩$\leqslant\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的秩. 又易计算得

$$\boldsymbol{\alpha}_i=\frac{1}{r-1}(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\boldsymbol{\beta}_r)-\boldsymbol{\beta}_i,\ i=1,2,\cdots,r.$$

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可经 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性表出,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的秩$\leqslant\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 的秩. 故它们的秩相同.

18. 计算下列矩阵的秩:

1) $\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$;　　2) $\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 4 & -2 & 0\\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1\\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}14 & 12 & 6 & 8 & 2\\ 6 & 104 & 21 & 9 & 17\\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1\\ 35 & 30 & 15 & 20 & 5\end{pmatrix}$;　　4) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6\\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32\\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77\end{pmatrix}$;

$$5)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

解 用初等行变换将矩阵化为阶梯形，这时秩不会改变．只作第 1)小题，其余小题仅给出答案．

$$1)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

这阶梯形有 4 个非零行，秩为 4．

2) 秩为 3； 3) 秩为 2； 4) 秩为 3； 5) 秩为 5．

19．讨论 λ, a, b 取什么值时下列方程组有解，并求解：

$$1)\ \begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2; \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} (\lambda+3)x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda, \\ \lambda x_1 + (\lambda-1)x_2 + x_3 = 2\lambda, \\ 3(\lambda+1)x_1 + \lambda x_2 + (\lambda+3)x_3 = 3; \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} a x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + b x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2b x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

提示 都是具有性质“未知数的数目等于方程数目”的方程

组.可先计算系数行列式.行列式$\neq 0$时可用克拉默法则,而行列式$=0$只有几种特殊情形,再单独讨论它.

解 1)

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-1)^2.$$

当$\lambda \neq -2,1$时,方程组有唯一解,用克拉默法则解得

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda & 1 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda \end{vmatrix}}{(\lambda+2)(\lambda-1)^2} = \frac{-(\lambda+1)(\lambda-1)^2}{(\lambda+2)(\lambda-1)^2} = \frac{-(\lambda+1)}{(\lambda+2)},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda \end{vmatrix}}{(\lambda+2)(\lambda-1)^2} = \frac{(\lambda-1)^2}{(\lambda+2)(\lambda-1)^2} = \frac{1}{(\lambda+2)},$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda^2 \end{vmatrix}}{(\lambda+2)(\lambda-1)^2} = \frac{(\lambda+1)^2(\lambda-1)^2}{(\lambda+2)(\lambda-1)^2} = \frac{(\lambda+1)^2}{(\lambda+2)}.$$

当$\lambda = -2$时,方程组是

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$$

对增广矩阵进行初等行变换

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

出现矛盾方程“$0=3$”,故原方程无解.

当$\lambda = 1$时,方程组是

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

其一般解为

$$x_1 = 1 - x_2 - x_3,$$

其中 x_2, x_3 是两个自由未知量.

2）系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 3+\lambda & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda-1 & 1 \\ 3\lambda+3 & \lambda & \lambda+3 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-1).$$

当 $\lambda \neq 0, 1$ 时,方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ 2\lambda & \lambda-1 & 1 \\ 3 & \lambda & \lambda+3 \end{vmatrix}}{\lambda^2(\lambda-1)} = \frac{\lambda^3 + 3\lambda^2 - 15\lambda + 9}{\lambda^2(\lambda-1)},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3+\lambda & \lambda & 2 \\ \lambda & 2\lambda & 1 \\ 3\lambda+3 & 3 & \lambda+3 \end{vmatrix}}{\lambda^2(\lambda-1)} = \frac{\lambda^3 + 12\lambda - 9}{\lambda^2(\lambda-1)},$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3+\lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda-1 & 2\lambda \\ 3\lambda+3 & \lambda & 3 \end{vmatrix}}{\lambda^2(\lambda-1)} = \frac{-4\lambda^3 + 3\lambda^2 + 12\lambda - 9}{\lambda^2(\lambda-1)}.$$

当 $\lambda = 0$ 时,

方程组是

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ \quad\; - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 \qquad + 3x_3 = 3, \end{cases}$$

前二个方程的和为 $3x_1 + 3x_3 = 0$ 与第三个方程矛盾,故无解.

当 $\lambda=1$ 时方程组是

$$\begin{cases}4x_1+x_2+2x_3=1,\\ x_1 \qquad\quad +x_3=2,\\ 6x_1+x_2+4x_3=3,\end{cases}$$

第三个方程减去第二个方程的两倍得 $4x_1+x_2+2x_3=-1$ 与第一个方程矛盾,故无解.

3) 系数行列式为

$$\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & b & 1\\ 1 & 2b & 1\end{vmatrix}=-b(a-1).$$

当 $b\neq 0, a\neq 1$ 时有唯一解,

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}4 & 1 & 1\\ 3 & b & 1\\ 4 & 2b & 1\end{vmatrix}}{b(1-a)}=\frac{1-2b}{b(1-a)},$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix}a & 4 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 4 & 1\end{vmatrix}}{b(1-a)}=\frac{1-a}{b(1-a)}=\frac{1}{b},$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix}a & 1 & 4\\ 1 & b & 3\\ 1 & 2b & 4\end{vmatrix}}{b(1-a)}=\frac{4b-2ab-1}{b(1-a)}.$$

当 $b=0$ 时,方程组为

$$\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=4,\\ x_1 \qquad\quad +x_3=3,\\ x_1 \qquad\quad +x_3=4,\end{cases}$$

第二、三方程是矛盾方程,故无解.

当 $a=1$ 时,方程组为

$$\begin{cases} x_1 \quad + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 \quad + bx_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 4, \end{cases}$$

这时系数行列式为零.对其增广矩阵进行初等行变换,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & b-1 & 0 & -1 \\ 0 & 2b-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) $b = \frac{1}{2}$,则 $b - 1 = -\frac{1}{2}$.可得一般解为

$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_3, \\ x_2 = 2, \end{cases}$$

其中 x_3 为自由未知量.原方程组有无穷多解.

(ii) $b \neq \frac{1}{2}$,系数矩阵非零的最高阶子式为 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2b-1 \end{vmatrix} \neq 0$,故秩为2,而其增广矩阵却有三阶非零子式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & b-1 & -1 \\ 0 & 2b-1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0,$$

秩为3.这时方程组无解.

20. 求下列齐次线性方程组的一个基础解系,并用它表出全部解.

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

解 1) 齐次线性方程组在进行方程间的初等变换时常数项始终保持为零.故只要在系数矩阵上进行初等行变换就完全决定了方程组变换后的结果.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得到同解的齐次方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$$

可解得一般解

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 + 5x_5, \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 - 6x_5, \end{cases}$$

其中 x_3, x_4, x_5 是自由未知量,分别取自由未知量为

$1,0,0;\quad 0,1,0;\quad 0,0,1$

代入一般解,得到一个基础解系为

$\boldsymbol{\eta}_1=(1,-2,1,0,0)$, $\boldsymbol{\eta}_2=(1,-2,0,1,0)$, $\boldsymbol{\eta}_3=(5,-6,0,0,1)$.

方程组的全部解为

$$\boldsymbol{\eta}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+k_3\boldsymbol{\eta}_3,\quad k_1,k_2,k_3\text{ 取任意的常数.}$$

下面只列出 2),3),4)各题的答案.

2) $\boldsymbol{\eta}_1=(-1,1,1,0,0)$, $\boldsymbol{\eta}_2=\left(\frac{7}{6},\frac{5}{6},0,\frac{1}{3},1\right)$是一个基础解系.全部解为

$$\boldsymbol{\eta}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2,\quad k_1,k_2\text{ 取任意常数.}$$

3) $\boldsymbol{\eta}_1=\left(\frac{1}{2},1,\frac{2}{3},\frac{13}{12},\frac{1}{4}\right)$是基础解系,全部解为 $\boldsymbol{\eta}=k_1\boldsymbol{\eta}_1$, k_1 取任意常数.

4) $\boldsymbol{\eta}_1=(-1,-1,1,2,0)$及

$\boldsymbol{\eta}_2=\left(\frac{1}{4},0,0,\frac{5}{4},1\right)$为基础解系,全部解为

$$\boldsymbol{\eta}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2,$$

k_1,k_2 取任意常数.

21. 用导出组的基础解系表出第 1 题 1),4),6)中线性方程组的全部解.

解 1) 在前面第 1 题 1)的解答中方程组的增广矩阵用初等行变换变成阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

易知方程组系数矩阵经同样初等行变换就变成上述矩阵的前五列组成的矩阵.这样原方程组与

$$(\mathrm{I}):\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3-4x_4 \qquad\qquad =1, \\ \qquad -x_2-4x_3+3x_4+x_5=-2, \\ \qquad\qquad\qquad x_3-2x_4-x_5=2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 4x_4+2x_5=-4, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0=0 \end{cases}$$

同解，而原方程组的导出组与(Ⅰ)的导出组同解.已解过(Ⅰ)的一般解为

$$\begin{cases} x_1=-\dfrac{1}{2}x_5, \\ x_2=-1-\dfrac{1}{2}x_5, \\ x_3=0, \\ x_4=-1-\dfrac{1}{2}x_5, \end{cases}$$

其中 x_5 为自由未知量.同样可解出(Ⅰ)的导出组的一般解为

$$\begin{cases} x_1=-\dfrac{1}{2}x_5, \\ x_2=-\dfrac{1}{2}x_5, \\ x_3=0, \\ x_4=-\dfrac{1}{2}x_5, \end{cases}$$

恰为(Ⅰ)的一般解中将常数项变成零.令自由未知量 $x_5=0$，可得(Ⅰ)的一个特解 $(0,-1,0,-1,0)=\boldsymbol{\eta}$.

取自由未知量 $x_5=1$ 得(Ⅰ)的导出组的一个基础解系 $\boldsymbol{\eta}_1=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},1\right)$.于是(Ⅰ)的全部解，也是原方程组的全部解为

$\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\eta}+k\boldsymbol{\eta}_1$， k 取全部常数.

4) 由前面第 1 题的答案，4)的方程组的一般解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{17}x_3 - \dfrac{13}{17}x_4, \\ x_2 = \dfrac{19}{17}x_3 - \dfrac{20}{17}x_4, \end{cases}$$

其中 x_3, x_4 为自由未知量. 分别取 x_3, x_4 为 17,0 及 0,17 代入上式得基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1 = (3,19,17,0), \boldsymbol{\eta}_2 = (-13,-20,0,17).$$

而全部解为

$\boldsymbol{\xi} = k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2$, $\quad k_1, k_2$ 取遍全部常数.

6) 前面第 1 题 6) 中算出一般解为

$$(\text{Ⅱ}): \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{6} + \dfrac{5}{6}x_4, \\ x_2 = \dfrac{1}{6} - \dfrac{7}{6}x_4, \\ x_3 = \dfrac{1}{6} + \dfrac{5}{6}x_4, \end{cases}$$

同样可解出导出组的一般解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{5}{6}x_4, \\ x_2 = -\dfrac{7x_4}{6}, \\ x_3 = \dfrac{5}{6}x_4. \end{cases}$$

两者都以 x_4 为自由未知量. (Ⅱ) 的一个特解为 $\boldsymbol{\eta} = \left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{6}, 0\right)$, 它的导出组的一个基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_1 = (5, -7, 5, 6)$. 故原方程组的全部解为

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta} + k_1\boldsymbol{\eta}_1, \quad k_1 \text{ 为任意常数}.$$

22. a, b 取什么值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = a, \\ \qquad x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = b \end{cases}$$

有解？在有解的情形，求一般解.

解 对增广矩阵作初等行变换化为阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & a-3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & b-5 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-2 \end{pmatrix}.$$

易见只有 $a=0$ 且 $b=2$ 时原方程组才有解.由它的同解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ \qquad x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3, \end{cases}$$

解出它的一般解为

$$\begin{cases} x_1 = -2 + x_3 + x_4 + 5x_5, \\ x_2 = 3 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5. \end{cases}$$

它有一个特解 $\boldsymbol{\eta} = (-2,3,0,0,0)$.它的导出组的基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_1 = (-1,-2,1,0,0)$，$\boldsymbol{\eta}_2 = (-1,-2,0,1,0)$，$\boldsymbol{\eta}_3 = (5,-6,0,0,1)$.原方程组的全部解为

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta} + k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2,k_1,k_2\text{ 取全部常数}.$$

23. 设 $x_1 - x_2 = a_1$，$x_2 - x_3 = a_2$，$x_3 - x_4 = a_3$，$x_4 - x_5 = a_4$，$x_5 - x_1 = a_5$.证明：这方程组有解的充分必要条件为

$$\sum_{i=1}^{5} a_i = 0.$$

在有解的情形,求出它的一般解.

证明 对增广矩阵作初等行变换

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & a_1+a_5 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & a_1+a_2+a_5 \end{pmatrix}$$

$$\to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 \end{pmatrix}.$$

即得方程组有解的充要条件是 $0 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$.

有解时,其一般解为

$$\begin{cases} x_1 = x_5 + \sum\limits_{i=1}^{4} a_i, \\ x_2 = x_5 + \sum\limits_{i=2}^{4} a_i, \\ x_3 = x_5 + \sum\limits_{i=3}^{4} a_i, \\ x_4 = x_5 + a_4, \end{cases}$$

其中 x_5 为自由未知量. 令 $x_5 = 0$,得一个特解 $\boldsymbol{\eta} = (a_1 + a_2 +$

$a_3+a_4, a_2+a_3+a_4, a_3+a_4, a_4, 0)$. 它的导出组的一般解为

$$\begin{cases} x_1=x_5, \\ x_2=x_5, \\ x_3=x_5, \\ x_4=x_5, \end{cases}$$

其中 x_5 为自由未知量、令 $x_5=1$,得它的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1=(1,1,1,1,1)$$

故原方程组的全部解为

$$\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\eta}+k_1\boldsymbol{\eta}_1, \qquad k_1 \text{ 为任意常数}.$$

24. 证明:与基础解系等价的线性无关向量组也是基础解系.

提示 利用齐次线性方程组的性质及基础解系的定义.

证明 令 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_k$ 是某齐次线性方程组的基础解系. $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k$ 是与它等价的线性无关组.

(i) $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_k$ 与 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k$ 等价,故每个 $\boldsymbol{\xi}_i$ 是 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_k$ 的线性组合. 又 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_k$ 皆为某齐次方程组的解,它们的线性组合也是该方程组的解,故每个 $\boldsymbol{\xi}_i$ 皆为该齐次方程组的解.

(ii) $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k$ 是线性无关的.

(iii) 任一解是 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_k$ 的线性组合, $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_k$ 又能由 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k$ 线性表出. 由线性表出的传递性,任一解是 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k$ 的线性组合.

由(i),(ii),(iii)知 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k$ 是该齐次方程组的基础解系.

25. 设齐次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0 \end{cases}$$

的系数矩阵的秩为 r,证明:方程组的任意 $n-r$ 个线性无关的解

都是它的一基础解系.

提示 证明任意 $n-r$ 个线性无关解与基础解系等价.回忆一下可利用前面的哪一道习题?

证明 取方程组的任一个基础解系 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$. 又设给定的 $n-r$ 个无关解为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$. 把它们合成一个向量组 $\xi_1,\cdots,\xi_{n-r},\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$. 由于 ξ_i 是解,因而每个 ξ_i 是 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 的线性组合,故 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 是新向量组的极大线性无关组,新向量组的秩为 $n-r$. 由习题 7 知,$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 也是极大线性无关组.它是与 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 等价的无关组,由习题 24,也是基础解系.

26. 证明:如果 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 是一线性方程组的解,那么 $u_1\boldsymbol{\eta}_1+u_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+u_t\boldsymbol{\eta}_t$(其中 $u_1+u_2+\cdots+u_t=1$)也是一个解.

证明 设方程组为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i,\ i=1,2,\cdots,s.$$

$$\boldsymbol{\eta}_k=(l_{k1},l_{k2},\cdots,l_{kn}),\ k=1,2,\cdots,t.$$

它满足 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}l_{kj}=b_i,\quad i=1,2,\cdots,s;k=1,2,\cdots,t.$

则 $u_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+u_t\boldsymbol{\eta}_t=\left(\sum_{k=1}^{t}u_kl_{k1},\sum_{k=1}^{t}u_kl_{k2},\cdots,\sum_{k=1}^{t}u_kl_{kn}\right)$. 代入第 i 个方程

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{t}u_kl_{kj}\right)=\sum_{k=1}^{t}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}u_kl_{kj}=\sum_{k=1}^{t}u_k\sum_{j=1}^{n}a_{ij}l_{kj}$$
$$=\sum_{k=1}^{t}u_kb_i=b_i.$$

故 $u_1\boldsymbol{\eta}_1+u_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+u_t\boldsymbol{\eta}_t$ 是解.

27. 多项式 $f(x)=2x^3-3x^2+\lambda x+3,\quad g(x)=x^3+\lambda x+1$ 在 λ 取何值时有公共根?

解 计算结式

$$R(f,g)=\begin{vmatrix}2 & -3 & \lambda & 3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -3 & \lambda & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -3 & \lambda & 3\\ 1 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \lambda & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \lambda & 1\end{vmatrix}.$$

将它的第 3,4,5,6 列各减去它们前面的列的适当倍数,则可变为

$$R(f,g)=\begin{vmatrix}2 & -3 & -\lambda & 1+3\lambda & \lambda^2+3 & \lambda\\ 0 & 2 & -3 & -\lambda & 1+3\lambda & 3\\ 0 & 0 & 2 & -3 & -\lambda & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+3\lambda & \lambda^2+3 & \lambda\\ -\lambda & 1+3\lambda & 3\\ -3 & -\lambda & 1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+2)(2\lambda^2+14\lambda-13)$$

$$=(\lambda+2)\left(\lambda+\frac{1}{2}(7+\sqrt{75})\right)\left(\lambda+\frac{1}{2}(7-\sqrt{75})\right),$$

故当 $\lambda=-2,-\frac{1}{2}(7+\sqrt{75}),-\frac{1}{2}(7-\sqrt{75})$时,$f(x),g(x)$有公共根.

28. 解下列联立方程:

1) $\begin{cases}5y^2-6xy+5x^2-16=0,\\ y^2-xy+2x^2-y-x-4=0;\end{cases}$

2) $\begin{cases}x^2+y^2+4x-2y+3=0,\\ x^2+4xy-y^2+10y-9=0;\end{cases}$

3) $\begin{cases}y^2+(x-4)y+x^2-2x+3=0,\\ y^3-5y^2+(x+7)y+x^3-x^2-5x-3=0.\end{cases}$

解 1) 令 $f(x,y)=5y^2-6xy+5x^2-16=5y^2-6xy+(5x^2-16)$,

$$g(x,y)=y^2-xy+2x^2-y-x-4$$

$$= y^2-(x+1)y+(2x^2-x-4),$$

于是

$$R_y(f,g)=\begin{vmatrix} 5 & -6x & 5x^2-16 & 0 \\ 0 & 5 & -6x & 5x^2-16 \\ 1 & -x-1 & 2x^2-x-4 & 0 \\ 0 & 1 & -x-1 & 2x^2-x-4 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & -x+5 & -5x^2+5x+4 & 0 \\ 0 & 5 & -6x & 5x^2-16 \\ 1 & -x-1 & 2x^2-x-4 & 0 \\ 0 & 1 & -x-1 & 2x^2-x-4 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -x+5 & -5x^2+5x+4 & 0 \\ 5 & -6x & 5x^2-16 \\ 1 & -x-1 & 2x^2-x-4 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -x+5 & -5x^2+5x+4 & 0 \\ 0 & -x+5 & -5x^2+5x+4 \\ 1 & -x-1 & 2x^2-x-4 \end{vmatrix}$$

$$=32(x^4-3x^3+x^2+3x-2)=32(x+1)(x-1)^2(x-2).$$

$R_y(f,g)$有根 $x=-1,1$(二重)及 2. 分别代入原方程,

当 $x=-1$ 时,为

$$\begin{cases} 5y^2+6y-11=0, \\ y^2-1=0. \end{cases}$$

解出,得 $y=1$.

当 $x=1$ 时,为

$$\begin{cases} 5y^2-6y-11=0, \\ y^2-2y-3=0. \end{cases}$$

解出,得 $y=-1$.

当 $x=2$ 时,为

$$\begin{cases} 5y^2 - 12y + 4 = 0, \\ y^2 - 3y + 2 = 0. \end{cases}$$

解出，得 $y = 2$. 故原方程组有三组解，

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 2, \\ y_3 = 2. \end{cases}$$

2）与 1）同样解法，计算出

$$R_y(f, g) = 4(x+1)(x+3)\left(x + \frac{10+3\sqrt{5}}{5}\right)\left(x + \frac{10-3\sqrt{5}}{5}\right).$$

方程组有四组解

$$\begin{cases} x_1 = -1, \\ y_1 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -3, \\ y_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -\dfrac{10+3\sqrt{5}}{5}, \\ y_3 = \dfrac{5-\sqrt{5}}{5}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = \dfrac{10-3\sqrt{5}}{5}, \\ y_4 = \dfrac{5+\sqrt{5}}{5}. \end{cases}$$

3）计算出

$$R_y(f, g) = 4x^2(x+1)^2(x-2)^2.$$

方程组有 6 组解

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 0, \\ y_2 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -1, \\ y_3 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -1, \\ y_4 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_5 = 2, \\ y_5 = 1+\sqrt{2}\mathrm{i}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_6 = 2, \\ y_6 = 1-\sqrt{2}\mathrm{i}. \end{cases}$$

四、补充题、提示与解答

1. 假设向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以经向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出，证明：

表示法是唯一的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

解 设 $\boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_r\boldsymbol{\alpha}_r$.

必要性. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关,则有不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0}$. 于是

$\boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_r\boldsymbol{\alpha}_r+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=(l_1+k_1)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(l_r+k_r)\boldsymbol{\alpha}_r$. 因至少有一个 k_i 不为零,故至少有一个 $l_i+k_i\neq l_i$ 这样 $\boldsymbol{\beta}$ 经 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出就有两种表示法,与题设矛盾. 故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

充分性. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关. 若 $\boldsymbol{\beta}$ 有两种方法表成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的线性组合,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}&=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_r\boldsymbol{\alpha}_r\\&=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r.\end{aligned}$$

则 $\mathbf{0}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+l_r\boldsymbol{\alpha}_r-(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r)=(l_1-k_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(l_2-k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(l_r-k_r)\boldsymbol{\alpha}_r$. 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关,则 $l_1-k_1=0,l_2-k_2=0,\cdots,l_r-k_r=0$. 即有 $l_1=k_1,l_2=k_2,\cdots,l_r=k_r$. 这证明了表示法的唯一性.

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是一组线性无关的向量,

$$\boldsymbol{\beta}_i=\sum_{j=1}^{r}a_{ij}\boldsymbol{\alpha}_j,\ i=1,2,\cdots,r.$$

证明:$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1r}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2r}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{r1}&a_{r2}&\cdots&a_{rr}\end{vmatrix}\neq0.$$

证明 对任何数 $l_1,l_2,\cdots,l_r$ 都有

$$\boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+l_r\boldsymbol{\beta}_r=\sum_{j=1}^{r}\Big(\sum_{i=1}^{r}a_{ij}l_i\Big)\boldsymbol{\alpha}_j.$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，

$$\boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+l_r\boldsymbol{\beta}_r=\mathbf{0}\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{r}a_{ij}l_i=0,j=1,2,\cdots,r.$$

于是 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关$\Leftrightarrow$只有 $l_1=\cdots=l_r=0$ 才能使 $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$ $\Leftrightarrow$齐次方程组 $\sum\limits_{i=1}^{r}a_{ij}l_i=0,j=1,2,\cdots,r$ 只有零解. 由原书定理 5 推论 2 的逆否形式，此齐次方程组只有零解的充要条件为 $|a_{ij}|\neq 0$. 由此得到 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关的充要条件是 $|a_{ij}|\neq 0$.

3. 证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$(其中 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\mathbf{0}$)线性相关的充分必要条件是至少有一 $\boldsymbol{\alpha}_i(1<i\leqslant s)$可被 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$线性表出.

证明 充分性. 设有 $\boldsymbol{\alpha}_i(1<i\leqslant s)$可被 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$线性表出，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_i$ 线性相关. 它是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_i,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的部分向量组. 部分组已经相关，则整个向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_i,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

必要性. 由题设 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关，而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 相关. 设 $1<r\leqslant s$ 是最小的数，使 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1},\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关. 由于 r 的最小性，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1}$线性无关. 由习题 3 知，$\boldsymbol{\alpha}_r$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1}$的线性组合，$1<r\leqslant s$.

4. 已知两向量组有相同的秩，且其中之一组可被另一组线性表出. 证明：这两个向量组等价.

提示 用这两个向量组的极大线性无关组来代替这两个向量组，已知条件仍成立. 再用习题 7 的结论来证明本题的结论.

证明 设向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 可经 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出，两者有相同的秩. 它们的极大无关组分别是 $\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_r}$ 及 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}$. 由 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 与 $\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_r}$ 可互相线性表出，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 互相可线性表出，故 $\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_r}$ 可经 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 线性表出. 于是合成的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}$，

$\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_r}$ 具有极大线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$，故其秩为 r. 由习题 7，$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r},\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_r}$ 中任意 r 个无关的向量都是极大线性无关组，特别地 $\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_r}$ 也是. 故 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_r}$ 作为同一向量组的两个极大线性无关组必互相等价. 它们分别是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 及 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 的极大线性互关组，以及 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$；$\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_r}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 又分别等价. 由等价的传递性知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 等价.

5. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 r，在其中任取 m 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_m}$，证明：此向量组的秩 $\geqslant r+m-s$.

提示 取 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_m}$ 的极大线性无关组，扩充成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的极大线性无关组. 扩充的向量全来自 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_m}$ 以外的元素. 由此来分析元素数目之间的关系.

证明 取 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_m}$ 的一个极大线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_t}$，把它扩充成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个极大线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_t},\boldsymbol{\alpha}_{j_{t+1}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}$. 因 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_m}$ 中任一元皆是 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_t}$ 的线性组合，而 $\boldsymbol{\alpha}_{j_{t+1}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 皆不是. 故后者皆来自 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中除 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_m}$ 以外的元素. 而 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_m}$ 以外的元素共 $s-m$ 个，故 $r-t\leqslant s-m$. 移项后得 $t\geqslant r+m-s$.

6. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$；$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$；$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 的秩分别为 r_1,r_2,r_3，证明：

$$\max(r_1,r_2)\leqslant r_3\leqslant r_1+r_2.$$

提示 前两个向量组取极大线性无关组，再合成新的向量组. 分析它的极大线性无关组的向量数目.

证明 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$；$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 的极大线性无关组分别为

$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_{r_1}}$ 及 $\boldsymbol{\beta}_{j_1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_{r_2}}$. 合成向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_{r_1}},\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_{r_2}}$. 易知它与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 等价,具有秩 r_3. 由于 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_{r_1}},\boldsymbol{\beta}_{j_1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_{r_2}}$ 中任一无关的向量部分组中向量数小于等于极大线性无关组的向量数,故 r_1,r_2 皆小于等于 r_3. 又极大线性无关组向量数显然小于等于原向量组中向量数,故 $r_3\leqslant r_1+r_2$. 因此

$$\max(r_1,r_2)\leqslant r_3\leqslant r_1+r_2.$$

7. 线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n-1,1}x_1+a_{n-1,2}x_2+\cdots+a_{n-1,n}x_n=0\end{cases}$$

的系数矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n-1,1}&a_{n-1,2}&\cdots&a_{n-1,n}\end{pmatrix}.$$

设 M_i 是矩阵中划去第 i 列剩下的 $(n-1)\times(n-1)$ 矩阵的行列式.

1) 证明:$(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n)$ 是方程组的一个解;

2) 如果 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $n-1$, 那么方程组的解全是 $(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n)$ 的倍数.

证明 1) 考虑行列式

$$A_i=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n-1,1}&a_{n-1,2}&\cdots&a_{n-1,n}\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\end{vmatrix}=0,\quad i=1,2,\cdots,n-1.$$

对最后一行展开，就是

$$a_{i1}M_1-a_{i2}M_2+\cdots+(-1)^{n-1}a_{in}M_n=0,\ i=1,2,\cdots,n-1.$$

即$(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n)$是原方程组的一个解.

2) 若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $n-1$，则方程组基础解系中只有一个解. 任一解皆为它的倍数. 取定一个非零解，它也是基础解的倍数，且构成基础解系，于是任一解是该非零解的倍数. 现在 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $n-1$，必有一个 $n-1$ 阶子式$\neq 0$，即有某 $M_i\neq 0$. 于是$(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n)$是非零解，故任一解皆是它的倍数.

8. 设 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$，$i=1,2,\cdots,s$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$

证明：如果线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0\end{cases}$$

的解全是方程 $b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0$ 的解，那么 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出.

证明 原方程组与

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0,\\ b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0\end{cases}$$

同解，故它们两者的系数矩阵有相同的秩(因为基础解系中解的个数一样). 于是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 有相同的秩. 由习题 16，两者互相等价. 故 $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的线性组合.

9. 设 $\boldsymbol{\eta}_0$ 是线性方程组的一个解，$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 是它的导出

方程组的一个基础解系,令

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\boldsymbol{\eta}_0,\boldsymbol{\gamma}_2=\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_0,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{t+1}=\boldsymbol{\eta}_t+\boldsymbol{\eta}_0.$$

证明:线性方程组的任一个解 $\boldsymbol{\gamma}$,都可表成

$$\boldsymbol{\gamma}=u_1\boldsymbol{\gamma}_1+u_2\boldsymbol{\gamma}_2+\cdots+u_{t+1}\boldsymbol{\gamma}_{t+1},$$

其中 $u_1+u_2+\cdots+u_{t+1}=1$.

证明 线性方程组的任一解 $\boldsymbol{\eta}$ 可表成 $\boldsymbol{\eta}_0+u_2\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+u_{t+1}\boldsymbol{\eta}_t$. 令 $u_1=1-u_2-u_3-\cdots-u_{t+1}$. 则 $\boldsymbol{\eta}=(u_1+u_2+\cdots+u_{t+1})\boldsymbol{\eta}_0+u_2\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+u_{t+1}\boldsymbol{\eta}_t=u_1\boldsymbol{\eta}_0+u_2(\boldsymbol{\eta}_0+\boldsymbol{\eta}_1)+\cdots+u_{t+1}(\boldsymbol{\eta}_0+\boldsymbol{\eta}_t)=u_1\boldsymbol{\gamma}_1+u_2\boldsymbol{\gamma}_2+\cdots+u_{t+1}\boldsymbol{\gamma}_{t+1}$.

10. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

为一实数域上的矩阵. 证明:

1) 如果 $|a_{ii}|>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|,i=1,2,\cdots,n$,那么 $|\boldsymbol{A}|\neq0$;

2) 如果 $a_{ii}>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|,i=1,2,\cdots,n$,那么 $|\boldsymbol{A}|>0$.

提示 只要证明以 $\boldsymbol{A}$ 为系数矩阵的齐次线性方程组只有零解. 这等价于对任一组不全为零的实数组 $c_1,c_2,\cdots,c_n$,证明必有某 i 使 $a_{i1}c_1+a_{i2}c_2+\cdots+a_{in}c_n\neq0$.

证明 1) 用定理5推论的逆否形式,只要证明以 $\boldsymbol{A}$ 为系数矩阵的齐次线性方程组只有零解. 这等价于对任一组不全为零的实数组 $c_1,c_2,\cdots,c_n$,证明必有某 i 使 $a_{i1}c_1+a_{i2}c_2+\cdots+a_{in}c_n\neq0$.

由于 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 不全为零,必有某 $c_i\neq0$,而 $|c_i|\geqslant|c_j|$, $j=1,2,\cdots,n$. 于是

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j\right| \geqslant |a_{ii}c_i| - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}c_j|$$

$$\geqslant |a_{ii}||c_i| - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}||c_i|$$

$$= |c_i|\left(|a_{ii}| - \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\right) > 0,$$

故 $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}c_j \neq 0$,即以 $\boldsymbol{A}$ 为系数矩阵的齐次方程组只有零解.即得 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

2) 应用数用归纳法. $n=1$, $|\boldsymbol{A}|=a_{11}>0$. 设命题对 $n-1$ 已成立.取 $|\boldsymbol{A}|$ 的第一行的 n 个代数余子式 $A_{11}, A_{12}, \cdots, A_{1n}$. 由原书第二章定理 3,有

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = |\boldsymbol{A}|.$$

$a_{i1}A_{11} + a_{i2}A_{12} + \cdots + a_{in}A_{1n} = 0, i = 2,3,\cdots,n$. 由 1) 知 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$,故 $A_{11}, A_{12}, \cdots, A_{1n}$ 不全为零. 我们欲证 $A_{11}, \cdots, A_{1n}$ 中绝对值最大者为 A_{11},用反证法. 设有 $i\neq 1$, $|A_{1i}| \geqslant |A_{1j}|$, $j=1,2,\cdots,n$,这时必有 $|A_{1i}|>0$.

$|a_{i1}A_{11} + \cdots + a_{ii}A_{1i} + \cdots + a_{in}A_{1n}| \geqslant |a_{ii}||A_{1i}| - \sum\limits_{j\neq i} |a_{ij}||A_{1j}| \geqslant |a_{ii}||A_{1i}| - \sum\limits_{j\neq i} |a_{ij}||A_{1i}| = |A_{1i}| \left(a_{ii} - \sum\limits_{j\neq i} |a_{ij}|\right) > 0.$

因 $i\neq 1$,前面式子等于零,矛盾. 故 $|A_{11}| \geqslant |A_{1j}|$, $j=1,2,\cdots,n$.

又由归纳假设有 $A_{11}>0$,故 $a_{11}A_{11}>0$. 于是

$$|\boldsymbol{A}| = a_{11}A_{11} + \sum_{i=2}^{n} a_{1i}A_{1i} \geqslant a_{11}A_{11} - \sum_{i=2}^{n} |a_{1i}||A_{1i}|$$

$$\geqslant \left(a_{11} - \sum_{i=2}^{n} |a_{1i}|\right)A_{11} > 0.$$

得证.

11. 求出通过点 $M_1(1,0,0)$，$M_2(1,1,0)$，$M_3(1,1,1)$，$M_4(0,1,1)$的球面的方程.

解 设球面的中心为(x_0,y_0,z_0)，半径为 r，其方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2.$$

将四个点代入，得

$$\begin{cases}(1-x_0)^2+y_0^2+z_0^2=r^2, & (1)\\ (1-x_0)^2+(1-y_0)^2+z_0^2=r^2, & (2)\\ (1-x_0)^2+(1-y_0)^2+(1-z_0)^2=r^2, & (3)\\ x_0^2+(1-y_0)^2+(1-z_0)^2=r^2 & (4)\end{cases}$$

易解出， $x_0=y_0=z_0=\dfrac{1}{2}$，而 $r^2=\dfrac{3}{4}$. 故此球面方程为

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}.$$

12. 求出通过点 $M_1(0,0)$，$M_2(1,0)$，$M_3(2,1)$，$M_4(1,1)$，$M_5(1,4)$的二次曲线的方程.

解 设此二次曲线方程为

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Ex+Fy+D=0.$$

把 5 个点分别代入，得

$$\begin{aligned} D &=0,\\ A\cdot1^2+0+0+E\cdot1+0+D &=0,\\ A\cdot2^2+B\cdot2\cdot1+C\cdot1^2+E\cdot2+F\cdot1+D &=0,\\ A\cdot1^2+B\cdot1\cdot1+C\cdot1^2+E\cdot1+F\cdot1+D &=0,\\ A\cdot1^2+B\cdot1\cdot4+C\cdot4^2+E\cdot1+F\cdot4+D &=0.\end{aligned}$$

易解出

$$\begin{cases}B=-2A,\\ C=0,\\ E=-A,\\ F=2A,\\ D=0.\end{cases}$$

此二次曲线的方程为

$$x^2-2xy-x+2y=0.$$

13. 求下列曲线的直角坐标方程:

1) $x=t^2-t+1, y=2t^2+t-3$;

2) $x=\dfrac{2t+1}{t^2+1}, y=\dfrac{t^2+2t-1}{t^2+1}$.

解 1) 把方程写成

$$\begin{cases} f(t)=t^2-t+(1-x)=0, \\ g(t)=2t^2+t-(3+y)=0, \end{cases}$$

(x,y)是由某 t_0 代入上述方程组算出的解当且仅当这对(x,y)使上述联立方程组有某公共根 t_0,也当且仅当 x,y 满足下列结式

$$R_t(f,g)=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1-x & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1-x \\ 2 & 1 & -3-y & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3-y \end{vmatrix}$$

$$=4x^2-4xy+y^2-23x+7y+19=0,$$

这就是所求曲线满足的方程.

2) 把参数方程写成下列联立方程组

$$\begin{cases} f(t)=xt^2-2t+(x-1)=0, \\ g(t)=(y-1)t^2-2t+(y+1)=0. \end{cases}$$

与 1) 中所述的同样理由,曲线上的点(x,y)所满足的方程为

$$R_t(f,g)=\begin{vmatrix} x & -2 & x-1 & 0 \\ 0 & x & -2 & (x-1) \\ y-1 & -2 & (y+1) & 0 \\ 0 & y-1 & -2 & y+1 \end{vmatrix}$$

$$=8x^2-4xy+5y^2-8x+2y-7=0.$$

14. 求结式:

1) $\dfrac{x^5-1}{x-1}$与$\dfrac{x^7-1}{x-1}$;

2) x^n+x+1 与 x^2-3x+2;

3) x^n+1 与$(x-1)^n$.

解 1)
$$f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1,$$
$$g(x)=x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1,$$

$$R(f,g)=\begin{vmatrix}
1&1&1&1&1&0&0&0&0&0\\
0&1&1&1&1&1&0&0&0&0\\
\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\
0&0&0&0&0&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&0&0&0\\
0&1&1&1&1&1&1&1&0&0\\
0&0&1&1&1&1&1&1&1&0\\
0&0&0&1&1&1&1&1&1&1
\end{vmatrix}
\begin{matrix}\left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\}6\text{ 行}\\ \left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\}4\text{ 行}\end{matrix}=1$$

$$2)\ R(f,g)=\begin{vmatrix}
1&-3&2&0&\cdots&0&0&0&0\\
0&1&-3&2&\cdots&0&0&0&0\\
\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\
0&0&0&0&\cdots&0&1&-3&2\\
1&0&0&0&\cdots&0&1&1&0\\
0&1&0&0&\cdots&0&0&1&1
\end{vmatrix}
\begin{matrix}\left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\}n\\ \left.\begin{matrix}\\ \\ \end{matrix}\right\}2\end{matrix}$$

从第二列开始,把第一列的 2 倍加到第二列,再把所得行列式的第二列的 2 倍加到第三列,…一直作到最后一列,得到

$$R(f,g)=\begin{vmatrix}
1&-1&0&0&\cdots&0&0&0&0\\
0&1&-1&0&\cdots&0&0&0&0\\
\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\
0&0&0&0&\cdots&1&-1&0&0\\
0&0&0&0&\cdots&0&1&-1&0\\
1&2&2^2&2^3&\cdots&2^{n-2}&2^{n-1}+1&2^n+3&2^{n+1}+6\\
0&1&2&2^2&\cdots&2^{n-3}&2^{n-2}&2^{n-1}+1&2^n+3
\end{vmatrix}$$

把最后一行的(-2)倍加到倒数第二行上,得到

$$R(f,g)=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-3} & 2^{n-2} & 2^{n-1}+1 & 2^n+3\end{vmatrix}$$

$$=(2^n+3)\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

把每一列都加到最后一列，就得到结果

$$R(f,g)=3(2^n+3).$$

3) 对 n 作归纳法，来证明 $R((x-1)^n,x^n+1)=2^n$.
当 $n=1$ 时有下式，因此命题成立，

$$R(x-1,x+1)=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2.$$

假设 $n-1$ 时结论已成立，即

$R((x-1)^{n-1},x^{n-1}+1)=$

$$\begin{vmatrix}1 & -C_{n-1}^1 & \cdots & (-1)^{n-2}C_{n-1}^{n-2} & (-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1} & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -C_{n-1}^1 & \cdots & (-1)^{n-2}C_{n-1}^{n-2} & (-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1}\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$=2^{n-1}$.

考查 n 时,

$R((x-1)^n,x^n+1)=$

$$\begin{vmatrix}
1 & -C_n^1 & C_n^2 & \cdots & (-1)^{n-1}C_n^{n-1} & (-1)^nC_n^n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -C_n^1 & C_n^2 & \cdots & (-1)^{n-1}C_n^{n-1} & (-1)^nC_n^n \\
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{vmatrix}
\begin{matrix}\left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \end{matrix}\right\}n\text{ 行} \\ \left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \end{matrix}\right\}n\text{ 行}\end{matrix}$$

回忆,组合数有公式 $C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}$ 或 $-C_{n-1}^k=C_{n-1}^{k-1}-C_n^k$(当 $k>n-1$ 时为零).在上面行列式中,将第一列加到第二列上,再将得到的行列式的第二列加到第三列上,…,依次往后进行直到倒数第二列加到最后一列上,得到的结果是

$R((x-1)^n,x^n+1)=$

$$\begin{vmatrix}
1 & -C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \cdots & (-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \cdots & (-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1} & 0 \\
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\
0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 2 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2
\end{vmatrix}$$

再对后 n 行进行变换,从第 $n+1$ 行开始,每一行乘以 -1,加到前一行上,得到

$R((x-1)^n,x^n+1)=$

$$\begin{vmatrix}
1 & -C_{n-1}^{1} & C_{n-1}^{2} & \cdots & (-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -C_{n-1}^{1} & C_{n-1}^{2} & \cdots & (-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1} & 0 \\
1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 2
\end{vmatrix}$$

按最后一列展开,再用归纳假设,即得

$$R((x-1)^n, x^n+1) = 2R((x-1)^{n-1}, x^{n-1}+1) = 2\cdot 2^{n-1} = 2^n.$$

完成了归纳法.

第四章　矩　　阵

一、内容提要

1. 矩阵的概念与运算

一些背景知识

加法、数量乘积及其运算性质(类比 n 维向量空间的基本运算性质).

2. 矩阵的乘积及其运算性质

3. 方阵的方幂及性质

4. 矩阵的转置

转置参与运算时的性质

5. 逆矩阵

定义

方阵有逆的充分必要条件、伴随矩阵,逆矩阵的公式、关于逆矩阵的性质

6. 矩阵的初等变换

矩阵的等价及其标准形

$n\times m$ 矩阵等价的充分必要条件

初等变换与初等矩阵、用初等变换求逆矩阵

7. 矩阵的分块运算

分块运算

分块的初等变换与分块的初等矩阵

分块技术及应用(求行列式,求逆,求秩)

8. 矩阵乘积的秩的不等式

9. 方阵乘积的行列式等于方阵行列式的乘积

10. 一些特殊矩阵

零矩阵,单位阵、对角阵、准对角阵、上(下)三角阵、数量矩阵、对称矩阵及反对称矩阵、初等矩阵.

二、学习指导

代数课程的一个任务就是教会读者运用许多运算系统.中小学时我们学会了数字与代数式的运算.本课程前面介绍过多项式和 n 元向量两种运算对象,现在介绍的矩阵与它们一起组成高等代数中的主要运算对象.学会对它们的运算,掌握它们的运算性质和运算技巧是本课程的主要任务之一.

矩阵是从多个变量间的线性关系中抽象出来的.线性关系是最简单、也是最基本的数量关系,是复杂的数量关系的简化.因此矩阵在数学中,物理学中以及其他工程技术、科学中,在经济学及其他社会科学中都有广泛应用,是一个基本工具.

矩阵及运算的应用有以下几个方面:将某些数学问题表成矩阵的关系式;求矩阵的秩、行列式和逆;在矩阵上进行特定的变换(如初等变换或以后课程中出现的合同变换、相似变换等)使其化简,以便解决有关的问题.

在以上应用中用初等变换以及分块初等变换化矩阵为分块上三角形或准对角形是重要的方法,应掌握有关技巧.

还要提醒,矩阵与线性方程组,与向量组有联系.这里着重指出两点:

(1) n 个未知数的齐次线性方程的系数矩阵的秩 $= n -$ 它的基础解系中解的个数;

(2) 用一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘矩阵 $\boldsymbol{B}$,其乘积的各列是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量的线性组合,乘积的各行是 $\boldsymbol{B}$ 的行向量的线性组合,这些性质在

讨论矩阵问题时常会用到.

下面作一些内容补充.

1. 矩阵乘法背景的补充

考虑三维几何空间中绕一个轴的旋转变换,或沿某方向平移一个距离的变换.这实际上是三维空间作为点的集合到自身的一个对应或叫这集合到自身的映射.一般地,三维空间到自身的任意一个映射就称为三维空间的一个变换.常用花写字母 $\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C},\cdots,\mathscr{T},\cdots$ 等表示变换.设 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 是三维空间 E 中的一个变换,即是指下列映射(对应)

$$\begin{aligned} E &\xrightarrow{\mathscr{A}} E, \\ \mathbf{Z} &\longmapsto \mathscr{A}\mathbf{Z} \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} E &\xrightarrow{\mathscr{B}} E, \\ \mathbf{Z} &\longmapsto \mathscr{B}\mathbf{Z}. \end{aligned}$$

E 中的两个变换可以合成,即对任一点 $\mathbf{Z}$ 先进行变换 $\mathscr{B}$,然后再进行变换 $\mathscr{A}$,得到结果 $\mathscr{A}(\mathscr{B}\mathbf{Z})$,这样的合成变换称为变换 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 的乘积,记这乘积变换为 $\mathscr{A}\mathscr{B}$. 即乘积变换 $\mathscr{A}\mathscr{B}$ 为映射

$$\begin{aligned} E &\xrightarrow{\mathscr{A}\mathscr{B}} E, \\ \mathbf{Z} &\longmapsto (\mathscr{A}\mathscr{B})\mathbf{Z} = \mathscr{A}(\mathscr{B}\mathbf{Z}). \end{aligned}$$

强调一下,这个等式的意义是:$\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 的乘积变换 $\mathscr{A}\mathscr{B}$ 是先作变换 $\mathscr{B}$ 后作变换 $\mathscr{A}$ 的合成变换.

现在在 E 中给定一个坐标系 $Oxyz$(可以是任意仿射坐标系).任意一个点 $\mathbf{Z}$ 可用其坐标表示,

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

考虑 E 中下列两个变换 $\mathscr{A},\mathscr{B}$,令

$$\mathscr{A}\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad \mathscr{B}\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix},$$

它们能用下列公式

$$\mathscr{A}\boldsymbol{Z}=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\boldsymbol{AZ},\quad \mathscr{B}\boldsymbol{Z}=\begin{pmatrix}x''\\y''\\z''\end{pmatrix}=\boldsymbol{BZ}$$

来决定，其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为已知矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}.$$

计算可知

$$(\mathscr{A}\mathscr{B})\boldsymbol{Z}=\mathscr{A}(\mathscr{B}\boldsymbol{Z})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BZ})=\boldsymbol{CZ},$$

其中

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31},a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32},a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31},a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32},a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33}\\a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31},a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32},a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33}\end{pmatrix}.$$

由于它是决定乘积变换 $\mathscr{A}\mathscr{B}$ 的矩阵，自然地称 $\boldsymbol{C}$ 为变换 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的乘积.这是矩阵乘积的复杂定义的背景来源之一.

2. 用矩阵写法描述方程组求解问题

把线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\tag{1}$$

写成矩阵形式

$$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{Z}_{n\times 1}=\boldsymbol{B}_{m\times 1},$$

其中

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{Z}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}.$$

线性方程组(1)的增广矩阵为

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})_{m\times(n+1)}.$$

引理 对 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 进行若干初等行变换和对 $\boldsymbol{A}$ 进行若干互换两列的初等变换后可将其变成下列形状

$$\tilde{\boldsymbol{C}}=(\boldsymbol{C}_{m\times n},\boldsymbol{D}_{m\times 1}),$$

其中 $\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 形如

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{C}_2\\ \boldsymbol{O}_{m-r,r} & \boldsymbol{O}_{m-r,n-r}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & c_{1,r+2} & \cdots & c_{1n}\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & c_{2,r+2} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & c_{r,r+2} & \cdots & c_{r,n}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}d_1\\\vdots\\d_r\\d_{r+1}\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}. \tag{2}$$

证明 方程组(1)可用初等变换化为阶梯形,再将未知数重新

排序,得到的阶梯形方程组如下

$$
\begin{cases}
c'_{11}x_{i_1}+c'_{12}x_{i_2}+\cdots+c'_{1r}x_{i_r}+c'_{1,r+1}x_{i_{r+1}}+\cdots+c'_{1n}x_{i_n}=d'_1,\\
c'_{22}x_{i_2}+\cdots+c'_{2r}x_{i_r}+c'_{2,r+1}x_{i_{r+1}}+\cdots+c'_{2n}x_{i_n}=d'_2,\\
\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\
c'_{rr}x_{i_r}+c'_{r,r+1}x_{i_{r+1}}+\cdots+c'_{rn}x_{i_n}=d'_r,\\
0=d'_{r+1},\\
0=0,\\
\vdots\\
0=0,
\end{cases}
\tag{3}
$$

其中 $c'_{11}c'_{22}\cdots c'_{rr}\neq 0$.将前 r 个方程各乘以适当倍数,可将第一项系数全变为1,不妨就设 $c'_{11}=c'_{22}=\cdots=c'_{rr}=1$.

以上是用初等变换将 $\bar{A}$ 的左上角的 $r\times r$ 小块从上到下化成三角形,且对角元素变成1.记新方程组(3)的增广矩阵为 $\bar{C}_1$.

再进一步,将 $\bar{C}_1$ 的第一行减去第 r 行的 c'_{1r} 倍,减去第 $r-1$ 行的 $c'_{1,r-1}$ 倍,…,减去第二行的 c'_{12} 倍;将 $\bar{C}_1$ 的第二行依次减去第2行的 c'_{2r} 倍,第 $r-1$ 行的 $c'_{2,r-1}$ 倍,…,第三行的 c'_{23} 倍;…,将 $\bar{C}_1$ 的第 $r-1$ 行减去第 r 行的 $c'_{r-1,r}$ 倍.则 $\bar{C}_1$ 变成 $(\boldsymbol{C},\boldsymbol{D})$,因而 $\bar{A}$ 变成前面所述形状的 $\bar{C}=(\boldsymbol{C},\boldsymbol{D})$ 矩阵.注意,将方程组(1)的未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 重新排序为 $x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_n}$,相当于将系数矩阵的各个列变换了顺序,也即对系数矩阵进行了多次的互换两列的变换.这就证明了引理.

推论 对线性方程组(1)进行多次初等变换后再适当重排 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 $x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_n}$,则可将(1)变成同解方程组

$$\boldsymbol{CY}=\boldsymbol{D},\tag{4}$$

其中

$$\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}x_{i_1}\\x_{i_2}\\\vdots\\x_{i_n}\end{pmatrix},$$

而 $\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 的形状如(2)所述.

由此易得方程组(1)的解的结论：

(1) 方程组(1)与(4)同解.它们有解的充分必要条件是 $d_{r+1}=0$.

(2) 当(1),(4)有解时,其一般解为

$$\begin{pmatrix}x_{i_1}\\x_{i_2}\\\vdots\\x_{i_r}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\\vdots\\d_r\end{pmatrix}-\boldsymbol{C}_2\begin{pmatrix}x_{i_{r+1}}\\x_{i_{r+2}}\\\vdots\\x_{i_n}\end{pmatrix},$$

其中 $x_{i_{r+1}},x_{i_{r+2}},\cdots,x_{i_n}$ 是自由未知量.

三、习题、提示与解答

1. 设

1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\1&2&3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix};$

2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&b&a\\1&1&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&a&c\\1&b&b\\1&c&a\end{pmatrix},$

计算 $\boldsymbol{AB},\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$.

解 1)

$$AB=\begin{pmatrix}6&2&-2\\6&1&0\\8&-1&2\end{pmatrix},AB-BA=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&0&0\\4&-4&-2\end{pmatrix};$$

2) $$AB=\begin{pmatrix}a+b+c&a^2+b^2+c^2&b^2+2ac\\a+b+c&b^2+2ac&a^2+b^2+c^2\\3&a+b+c&a+b+c\end{pmatrix},$$

$AB-BA$

$$=\begin{pmatrix}b-ac&a(a-b)+b(b-1)+c(c-1)&(b^2-a^2)+2c(a-1)\\c-bc&2(ac-b)&a(a-b)+b(b-1)+c(c-1)\\3-2a-c^2&c-bc&b-ac\end{pmatrix}$$

2. 计算：

1) $\begin{pmatrix}2&1&1\\3&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}^2$； 2) $\begin{pmatrix}3&2\\-4&-2\end{pmatrix}^5$；

3) $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^n$； 4) $\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}^n$；

5) $(2,3,-1)\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}(2,3,-1)$；

6) $(x,y,1)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{12}&a_{22}&b_2\\b_1&b_2&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}$；

7) $\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}^2$，$\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}^n$；

8) $\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}^n$.

解 只给出答案.

1) $\begin{pmatrix}7&4&4\\9&4&3\\3&3&4\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}3&-2\\4&8\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$(用归纳法);

4) $\begin{pmatrix}\cos n\varphi&-\sin n\varphi\\\sin n\varphi&\cos n\varphi\end{pmatrix}$(用归纳法);

5) 0, $\begin{pmatrix}2&3&-1\\-2&-3&1\\-2&-3&1\end{pmatrix}$;

6) $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2b_1x+2b_2y+c$;

7) $\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}$;当 $n=2k$ 时为 $4^k\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$,

当 $n=2k+1$ 时为 $4^k\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}$;

8) $\begin{pmatrix}\lambda^n&n\lambda^{n-1}&\frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\0&\lambda^n&n\lambda^{n-1}\\0&0&\lambda^n\end{pmatrix}$(用归纳法).

3. 设 $f(\lambda)=a_0\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}+\cdots+a_m$, $\boldsymbol{A}$ 是一个 $n\times n$ 矩阵,定义 $f(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{A}^m+a_1\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+a_m\boldsymbol{E}$.

1) $f(\lambda)=\lambda^2-\lambda-1$, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&1\\3&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}$;

2) $f(\lambda)=\lambda^2-5\lambda+3$, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&3\end{pmatrix}$.

试求 $f(\boldsymbol{A})$.

解 只给出答案.

1) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 8 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. 如果 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 就称为与 $\boldsymbol{A}$ 可交换. 设

1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

3) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

求所有与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵.

解 1) $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ 0 & x_{11} \end{pmatrix}$,其中 $x_{ij}(i=1,j=1,2)$为任意数;

2) $\begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{11}+\frac{1}{3}x_{21} & \frac{2}{3}x_{31} \\ x_{31} & \frac{1}{3}x_{31} & x_{11}+\frac{1}{3}x_{21}+\frac{1}{3}x_{31} \end{pmatrix}$

其中 $x_{i1}(i=1,2,3)$为任意数;

3) $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & x_{11} & x_{12} \\ 0 & 0 & x_{11} \end{pmatrix}$,

其中 $x_{1j}(j=1,2,3)$为任意数.

5. 设

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix},\text{其中 } a_i\neq a_j\text{，当 } i\neq j\ (i,j=1,2,\cdots,n).$$

证明：与 A 可交换的矩阵只能是对角矩阵.

证明 令

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

与 A 可交换. 计算

$$AB=\begin{pmatrix} a_1b_{11} & a_1b_{12} & \cdots & a_1b_{1n} \\ a_2b_{21} & a_2b_{22} & \cdots & a_2b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_{n1} & a_nb_{n2} & \cdots & a_nb_{nn} \end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix} b_{11}a_1 & b_{12}a_2 & \cdots & b_{1n}a_n \\ b_{21}a_1 & b_{22}a_2 & \cdots & b_{2n}a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1}a_1 & b_{n2}a_2 & \cdots & b_{nn}a_n \end{pmatrix}.$$

由 $AB=BA$，则对任意 $i,j=1,2,\cdots,n$，有

$$a_ib_{ij}=b_{ij}a_j.$$

由于 $i\neq j$ 时 $a_i\neq a_j$，必然 $b_{ij}=0$. 故 B 只能是对角阵.

6. 设

$$A=\begin{pmatrix} a_1E_1 & & & O \\ & a_2E_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & a_rE_r \end{pmatrix},\text{其中 } a_i\neq a_j \text{ 当 } i\neq j\ (i,j=$$

$1,2,\cdots,r)$.

E_i 是 n_i 级单位矩阵，$\sum_{i=1}^{r} n_i = n$. 证明：与 A 可交换的矩阵只能是准对角矩阵

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_r \end{pmatrix},$$

其中 A_i 是 n_i 级矩阵($i=1,\cdots,r$).

证明 设矩阵 B 与 A 可交换，把它也按 A 一样进行分块，写成

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rr} \end{pmatrix}.$$

对 A,B 进行分块乘法，类似于第 5 题，同样得到证明.

7. 用 E_{ij} 表示 i 行 j 列的元素为 1，而其余元素全为零的 $n\times n$ 矩阵，$A=(a_{ij})_{n\times n}$. 证明：

1）如果 $AE_{12}=E_{12}A$，那么当 $k\neq 1$ 时 $a_{k1}=0$，当 $k\neq 2$ 时 $a_{2k}=0$；

2）如果 $AE_{ij}=E_{ij}A$，那么当 $k\neq i$ 时 $a_{ki}=0$，当 $k\neq j$ 时 $a_{jk}=0$，且 $a_{ii}=a_{jj}$；

3）如果 A 与所有的 n 级矩阵可交换，那么 A 一定是数量矩阵，即 $A=aE$.

证明 1）计算 AE_{12} 及 $E_{12}A$，

$$AE_{12} = \begin{pmatrix} 0 & a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$
\boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.
$$

由 $\boldsymbol{AE}_{12}=\boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{A}$，得 $a_{21}=a_{23}=\cdots=a_{2n}=0$ 及 $a_{21}=a_{31}=\cdots=a_{n1}=0$ 且 $a_{11}=a_{22}$. 证得所要的结论.

2) 计算 $\boldsymbol{AE}_{ij}$ 及 $\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}$，

$$
\begin{array}{c} \boldsymbol{AE}_{ij}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{1i} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2i} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ni} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \\ \qquad\qquad\qquad | \\ \qquad\qquad\qquad j\text{ 列} \end{array}
$$

$$
\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.\begin{array}{l} \\ \\ \text{—}i\text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}
$$

由 $\boldsymbol{AE}_{ij}=\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}$，得 $a_{1i}=\cdots=a_{i-1,i}=a_{i+1,i}=\cdots=a_{ni}=0$ 及 $a_{j1}=\cdots=a_{j,j-1}=a_{j,j+1}=\cdots=a_{jn}=0$，且还有 $a_{ii}=a_{jj}$. 证得了所要的结论.

3) 由于对所有 $i,j=1,2,\cdots,n$，$i\neq j$ 时都有 $\boldsymbol{AE}_{ij}=\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}$，由第 2)小题得 $a_{ij}\neq 0$，$a_{ji}\neq 0$，且 $a_{ii}=a_{jj}$. 故 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}$，且 $\boldsymbol{A}$ 的对角线以外的元素皆为零，即 $\boldsymbol{A}=a_{n}\boldsymbol{E}$ 是数量矩阵.

8. 如果 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，$\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}$，证明：$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}$；$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=(\boldsymbol{BC})\boldsymbol{A}$.

证明 直接进行验证，并利用分配律和乘法结合律.

9. 如果 $\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})$，证明：$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 当且仅当 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{E}$.

证明 直接进行验证,利用已知条件.

10. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为对称的,如果 $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}$.证明:如果 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$,那么 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

证明 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$,则

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}^2+a_{21}^2+a_{31}^2+\cdots+a_{n1}^2 & * & \cdots & * \\ * & a_{12}^2+a_{22}^2+\cdots+a_{n2}^2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & a_{1n}^2+a_{2n}^2+\cdots+a_{nn}^2 \end{pmatrix}$$

$$=\boldsymbol{O},$$

于是 $a_{1j}^2+a_{2j}^2+\cdots+a_{nj}^2=0, j=1,2,\cdots,n$.由于所有 a_{ij} 皆为实数,故所有 $a_{ij}=0, i,j=1,2,\cdots,n$.即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

11. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 $n\times n$ 的对称矩阵,证明:$\boldsymbol{AB}$ 也对称当且仅当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可交换.

证明 当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可交换时,

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'=(\boldsymbol{BA})'=(\boldsymbol{AB})',$$

即 $\boldsymbol{AB}$ 为对称阵.反之,当 $\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{AB})'$ 时,

$$\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{AB})'=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{BA}.$$

即 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可交换.

12. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为反对称的,如果 $\boldsymbol{A}'=-\boldsymbol{A}$.证明:任一 $n\times n$ 矩阵都可表为一对称矩阵与一反对称矩阵之和.

证明 $\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}+\frac{1}{2}\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}')+\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}')$,又

$$\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}')\right]'=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}'+(\boldsymbol{A}')')=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}'),$$

$$\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}')\right]'=\frac{1}{2}[\boldsymbol{A}'-(\boldsymbol{A}')']=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}')$$

分别为对称阵和反对称阵.得证.

13. 设 $s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k, k=0,1,2,\cdots; a_{ij}=s_{i+j-2}, i,j$

$=1,2,\cdots,n$. 证明：

$$|a_{ij}|=\prod_{i<j}(x_i-x_j)^2.$$

提示　上式右端是范德蒙德行列式的平方.要看出左端行列式中的矩阵是两个矩阵的乘积.

解

$$|a_{ij}|$$

$$=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1+1+\cdots+1 & x_1+x_2+\cdots+x_n & \cdots & x_1^{n-1}+x_2^{n-1}+\cdots+x_n^{n-1} \\ x_1+x_2+\cdots+x_n & x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 & \cdots & x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1}+x_2^{n-1}+\cdots+x_n^{n-1} & x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n & \cdots & x_1^{2n-2}+x_2^{2n-2}+\cdots+x_n^{2n-2} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i-x_j)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i-x_j)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i-x_j)^2.$$

14. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 矩阵,证明:存在一个 $n\times n$ 非零矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}|=0$.

提示　从 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,得出 $\boldsymbol{B}$ 的每个列都是齐次方程组 $\boldsymbol{AZ}=\boldsymbol{O}$ 的解.再利用齐次方程组有非零解的充分必要条件.

证明　必要性.令 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_n)$,$\boldsymbol{B}_i$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的第 i 列,则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 即 $(\boldsymbol{AB}_1,\boldsymbol{AB}_2,\cdots,\boldsymbol{AB}_n)=\boldsymbol{O}$.因 $\boldsymbol{B}$ 为非零矩阵,至少一个 $\boldsymbol{B}_i\neq\boldsymbol{O}$,故齐次方程组 $\boldsymbol{AZ}=\boldsymbol{O}$ 有非零解,其系数行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$.

充分性.$|\boldsymbol{A}|=0$,齐次方程组 $\boldsymbol{AZ}=\boldsymbol{O}$ 有非零解.设

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{O}$$

是它的一个解.令

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 & b_1 & \cdots & b_1 \\ b_2 & b_2 & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & b_n & \cdots & b_n \end{pmatrix}_{n \times n} \neq \boldsymbol{O},$$

则满足 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$.

15. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n \times n$ 矩阵,如果对任一 n 维向量 $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 都有 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$,那么 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$.

提示 利用齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 的系数矩阵的秩与基础解系的秩的关系.

证明 取 n 维向量空间中 n 个单位向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$,它们都是 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 的解,因而是基础解系.它有 n 个向量,$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$中的未知数也是 n,故秩($\boldsymbol{A}$) $= n - n = 0$.即 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$.

16. 设 $\boldsymbol{B}$ 为一 $r \times r$ 矩阵,$\boldsymbol{C}$ 为一 $r \times n$ 矩阵,且秩($\boldsymbol{C}$) $= r$.证明:

1) 如果 $\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{O}$,那么 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$;

2) 如果 $\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{C}$,那么 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$.

证明 1) $\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{O}$,就有 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{O}$.故 $\boldsymbol{B}'$ 的每个列向量都是齐次方程组 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 的解.$\boldsymbol{B}'$ 是 $r \times r$ 阵,这方程组中有 r 个未知数.又秩($\boldsymbol{C}'$) = 秩($\boldsymbol{C}$) $= r$,于是 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$的基础解系的秩为 $r - r = 0$,它只有零解.故 $\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{O}$,即 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$.

2) 由 $BC=C$,故$(B-E)C=O$. 由 1) 知 $B-E=O$,即有 $B=E$.

17. 证明

$$秩(A+B)\leqslant 秩(A)+秩(B).$$

提示 利用 A,B 和 $A+B$ 的各个列向量组的极大线性无关组间的线性表出关系.

证明 令 $A=(A_1,A_2,\cdots,A_n)$,$B=(B_1,B_2,\cdots,B_n)$,A_i,B_j 都是列向量. $A+B=(A_1+B_1,\cdots,A_n+B_n)$,它的每个列向量都可由列向量组$\{A_1,\cdots,A_n,B_1,\cdots,B_n\}$线性表出. 又设$\{A_{i_1},\cdots,A_{i_r}\}$及$\{B_{j_1},\cdots,B_{j_s}\}$分别是$\{A_1,\cdots,A_n\}$和$\{B_1,\cdots,B_n\}$的极大线性无关组. 则$\{A_1+B_1,\cdots,A_n+B_n\}$都可由向量组$\{A_{i_1},\cdots,A_{i_r},B_{j_1},\cdots,B_{j_s}\}$线性表出. 故

秩$(A+B)$ = 秩$\{A_1+B_1,\cdots,A_n+B_n\}\leqslant$ 秩$\{A_{i_1},\cdots,A_{i_r},B_{j_1},\cdots,B_{j_s}\}\leqslant r+s$,即

$$秩(A+B)\leqslant 秩(A)+秩(B).$$

18. 设 A,B 为 $n\times n$ 矩阵. 证明:如果 $AB=O$,那么

$$秩(A)+秩(B)\leqslant n.$$

提示 用 14-16 题类似的思路.

证明 $AB=O$,B 的各个列向量都是齐次方程组 $AX=O$ 的解,故能由它的基础解系线性表出,于是秩$(B)\leqslant$基础解系的秩 $=$ $n-$秩(A). 即有 $n\leqslant$ 秩$(A)+$秩(B).

19. 证明:如果 $A^k=O$,那么

$$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}.$$

提示 直接按逆矩阵的定义来验证.

证明 $(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})(E-A)$

$$=(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})$$
$$=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}-A-A^2-\cdots-A^{k-1}-A^k=E,$$

故$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1}$.

20. 求 $\boldsymbol{A}^{-1}$,设

1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $ad-bc=1$;　2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

3) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;　4) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$;

5) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; 6) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

7) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;　8) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 1 & 8 \\ -1 & -3 & -1 & -6 \end{pmatrix}$;

9) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;　10) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

解　1) $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0\\0 & 0 & -3 & 3 & -2 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0\\0 & 0 & -3 & 3 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix},$$

故

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\-1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

3) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -4 & -3\\1 & -5 & -3\\-1 & 6 & 4\end{pmatrix}$,

4) $A^{-1}=\begin{pmatrix}22 & -6 & -26 & 17\\-17 & 5 & 20 & -13\\-1 & 0 & 2 & -1\\4 & -1 & -5 & 3\end{pmatrix}$.

5) $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$.

6) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-7 & 5 & 12 & -19\\ 3 & -2 & -5 & 8\\ 41 & -30 & -69 & 111\\ -59 & 43 & 99 & -159\end{pmatrix}$.

7) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 11 & -38\\ 0 & 1 & -2 & 7\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

8) $A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 0\\ -3 & 2 & 0 & 0\\ -5 & 7 & -3 & -4\\ 2 & -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

9) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{7}{6} & \frac{10}{3}\\ -\frac{7}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} & -\frac{5}{3}\\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$.

10) $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{32}\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{16}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

21. 设

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix},$$

已知 $\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{C}^{-1}$存在，求 $\boldsymbol{X}^{-1}$.

提示 用分块乘法决定 $\boldsymbol{X}^{-1}$.

解 $$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}\end{pmatrix}.$$

故

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^{-1}\\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

22. 设

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1}\\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix},$$

其中 $a_i\neq0(i=1,2,\cdots,n)$，求 $\boldsymbol{X}^{-1}$.

提示 将 $\boldsymbol{X}$ 分块如下

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ a_n & \boldsymbol{O}\end{pmatrix},\text{其中 }\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1 & & & \\ & a_2 & & \boldsymbol{O}\\ & & \ddots & \\ & \boldsymbol{O} & & a_{n-1}\end{pmatrix}.$$

再用上一题的结果.

解 $$X^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&\frac{1}{a_n}\\ \frac{1}{a_1}&0&\cdots&0&0\\ 0&\frac{1}{a_2}&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\ 0&0&\cdots&\frac{1}{a_{n-1}}&0\end{pmatrix}.$$

23. 求矩阵 X. 设

1) $\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\1&1&0\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\0&1&1&\cdots&1&1\\0&0&1&\cdots&1&1\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}_n X=\begin{pmatrix}2&1&0&\cdots&0&0\\1&2&1&\cdots&0&0\\0&1&2&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&2\end{pmatrix}_n$;

4) $X\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$.

提示 求解矩阵方程可用初等变换. 对方程 $AX=B$,其中 A 可逆,则有初等矩阵之积 $P_1P_2\cdots P_s=A^{-1}$. 于是

$$P_1P_2\cdots P_s(A,B)=(P_1P_2\cdots P_sA,P_1P_2\cdots P_sB)=(E,A^{-1}B).$$

故只须对(A,B)作初等行变换,当将左半部 A 化成 E 时,则右半部就化成 $A^{-1}B$,是所要求的解.

解 1)

$$\begin{pmatrix}2&5&4&-6\\1&3&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&-1&0&-8\\1&3&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&-1&0&-8\\1&0&2&-23\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&2&-23\\0&1&0&8\end{pmatrix},$$

得

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}2&-23\\0&8\end{pmatrix}.$$

2) $$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\frac{11}{6}&\frac{1}{2}&1\\-\frac{1}{6}&-\frac{1}{2}&0\\\frac{2}{3}&1&0\end{pmatrix}.$$

3) $$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&-1&-1&0&\cdots&0&0&0\\1&1&-1&-1&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&1&1&-1\\0&0&0&0&\cdots&0&1&2\end{pmatrix}_{n\times n}.$$

4) $$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{4}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{5}{6}&\frac{4}{3}\end{pmatrix}.$$

24. 证明：

1) 如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆对称(反对称)，那么 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也对称(反对称)；

2) 不存在奇数级的可逆反对称矩阵.

证明 1) 若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}'$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{A}')^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})'$. 若 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}'$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=(-\boldsymbol{A}')^{-1}=-(\boldsymbol{A}^{-1})'$.

2) 若 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}'$，$|\boldsymbol{A}|=|-\boldsymbol{A}'|=(-1)^n|\boldsymbol{A}'|=(-1)^n|\boldsymbol{A}|$.

若 n 为奇数时，$|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}|$. 故 $|\boldsymbol{A}|=0$，$\boldsymbol{A}$ 不可逆.

25. 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 称为上(下)三角形矩阵，如果 $i>j(i<j)$ 时有 $a_{ij}=0$.

证明：

1) 两个上(下)三角形矩阵的乘积仍是上(下)三角形矩阵；

2) 可逆的上(下)三角形矩阵的逆仍是上(下)三角形矩阵.

证明 1) 方法 1 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 皆为上三角阵，即 $i>j$ 时有 $a_{ij}=0$，$b_{ij}=0$. 令 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})=\boldsymbol{AB}$，证明当 $i>j$ 时有 $c_{ij}=0$.

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{i,i-1}b_{i-1,j}+a_{ii}b_{ij}+\cdots+a_{in}b_{nj}.$$

它的前 $i-1$ 项中有 $a_{i1}=\cdots=a_{i,i-1}=0$，而后面的项中有 $b_{ij}=\cdots=b_{nj}=0$，因此它的每一项皆为零. 所以 $i>j$ 时 $c_{ij}=0$. 得证.

方法 2 注意到一个 $l\times k$ 矩阵 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})$ 是上三角矩阵当且仅当对每个 $i>j$，矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的左下方的 $(l-i+1)\times j$ 小块矩阵为零矩阵，即 $\boldsymbol{P}$ 有如下形状

$$\boldsymbol{P}=\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c}\left(\begin{array}{cccc:cccccc} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1,i-1} & p_{1i} & \cdots & p_{1k} \\ 0 & p_{22} & \cdots & p_{2j} & \cdots & p_{2,i-1} & p_{2i} & \cdots & p_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & p_{i-1,i-1} & p_{i-1,i} & \cdots & p_{i-1,k} \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & p_{ii} & \cdots & p_{ik} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & p_{lk} \end{array}\right) \\ j \end{array}$$

$$=\begin{pmatrix} (\boldsymbol{P}_1)_{(i-1)\times j} & (\boldsymbol{P}_2)_{(i-1)\times(k-j)} \\ \boldsymbol{O}_{(l-i+1)\times j} & (\boldsymbol{P}_3)_{(l-i+1)\times(k-j)} \end{pmatrix}$$

现在当 $i>j$ 时，对 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}_{n\times k}$ 作如下的分块，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} (\boldsymbol{A}_1)_{(i-1)\times(i-1)} & (\boldsymbol{A}_2)_{(i-1)\times(n-i+1)} \\ \boldsymbol{O}_{(m-i+1)\times(i-1)} & (\boldsymbol{A}_4)_{(m-i+1)\times(n-i+1)} \end{pmatrix}_{m\times n},$$

$$B=\begin{bmatrix}(B_1)_{(i-1)\times j} & (B_2)_{(i-1)\times(k-j+1)}\\ O_{(n-i+1)\times j} & (B_4)_{(n-i+1)\times(k-j+1)}\end{bmatrix}_{n\times k},$$

则 $C=AB$ 有如下形状

$$\begin{aligned}C&=AB\\&=\begin{bmatrix}(C_1)_{(i-1)\times j} & (C_2)_{(i-1)\times(k-j)}\\ O\times B_1+A_4\times O & (C_4)_{(m-i+1)\times(k-i)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_1 & C_2\\ O_{(m-i+1)\times j} & C_4\end{bmatrix}_{m\times k},\end{aligned}$$

即对任何 $i>j$,矩阵 C 的左下方的$(m-i+1)\times j$ 小块矩阵为零,所以 $C=AB$ 仍是上三角矩阵.

对下三角矩阵的情形,可类似地证明.

2) $A=(a_{ij})$是上三角矩阵,设 $B=(b_{ij})$是它的逆矩阵.

方法1　考察 $AB=E$ 的第 j 列的第 $j+1,j+2,\cdots,n$ 个元,则有

$$a_{j+1,1}b_{1j}+a_{j+1,2}b_{2j}+\cdots+a_{j+1,j}b_{jj}+a_{j+1,j+1}b_{j+1,j}+a_{j+1,j+2}b_{j+2,j}+\cdots+a_{j+1,n}b_{nj}=0,$$

$$a_{j+2,1}b_{1j}+a_{j+2,2}b_{2j}+\cdots+a_{j+2,j+1}b_{j+1,j}+a_{j+2,j+2}b_{j+2,j}+\cdots+a_{j+2,n}b_{nj}=0,$$

…………

$$a_{n-1,1}b_{1j}+a_{n-1,2}b_{2j}+\cdots+a_{n-1,n-1}b_{n-1,j}+a_{n-1,n}b_{nj}=0,$$

$$a_{n1}b_{1j}+a_{n2}b_{2j}+\cdots+a_{n,n-1}b_{n-1,j}+a_{nn}b_{nj}=0.$$

由 $i>j$ 时,$a_{ij}=0$,即 $a_{nj}=\cdots=a_{j+1,j}=0$.于是有

$$a_{j+1,j+1}b_{j+1,n}+a_{j+1,j+2}b_{j+2,j}+\cdots+a_{j+1,n-1}b_{n-1,j}+a_{j+1,n}b_{nj}=0$$

$$a_{j+2,j+2}b_{j+2,j}+\cdots+a_{j+2,n-1}b_{n-1,j}+a_{j+2,n}b_{nj}=0,$$

…………

$$a_{n-1,n-1}b_{n-1,j}+a_{n-1,n}b_{nj}=0,$$

$$a_{nn}b_{nj}=0.$$

A 是可逆的上三角阵,$|A|=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\neq 0$.故所有 $a_{ii}\neq 0$,$i=1,2,\cdots,n$.要证明 B 是上三角的,只要证任意 $j<n$ 时,$b_{j+1,j}=$

$b_{j+2,j}=\cdots=b_{n-1,j}=b_{nj}=0.$

从前面的等式组中的最后式子出发，这时 $a_{nn}\neq 0$，故 $b_{nj}=0$. 则倒数第 2 式就变成

$$a_{n-1,n-1}b_{n-1,j}+a_{nn}b_{nj}=a_{n-1,n-1}b_{n-1,j}=0.$$

从 $a_{n-1,n-1}\neq 0$ 得 $b_{n-1,j}=0$. 这样从后面式子到前面式子可依次地推出

$$b_{nj}=b_{n-1,j}=\cdots=b_{j+1,j}=0.$$

所以对任意 $i>j$，有 $b_{ij}=0$. 即 $\boldsymbol{B}$ 是上三角阵.

类似地可证明下三角形的情形.

方法 2　用分块运算及归纳法.

对 n 作归纳法，$n=1$，显然. 设 $n-1$ 阶上三角阵的逆矩阵是上三角阵. 对 $\mathbf{A}$ 是 n 阶上三角阵来证明它的逆也是上三角的. 将 $\mathbf{A}$ 写成如下的分块矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{O} & \mathbf{A}_1 \end{pmatrix},$$

其中 $a_{11}\neq 0$，$\mathbf{A}_1$ 是 $n-1$ 阶上三角可逆阵. 由归纳假设，$\mathbf{A}_1^{-1}$ 仍是上三角的. 作如下乘积

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \mathbf{A}_1^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{O} & \mathbf{A}_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & a_{11}^{-1}\boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -a_{11}^{-1}\boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a_{11}^{-1}\boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_{n-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_{n-1} \end{pmatrix}=\boldsymbol{E}_n,$$

故

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -a_{11}^{-1}\boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \mathbf{A}_1^{-1} \end{pmatrix}$$

是上三角阵的乘积，仍为上三角阵.

同样证明下三角矩阵的逆也是下三角阵.

注　这个方法 2 的证明思想也可用于证明本习题的第 1 小

题.

26. 证明：

$$|A^*| = |A|^{n-1},$$

其中 A 是 $n\times n$ 矩阵($n\geqslant 2$).

提示 利用公式 $AA^* = |A|E$ 及 A^* 的定义

证明 由 $AA^* = |A|E$, $|A|\cdot|A^*| = |A|^n$. 若 $|A|\neq 0$, 则 $|A^*| = \dfrac{|A|^n}{|A|} = |A|^{n-1}$.

若 $|A| = 0$, 则 $AA^* = O$.

1) $A = O$, 则 A 的各子式为零, 于是 $A^* = O$, 这时当然有 $|A|^* = 0 = |A| = |A|^{n-1}$.

2) $A\neq 0$. 即有秩(A)>0. 由 $AA^* = O$ 及 18 题, 秩(A)+秩(A^*)$\leqslant n$. 于是秩(A^*)$\leqslant n-1$, 所以 $|A^*| = 0$. 与 1)一样有 $|A^*| = |A|^{n-1}$.

27. 证明：如果 A 是 $n\times n$ 矩阵($n\geqslant 2$), 那么

$$\text{秩}(A^*) = \begin{cases} n, \text{当秩}(A) = n, \\ 1, \text{当秩}(A) = n-1. \\ 0, \text{当秩}(A) < n-1. \end{cases}$$

证明 当秩(A)$= n$ 时 $|A|\neq 0$, $|A^*| = |A|^{n-1}\neq 0$. 故秩(A^*)$= n$. 当秩(A)$= n-1$ 时, A 至少有一个 $n-1$ 阶子式$\neq O$, 即 $A^*\neq O$, 秩(A^*)$\geqslant 1$.

又这时秩(A)$= n-1$, $|A| = 0$. 故 $AA^* = |A|E = O$. 由 18 题知 秩(A)+秩(A^*)$\leqslant n$. 故秩(A^*)$\leqslant n-(n-1) = 1$, 所以秩(A^*)$= 1$.

当秩(A)$< n-1$ 时, A 的任意 $n-1$ 个行皆线性相关, 故它的任意 $n-1$ 阶子式都为零. 所以 $A^* = O$, 因而秩(A^*)$= 0$.

28. 用两种方法求

$$A = \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hdashline 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

的逆矩阵．

1）用初等变换；

2）按 $\boldsymbol{A}$ 中的划分，利用分块乘法的初等变换．（注意各小块矩阵的特点．）

解 1）

$$
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
\to\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
\to\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -2 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
\to\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & -1 & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
\to\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}
\end{pmatrix}
$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&1&0&0&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&1&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&0&1&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\0&1&0&0&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&1&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&0&1&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

故 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{4}\boldsymbol{A}$.

2) 写 $\boldsymbol{A}$ 为如下分块矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}&\boldsymbol{J}\\\boldsymbol{J}&-\boldsymbol{J}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{J}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{E}&-\boldsymbol{E}\end{pmatrix},\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix},\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

易知

$$\boldsymbol{J}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\boldsymbol{J},\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{E}&-\boldsymbol{E}\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{E}&-\boldsymbol{E}\end{pmatrix}.$$

于是

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{E}&-\boldsymbol{E}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{J}\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{E}&-\boldsymbol{E}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}^{-1}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{J}^{-1}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{E}&-\boldsymbol{E}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{J}\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\boldsymbol{A}.$$

29. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别是 $n\times m$ 和 $m\times n$ 矩阵. 证明

$$\begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix} = |E_n - AB| = |E_m - BA|.$$

提示 把分块阵

$$\begin{pmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{pmatrix}$$

分别用分块初等行及列变换把它化成(共两个)上三角分块阵,再计算它们的行列式.

证明 由

$$\begin{pmatrix} E_m & O \\ -A & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m & B \\ O & E_n - AB \end{pmatrix},$$

知

$$|E_n - AB| = \begin{vmatrix} E_m & B \\ O & E_n - AB \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_m & O \\ -A & E_n \end{vmatrix}\begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix}.$$

又由

$$\begin{pmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & O \\ -A & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m - BA & B \\ O & E_n \end{pmatrix}$$

得

$$|E_m - BA| = \begin{vmatrix} E_m - BA & B \\ O & E_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix}\begin{vmatrix} E_m & O \\ -A & E_n \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix}.$$

得证.

30. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 如上题,$\lambda \neq 0$. 证明

$$|\lambda E_n - AB| = \lambda^{n-m}|\lambda E_m - BA|.$$

提示 计算 $\left|E_n - \dfrac{AB}{\lambda}\right| = \left|E_m - \dfrac{AB}{\lambda}\right|$.

解 由 29 题有

$$\left|E_n - A\left(\frac{B}{\lambda}\right)\right| = \left|E_m - \left(\frac{B}{\lambda}\right)A\right|.$$

于是

$$\frac{1}{\lambda^n}\left|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{AB}\right|=\frac{1}{\lambda^m}\left|\lambda\boldsymbol{E}_m-\boldsymbol{BA}\right|$$

即有

$$\left|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{AB}\right|=\lambda^{n-m}\left|\lambda\boldsymbol{E}_m-\boldsymbol{BA}\right|.$$

四、补充题、提示与解答

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $n\times n$ 矩阵,秩($\boldsymbol{A}$)=1.证明:

1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)$;

2) $\boldsymbol{A}^2=k\boldsymbol{A}$.

提示 回忆矩阵的秩的定义.

证明 1) 因秩($\boldsymbol{A}$)为1,必有某个第 i 行,使其他各行是它的倍数.设这第 i 行为$(b_1,b_2,\cdots,b_n)$,而第1行,第2行,…,第 n 行分别是它的 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 倍(这时 a_i 必为1).于是

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1b_1, & a_1b_2, & \cdots, & a_1b_n\\a_2b_1, & a_2b_2, & \cdots, & a_2b_n\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_nb_1, & a_nb_2, & \cdots, & a_nb_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n).$$

2)

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

$$=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$$

$$=(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

$$=k\boldsymbol{A},$$

其中 $k=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 2×2 矩阵,证明:如果 $\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{O},l\geqslant2$,那么 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$.

提示 此时 $|\boldsymbol{A}|=0$,故秩$(\boldsymbol{A})<2$.

解 因 $\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{O}$, $|\boldsymbol{A}^l|=|\boldsymbol{A}|^l=0$,故 $|\boldsymbol{A}|=0$. $\boldsymbol{A}$ 是 2×2 矩阵,$|\boldsymbol{A}|=0$, $\boldsymbol{A}$ 不是满秩.即秩$(\boldsymbol{A})<2$.

若 秩$(\boldsymbol{A})=0$,即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.这时当然有 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$.

若 秩$(\boldsymbol{A})=1$.则由第1题有 $\boldsymbol{A}^2=k\boldsymbol{A}$,可知 $\boldsymbol{A}^l=k^{l-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.因 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$,故 $k=0$,即有 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 矩阵,证明:如果 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$,那么

$$秩(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+秩(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n.$$

提示 将 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$ 改写为$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$.利用齐次方程组系数矩阵的秩和基础解系的秩之间的关系.另一法,用分块初等变换来变形.

证明 方法1 写 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$ 为$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$.则 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 的每个列皆为齐次方程组$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的解. $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 的秩$\leqslant(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的基础解系的秩.故秩$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$+秩$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\leqslant$秩$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$+基础解系的秩$=n$.

又由习题17,秩$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$+秩$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\geqslant$秩$((\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}))$=秩$(\boldsymbol{E})=n$,即得秩$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$+秩$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$.

方法 2　作下列矩阵，并进行分块初等变换．

$$\begin{pmatrix} A+E & O \\ O & A-E \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{加到一行}]{\text{把二行}} \begin{pmatrix} A+E & A-E \\ O & A-E \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{-1\text{倍加到}\\ \text{二列}}]{\text{把一列的}} \begin{pmatrix} A+E & -2E \\ O & A-E \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{倍加到一列}]{\text{把二列的}\frac{1}{2}(A+E)} \begin{pmatrix} O & -2E \\ -\frac{1}{2}(A+E)(A-E) & A-E \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[=A^2-E=O]{(A+E)(A-E)} \begin{pmatrix} O & -2E \\ O & A-E \end{pmatrix}.$$

这些变换下，前后矩阵的秩是不变的．最后的矩阵的秩为 n，最前面矩阵的秩为　秩$(A+E)$＋秩$(A-E)$．故有

$$\text{秩}(A+E)+\text{秩}(A-E)=n.$$

4．设 A 为 $n\times n$ 矩阵，且 $A^2=A$．证明：

$$\text{秩}(A)+\text{秩}(A-E)=n.$$

提示　证明思路与上一题类似．另一方法：用分块初等变换来变形．

证明　方法 1　由 $A^2=A$，有 $A(A-E)=O$．由第 17 题，秩(A)＋秩$(A-E)\leqslant n$．又

$$\text{秩}(A)+\text{秩}(A-E)\geqslant\text{秩}(A-(A-E))=\text{秩}(E)=n,$$

故　秩(A)＋秩$(A-E)=n$．

方法 2　对分块矩阵

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & A-E \end{pmatrix}$$

作分块初等变换：

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & A-E \end{pmatrix}_{2n\times 2n} \longrightarrow \begin{pmatrix} A & A-E \\ O & A-E \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{(-1)倍加到一列}]{\text{把 2 列的}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{E} \end{pmatrix}\xrightarrow[\text{倍加到 2 行}]{\text{把 1 行的 } \boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}_{2n\times 2n}.$$

最后一步中，由于 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，有 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^2=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$. 上面矩阵的秩实际上取决于前 n 行. 因秩$(\boldsymbol{E})=n$，则前 n 行的秩为 n. 又分块初等变换不改变秩，故

$$n=\text{秩}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{E} \end{pmatrix}=\text{秩}(\boldsymbol{A})+\text{秩}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}).$$

5. 证明：

$$(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A},$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 矩阵$(n>2)$.

提示 利用 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 及第 26,27 题.

证明 当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时，$|\boldsymbol{A}^*|\neq 0$. $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=|\boldsymbol{A}^*|^{-1}(\boldsymbol{A}^*)^*$ 及 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$，得 $|\boldsymbol{A}^*|^{-1}(\boldsymbol{A}^*)^*=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$. 由 26 题，$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$. 故 $(\boldsymbol{A}^*)^*=\dfrac{|\boldsymbol{A}^*|}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$.

当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，由 27 题秩$(\boldsymbol{A}^*)\leqslant 1$. 又 $n>2$，秩$(\boldsymbol{A}^*)\leqslant n-1$. 于是 $\boldsymbol{A}^*$ 的任何 $n-1$ 级子式 $=\boldsymbol{O}$，故 $(\boldsymbol{A}^*)^*=\boldsymbol{O}$，所以 $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$.

6. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 都是 $n\times n$ 矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，$\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}$. 证明：

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{AD}-\boldsymbol{CB}|.$$

提示 用分块初等变换.

证明

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B} \end{pmatrix}.$$

最后一步用到 $A^{-1}C=CA^{-1}$. 由于

$$\begin{vmatrix} E & O \\ -CA^{-1} & E \end{vmatrix}=1=\begin{vmatrix} E & -A^{-1}B \\ O & E \end{vmatrix}$$

得

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & O \\ O & D-A^{-1}CB \end{vmatrix}=|A|\ |D-A^{-1}CB|$$
$$=|AD-A(A^{-1}CB)|=|AD-CB|.$$

7. 设 A 是一 $n\times n$ 矩阵,且秩$(A)=r$. 证明:存在一 $n\times n$ 可逆矩阵 P 使 PAP^{-1}的后 $n-r$ 行全为零.

提示 任何一行是行向量组的极大线性无关组的线性组合,先用初等行变换化到所要的形状.

证明 方法 1 设 A 的行向量组的极大线性无关组由第 i_1, $i_2,\cdots,i_r$ 行组成,则可用几次互换两行的变换分别将它们移到第 $1,2,\cdots,r$ 行上,不妨设 A 的前 r 行就组成行向量组的极大线性无关组,设某个第 j 行,$j=r+1,\cdots,n$,是第 1 行的 l_1 倍,第 2 行的 l_2 倍,…,第 r 行的 l_r 倍的和,则将第 j 行减去第 1 行的 l_1 倍,减去第 2 行的 l_2 倍,…,减去第 r 行的 l_r 倍,结果这一行成为零. 每个第 j 行,$j=r+1,r+2,\cdots,n$ 都进行上述的初等行变换. 则 A 的第 $r+1,r+2,\cdots,n$ 行全变为零.

上述所有初等行变换的乘积相当于用某个可逆阵 P 左乘 A,即存在可逆阵 P 使

$$PA=\begin{pmatrix} (A_1)_{r\times r} & (A_2)_{r\times(n-r)} \\ O_{(n-r)\times r} & O_{(n-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}.$$

则再用 P^{-1}右乘上述矩阵,相当于对它进行一系列初等列变换,其结果是后面 $n-r$ 行仍保持为零,故 PAP^{-1}的后面 $n-r$ 行全为零.

提示 利用初等变换下矩阵的标准形.

证明 方法 2 秩 A 为 r,则有可逆阵 P,Q 使 PAQ 成为标准形,即

$$PAQ=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

用 $Q^{-1}P^{-1}$ 右乘上述矩阵，如方法1中所证的一样，仍使结果保持后 $n-r$ 行为零.即

$$\boldsymbol{PAP}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}$$

的后 $n-r$ 行全为零.

8. 1) 把矩阵

$$\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}$$

表成形式为

$$\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\text{与}\begin{pmatrix}1 & 0\\ x & 1\end{pmatrix} \tag{1}$$

的矩阵的乘积;

2) 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

为一复数矩阵，$|\boldsymbol{A}|=1$，证明：$\boldsymbol{A}$ 可以表成形式为(1)的矩阵的乘积.

1) **提示** 先用 i 行加上 j 行的 x 倍($i=1,j=2$，或 $j=1,i=2$)这种类型的初等变换把

$$\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}$$

化成

$$\begin{pmatrix}1 & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

形状，再进一步用上述类型的变换化为单位矩阵.

解

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ x & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 0\\ ax & a^{-1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ ax & a^{-1}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a-ax & -a^{-1}\\ ax & a^{-1}\end{pmatrix},$$

令 $a-ax=1$,则 $x=1-a^{-1}$,故

$$\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1-a^{-1}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-a^{-1}\\a-1&a^{-1}\end{pmatrix}.$$

现作如下乘积.

$$\begin{pmatrix}1&a^{-1}\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-(a-1)&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-a^{-1}\\a-1&a^{-1}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&a^{-1}\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-a^{-1}\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

故

$$\begin{pmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix}1&a^{-1}\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1-a&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1-a^{-1}&1\end{pmatrix}\right]^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\1-a^{-1}&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0\\1-a&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&a^{-1}\\0&1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\a^{-1}-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\a-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-a^{-1}\\0&1\end{pmatrix},$$

已表成所要求的形式.

2) **提示** 先用所给定的初等变换把 $\boldsymbol{A}$ 化成 1)中所述的形状:

$$\begin{pmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{pmatrix}.$$

$|\boldsymbol{A}|=1, ad-bc=1$. 先设 $a\neq0$,则

$$\begin{pmatrix}1&-ab\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-\frac{c}{a}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-ab\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\0&\frac{ad-bc}{a}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&-ab\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\0&a^{-1}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{pmatrix}.$$

又由 1),$\begin{pmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{pmatrix}$能表成给定类型矩阵的乘积,故 $\boldsymbol{A}$ 也能.

若 $a=0$,则 $c\neq 0$. 则

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & b\\c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c & b+d\\c & d\end{pmatrix},$$

就化成前一种情形,这时 $\boldsymbol{A}$ 也能表成给定类型矩阵的乘积.

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 是一 $n\times n$ 矩阵, $|\boldsymbol{A}|=1$, 证明: $\boldsymbol{A}$ 可以表成 $\boldsymbol{P}(i,j(k))$ 这一类初等矩阵的乘积.

提示 用 $\boldsymbol{P}(i,j(k))$ 所代表的类型的初等行变换把 $\boldsymbol{A}$ 化成形状:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & & & \\ \vdots & & \boldsymbol{B}_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

再用归纳法.

证明 对 $\boldsymbol{A}$ 的级数作归纳法来证明可逐步用 $\boldsymbol{P}(i,j(k))$ 类型的矩阵左或右乘 $\boldsymbol{A}$ 使其变成单位矩阵 $\boldsymbol{E}$. $n=1$, 显然已是所要的形式.

假设 $n-1$ 时结论已成立,下证 n 时结论也成立.

由 $|\boldsymbol{A}|=1$, 它的第一列必有某 $a_{i1}\neq 0$. 若 $i\geqslant 2$, 选 l, 使 $a_{11}+la_{i1}=1$. 用 $\boldsymbol{P}(1,i(l))$ 右乘 $\boldsymbol{A}$, 则所得矩阵的 1 行 1 列元素为 $a_{11}+la_{i1}=1$. 若 $a_{21}=\cdots=a_{n1}=0$, $a_{11}\neq 0$, 则可用 $\boldsymbol{P}(2,1(a_{11}^{-1}))$ 右乘 $\boldsymbol{A}$, 则得到的矩阵的 1 行 1 列处仍是 a_{11}, 但 2 行 1 列处的元是 1. 再用 $\boldsymbol{P}(1,2(1-a_{11}))$ 右乘它,则所得矩阵的 1 行 1 列处的元是 1. 对于以上两种情形,不妨仍记所得的最后矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 这时 $a_{11}=1$.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

易知它可用一系列 $P(i,1(k))$ 型的矩阵右乘或左乘它，将它变成

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & & & \\ \vdots & & B_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

由于前面各变换皆保持行列式不变，故

$$1=|A|=|B|=|B_1|.$$

B_1 是 $(n-1)\times(n-1)$ 阵，又有 $|B_1|=1$，由归纳假设，能在 B_1 上用一系列 $P(i,j(k))$ 型矩阵左乘或右乘它，将 B_1 变成 E_{n-1}。其结果也是在 B 上用一系列 $P(i,j(k))$ 型矩阵左乘或右乘它，并将 B 变成 E_n。这就完成了归纳法。

10. 设

$$A=(a_{ij})_{sn},B=(b_{ij})_{nm},$$

证明：

$$秩(AB)\geqslant 秩(A)+秩(B)-n.$$

证明 方法 1 利用初等变换下矩阵的标准形。设秩$(A)=r_1$，秩$(B)=r_2$，秩$(AB)=r$，则存在可逆矩阵 P,Q 使

$$PAQ=\begin{pmatrix}E_{r_1} & O\\ O & O\end{pmatrix},$$

又设 $(Q^{-1}B)_{n\times m}=\begin{pmatrix}(B_1)_{r_1\times m}\\ (B_2)_{(n-r)\times m}\end{pmatrix}$。因 P,Q 可逆，故有

$$r=秩(AB)=秩(PAQQ^{-1}B).$$

计算

$$PAQQ^{-1}B=\begin{pmatrix}E_{r_1} & O\\ O & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(B_1)_{r_1\times m}\\ (B_2)_{(n-r_1)\times m}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_1\\ O\end{pmatrix},$$

得到

$$秩(AB)=r=秩(B_1)_{r\times m}.$$

又由

$$秩(Q^{-1}B) = r_2 = 秩\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

可以由 B_1 的行向量的极大线性无关组(共 r 个向量)出发,补充 B_2 中的 $r_2 - r$ 个行向量使其成为 $Q^{-1}B$ 的行向量的极大线性无关组. B_2 共有 $n - r_1$ 个行向量,故有 $r_2 - r \leqslant n - r_1$,即得

$$r_1 + r_2 - n \leqslant r.$$

方法 2　可利用习题 29 中用过的类似的分块乘法.

$$C = \begin{pmatrix} E_n & O \\ O & (AB)_{s\times m} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[A\text{ 倍加到 2 行}]{\text{把第 1 行的左}} \begin{pmatrix} E & O \\ A & AB \end{pmatrix} \xrightarrow[(-B)\text{倍加到第 2 列}]{\text{把第一列的右}} \begin{pmatrix} E & -B \\ A & O \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -B & E \\ O & A \end{pmatrix}_{(n+s)\times(m+n)}$$

于是

$$秩\ C = 秩\begin{pmatrix} -B & E \\ O & A \end{pmatrix}.$$

显然有

$$秩\ C = n + 秩(AB) = n + r,$$

又

$$\begin{pmatrix} -B & E \\ O & A \end{pmatrix}$$

中可以取到一个 $r_1 + r_2$ 阶子式

$$\begin{vmatrix} -M & * \\ O & N \end{vmatrix} \neq 0,$$

其中 $|M|$ 是 B 的最高阶(r_2 阶)非零子式,$|N|$ 是 A 的最高阶(r_1 阶)非零子式.故这矩阵的秩$\geqslant r_1 + r_2$.所以

$$n + r \geqslant r_1 + r_2,$$

即有

$$r \geqslant r_1 + r_2 - n.$$

11. 矩阵的列(行)向量组如果是线性无关的,就称该矩阵为列(行)**满秩的**.设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times r$ 矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 是列满秩的充分必要条件为存在 $m\times m$ 可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 使

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

同样地,$\boldsymbol{A}$ 为行满秩的充分必要条件为存在 $r\times r$ 可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{E}_m\ \boldsymbol{O})\boldsymbol{Q}.$$

提示 用矩阵的标准形.

证明 先讨论列满秩的情形.

充分性. 设

$$\boldsymbol{A}_{m\times r} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{P}$ 可逆. 于是

$$秩(\boldsymbol{A}_{m\times r}) = 秩\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix} = 秩(\boldsymbol{E}_r) = r,$$

故 $\boldsymbol{A}$ 为列满秩.

必要性. $\boldsymbol{A}_{m\times r}$ 为列满秩,则它的标准形为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}_{m\times r},$$

即有 $\boldsymbol{L}_{m\times m}$, $\boldsymbol{Q}_{r\times r}$ 可逆使

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}_{m\times r}\boldsymbol{Q}_{r\times r} = \boldsymbol{L}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r\boldsymbol{Q}_{r\times r}\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix} = \boldsymbol{L}\begin{pmatrix}\boldsymbol{Q}_{r\times r}\boldsymbol{E}_r\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{L}\begin{pmatrix}\boldsymbol{Q}_{r\times r} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_{m-r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix},$$

令 $P = L\begin{pmatrix} Q & O \\ O & E_{m-r} \end{pmatrix}$,

P 即为所求.

类似地可证明行满秩的情况.

12. $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 r,则有 $m\times r$ 的列满秩矩阵 P 和 $r\times n$ 的行满秩矩阵 Q,使 $A = PQ$.

提示 利用标准形和上一题的结果.

证明 A 的秩为 r,有 $m\times m$ 可逆阵 P_1 及 $n\times n$ 可逆阵 Q_1 使

$$\begin{aligned} A &= P_1\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n} Q_1 \\ &= P_1\begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix}_{m\times r}(E_r, O)_{r\times n}Q_1 \\ &= \left[P_1\begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix}_{m\times r}\right]\left[\left(E_r, O\right)_{r\times n}Q_1\right] \\ &= PQ, \end{aligned}$$

其中

$$P = P_1\begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix}_{m\times r}, \qquad Q = (E_r, O)_{r\times n}Q_1.$$

由上一题的结论,P,Q 分别是列满秩和行满秩矩阵.

第五章　二　次　型

一、内容提要

1. 二次型及其矩阵表示

二次型

线性替换，非退化线性替换，线性替换把二次型变成二次型.

二次型的矩阵表示，二次型的矩阵.

二次型 $f=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 经非退化线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$ 后变为 $\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}$，其中 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$.

2. 矩阵的合同关系

矩阵的合同关系(定义 2)

合同关系是一种等价关系.

3. 标准形

标准形

任一个二次型都可以经过非退化线性替换化为标准形(定理 1)

相应的矩阵结果(定理 2)

标准形不是唯一的，但是二次型的秩(即是矩阵的秩)是唯一的.

4. 规范形

复系数二次型的规范形；规范形的唯一性(定理 3)

实系数二次型的规范形；规范形的唯一性(定理 4)

正、负惯性指数，符号差(定义 3)

相应的矩阵结论.

5. 正定二次型,正定矩阵.

正定二次型及正定矩阵的定义

实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是正定二次型的一些充分必要条件(定理2及推论).

正定矩阵的行列式必大于零.

顺序主子式,定理7.

6. 负定二次型,半正定二次型,半负定二次型,不定二次型.

定义,判别方法.

二、学习指导

1. 本章讨论的问题.

所谓"型"就是齐次式,二次型就是二次齐次式.在解析几何中,介绍过通过转轴把二次曲线或曲面的方程化成标准方程的情况.关于这一方面的推广,我们将在第九章介绍正交变换再加以解释(见教材384到385页),这一章主要从代数的角度来研究二次型,在非退化线性替换下将二次型化为标准形.同时,通过二次型与对称矩阵间的关系.研究对称矩阵在合同关系下的标准形及唯一性问题.

2. 二次型及其矩阵

一个二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j(a_{ij}=a_{ji})$ 可以用很多种方法表成 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$.只有当 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵时,$\boldsymbol{A}$ 才是唯一决定的,称为二次型 f 的矩阵.因此读者必须知道二次型的矩阵的定义并会熟练地写出二次型的矩阵表示及其矩阵.

为了以后能灵活地应用矩阵的合同关系来研究二次型的化简及其他问题.读者还需要会熟练地由一个对称矩阵写出以它为矩阵的二次型.

3. 可逆线性替换

定义 1 介绍了可逆线性替换的概念.

如果

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y} \tag{1}$$

是一个可逆线性替换,那么 $\boldsymbol{Y}$ 可表成 $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{X}$. 由一组取定的 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$ 经变换(1)可唯一地确定一组 $\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$. 反之亦然. 重要的是,如果 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$,即 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 不全为零,可推出 $\boldsymbol{Y}\neq\boldsymbol{0}$,即 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 不全为 0. 这一点是以后要经常用到的.

设二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}$,即 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$. 如果经过可逆变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$ 后 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 化为 $\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}$,那么

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}.$$

从这个式子可以看出应用二次型的矩阵表示的优越性,否则二次型经过可逆线性替换后,其表示式就比较复杂了.

如果 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 合同. 从上面的讨论可以看到,二次型的化简与矩阵在合同关系下的化简有着十分密切的关系. 在下面把二次型化为标准形,规范形,以及讨论正定二次型的时候,都可以从二次型及合同矩阵两个方面来考虑.

4. 标准形

所谓标准形,即表成平方和形式的二次型,书中介绍了二次型的标准形的存在及求标准形的方法(定理 1 及其证明). 也就是说任一个二次型都能通过可逆线性替换化为标准形,其具体的方法就是定理 1 的证明,也称配方法. 希望读者能通过具体的习题来掌握这个方法.

给了二次型 $f=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$,通过可逆线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$ 化为标准

形 $b_1y_1^2+b_2y_2^2+\cdots+b_ny_n^2=\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}$，其中 $\boldsymbol{B}$ 为对角矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_1&&&\\&b_2&&\\&&\ddots&\\&&&b_n\end{pmatrix}.$$

因此与标准形的存在相应的矩阵结果是：给了一个对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，可找到可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 为对角矩阵 $\boldsymbol{B}$，这个结论不仅可以用来检验我们用可逆变换化一个二次型为标准形的结果，还可以通过矩阵 $\boldsymbol{C}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 的计算来把二次型化为标准形．书中就介绍了给了对阵矩阵 $\boldsymbol{A}$，如何用初等变换把 $\boldsymbol{A}$ 化为合同的对角矩阵，即求可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$ 为对角矩阵的方法，以及用之于计算二次型的标准形及所作可逆线性变换的方法(P218 的例以及前面的说明)．

运用可逆线性变换把二次型化为标准形及用初等变换求可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$(其中 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}'$)为对角矩阵的方法是等价且可互补的．希望读者能灵活运用．通过习题来理解，总结经验来决定在什么情况选用哪一种方法较好．

从计算上很容易看出，二次型的标准形不是唯一的．但是标准形中非零系数的个数是唯一决定的，称为该二次型的秩．相应的矩阵结果是说：可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 为对角矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_1&&&\\&b_2&&\\&&\ddots&\\&&&b_n\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{B}$ 不是唯一决定的，但是 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 中不等于 0 的个数是唯一确定的，等于 $\boldsymbol{A}$(等于 $\boldsymbol{B}$)的秩．

5．规范形

因为标准形不是唯一的，就有可能进一步化简，要想把标准形 $b_1y_1^2+b_2y_2^2+\cdots+b_ny_n^2$ 化简．一般地需要把 $b_i(1\leqslant i\leqslant n)$开方，

因此介绍了两种情形.

(1) 复系数二次型

因为每个复数都可开方,因此,可将标准形进一步化为规范形

$$z_1^2+\cdots+z_r^2,$$

其中 r 等于二次型的秩,规范形的唯一性是显然的.

(2) 实系数二次型

在实数域中,只有非负实数才能开方,因此可将标准形化为

$$z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_q^2$$

称为规范形(需要注意必须将正系数的项排在前面).规范形的唯一性是需要证明的(定理 4).这个定理在理论和应用中都很重要,通常称为惯性定理.它的证明方法也是常用的方法.希望读者能了解并会运用(可通过补充题 3 来练习).

6. 正定二次型

正定二次型是一类特殊的实二次型.在实际的题中常会遇到.例如在力学中动能就是速度的正定二次型.正定二次型对应的矩阵称为正定矩阵,也是一类重要的矩阵.

要求掌握正定二次型(正定矩阵)的定义及条件,书中介绍了一些 $f=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 是正定二次型的判别方法:

① 应用定义

② $f(x_1,\cdots,x_n)$的规范形为 $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2$(充要条件)

③ $f(x_1,\cdots,x_n)$的正惯性指数 $=n$(充要条件)

④ $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵合同,即有可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}$(充要条件)

⑤ 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$(充要条件)

⑥ $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式全大于 0(充要条件)

⑦ $|\boldsymbol{A}|>0$(必要条件)

7. 其他实二次型

除了正定二次型外,其他二次型可分为负定二次型、半正定二次型、半负定二次型及不定二次型共五类.

实对称矩阵也可分成这样五类.

因为 $f=X'AX$ 是负定的充要条件为 $-f=X'(-A)X$ 是正定的,所以可以得出负定二次型(负定矩阵)的一些条件,读者可以自己总结一下.

关于半正定二次型(半正定矩阵)定理 8 给出了一些判别条件.

三、习题、提示与解答

1. (1)用非退化线性替换化下列二次型为标准形,并利用矩阵验算所得结果:

1) $-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$;

2) $x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2$;

3) $x_1^2-3x_2^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$;

4) $8x_1x_4+2x_3x_4+2x_2x_3+8x_2x_4$;

5) $x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4$;

6) $x_1^2+2x_2^2+x_4^2+4x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$;

7) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_3x_4$.

解 1) 作非退化线性替换

$$\begin{cases} x_1=y_1+y_2, \\ x_2=y_1-y_2, \\ x_3=y_3, \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} &-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3 \\ &=-4(y_1^2-y_2^2)+2(y_1y_3+y_2y_3)+2(y_1y_3-y_2y_3) \\ &=-4y_1^2+4y_2^2+4y_1y_3 \\ &=-(2y_1-y_3)^2+4y_2^2+y_3^2. \end{aligned}$$

再令

$$\begin{cases} z_1 = 2y_1 - y_3, \\ z_2 = y_2, \\ z_3 = y_3, \end{cases}$$

即得

$$\begin{aligned} &-4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \\ =& -z_1^2 + 4z_2^2 + z_3^2, \end{aligned}$$

所作非退化线性替换为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}z_1 + z_2 + \dfrac{1}{2}z_3, \\ x_2 = \dfrac{1}{2}z_1 - z_2 + \dfrac{1}{2}z_3, \\ x_3 = z_3, \end{cases}$$

记

$$\begin{aligned} &-4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \\ =& \boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{Z}, \end{aligned}$$

所作线性替换为

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}$$

则

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & 1 & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -1 & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

经验算

$$B = C'AC.$$

(答案不唯一)

2) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2$

$= (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2$

$= (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + 2x_3)^2,$

作非退化线性替换：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = y_1, \\ x_2 + 2x_3 = y_2, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + 2y_3, \\ x_2 = y_2 - 2y_3, \\ x_3 - y_3, \end{cases}$$

则原式化为标准形

$$y_1^2 + y_2^2.$$

矩阵关系：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = C'AC.$$

3) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-3x_2^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$

$$=(x_1-x_2+x_3)^2-4x_2^2-x_3^2-4x_2x_3$$

$$=(x_1-x_2+x_3)^2-(2x_2+x_3)^2,$$

$f(x_1,x_2,x_3)$经非退化线性替换为

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + x_3, \\ y_2 = 2x_2 + x_3, \\ y_3 = x_3, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + \dfrac{1}{2}y_2 - \dfrac{3}{2}y_3, \\ x_2 = \dfrac{1}{2}y_2 - \dfrac{1}{2}y_3, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$$

化为标准形　　$y_1^2 - y_2^2$.

矩阵关系

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix};\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}.$$

4) 二次型 $8x_1x_4+2x_3x_4+2x_2x_3+8x_2x_4$ 的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

令

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

则

$$C_1' A C_1 = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & -1 & -8 \end{pmatrix} = A_1.$$

再令

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$C_2' A_1 C_2 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \frac{1}{2} & -4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & -1 \\ 0 & -4 & -1 & -8 \end{pmatrix} = A_2.$$

再令

$$C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$C_3'A_2C_3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = A_3.$$

再令

$$C_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

则

$$C_4'A_3C_4 = \begin{pmatrix} 8 & & & \\ & -2 & & \\ & & -4 & \\ & & & 4 \end{pmatrix}.$$

令

$$C = C_1C_2C_3C_4 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{4} & -\frac{9}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

则

$$C'AC = \begin{pmatrix} 8 & & & \\ & -2 & & \\ & & -4 & \\ & & & 4 \end{pmatrix} = B.$$

因此，原二次型经非退化线性替换

$$X = CY,$$

即

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{7}{4}y_3 - \frac{9}{4}y_4, \\ x_2 = \qquad y_2 - \frac{7}{4}y_3 + \frac{9}{4}y_4, \\ x_3 = \qquad\qquad y_3 + \quad y_4, \\ x_4 = y_1 - \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{4}y_3 - \frac{1}{4}y_4, \end{cases}$$

化为标准形

$$8y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_3^2 + 4y_4^2.$$

矩阵关系 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$，其中 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 见前面.

5) $\quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$

$$= (x_1 + x_3 + x_4)(x_2 + x_3 + x_4) - x_3^2 - x_4^2 - x_3x_4$$

$$= (x_1 + x_3 + x_4)(x_2 + x_3 + x_4) - (x_3 + \frac{1}{2}x_4)^2 - \frac{3}{4}x_4^2,$$

作非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 + x_4, \\ y_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2, \\ y_3 = x_3 + \frac{1}{2}x_4, \\ y_4 = x_4, \end{cases}$$

则此二次型化为标准形：$y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - \frac{3}{4}y_4^2$.

矩阵关系为

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix};\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&&&\\ &-1&&\\ &&-1&\\ &&&-\frac{3}{4}\end{pmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1&1\\ \frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&0\\ 0&0&1&\frac{1}{2}\\ 0&0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1&-\frac{1}{2}\\ 1&-1&-1&-\frac{1}{2}\\ 0&0&1&-\frac{1}{2}\\ 0&0&0&1\end{pmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}.
$$

6) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$

$$
\begin{aligned}
&=x_1^2+2x_2^2+x_4^2+4x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3+\\
&\quad 2x_2x_4+2x_3x_4\\
&=(x_1+2x_2+2x_3+x_4)^2-2x_2^2-4x_3^2-6x_2x_3-2x_2x_4-2x_3x_4\\
&=(x_1+2x_2+2x_3+x_4)^2-2\left(x_2+\frac{3}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4\right)^2+\\
&\quad \frac{1}{2}x_3^2+\frac{1}{2}x_4^2+x_3x_4\\
&=(x_1+2x_2+2x_3+x_4)^2-2\left(x_2+\frac{3}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4\right)^2+\\
&\quad \frac{1}{2}(x_3+x_4)^2,
\end{aligned}
$$

所以 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$经非退化线性替换

$$
\begin{cases}y_1=x_1+2x_2+2x_3+x_4,\\ y_2=x_2+\frac{3}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4,\\ y_3=x_3+x_4,\\ y_4=x_4,\end{cases}
$$

化为标准形：

$$y_1^2-2y_2^2+\frac{1}{2}y_3^2,$$

矩阵关系：

$$\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B},$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\2&2&1&1\\2&1&0&1\\1&1&1&1\end{pmatrix};\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&&&\\&-2&&\\&&\frac{1}{2}&\\&&&0\end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&1&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&1&-1\\0&1&-\frac{3}{2}&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

7) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_3x_4$
$$=(x_1+x_2)^2+(x_3+x_4)^2+2x_2x_3.$$

经可逆线性替换

$$\begin{cases}x_1=y_1-y_3-y_4,\\x_2=y_3+y_4,\\x_3=y_3-y_4,\\x_4=y_2-y_3+y_4,\end{cases}$$

化为标准形

$$y_1^2+y_2^2+2y_3^2-2y_4^2.$$

矩阵关系：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix};\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&2&\\&&&-2\end{pmatrix};$$

$$C=\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\\0&1&-1&1\end{pmatrix}.$$

$$C'AC=B.$$

2. 证明:秩等于 r 的对称矩阵可以表成 r 个秩等于 1 的对称矩阵之和.

证明 设 A 是一个秩为 r 的 n 级对称矩阵,则有可逆矩阵 C 使

$$C'AC=\begin{pmatrix}1&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&\\&&1&&&&&&\\&&&1&&&&&\\&&&&\ddots&&&&\\&&&&&1&&&\\&&&&&&0&&\\&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&0\end{pmatrix},$$

其中 1 的个数等于 A 的秩. 用 E_{ii} 表示对角线上第 i 个元素为 1,其余地方都为 0 的 n 级矩阵,则

$$A=C'^{-1}\begin{pmatrix}1&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&\\&&1&&&&&&\\&&&1&&&&&\\&&&&\ddots&&&&\\&&&&&1&&&\\&&&&&&0&&\\&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&0\end{pmatrix}C^{-1}$$

$$= \boldsymbol{C}'^{-1}[\boldsymbol{E}_{11} + \cdots + \boldsymbol{E}_{pp} + \boldsymbol{E}_{p+1,p+1} + \cdots + \boldsymbol{E}_{rr}]\boldsymbol{C}^{-1}$$

$$= \boldsymbol{C}'^{-1}\boldsymbol{E}_{11}\boldsymbol{C}^{-1} + \cdots + \boldsymbol{C}'^{-1}\boldsymbol{E}_{pp}\boldsymbol{C}^{-1} + \boldsymbol{C}'^{-1}\boldsymbol{E}_{p+1,p+1}\boldsymbol{C}^{-1} + \cdots + \boldsymbol{C}'^{-1}\boldsymbol{E}_{rr}\boldsymbol{C}^{-1},$$

因为 $\boldsymbol{E}_{ii}$ 的秩等于 1,而 $\boldsymbol{C}^{-1}$ 为可逆矩阵,所以上式中的 $\boldsymbol{C}'^{-1}\boldsymbol{E}_{ii}\boldsymbol{C}^{-1}$ 的秩等于 1,而且

$$\boldsymbol{C}'^{-1}\boldsymbol{E}_{ii}\boldsymbol{C}^{-1} = (\boldsymbol{C}^{-1})'\boldsymbol{E}_{ii}\boldsymbol{C}^{-1},$$

因此 $\boldsymbol{C}'^{-1}\boldsymbol{E}_{ii}\boldsymbol{C}^{-1}(i=1,2,\cdots,r)$ 是对称矩阵. 因此 $\boldsymbol{A}$ 可以表成 r 个秩等于 1 的对称矩阵之和.

3. 证明 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix}$ 合同,其中 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列.

证明 方法 1 用 $\boldsymbol{E}_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 表示第 i 行第 j 列的元素为 1,其余元素为 0 的 n 级矩阵. 令

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{E}_{i_1 1} + \boldsymbol{E}_{i_2 2} + \cdots + \boldsymbol{E}_{i_n n},$$

则 $\boldsymbol{C}$ 可逆,且

$$\boldsymbol{C}'\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix},$$

所以这两个矩阵是合同的.

方法 2 作 n 元二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$,则 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的矩阵为

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

作可逆线性替换：

$$\begin{cases} y_1 = x_{i_1}, \\ y_2 = x_{i_2}, \\ \quad \vdots \\ y_n = x_{i_n}, \end{cases}$$

则 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$化为

$$\lambda_{i_1} y_1^2 + \lambda_{i_2} y_2^2 + \cdots + \lambda_{i_n} y_n^2,$$

其矩阵为

$$\begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix},$$

所以这两个矩阵合同.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 级矩阵，证明：

1) $\boldsymbol{A}$ 是反对称矩阵当且仅当对任一个 n 维向量 $\boldsymbol{X}$，有 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = 0$；

2) 如果 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵，且对任一个 n 维向量 $\boldsymbol{X}$ 有 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = 0$，那么 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$.

证明 1) 设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

如果 A 对任一 X,都有 $X'AX=0$,令

$$X=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \\ (\text{第 } i \text{ 个})\\ \\ \\ \\ \end{array}$$

得

$$X'AX=a_{ii}=0,i=1,2,\cdots,n.$$

再令

$$X=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \\ \text{第 } i \text{ 个}\\ \\ \\ \\ \text{第 } j \text{ 个}\\ \\ \\ \\ \end{array}\quad(i,j=1,2,\cdots,n,i\neq j),$$

得

$$X'AX=a_{jj}+a_{ij}+a_{ji}+a_{ii}=0,\text{则 } a_{ij}=-a_{ji},$$

因此 $A'=-A$.

反之,如果 A 是一个反对称矩阵:$A'=-A$,则对任一个 n 维向量 X,都有

$$X'AX=(X'AX)'=X'A'X=-X'AX,$$

因此

$$X'AX = 0.$$

2) 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,对

$$X_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} (\text{第 } i \text{ 个}),$$

由 $X'AX=0$ 得 $a_{ii}=0(i=1,2,\cdots,n)$.

再对

$$X_{ij} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \text{第 } i \text{ 个} \\ \\ \\ \text{第 } j \text{ 个} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

由 $X_{ij}'AX_{ij}=0$ 得

$$a_{ii}+a_{ij}+a_{ji}+a_{jj}=0.$$

因为 $a_{ii}=a_{jj}=0$, $a_{ij}=a_{ji}$,所以 $a_{ij}=0$, $i,j=1,2,\cdots,n$, $i\neq j$,得证 $A=O$.

5. 如果把实 n 级对称矩阵按合同分类,即两个实 n 级对称矩阵属于同一类当且仅当它们合同,问共有几类?

解 因为两个实 n 级对称矩阵合同的充分必要条件是:它们的秩和正惯性指数相同.而秩为 r 的矩阵,其正惯性指数可能是

0,1,2,…或 r.共 $r+1$ 种可能.而 r 的可能为 $0,1,2,\cdots,n$.因此所求类数为

$$1+2+3+\cdots+n+1=\frac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

6. 证明:一个实二次型可以分解成两个实系数的一次齐次多项式的乘积的充分必要条件是,它的秩等于2和符号差等于0,或者秩等于1.

证明 必要性.如果实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$可分解成两个一次齐次多项式的乘积:

$$\begin{aligned}&f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\=&(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)(b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n).\end{aligned}$$

有两种可能:

1) $(b_1,b_2,\cdots,b_n)=k(a_1,a_2,\cdots,a_n),k\neq0$.

于是

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=k(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)^2.$$

因为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 不全为0,以 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为第一行,作一个可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$,线性替换

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}$$

是可逆的.并且 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$经过这个线性替换化为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=ky_1^2\qquad(k\neq0)$$

此时 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的秩等于1.

2) $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$与$(b_1,b_2,\cdots,b_n)$线性无关.于是可以$(a_1,a_2,\cdots,a_n),(b_1,b_2,\cdots,b_n)$为第1、2行作一个可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$,可逆线性替换

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{X},$$

将 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$化为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=y_1y_2,$$

再令

$$\begin{cases} y_1=z_1+z_2, \\ y_2=z_1-z_2, \\ y_3=z_3, \\ \quad\cdots \\ y_n=z_n, \end{cases}$$

则

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=z_1^2-z_2^2,$$

所以在这种情况,f 的秩等于 2,符号差为 0.

充分性.1) 如果 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的秩为 1,则 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$可经可逆线性替换

$$\begin{cases} y_1=c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1n}x_n, \\ y_2=c_{21}x_1+c_{22}x_2+\cdots+c_{2n}x_n, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n=c_{n1}x_1+c_{n2}x_2+\cdots+c_{nn}x_n, \end{cases}$$

化为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=y_1^2=(c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1n}x_n)^2.$$

2) 如果 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的秩为 2,符号差为 0.则 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$可经适当的可逆线性替换.

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{CX},$$

化为规范形

$$\begin{aligned} f&=y_1^2-y_2^2=(c_{11}x_1+\cdots+c_{1n}x_n)^2-(c_{21}x_1+\cdots+c_{2n}x_n)^2 \\ &=[(c_{11}+c_{21})x_1+\cdots+(c_{1n}+c_{2n})x_n]\cdot \\ &\quad[(c_{11}-c_{21})x_1+\cdots+(c_{1n}-c_{2n})x_n]. \end{aligned}$$

这两种情形都说明 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$可以分解成两个实系数一次

齐次多项式的乘积.

7. 判别下列二次型是否正定:

1) $99x_1^2-12x_1x_2+48x_1x_3+130x_2^2-60x_2x_3+71x_3^2$;

2) $10x_1^2+8x_1x_2+24x_1x_3+2x_2^2-28x_2x_3+x_3^2$;

3) $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$;

4) $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$.

解 1) 这个二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}99 & -6 & 24\\ -6 & 130 & -30\\ 24 & -30 & 71\end{pmatrix},$$

用 H_1,H_2,H_3 表示 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式,则

$$H_1=99>0,$$

$$H_2=\begin{vmatrix}99 & -6\\ -6 & 130\end{vmatrix}=12\ 834>0,$$

$$H_3=\begin{vmatrix}99 & -6 & 24\\ -6 & 130 & -30\\ 24 & -30 & 71\end{vmatrix}=7\ 558>0,$$

所以,这个二次型是正定的.

2)

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}10 & 4 & 12\\ 4 & 2 & -14\\ 12 & -14 & 1\end{pmatrix}$$

因为$|\boldsymbol{A}|<0$,

所以这个二次型不是正定的.

3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

因为

$$H_k = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \cdots & \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{(k级)} = \frac{k+1}{2^k} > 0 \quad (k = 1,2,\cdots,n),$$

所以这个二次型是正定的.

4) 是.

8. t 取什么值时,下列二次型是正定的:

1) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

2) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2tx_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$.

解 1) 因为二次型正定的条件是

$$H_1 = 1 > 0,$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{vmatrix} = 1 - t > 0, 即\ t < 1,$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -5t^2 - 4t$$
$$= -t(5t-4) > 0.$$

即 $0 < t < \frac{4}{5}$,

所以这个二次型是正定的条件是 $0<t<\frac{4}{5}$.

2）不论 t 取何值，所给二次型都不正定.

9. 证明：如果 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，那么 $\boldsymbol{A}$ 的主子式全大于零，所谓主子式就是行指标与列指标相同的子式.

提示 任一个主子式都可经过原二次型的一个适当的可逆线性替换，成为新表法的一个顺序主子式.

证明 对任意 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行，$i_1,i_2,\cdots,i_k$ 列的主子式. 补充 $i_{k+1},\cdots,i_n$ 使 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列. 作可逆线性替换：$y_1=x_{i_1}, y_2=x_{i_2},\cdots,y_n=x_{i_n}$，则

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}$$

$$=\boldsymbol{Y}'\begin{pmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_k} & \cdots & a_{i_1i_n} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_k} & \cdots & a_{i_2i_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \cdots & a_{i_ki_k} & \cdots & a_{i_ki_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i_ni_1} & a_{i_ni_2} & \cdots & a_{i_ni_k} & \cdots & a_{i_ni_n} \end{pmatrix}\boldsymbol{Y}.$$

这时 $\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}$ 仍正定. 它的顺序主子式：

$$\begin{vmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_k} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \cdots & a_{i_ki_k} \end{vmatrix}>0.$$

这是原矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任意 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行，$i_1,i_2,\cdots,i_k$ 列的主子式.

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵. 证明：当实数 t 充分大后，$t\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

证明 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$B = tE + A = \begin{pmatrix} t + a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & t + a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & t + a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{B}$ 的第 k 个顺序主子式为

$$H_k = \begin{vmatrix} t + a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{12} & t + a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1k} & a_{2k} & \cdots & t + a_{kk} \end{vmatrix} \quad (k = 1,2,\cdots,n).$$

这是 t 的一个 k 次多项式,首项系数为 1. 因此当 t 大于某个数 t_k 后, $H_k > 0$.

取 t_0 等于 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 中最大的一个,于是当 $t > t_0$ 后, $tE + A$ 是正定矩阵.

11. 证明:如果 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵,那么 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是正定矩阵.

证明 如果 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵,那么有可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使

$$C'AC = E,$$

则

$$C^{-1}A^{-1}(C^{-1})' = E,$$

即 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是正定矩阵.

12. 设 $\boldsymbol{A}$ 为一个 n 级实对称矩阵,且 $|\boldsymbol{A}| < 0$,证明,必存在实 n 维向量 $\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{0}$,使 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} < 0$.

证明 因为 $|\boldsymbol{A}| < 0$,所以 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 n,负惯性指数不等于 0. 于是有可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使

$$C'AC = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & d_{n-1} & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, d_i = \pm 1, i = 1,2,\cdots,n-1.$$

令

$$X = C\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

即有

$$X'AX = Y'(C'AC)Y = -1 < 0.$$

13. 如果 A、B 都是 n 级正定矩阵,证明:$A+B$ 也是正定矩阵.

提示 应用正定矩阵的定义.

证明 因为 A、B 都是 n 级正定矩阵,所以,对任意 n 维非零实向量 X,都有

$$X'AX > 0, X'BX > 0,$$

于是

$$X'(A+B)X = X'AX + X'BX > 0.$$

又由 A、B 都是 n 级实对称矩阵,知 $A+B$ 也是实对称矩阵,所以 $A+B$ 是正定矩阵.

14. 证明:二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是半正定的充分必要条件是它的正惯性指数与秩相等.

提示 应用规范形.

证明 设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 经可逆线性替换

$$X = CY,$$

化为规范形:

$$y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2.$$

如果 $f(x_1,\cdots,x_n)$的正惯性指数等于秩,那么规范形为

$$y_1^2+\cdots+y_r^2.$$

因此 $f(x_1,\cdots,x_n)=y_1^2+\cdots+y_r^2\geqslant 0$,

即 $f(x_1,\cdots,x_n)$是半正定的.

如果 $f(x_1,\cdots,x_n)$的正惯性指数不等于 r,即小于 r,则其规范形为

$$y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2.$$

$p<r$.则令

$$y_{p+1}=1,y_i=0,1\leqslant i\leqslant n,i\neq p+1.$$

代入 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{CY}$ 得一组 $x_1,\cdots,x_n$,此时

$$f(x_1,\cdots,x_n)=-1<0,$$

所以 $f(x_1,\cdots,x_n)$不是半正定的.

15. 证明: $n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2$ 是半正定的.

证明 $$\begin{aligned}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\\&=\sum_{i<j}(x_i-x_j)^2,\end{aligned}$$

因此恒有 $f(x_1,\cdots,x_n)\geqslant 0$,即 $f(x_1,\cdots,x_n)$是半正定的.

16. 设 $f(x_1,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{AX}$ 是一实二次型,若有实 n 维向量 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$ 使

$$\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{AX}_1>0,\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{AX}_2<0,$$

证明:必存在实 n 维向量 $\boldsymbol{X}_0\neq\boldsymbol{0}$,使 $\boldsymbol{X}_0'\boldsymbol{AX}_0=0$.

提示 令 $\boldsymbol{X}_0=k\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2$,适当选取 k.或应用正、负惯性指数.

证明 设 $f(x_1,\cdots,x_n)$经非退化线性替换

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{CY},$$

化为规范形

$$y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2.$$

因有 $\boldsymbol{X}_1$ 使

$$\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1>0,$$

故正惯性指数 $p>0$,又因有 $\boldsymbol{X}_2$ 使$\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_2<0$ 故负惯性指数>0.即 $r>p$.令

$$y_1=1,y_{p+1}=1,y_i=0,1\leqslant i\leqslant n,i\neq 1,p+1.$$

代入 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$,得一个实向量 $\boldsymbol{X}_0\neq\boldsymbol{0}$,就满足

$$\boldsymbol{X}_0'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0=1-1=0.$$

17. $\boldsymbol{A}$ 是一个实矩阵,证明秩$(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})=$秩$(\boldsymbol{A})$.

证明 考察下列两个齐次方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0},\tag{1}$$

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}.\tag{2}$$

显然(1)的解是(2)的解.反之设 $\boldsymbol{X}_0$ 是(2)的解,即 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{0}$.于是 $\boldsymbol{X}_0'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0)'(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0)=0$.令$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0)'=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,则有$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0)'(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0)=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=0$.即有$(y_1,y_2,\cdots,y_n)=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0)'=\boldsymbol{0}$,于是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{X}_0$ 也是(1)的解.这证明了(1)、(2)同解.(1),(2)的基础解系中有同样多的解.(1)、(2)的基础解系中应各有 $n-$秩$(\boldsymbol{A})$和 $n-$秩$(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})$个解.故秩$(\boldsymbol{A})=$秩$(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})$.

四、补充题、提示与解答

1. 用非退化线性替换化下列二次型为标准形,并用矩阵验算所得结果.

1) $$x_1x_{2n}+x_2x_{2n-1}+\cdots+x_nx_{n+1}.$$

提示 将 $x_ix_{2n-i+1}(i=1,2,\cdots,n)$分别化为平方差.

解 作可逆线性替换

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_{2n}, \\ x_2 = y_2 + y_{2n-1}, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = y_n + y_{n+1}, \\ x_{n+1} = y_n - y_{n+1}, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{2n} = y_1 - y_{2n}. \end{cases}$$

原二次型经此线性替换化为标准形

$$y_1^2 + \cdots + y_n^2 - y_{n+1}^2 - \cdots - y_{2n}^2.$$

矩阵关系:原二次型的矩阵表示为 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$,其中

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix};$$

所作的可逆线性替换为 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$,其中

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 1 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & 1 & -1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ 1 & & & & & -1 \end{pmatrix}.$$

最后化成 $\boldsymbol{Y}$ 的二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}.$$

2) $x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n$.

提示 令 $x_{2k-1}+x_{2k+1}=y_{2k-1}+y_{2k}$, $x_{2k}=y_{2k-1}-y_{2k}$, $k=1,2,\cdots,\frac{n}{2}$ 或 $\left(\frac{n-1}{2}\right)$, 并对 n 分奇偶进行讨论.

解 (i) 如果 n 是奇数.

令

$$\begin{cases} x_1+x_3=y_1+y_2, \\ x_2=y_1-y_2, \\ x_3+x_5=y_3+y_4, \\ x_4=y_3-y_4, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-2}+x_n=y_{n-2}+y_{n-1}, \\ x_{n-1}=y_{n-2}-y_{n-1}, \\ x_n=y_n. \end{cases}$$

解出 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{C} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}.$$

则原二次型化为标准形

$$y_1^2-y_2^2+y_3^2-y_4^2+\cdots+y_{n-2}^2-y_{n-1}^2.$$

相应的矩阵关系为:令原二次型矩阵为 $\mathbf{A}$, 则

$$
A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix},
$$

而

$$
C=\begin{pmatrix}
1 & 1 & -1 & -1 & \cdots & (-1)^{\frac{n+1}{2}} & (-1)^{\frac{n+1}{2}} & (-1)^{\frac{n-1}{2}}\\
1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & (-1)^{\frac{n-1}{2}} & (-1)^{\frac{n-1}{2}} & (-1)^{\frac{n-3}{2}}\\
0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix},
$$

最后的标准形的矩阵为

$$
C'AC=\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & \\
 & -1 & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & \\
 & & & -1 & & & & \\
 & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & -1 & \\
 & & & & & & & 0
\end{pmatrix}.
$$

(ii) 如果 n 是偶数.

令

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = y_1 + y_2, \\ \qquad x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 + x_5 = y_3 + y_4, \\ \qquad x_4 = y_3 - y_4, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-3} + x_{n-1} = y_{n-3} + y_{n-2}, \\ x_{n-2} \qquad\quad = y_{n-3} - y_{n-2}, \\ x_{n-1} \qquad\quad = y_{n-1} + y_n, \\ x_n \qquad\qquad = y_{n-1} - y_n. \end{cases}$$

解出 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{C} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix},$$

则原二次型化为标准形

$$y_1^2 - y_2^2 + \cdots + y_{n-1}^2 - y_n^2.$$

矩阵关系:原二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

而

$$C=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -1 & \cdots & (-1)^{\frac{n}{2}} & (-1)^{\frac{n}{2}}\\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & (-1)^{\frac{n}{2}-1} & (-1)^{\frac{n}{2}-1}\\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1\end{pmatrix},$$

最后标准形的矩阵为

$$C'AC=\begin{pmatrix}1 & & & & & & \\ & -1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & -1\end{pmatrix}.$$

3) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2+\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j$.

提示 逐步应用配方法,总结系数的公式.

解 原式 $=\left(x_1+\frac{1}{2}x_2+\cdots+\frac{1}{2}x_n\right)^2+\frac{3}{4}\sum\limits_{i=2}^{n} x_i^2+$

$$\frac{1}{2}\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j$$

$$=\left(x_1+\frac{1}{2}x_2+\cdots+\frac{1}{2}x_n\right)^2+$$

$$\frac{3}{4}\left(x_2+\frac{1}{3}x_3+\cdots+\frac{1}{3}x_n\right)^2+$$

$$\frac{4}{6}\sum_{i=3}^{n} x_i^2+\frac{1}{3}\sum_{3\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j$$

$$=\cdots$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \cdots + \frac{1}{2}x_n\right)^2 + \\
&\quad \frac{3}{4}\left(x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \cdots + \frac{1}{3}x_n\right)^2 + \\
&\quad \frac{4}{6}\left(x_3 + \frac{1}{4}x_4 + \cdots + \frac{1}{4}x_n\right)^2 + \cdots + \\
&\quad \frac{n+1}{2n}x_n^2,
\end{aligned}
$$

令

$$
\begin{cases}
x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 + \cdots + \dfrac{1}{2}x_n = y_1, \\
\qquad x_2 + \dfrac{1}{3}x_3 + \cdots + \dfrac{1}{3}x_n = y_2, \\
\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
\qquad x_{n-1} + \dfrac{1}{n}x_n = y_{n-1}, \\
\qquad x_n = y_n.
\end{cases}
$$

则原二次型化为标准形

$$
y_1^2 + \frac{3}{4}y_2^2 + \frac{4}{6}y_3^2 + \cdots + \frac{n+1}{2n}y_n^2.
$$

矩阵关系:原二次型的矩阵为

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\
\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 1
\end{pmatrix},
$$

而

$$
\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\
0 & 1 & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{1}{n}\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix}^{-1}
$$

$$
=\begin{pmatrix}
1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \cdots & -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n}\\
0 & 1 & -\frac{1}{3} & \cdots & -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n}\\
0 & 0 & 1 & \cdots & -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n}\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\frac{1}{n}\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix},
$$

最后标准形的矩阵为

$$
\boldsymbol{C}'\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix}
1 & & & & \\
 & \frac{3}{4} & & & \\
 & & \frac{4}{6} & & \\
 & & & \ddots & \\
 & & & & \frac{n+1}{2n}
\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}.
$$

4) $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$，其中 $\bar{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$.

提示 $(x_n-\bar{x})=-\sum\limits_{i=1}^{n-1}(x_i-\bar{x})$.

令 $\qquad x_i-\bar{x}=y_i,\ i=1,2,\cdots,n-1,$

$$x_n = y_n.$$

原式化为

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{n-1}^2 + (y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})^2,$$

展开,应用本题目 3)小题.

解 令

$$\begin{cases} x_1 - \bar{x} = y_1, \\ x_2 - \bar{x} = y_2, \\ \cdots\cdots \\ x_{n-1} - \bar{x} = y_{n-1}, \\ x_n = y_n, \end{cases}$$

则 $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i - (n-1)\bar{x} = \bar{x}$ 及 $x_n - \bar{x} = -\sum\limits_{i=1}^{n-1}(x_i - \bar{x})$.

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + \sum\limits_{i=1}^{n} y_i = y_1 + \bar{x}, \\ x_2 = y_2 + \sum\limits_{i=1}^{n} y_i = y_2 + \bar{x}, \\ \qquad \cdots\cdots \\ x_{n-1} = y_{n-1} + \sum\limits_{i=1}^{n} y_i = y_{n-1} + \bar{x}, \\ x_n = y_n. \end{cases}$$

这是一个可逆线性替换,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix},$$

代人原二次型得

$$y_1^2+\cdots+y_{n-1}^2+[-(y_1+\cdots+y_{n-1})]^2$$

$$=2\Big(\sum_{i=1}^{n-1}y_i^2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}y_iy_j\Big).$$

应用上题的类似的线性替换

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=C_2\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{3}&\cdots&-\frac{1}{n-1}&0\\0&1&-\frac{1}{3}&\cdots&-\frac{1}{n-1}&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_{n-1}\\z_n\end{pmatrix},$$

得到本题二次型的标准形为

$$2z_1^2+\frac{3}{2}z_2^2+\frac{4}{3}z_3^2+\cdots+\frac{n}{n-1}z_{n-1}^2.$$

矩阵关系:算出原二次型的矩阵为

$$A=\frac{1}{n}\begin{pmatrix}n-1&-1&-1&\cdots&-1&-1\\-1&n-1&-1&\cdots&-1&-1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\-1&-1&-1&\cdots&n-1&-1\\-1&-1&-1&\cdots&-1&n-1\end{pmatrix},$$

总的线性替换为 $X=(C_1C_2)Z$,其中算出

$$C_1C_2=\begin{pmatrix}2&1&1&\cdots&1&1\\1&2&1&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&1&1&\cdots&2&1\\0&0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \cdots & -\frac{1}{n-1} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \cdots & -\frac{1}{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & -\frac{1}{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{4}{3} & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{n}{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_{(n-1)\times(n-1)} & \boldsymbol{I}_{n-1} \\ \boldsymbol{O}_{1\times(n-1)} & 1 \end{pmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{C} = (c_{ij})_{(n-1)\times(n-1)}, c_{ij}$$

$$= (\boldsymbol{C}_2)_{ij} + \sum_{l=1}^{n} (\boldsymbol{C}_2)_{lj}, \boldsymbol{I}_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

最后标准形的矩阵是

$$(\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2)'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2)=\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & & & & & \\ & \frac{3}{2} & & & & \\ & & \frac{4}{3} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \frac{n}{n-1} & \\ & & & & & 0\end{pmatrix}.$$

2. 设实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{s}(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n)^2$. 证明：$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的秩等于矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn}\end{pmatrix}$$

的秩.

提示 适当调整变量的足标及平方项的次序.可设 $\boldsymbol{A}$ 左上角 r 级子式不等于 0.再参考上题 4)后面化简的方法.

证明 方法 1 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 r，将变量的足标及平方项的次序作适当调换.可设 $\boldsymbol{A}$ 的左上角 r 级子式不为 0.于是 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 行线性无关，后 $n-r$ 行都是前 r 行的线性组合.

作可逆线性替换

$$\begin{cases}y_1=a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_r=a_{r1}x_1+\cdots+a_{rn}x_n,\\ y_{r+1}=x_{r+1},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_n=x_n,\end{cases}$$

原二次型化为

$$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_r^2+l_{r+1}^2+\cdots+l_s^2,$$

其中 $l_{r+1},\cdots,l_s$ 都是 $y_1,y_2,\cdots,y_r$ 的一次齐次式．考虑 $y_1,y_2,\cdots,y_r$ 的二次型

$$g(y_1,y_2,\cdots,y_r)=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_r^2+l_{r+1}^2+\cdots+l_s^2.$$

因为对不全为 0 的 $c_1,c_2,\cdots,c_r$ 都有

$$g(c_1,c_2,\cdots,c_r)>0,$$

因此这是 $y_1,y_2,\cdots,y_r$ 的一个正定二次型，作为 $y_1,y_2,\cdots,y_r,\cdots,y_n$ 的二次型，它的秩为 r．所以原二次型的秩也等于 r．

方法 2　$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(\boldsymbol{AX})'(\boldsymbol{AX})=\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}$，这个二次型的矩阵是 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$．由 17 题知：秩$(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})$＝秩$(\boldsymbol{A})$，故 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的秩等于 $\boldsymbol{A}$ 的秩．

3．设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=l_1^2+l_2^2+\cdots+l_p^2-l_{p+1}^2-\cdots-l_{p+q}^2$，其中 $l_i,i=1,2,\cdots,p+q$，是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一次齐次式，证明：$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的正惯性指数$\leqslant p$，负惯性指数$\leqslant q$．

提示　参考本章定理 4 的证明方法．

证明　设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$经可逆线性替换

$$\begin{cases}y_1=c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1n}x_n,\\ y_2=c_{21}x_1+c_{22}x_2+\cdots+c_{2n}x_n,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_n=c_{n1}x_1+c_{n2}x_2+\cdots+c_{nn}x_n,\end{cases}$$

化为规范形：$y_1^2+\cdots+y_{p'}^2-y_{p'+1}^2-\cdots-y_{p'+q'}^2$．

其中 p',q'分别是$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的正、负惯性指数．

我们用反证法来证明 $p'\leqslant p$，如果 $p'>p$，考虑 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的齐次线性方程组

$$\begin{cases} l_1 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ l_p = 0, \\ y_{p'+1} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = 0. \end{cases}$$

这个齐次线性方程组有 n 个未知量,而有

$$p + (n - p') < n$$

个方程,因此有非零解,设

$$(k_1, \cdots, k_{p'}, k_{p'+1}, \cdots, k_n)$$

是一个非零解,代入得

$$\begin{aligned} f(k_1, \cdots, k_n) &= -l_{p+1}^2 - l_{p+2}^2 - \cdots - l_{p+q}^2 \\ &= y_1^2 + \cdots + y_{p'}^2. \end{aligned}$$

又因 $y'_{p+1} = \cdots = y_n = 0$,所以,$y_1, \cdots, y_{p'}$ 不全为 0,因而

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{p'}^2 > 0.$$

但是又有 $-l_{p+1}^2 - l_{p+2}^2 - \cdots - l_{p+q}^2 \leqslant 0$,

矛盾,所以 $p' \leqslant p$.

同法可证 $q' \leqslant q$.

4. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}$ 是一对称矩阵,且 $|\boldsymbol{A}_{11}| \neq 0$. 证明:存在 $\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}$ 使 $\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & * \end{pmatrix}$,其中 $*$ 表示一个级数与 $\boldsymbol{A}_{22}$ 相同的矩阵.

证明 令 $\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & -\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}$,则可证 $\boldsymbol{T}$ 满足题中要求,首先有

$$\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{B}_{22}$ 级数与 $\boldsymbol{A}_{22}$ 相同.

因为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}'$,所以 $(\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})'=\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 是一个对称矩阵,故 $\boldsymbol{B}_{21}=\boldsymbol{O}$. 证毕.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是反对称矩阵,证明: $\boldsymbol{A}$ 合同于矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & & & & \\ & & -1 & 0 & & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & & 0 & 1 & & & & \\ & & & & & -1 & 0 & & & & \\ & & & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

提示 分 $a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n}$ 全等于 0 或不全等于 0 两种情形,并用归纳法证明.

证明 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, a_{ij}=-a_{ji}.$$

我们用数学归纳法来证明结论.

当 $n=1$ 时,结论显然.

当 $n=2$ 时,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix}.$$

1) 如果 $a_{12}=0$,结论成立.

2) 如果 $a_{12}\neq 0$,则

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_{12}^{-1} \end{pmatrix}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_{12}^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

结论也成立.

假设结论对级数小于 n 的反对称矩阵都成立.

对于 n 级反对称矩阵 $\mathbf{A}$,可分两种情形.

1) $a_{11}=a_{12}=\cdots=a_{1n}=0$,于是 $a_{21}=\cdots=a_{n1}=0$,此时

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1\end{bmatrix},$$

其中 $\mathbf{A}_1$ 是一个 $n-1$ 级对称矩阵.

2) 设 $a_{11},\cdots,a_{1n}$ 不全为 0,不妨设 $a_{1i}\neq 0$, $i>1$,那么经过第 2,第 i 行两行交换及第 2、第 i 列两列交换,$\mathbf{A}$ 与下列矩阵合同:

$$\begin{bmatrix}0 & a_{1i} & \mathbf{0}\\ -a_{1i} & 0 & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{A}_2\end{bmatrix},$$

其中 $\mathbf{A}_2$ 是一个 $n-2$ 级对称矩阵,再用类似 $n=2$ 的方法可将 a_{1i} 化为 1,而使 $\mathbf{A}$ 与下列矩阵合同

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & \\ -1 & 0 & \\ & & \mathbf{A}_2\end{bmatrix}.$$

根据归纳法假设 $\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2$ 合同于形如

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & & \\ & & & -1 & 0 & & & & \\ & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & 0\end{bmatrix}$$

的矩阵,利用分块乘法易证 $\mathbf{A}$ 也与一个这种形式的矩阵合同,完成了归纳法.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 级实对称矩阵. 证明:存在一正实数 c 使对任一实 n 维向量 $\boldsymbol{X}$ 都有

$$|\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}|\leqslant c\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}.$$

提示 应用本章习题 10,取一个正实数 c 使得 $c\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 和 $c\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 都正定,则 c 即为所求.

证明 根据本章习题 10,有正实数 c_1,c_2,使

$$c_1\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A},c_2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$$

是正定矩阵,因此有正实数 c 使.

$$c\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A},c\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$$

都是正定矩阵.

于是对任一个 n 维实向量 $\boldsymbol{X}$,都有

$$\boldsymbol{X}'(c\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}\geqslant 0,\boldsymbol{X}'(c\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}\geqslant 0,$$

因此

$$-\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\leqslant c\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X},\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\leqslant c\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X},$$

从而有

$$|\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}|\leqslant c\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}.$$

7. 主对角线上全是 1 的上三角矩阵称为特殊上三角矩阵.

1) 设 $\boldsymbol{A}$ 是一对称矩阵,$\boldsymbol{T}$ 为特殊上三角矩阵,而 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$. 证明:$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的对应顺序主子式有相同的值;

2) 证明:如果对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式全不为 0,那么一定有一特殊上三角矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使 $\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 成对角形;

3) 利用以上结果证明定理 7 的充分性.

证明 1) 将 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{T}$ 表成分块矩阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix},\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{T}_{11} & \boldsymbol{T}_{12}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{T}_{22}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{11},\boldsymbol{T}_{11}$是 s 级方阵($s=1,2,\cdots,n$),于是

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{T}_{11}'\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{T}_{11} & \boldsymbol{B}_{12}\\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix},$$

其中，$T'_{11}AT_{11}$ 是 s 级方阵，并且 T_{11} 是特殊上三角矩阵.

于是 B 的第 s 个顺序主子式为

$$|T'_{11}A_{11}T_{11}| = |T'_{11}|\cdot|A_{11}|\cdot|T_{11}| = |A_{11}|,$$

即等于 A 的第 s 个顺序主子式，$s=1,2,\cdots,n$.

2）对 A 的级数作数学归纳法.

$n=1$ 时，结论显然. 设对 $n-1$ 级实对称矩阵结论已成立.

设 A 是 n 级实对称矩阵且 $a_{11}\neq 0$，令

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{a_{21}}{a_{11}} & \cdots & -\dfrac{a_{n1}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

则 T_1 是一个特殊上三角矩阵，而 T'_1 是特殊下三角矩阵.

$$T'_1AT_1 = T'_1\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & B_1 & \\ a_{n1} & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

其中 A_1 是一个实对称矩阵且其顺序主子式全不为 0. 因此，根据数学归纳法假设，有 $n-1$ 级特殊上三角矩阵 T_2，使得

$$T'_2A_1T_2 = \begin{pmatrix} b_2 & & & \\ & b_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{pmatrix}$$

为对角矩阵. 令 $T = T_1\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T_2 \end{pmatrix}$，

则

$$T'AT=\begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & b_2 & & & \\ & & b_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & b_n \end{pmatrix}$$

是一个对角矩阵，而 T 是两个特殊上三角矩阵的乘积，仍是特殊上三角矩阵.

根据归纳法原理，结论对一切 n 级实对称矩阵都成立.

3) 设 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式全大于 0，于是由 2) 有特殊上三角矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使 $\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为对角矩阵：

$$\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{pmatrix}.$$

由 1) $\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 的顺序主子式与 $\boldsymbol{A}$ 的对应顺序主子式相同，也都大于 0，因此有

$$b_1>0,\ b_1b_2>0,\ \cdots,\ b_1b_2\cdots b_n>0,$$

由此得

$$b_i>0,\ i=1,2,\cdots,n,$$

所以 A 是一个正定矩阵.

8. 证明

1) 如果 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\,(a_{ij}=a_{ji})$ 是正定二次型，那么

$$f(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & y_1 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & y_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix}$$

是负定二次型；

2）如果 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，那么 $|\boldsymbol{A}| \leqslant a_{nn}\boldsymbol{P}_{n-1}$，这里 $\boldsymbol{P}_{n-1}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 级的顺序主子式；

3）如果 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，那么 $|\boldsymbol{A}| \leqslant a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$；

4）如果 $\boldsymbol{T}=(t_{ij})$ 是 n 级实可逆矩阵，那么

$$|\boldsymbol{T}|^2 \leqslant \prod_{j=1}^{n}(t_{1j}^2+\cdots+t_{nj}^2).$$

提示 1）令 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni})'$，$i=1,2,\cdots,n$. $\boldsymbol{A}=(a_{ij})=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$. 当 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 具体给定之后：令 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)'=(y_{10},y_{20},\cdots,y_{n0})'=\boldsymbol{\beta}$. 由 $|\boldsymbol{A}|=|a_{ij}|\neq 0$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是线性无关的. 而 $\boldsymbol{\beta}$ 可表成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的线性组合：$\boldsymbol{\beta}=c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{\alpha}_n=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}$，可证

$$f(y_{10},y_{20},\cdots,y_{n0})=-\boldsymbol{C}'\boldsymbol{AC}|\boldsymbol{A}|,$$

其中 $\boldsymbol{C}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)'$.

2）记

$$g(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1})=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & y_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & y_{n-1} \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_{n-1} & 0 \end{vmatrix},$$

将本题 1)用于 $g(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1})$，即可证明.

3）应用 2).

4）$\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}$ 是一个正定矩阵，应用 3).

证明 1）令 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni})'$，$i=1,2,\cdots,n$，

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n),$$

则因 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ 是正定二次型，所以 $|\boldsymbol{A}|=|a_{ij}|>0$ 且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，设 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 取定一组值 $y_{10},y_{20},\cdots,y_{n0}$.

令 $\boldsymbol{\beta}=(y_{10},y_{20},\cdots,y_{n0})$，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出，设为 $\boldsymbol{\beta}=c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$. 其中 $\boldsymbol{C}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)'$，则

$$
\begin{aligned}
&f(y_{10},y_{20},\cdots,y_{n0})\\
&=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & y_{10}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & y_{20}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & y_{n0}\\ y_{10} & y_{20} & \cdots & y_{n0} & 0\end{vmatrix}\\
&=\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n & \boldsymbol{\beta}\\ y_{10} & y_{20} & \cdots & y_{n0} & 0\end{vmatrix}\\
&=\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n & \sum\limits_{i=1}^{n} c_i\boldsymbol{\alpha}_i\\ y_{10} & y_{20} & \cdots & y_{n0} & 0\end{vmatrix}\\
&\xlongequal[\text{每个 } i \text{ 列的 } c_i \text{ 倍}]{\text{最后一列减去}}\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n & \mathbf{0}\\ y_{10} & y_{20} & \cdots & y_{n0} & -\sum\limits_{i=1}^{n} c_iy_{i0}\end{vmatrix}\\
&=-|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|\sum_{i=1}^{n} c_iy_{i0}\\
&=-|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{C}'\boldsymbol{\beta}=-|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}).
\end{aligned}
$$

而且当 $\boldsymbol{\beta}=(y_{10},y_{20},\cdots,y_{n0})'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\neq\mathbf{0}$ 时，$\boldsymbol{C}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)'$ 不为 $\mathbf{0}$，所以此时 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}>0$（因 $\boldsymbol{A}$ 正定）. 于是

$$f(y_{10},y_{20},\cdots,y_{n0})<0,$$

即 $f(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 是负定二次型.

2)

$$
|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n}\\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0\end{vmatrix}+
$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中第 1 项为负定二次型.

$$f(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & y_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & y_{n-1} \\ y_1 & \cdots & y_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

在 $y_i = a_{in}, i = 1, 2, \cdots, n-1$ 处的值,故小于或等于 0. 因此

$$|\boldsymbol{A}| \leqslant a_{nn}\boldsymbol{P}_{n-1}.$$

3) 由 2),

$$|\boldsymbol{A}| \leqslant a_{nn}\boldsymbol{P}_{n-1} \leqslant a_{n-1,n-1}a_{nn}\boldsymbol{P}_{n-2} \leqslant \cdots \leqslant a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

4)

$\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T} =$

$$\begin{pmatrix} t_{11}^2 + t_{21}^2 + \cdots + t_{n1}^2 & & & * \\ & t_{12}^2 + t_{22}^2 + \cdots + t_{n2}^2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & t_{1n}^2 + t_{2n}^2 + \cdots + t_{nn}^2 \end{pmatrix},$$

因为 $\boldsymbol{T}$ 可逆,所以 $\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}$ 是一个正定矩阵. 应用 3),即得

$$|\boldsymbol{T}|^2 = |\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}| \leqslant \prod_{i=1}^{n} (t_{1i}^2 + \cdots + t_{ni}^2).$$

9. 证明:实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是半正定的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的一切主子式全大于或等于零(所谓 k 级主子式是指形为

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \cdots & a_{i_1 i_k} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \cdots & a_{i_2 i_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_k i_1} & a_{i_k i_2} & \cdots & a_{i_k i_k} \end{vmatrix}$$

的 k 级子式，其中 $1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n$）.

证明 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$是一个 n 级实对称矩阵.用 $\boldsymbol{A}_{i_1i_2\cdots i_k}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的一个 k 级主子阵：

$$\begin{bmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_k} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \cdots & a_{i_ki_k} \end{bmatrix} \quad (1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n).$$

用 $D_{i_1i_2\cdots i_k}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的一个 k 级主子式：

$$D_{i_1i_2\cdots i_k}=|\boldsymbol{A}_{i_1i_2\cdots i_k}|.$$

必要性.如果 $\boldsymbol{A}$ 是一个半正定矩阵.那么

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$$

是一个半正定二次型.令

$$x_j=0,j\neq i_1,i_2,\cdots,i_k,$$

得到一个 k 元实二次型.

$$g(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_k})=(x_{i_1}\ x_{i_2}\cdots x_{i_k})\boldsymbol{A}_{i_1i_2\cdots i_k}\begin{bmatrix} x_{i_1} \\ x_{i_2} \\ \vdots \\ x_{i_k} \end{bmatrix},$$

由 $f(x_1,\cdots,x_n)$的半正定性可推出 $g(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_k})$也是半正定二次型，因此其行列式 $D_{i_1i_2\cdots i_k}\geqslant 0$.

充分性.作 $\boldsymbol{A}+\varepsilon\boldsymbol{E}$，来证明.对任何 $\varepsilon>0$ 它是正定的.考虑它的第 m 个顺序主子式

$$|\boldsymbol{A}_{12\cdots m}+\varepsilon\boldsymbol{E}_m|=\begin{vmatrix} a_{11}+\varepsilon & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22}+\varepsilon & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm}+\varepsilon \end{vmatrix}$$

$$=\varepsilon^n+a_{n-1}\varepsilon^{n-1}+\cdots+a_1\varepsilon+a_0.$$

现来证所有 $a_i\geqslant 0, i=0,1,2,\cdots,n-1$. 为此对任一 n 级方阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$,构作行列式

$$f(\boldsymbol{B},\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=\begin{vmatrix} b_{11}+\varepsilon_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}+\varepsilon_2 & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}+\varepsilon_n \end{vmatrix}.$$

这是变元 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的 n 元多项式. 对任意 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$,把 $1,2,\cdots,n$ 中去掉 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 剩下的数字由小到大排成 $1\leqslant i_{k+1}<i_{k+2}<\cdots<i_n\leqslant n$. 上述行列式中含 $\varepsilon_{i_1}\varepsilon_{i_2}\cdots\varepsilon_{i_k}$ 的项的总和为 $\varepsilon_{i_1}\varepsilon_{i_2}\cdots\varepsilon_{i_k}f(\boldsymbol{B}_{i_{k+1}i_{k+2}\cdots i_n},\varepsilon_{i_{k+1}},\cdots,\varepsilon_{i_n})$. $f(\boldsymbol{B}_{i_{k+1}\cdots i_n},\varepsilon_{i_{k+1}},\cdots,\varepsilon_{i_n})$ 是 $f(\boldsymbol{B},\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$ 的 $i_1,\cdots,i_k$ 行, $i_1,\cdots,i_k$ 列的代数余子式. 此和中恰为 k 次项的和是 $\varepsilon_{i_1}\cdots\varepsilon_{i_k}|\boldsymbol{B}_{i_{k+1},\cdots,i_n}|$, $|\boldsymbol{B}_{i_{k+1},\cdots,i_n}|$ 是 $\boldsymbol{B}$ 中 $i_1,\cdots,i_k$ 行, $i_1,\cdots,i_k$ 列的代数余子式. 于是 $f(\boldsymbol{B},\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$ 中全部 k 次项的和为

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2\cdots<i_k\leqslant n}\varepsilon_{i_1}\varepsilon_{i_2}\cdots\varepsilon_{i_k}|\boldsymbol{B}_{i_{k+1},\cdots,i_n}|.$$

于是 $f(\boldsymbol{A}_{1,2,\cdots,m},\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m)$ 中全部 k 次项的总和为

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2\cdots<i_k\leqslant m}\varepsilon_{i_1}\varepsilon_{i_2}\cdots\varepsilon_{i_k}|(\boldsymbol{A}_{1,2,\cdots,m})_{i_{k+1},\cdots,i_m}|.$$

而 $|\boldsymbol{A}_{12\cdots m}+\varepsilon\boldsymbol{E}_m|=f(\boldsymbol{A}_{12\cdots m},\varepsilon,\varepsilon,\cdots,\varepsilon)$ 中 ε^k 的系数为

$$a_k=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant m}|(\boldsymbol{A}_{12\cdots m})_{i_{k+1},\cdots,i_m}|.$$

由于 $|(\boldsymbol{A}_{12\cdots m})_{i_{k+1},\cdots,i_m}|$ 是 $\boldsymbol{A}_{12\cdots m}$ 的主子式,也是 $\boldsymbol{A}$ 的主子式,由假设全大于等于零,故 $a_k\geqslant 0$. 则当 $\varepsilon>0$ 时, $\boldsymbol{A}+\varepsilon\boldsymbol{E}$ 的顺序主子式

$$|\boldsymbol{A}_{12\cdots m}+\varepsilon\boldsymbol{E}_m|=\varepsilon^n+a_{n-1}\varepsilon^{n-1}+\cdots+a_1\varepsilon+a_0>0.$$

故 $\boldsymbol{A}+\epsilon\boldsymbol{E}$ 是正定矩阵.

对任意 $\boldsymbol{X}=(x_1\cdots x_n)'$ 是非零实向量,则 $\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{A}+\epsilon\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}>0$,对任意 $\epsilon>0$ 成立.令 $\epsilon\to0$,则 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\geqslant0$.这就证明了 $\boldsymbol{A}$ 是半正定矩阵.

第六章　线性空间

一、内容提要

1. 集合的概念

集合的表示法，集合的包含与相等，集合的交和并.

2. 映射的概念

像、原像，映射的相等，变换的概念

3. 映射的乘积的概念

恒等映射，映射乘积的结合律

4. 满射，单射，双射，逆映射

5. 线性空间的定义与简单性质

线性空间的定义

加法和数量乘法的简单性质（与 n 维向量空间及 $m\times n$ 矩阵集合的同类性质进行对照）

6. 维数，基与坐标

线性组合，线性相关，线性无关，等价.

几个常用的（也是基本的）性质

极大线性无关组，秩

维数的定义

有限维空间中基的存在，向量在某组基下的坐标

7. 基变换与坐标变换

向量组的形式写法与运算性质.

8. 线性子空间

定义及判定方法

例子

生成子空间 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$

9. 子空间的交与和,交与和的运算性质

维数公式:维(V_1)+维(V_2)=维(V_1+V_2)+维$(V_1\cap V_2)$

10. 子空间的直和

$V_1\oplus V_2$ 的定义,V_1+V_2 是直和的等价条件

多个子空间的直和的定义与等价条件

11. 线性空间的同构

同构的定义及性质

有限维线性空间同构的充要条件是它们的维数相等

二、学习指导

1. 本章引入了抽象的数学对象线性空间.这也是从小学、中学学习数学以来的第一个严格定义的抽象的数学对象.不少读者对数学中的抽象讨论开始时是很不习惯的,因而难以理解.甚至有些同学在高等代数学完后仍会提问:线性空间是什么东西?因此我们要在这里加上一段注释.

线性空间是抽象的数学对象,即它是一个抽象的数学概念.实际上它是一类对象的总名称,这类对象都有各自的加法和数量乘法,且满足八条性质.凡是具有这样一些性质的对象都称为(某数域 P 上的)线性空间.我们学到过的一些例子如数域 P 上的 n 维向量空间,数域 P 上全体多项式的集合,数域 P 上齐次线性方程组的解集合,数域 P 上 $m\times n$ 矩阵的集合,几何平面上全体向量的集合,几何空间中全体向量的集合……等都是某数域上的线性空间.线性空间不是指某一个具体的空间,而是所有有着前面所述性质的对象的总名称.日常生活中会谈到"人"这个名称,它就是世界上所有个别的人,如张三,李四,……的总称.它不是某个具体的

人.我们可以说张三是人,但若提问:人是谁?就不合理了,同样可以说某对象是一个线性空间,但不能问:线性空间是哪一个对象?

引入抽象的数学概念的好处是对具有同类性质的事物可以统一处理,达到事半功倍的效果.比如我们证明了 n 维线性空间中的 n 个线性无关的向量都是它的一组基.这个定理的结论是一般结论.一些读者说,我连线性空间都看不到,这个结论更无法了解了.实际上这个一般结论的正确理解为:如果某一个具体的数学对象是某数域上的 n 维线性空间,则它里面的任意 n 个线性无关的元素都是它的一组基(即它里面的任一元素都可唯一地表成这 n 个线性无关的元素的线性组合).也就是说对于抽象线性空间成立的一般结论对于线性空间类型的所有具体的数学对象都成立.

例如,P^n 是 n 维的,其中向量组

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,\cdots,0),\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0,\cdots,0),\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n=(0,0,\cdots,1)$$

是线性无关的,就是 P^n 的一组基.又向量组

$$\boldsymbol{\eta}_1=(1,0,\cdots,0),\boldsymbol{\eta}_2=(1,1,0,\cdots,0),\cdots,\boldsymbol{\eta}_n=(1,1,\cdots,1)$$

也是线性无关的,又是一组基.

又例如,$P[x]_n$ 是 n 维的.其中多项式组

$$1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$$

是线性无关的,就是 $P[x]_n$ 的一组基.而多项式组

$$1,(x+1),(x+1)^2,\cdots,(x+1)^{n-1}$$

也是线性无关的,又是一组基.

有了这些例子作基础,前面的一般结论:n 维线性空间中的 n 个线性无关的向量是一组基,就能具体地理解了.

2. 线性空间是数学中最基本的研究对象,它具有极广泛的背景.除了讲过的一些例子外,齐次线性方程组的解集合,某些微分方程组的解集合,某些函数系生成的空间,包含某数域 P 的更大的数域……都是线性空间,且都有各自的用途.因此线性空间的理论非常基本,非常重要.它的基本内容有下列概念:线性组合,线性相关,线性无关,线性表出,等价,极大线性无关组,秩,维数,基与

坐标，同构，子空间的和与直和等. 当然加法，数量乘法的基本性质以及与上述概念有关的各种性质也属基本内容.

对于线性相关，线性无关，极大线性无关组，秩这些概念的背景可参考第三章学习指导中和这一节中的有关补充内容.

3. 基与坐标概念引入的意义

设 V 是数域 P 上 n 维线性空间. $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是它的一组基. 任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$，可唯一地表成

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{Z},$$

其中

$$\boldsymbol{Z}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}.$$

于是可建立线性空间的同构：

$$V\to P^n,$$

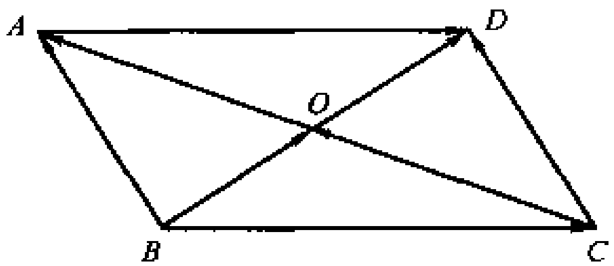
$$\boldsymbol{\alpha}\mapsto \boldsymbol{Z}.$$

这个同构对应保持向量的加法，数量乘法. 保持线性组合，线性相关，线性无关等. 于是可以把 V 中元素间的有关运算性质的任何关系的判定变成 P^n 中的有关运算性质的相应的关系的判定. 也即把 V 中对象的性质的讨论化成了数量关系的讨论. 解析几何中引入坐标系就把几何问题（“形”的问题）化成数量关系问题（例如解方程等）. 这种数学上的处理常称为“形”与“数”的转换. 线性空间中基与坐标的引入可称为广义上的“形”与“数”的转换. 这种转换的应用在第七章中求特征值、特征向量时得到充分的体现.

4. 用几何向量的加法和数量乘法运算证明两个几何命题.说明向量的运算性质在研究几何问题中的作用.

(1) 证明平行四边形的对角线互相平分.

证明 设平行四边形▱$ABCD$ 如下图,对角线 AC 与 BD 交于 O. 我们来证明$\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$.



由平行四边形的对边平行相等,故有$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$,$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. 又$\overrightarrow{CO}$与$\overrightarrow{OA}$共线可设$\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{CO}$,同样可设$\overrightarrow{BO}=y\overrightarrow{OD}$,则 $y\overrightarrow{OD}+x\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OD}$. 于是$(y-1)\overrightarrow{OD}=(1-x)\overrightarrow{CO}$.

由于$\overrightarrow{OD}$与$\overrightarrow{CO}$不共线,故两端必须为零向量,即得

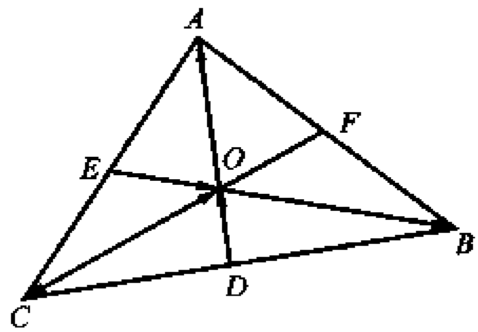
$$(y-1)=0,\quad 1-x=0.$$

故 $y=x=1$. 就证明了$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$.

(2) 已知△ABC 三条边的中线交于 O,证明 $OD=\frac{1}{3}AD$, $OF=\frac{1}{3}CF$, $OE=\frac{1}{3}BE$.

证明 只证 $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AO}$,类似地可证$\overrightarrow{FO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$,$\overrightarrow{EO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.

易见
$$\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CO}, \tag{1}$$
$$\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BO}, \tag{2}$$



$$\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{O}. \qquad (3)$$

作(1)+(2),利用(3),得 $2\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{BO}$

$$=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{BO},$$

即有
$$\overrightarrow{DO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{BO}), \qquad (4)$$

同样有

$$\overrightarrow{EO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{CO}), \qquad (5)$$

$$\overrightarrow{FO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}). \qquad (6)$$

设 $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{DO}$,$\overrightarrow{BO}=y\overrightarrow{EO}$,$\overrightarrow{CO}=z\overrightarrow{FO}$,代入(4),(5)并将两式相减,则有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EO}-\overrightarrow{DO}&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{BO})\\&=\frac{1}{2}x\overrightarrow{DO}-\frac{1}{2}y\overrightarrow{EO},\end{aligned}$$

故

$$\left(1+\frac{1}{2}y\right)\overrightarrow{EO}=\left(1+\frac{1}{2}x\right)\overrightarrow{DO}.$$

由于$\overrightarrow{EO}$,$\overrightarrow{DO}$不共线,两端必须为零向量. 于是

$$1+\frac{1}{2}y=0, \quad 1+\frac{1}{2}x=0.$$

同样可证 $1+\frac{1}{2}z=0$,由此得 $x=y=z=-2$,就证明了

$$\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AO},$$

$$\overrightarrow{OE} = -\overrightarrow{EO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BO},$$

$$\overrightarrow{OF} = -\overrightarrow{FO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CO}.$$

上面两个结论的证明完全是运用向量的运算性质，这说明了运算性质的重要．线性空间的主要特征是有加法运算和数量乘法运算．线性空间中的一些问题主要是讨论线性表出的各种性质，这全靠线性空间的运算性质来讨论和研究．

5．从 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)$ 的生成元 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的多余性到线性相关等概念的引入．

这一段与第三章学习指导中的补充内容 1－3 的讨论类似，也是为线性空间的一些基本概念提供一些背景知识．

问题：非零的线性子空间 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)$ 的生成元是否可以减少？若可减少，不妨设可以去掉 $\boldsymbol{\alpha}_r$，由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1}$ 可生成同一子空间，即有 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1})=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)$．这时 $\boldsymbol{\alpha}_r$ 就是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1}$ 的线性组合，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1},\boldsymbol{\alpha}_r$ 是线性相关的．若 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)$ 的生成元不能减少，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是线性无关的．

对 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)$ 逐步减去多余的生成元，直到不能减少为止．不妨设最后剩下的生成元是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(s\leqslant r)$，即 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中无多余生成元．易知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的极大线性无关组．

若对 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)$ 用另外的步骤减去多余的生成元直到不能减少为止．不妨设剩下的生成元是 $\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_2',\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t'$．则 $\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_2',\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t'$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的另一个极大线性无关组．自然会提出问题：s 与 t 相等吗？这就是向量组的秩的概念产生的背景．

学习了第三章学习指导中的补充内容 1－3 及本段内容，大致

上能体会到线性空间的一些基本概念、基本性质和结论是如何产生的了.

6. 近代代数,以至近代数学中研究的问题具有一般性,普遍性.因此多以抽象的方法来研究.即用抽象的集合来代表各个具体的集合,用集合中元素间的数学关系来代表具体集合中元素间的各种关系.比如数域 P 上线性空间就被定义为一个非空集合,其中能作加法和数量乘法两种运算,且具有八条运算性质.所以近代数学中常常使用抽象集合的语言和有关的概念.

抽象集合语言中的名词和概念有:包含,子集,相等,并集,交集,映射,像元,原像,单射,满射,双射,逆映射等.所以原书中本章开头就是介绍与集合有关的基本概念,进一步的代数书(如聂灵绍和丁石孙编的《代数学引论》)中还有更多的介绍.

请读者记住,集合的语言是近代数学的基本语言.

三、习题、提示与解答

1. 设 $M\subset N$,证明:

$$M\cap N=M,M\cup N=N.$$

提示 1) 当 $M\subset N$ 时,要证明 $M\cap N\subset M$ 及 $M\subset M\cap N$.

2) 弄清如何证明"$\subset$".

3) 当 $M\subset N$ 时,证明 $M\cup N\subset N$ 及 $N\subset M\cup N$.

证明 1) 任意 $a\in M\cap N$,则有 $a\in M$,故 $M\cap N\subset M$.又若 $a\in M$,由 $M\subset N$,则有 $a\in N$.故 $a\in M\cap N$,即 $M\subset M\cap N$.这就证明了 $M\cap N=M$.

2) 任意 $a\in N$ 显然有 $a\in M\cup N$,即有 $N\subset M\cup N$.又对 $a\in M\cup N$,有 $a\in M$ 或 $a\in N$.对 $a\in M$,由 $M\subset N$,自然有 $a\in N$.故 $a\in M\cup N$ 时总有 $a\in N$,即 $M\cup N\subset N$.故 $M\cup N=N$.

2. 证明:

$$M\cap(N\cup L)=(M\cap N)\cup(M\cap L),$$

$$M\cup(N\cap L)=(M\cup N)\cap(M\cup L).$$

证明 先证第一式. 对 $a\in M\cap(N\cup L)$, 有 $a\in M$ 及 $a\in N$ 或 $a\in L$. 于是 $a\in M\cap N$ 或 $M\cap L$, 即 $a\in(M\cap N)\cup(M\cap L)$. 故得

$$M\cap(N\cup L)\subset(M\cap N)\cup(M\cap L).$$

对 $a\in(M\cap N)\cup(M\cap L)$, 有 $a\in M\cap N$ 或 $a\in M\cap L$. 当 $a\in M\cap N$ 时有 $a\in M$ 及 $a\in N$, 当 $a\in M\cap L$ 时, 有 $a\in M$ 及 $a\in L$. 故都有 $a\in M$, 且 $a\in N$ 或 $a\in L$, 即 $a\in N\cup L$. 于是 $a\in M\cap(N\cup L)$, 得到

$$(M\cap N)\cup(M\cap L)\subset M\cap(N\cup L),$$

从而证明了 $$(M\cap N)\cup(M\cap L)=M\cap(N\cup L).$$

类似地可以证明第二式.

3. 检验以下集合对于所指的线性运算是否构成实数域上的线性空间:

1) 次数等于 $n(n\geqslant1)$ 的实系数多项式的全体, 对于多项式的加法和数量乘法;

2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $n\times n$ 实矩阵, $\boldsymbol{A}$ 的实系数多项式 $f(\boldsymbol{A})$ 的全体, 对于矩阵的加法和数量乘法;

3) 全体 n 级实对称(反对称, 上三角)矩阵, 对于矩阵的加法和数量乘法;

4) 平面上不平行于某一向量的全部向量所成的集合, 对于向量的加法和数量乘法;

5) 全体实数的二元数列, 对于下面定义的运算:

$$(a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2+a_1a_2),$$

$$k\circ(a_1,b_1)=\left(ka_1,kb_1+\frac{k(k-1)}{2}a_1^2\right);$$

6) 平面上全体向量, 对于通常的加法和如下定义的数量

乘法：

$$k\circ\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0};$$

7）集合与加法同 6），数量乘法定义为：

$$k\circ\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha};$$

8）全体正实数 $\mathbf{R}^{+}$，加法与数量乘法定义为：

$$a\oplus b=ab,$$
$$k\circ a=a^{k}.$$

解 1）否．该集合中没有零多项式，即没有零元素，故不能构成线性空间．

2）是．令 $V=\{f(\boldsymbol{A})\mid f(x)$是实系数多项式$\}$．给定 $f(\boldsymbol{A})$，$g(\boldsymbol{A})\in V$及 k 是实数，这时 $f(x)$及 $g(x)$是实系数多项式，可令 $f(x)+g(x)=h(x)$，$kf(x)=d(x)$，则 $h(x)$及 $d(x)$仍是实系数多项式．于是

$$f(\boldsymbol{A})+g(\boldsymbol{A})=h(\boldsymbol{A})\in V,$$
$$kf(\boldsymbol{A})=d(\boldsymbol{A})\in V.$$

又 V 中元素皆为 $n\times n$ 实系数矩阵，矩阵的加法和数量乘法自然满足线性空间的八条性质，故 V 构成实数域上的线性空间．

3）只对全体 $n\times n$ 实反对称矩阵证明它对矩阵的加法和数量乘法构成实数域上的线性空间．设 $n\times n$ 实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 皆为反对称，即有

$$\boldsymbol{A}'=-\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}'=-\boldsymbol{B}.$$

则

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})'=\boldsymbol{A}'+\boldsymbol{B}'=-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}),$$
$$(k\boldsymbol{A})'=k\boldsymbol{A}'=-k\boldsymbol{A}\qquad(k\text{ 为实数}),$$

故它们都是实反对称矩阵，即全体 $n\times n$ 实反对称矩阵的集合对加法和数量乘法都封闭．又八条运算性质是自然具备的．故构成实线性空间．

4）否．这集合中不含零向量，故不构成线性空间．

5）是．令 V 是全体实二元数列的集合．按定义它对加法和数量乘法是封闭的．下面验证八条运算性质．

1° 加法交换律显然成立．

2° 加法结合律：

$$
\begin{aligned}
&[(a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2)]\oplus(a_3,b_3)\\
&=(a_1+a_2,b_1+b_2+a_1a_2)\oplus(a_3,b_3)\\
&=(a_1+a_2+a_3,b_1+b_2+a_1a_2+b_3+a_1a_3+a_2a_3),\\
&(a_1,b_1)\oplus[(a_2,b_2)\oplus(a_3+b_3)]\\
&=(a_1,b_1)\oplus(a_2+a_3,b_2+b_3+a_2a_3)\\
&=(a_1+a_2+a_3,b_1+b_2+b_3+a_2a_3+a_1a_2+a_1a_3),
\end{aligned}
$$

两者相等，故成立．

3° $(0,0)$是加法零元素．

4° $(-a,a^2-b)$是(a,b)的负元素．

5° $1\circ(a,b)=\left(1\cdot a,1\cdot b+\dfrac{1(1-1)}{2}a^2\right)=(a,b)$.

$$
\begin{aligned}
6°\ k\circ(l\circ(a,b))&=k\circ\left(la,lb+\frac{l(l-1)}{2}a^2\right)\\
&=\left(kla,k\left(lb+\frac{l(l-1)}{2}a^2\right)+\frac{k(k-1)}{2}(la)^2\right)\\
&=\left(kla,klb+\frac{kl(kl-1)}{2}a^2\right)\\
&=(kl)\circ(a,b).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
7°\ &(k+l)\circ(a,b)\\
&=\left((k+l)a,(k+l)b+\frac{(k+l)(k+l-1)}{2}a^2\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k\circ(a,b)\oplus l\circ(a,b)&=\left(ka,kb+\frac{k(k-1)}{2}a^2\right)\oplus\left(la,lb+\frac{l(l-1)}{2}a^2\right)\\
&=\left((k+l)a,(k+l)b+\left(\frac{k(k-1)}{2}+\frac{l(l-1)}{2}+kl\right)a^2\right)\\
&=\left((k+l)a,(k+l)b+\frac{(k+l)(k+l-1)}{2}a^2\right)=(k+l)\circ(a,b).
\end{aligned}
$$

8° $k\circ[(a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2)]=k\circ(a_1+a_2,b_1+b_2+a_1a_2)$

$$=\left(k(a_1+a_2),k(b_1+b_2+a_1a_2)+\frac{k(k-1)}{2}(a_1+a_2)^2\right).$$

$$k\circ(a_1,b_1)\oplus k\circ(a_2,b_2)$$

$$=\left(ka_1,kb_1+\frac{k(k-1)}{2}a_1^2\right)\oplus\left(ka_2,kb_2+\frac{k(k-1)}{2}a_2^2\right)$$

$$=\left(k(a_1+a_2),k(b_1+b_2)+\frac{k(k-1)}{2}(a_1^2+a_2^2)+k^2a_1a_2\right)$$

$$=\left(k(a_1+a_2),k(b_1+b_2+a_1a_2)+\frac{k(k-1)}{2}(a_1+a_2)^2-\right.$$

$$\left.\frac{k(k-1)}{2}(a_1+a_2)^2+\frac{k(k-1)}{2}(a_1^2+a_2^2)+(k^2-k)a_1a_2\right)$$

$$=\left(k(a_1+a_2),k(b_1+b_2+a_1a_2)+\frac{k(k-1)}{2}(a_1+a_2)^2\right)$$

$$=k\circ[(a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2)].$$

故 V 具备八条运算性质,构成线性空间.

6) 否.取平面上任一非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$,并取 $k=1$.按线性空间运算性质应有

$$k\circ\boldsymbol{\alpha}=1\circ\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}.$$

但按题目中定义则是

$$k\circ\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}.$$

故不符合线性空间的要求.

7) 否.取平面上任一非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$,取 $k=0$.按线性空间性质应有

$$k\circ\boldsymbol{\alpha}=0\circ\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}.$$

但按题目中定义

$$0\circ\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}.$$

故不符合线性空间的要求.

8）是．首先 $\mathbf{R}^+$ 对定义的加法和数量乘法是封闭的．下面逐条验证八条性质．

1° $a\oplus b=ab=ba=b\oplus a$；

2° $(a\oplus b)\oplus c=(ab)c=a(bc)=a\oplus(b\oplus c)$；

3° 1 是零元，$a\oplus 1=a\cdot 1=a$．

4° a 的负元是 $\frac{1}{a}$，$a\oplus\frac{1}{a}=a\cdot\frac{1}{a}=1$；

5° $1\circ a=a^1=a$；

6° $k\circ(l\circ a)=(a^l)^k=a^{lk}=a^{kl}=(kl)\circ a$；

7° $(k+l)\circ a=a^{k+l}=a^ka^l=(k\circ a)\oplus(l\circ a)$；

8° $k\circ(a\oplus b)=(ab)^k=a^kb^k=(k\circ a)\oplus(k\circ b)$．

故 $\mathbf{R}^+$ 构成线性空间．

4．在线性空间中，证明：

1）$k\mathbf{0}=\mathbf{0}$；

2）$k(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}-k\boldsymbol{\beta}$．

证明 1）
$$\begin{aligned}k\mathbf{0}&=k(\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha}))=k\boldsymbol{\alpha}+k(-\boldsymbol{\alpha})=k\boldsymbol{\alpha}+k(-1)\boldsymbol{\alpha}\\&=k\boldsymbol{\alpha}+(-k)\boldsymbol{\alpha}=(k+(-k))\boldsymbol{\alpha}=0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}.\end{aligned}$$

2）
$$\begin{aligned}k(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})&=k(\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta}))=k\boldsymbol{\alpha}+k(-\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k(-1)\boldsymbol{\beta}\\&=k\boldsymbol{\alpha}+(-1)k\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{\alpha}+(-k\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}-k\boldsymbol{\beta}.\end{aligned}$$

5．证明：在实函数空间中，$1,\cos^2 t,\cos 2t$ 是线性相关的．

证明 中学学过三角恒等式，$\cos 2t=2\cos^2 t-1$，由此有 $1\cdot 1+(-2)\cdot\cos^2 t+1\cdot\cos 2t=0$，故 $1,\cos^2 t,\cos 2t$ 是线性相关的．

6．如果 $f_1(x),f_2(x),f_3(x)$ 是线性空间 $P[x]$ 中三个互素的多项式，但其中任意两个都不互素，那么它们线性无关．

证明 设有一组数 k_1,k_2,k_3 使 $k_1f_1(x)+k_2f_2(x)+k_3f_3(x)=0$，要证 $k_1=k_2=k_3=0$．若有某 $k_i\neq 0$，不妨设为 $k_1\neq 0$，则可得
$$f_1(x)=-\frac{k_2}{k_1}f_2(x)-\frac{k_3}{k_1}f_3(x).$$

由此知道，$f_2(x)$，$f_3(x)$的公因式皆为$f_1(x)$的因式. 而题设$f_2(x)$，$f_3(x)$有非常数公因式，故$f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$有非常数公因式，与题设$f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$互素矛盾. 故$k_1=k_2=k_3=0$，即$f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$线性无关.

7. 在P^4中，求向量ξ在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$下的坐标，设

1) $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,1,1,1)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(1,1,-1,-1)$，

$\boldsymbol{\varepsilon}_3=(1,-1,1,-1)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_4=(1,-1,-1,1)$，

$\boldsymbol{\xi}=(1,2,1,1)$；

2) $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,1,0,1)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(2,1,3,1)$，

$\boldsymbol{\varepsilon}_3=(1,1,0,0)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_4=(0,1,-1,-1)$，

$\boldsymbol{\xi}=(0,0,0,1)$.

解 1) 令$\boldsymbol{\xi}=x_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+x_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+x_3\boldsymbol{\varepsilon}_3+x_4\boldsymbol{\varepsilon}_4$，由此得线性方程组

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}$$

可解出，得

$$x_1=\frac{5}{4},x_2=\frac{1}{4},x_3=-\frac{1}{4},x_4=-\frac{1}{4}.$$

2) 令$\boldsymbol{\xi}=x_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+x_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+x_3\boldsymbol{\varepsilon}_3+x_4\boldsymbol{\varepsilon}_4$，由此得线性方程组

$$\begin{pmatrix}1&2&1&0\\1&1&1&1\\0&3&0&-1\\1&1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

可解出，得

$$x_1=1, x_2=0, x_3=-1, x_4=0.$$

8. 求下列线性空间的维数与一组基:

1) 数域 P 上的空间 $P^{n\times n}$;

2) $P^{n\times n}$ 中全体对称(反对称,上三角)矩阵作成的数域 P 上的空间;

3) 第 3 题 8)中的空间;

4) 实数域上由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全体实系数多项式组成的空间,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\omega&0\\0&0&\omega^2\end{pmatrix}, \omega=\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}.$$

解 1) 令

$$\boldsymbol{E}_{ij}=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}0&\cdots&0&\cdots&0\\\vdots&&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&1&\cdots&0\\\vdots&&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0&\cdots&0\end{pmatrix}_{n\times n}, & i\\ j & \end{array}$$

即 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 的元素除去第 i 行,第 j 列处为 1 外,其余全为零.

于是任意 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}$. 又设

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}=\boldsymbol{O},$$

则

$$(a_{ij})=\boldsymbol{O}.$$

故 $a_{ij}=0$,所有 $i=1,2,\cdots,n, j=1,2,\cdots,n$,即 $\{\boldsymbol{E}_{ij}\}$ 是线性无关的. 又任意 $\boldsymbol{A}\in P^{n\times n}$ 是 $\{\boldsymbol{E}_{ij}\}$ 的线性组合,故 $\{\boldsymbol{E}_{ij}\}$ 是 $P^{n\times n}$ 的一组基,且 $P^{n\times n}$ 是 n^2 维的.

2）令 V_1 是 $P^{n\times n}$ 中反对称矩阵的集合，V_2 是 $P^{n\times n}$ 中上三角阵的集合，V_3 是 $P^{n\times n}$ 中对称矩阵的集合，则

$$V_1 = \left\{ \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}(\boldsymbol{E}_{ij} - \boldsymbol{E}_{ji}) \,\middle|\, a_{ij} \in P \right\},$$

$$V_2 = \left\{ \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij}\boldsymbol{E}_{ij} \,\middle|\, a_{ij} \in P \right\},$$

$$V_3 = \left\{ \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij}(\boldsymbol{E}_{ij} + \boldsymbol{E}_{ji}) \,\middle|\, a_{ij} \in P \right\},$$

$\{\boldsymbol{E}_{ij} - \boldsymbol{E}_{ji}, 1\leqslant i<j\leqslant n\}$ 是 V_1 的基，V_1 是 $\frac{n(n-1)}{2}$ 维的．$\{\boldsymbol{E}_{ij}, 1\leqslant i\leqslant j\leqslant n\}$ 是 V_2 的基，V_2 是 $\frac{n(n+1)}{2}$ 的 $\{\boldsymbol{E}_{ij} + \boldsymbol{E}_{ji}, 1\leqslant i\leqslant j\leqslant n\}$ 是 V_3 的基，V_3 是 $\frac{n(n+1)}{2}$ 维的．

3）对任意 $a\in\mathbf{R}^+$，令 $\log_{10} a = k$，则 $a = 10^k = k\circ 10$．又 $10\neq 1$，它不是 $\mathbf{R}^+$ 的加法 $\oplus$ 的零元素，故是线性无关的．于是 10 是 $\mathbf{R}^+$ 这个线性空间的一组基，且 $\mathbf{R}^+$ 是一维的．

4）记

$$V = \{f(\boldsymbol{A}) \mid f(x) \text{是实系数多项式}\}.$$

由于 $\omega^3 = 1$，故

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \omega^2 & \\ & & \omega^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \omega^2 & \\ & & \omega \end{pmatrix},$$

及

$$\boldsymbol{A}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{E},$$

对任意 k 有

$\boldsymbol{A}^{3k} = \boldsymbol{E}, \boldsymbol{A}^{3k+1} = \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^{3k+2} = \boldsymbol{A}^2$．

对任意 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$，令 $g(x) = (a_0 + a_3 + a_6$

$+\cdots)+(a_1+a_4+\cdots)x+(a_2+a_5+a_8+\cdots)x^2$，则 $f(\boldsymbol{A})=g(\boldsymbol{A})$. 故 V 中任一元是 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^2$ 的线性组合.

现设 $a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}+a_2\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$. 即有

$$\begin{cases}a_0+a_1+a_2=0,\\ a_0+a_1\omega+a_2\omega^2=0,\\ a_0+a_1\omega^2+a_2\omega^4=0.\end{cases}$$

其系数行列式为范德蒙德行列式

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \omega & \omega^2\\ 1 & \omega^2 & (\omega^2)^2\end{vmatrix}=(1-\omega)(1-\omega^2)(\omega^2-\omega)\neq 0.$$

故上述方程组只有零解，即 $a_0=a_1=a_2=0$. 于是 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^2$ 是线性无关的，因而是 V 的一组基. V 是三维的.

9. 在 P^4 中，求由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 的过渡矩阵，并求向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在所指基下的坐标. 设

1) $\begin{cases}\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0,0),\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0,0),\\ \boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,0,1,0),\\ \boldsymbol{\varepsilon}_4=(0,0,0,1),\end{cases}$ $\begin{cases}\boldsymbol{\eta}_1=(2,1,-1,1),\\ \boldsymbol{\eta}_2=(0,3,1,0),\\ \boldsymbol{\eta}_3=(5,3,2,1),\\ \boldsymbol{\eta}_4=(6,6,1,3),\end{cases}$

$\boldsymbol{\xi}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 在 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 下的坐标；

2) $\begin{cases}\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,2,-1,0),\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2=(1,-1,1,1),\\ \boldsymbol{\varepsilon}_3=(-1,2,1,1),\\ \boldsymbol{\varepsilon}_4=(-1,-1,0,1),\end{cases}$ $\begin{cases}\boldsymbol{\eta}_1=(2,1,0,1),\\ \boldsymbol{\eta}_2=(0,1,2,2),\\ \boldsymbol{\eta}_3=(-2,1,1,2),\\ \boldsymbol{\eta}_4=(1,3,1,2),\end{cases}$

$\boldsymbol{\xi}=(1,0,0,0)$ 在 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 下的坐标；

3) $\begin{cases}\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,1,1,1),\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2=(1,1,-1,-1),\\ \boldsymbol{\varepsilon}_3=(1,-1,1,-1),\\ \boldsymbol{\varepsilon}_4=(1,-1,-1,1),\end{cases}$ $\begin{cases}\boldsymbol{\eta}_1=(1,1,0,1),\\ \boldsymbol{\eta}_2=(2,1,3,1),\\ \boldsymbol{\eta}_3=(1,1,0,0),\\ \boldsymbol{\eta}_4=(0,1,-1,-1),\end{cases}$

$\boldsymbol{\xi}=(1,0,0,-1)$在 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 下的坐标.

解 1) $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 是单位向量组成的基. $\boldsymbol{\eta}_i$ 的各分量恰是它在此基下的各个坐标,故 $\boldsymbol{\eta}_i^{\mathrm{T}}$ 就是过渡矩阵的第 i 列. 因此过渡矩阵是

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

设向量 $\boldsymbol{\xi}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$在$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4)$下的坐标为$(y_1,y_2,y_3,y_4)$,则

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

经计算

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{1}{3} & -1 & -\frac{11}{9} \\ \frac{1}{27} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{3} & -\frac{23}{27} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{7}{27} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{26}{27} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

2) 把 $\boldsymbol{\varepsilon}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\varepsilon}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\varepsilon}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\varepsilon}_4^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_4^{\mathrm{T}}$ 分别按列排成矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$. 记过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列 $\boldsymbol{A}_i$ 就是 $\boldsymbol{\eta}_i$ 在 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 下的坐标向量,即 $\boldsymbol{\eta}_i=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\boldsymbol{A}_i$. 用矩阵写出来,就是

$$\boldsymbol{\eta}_i^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{A}_i,\ i=1,2,\cdots,4.$$

再利用矩阵分块运算,就可写成

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{A}.$$

于是

$$A = M^{-1}N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{13} & \frac{2}{13} & -\frac{6}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{5}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{3}{13} & \frac{4}{13} \\ -\frac{2}{13} & \frac{3}{13} & \frac{4}{13} & \frac{1}{13} \\ -\frac{3}{13} & -\frac{2}{13} & -\frac{7}{13} & \frac{8}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

经计算得

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\xi = (1,0,0,0)$在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的坐标是

$$M^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{13} \\ \frac{5}{13} \\ -\frac{2}{13} \\ -\frac{3}{13} \end{pmatrix}.$$

3) 仿照题 2)，把 $\varepsilon_1^{\mathrm{T}}, \varepsilon_2^{\mathrm{T}}, \varepsilon_3^{\mathrm{T}}, \varepsilon_4^{\mathrm{T}}$ 和 $\eta_1^{\mathrm{T}}, \eta_2^{\mathrm{T}}, \eta_3^{\mathrm{T}}, \eta_4^{\mathrm{T}}$ 分别按列排成矩阵 M 和 N，记过渡矩阵为 A. 则有

$$A = M^{-1}N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

经计算

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$\xi=(1,0,0,-1)$在 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 下的坐标是

$$N^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \\ 4 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

10. 继第 9 题 1),求一非零向量 ξ,它在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 与 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 下有相同的坐标.

解 设 $\xi=(x_1,x_2,x_3,x_4)$

$$=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

由于过渡矩阵是

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

可得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

即

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\boldsymbol{0},$$

可解得其一般解为$(x_1, x_1, x_1, -x_1)$，x_1 取遍 P 中的数. 当 $x_1=1$ 时，得一非零向量 $\boldsymbol{\xi}=(1,1,1,-1)$在此两组基下坐标相同.

11. 证明：实数域作为它自身上的线性空间与第 3 题 8)中的空间同构.

证明 第 3 题 8)中已证 $\mathbf{R}^{+}$ 是 $\mathbf{R}$ 上一维空间，$\mathbf{R}$ 也是自身上的一维空间，故同构，其同构可选下列对应：

$$\mathbf{R}^{+}\to\mathbf{R},$$
$$a\mapsto\log_{10}a.$$

12. 设 V_1, V_2 都是线性空间 V 的子空间，且 $V_1\subset V_2$，证明：如果 V_1 的维数和 V_2 的维数相等，那么 $V_1=V_2$.

证明 设维(V_1) = 维(V_2) = r，可取 V_1 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$. 因 $V_1\subset V_2$，这也是 V_2 中 r 个线性无关的向量，因维$(V_2)=r$，故它是 V_2 的基. 因此

$$V_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r \text{ 的全部线性组合}\}=V_2.$$

13. 设 $\boldsymbol{A}\in P^{n\times n}$:

1) 证明:全体与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵组成 $P^{n\times n}$ 的一子空间记作 $C(\boldsymbol{A})$;

2) 当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 时,求 $C(\boldsymbol{A})$;

3) 当

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&2&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n\end{pmatrix}$$

时,求 $C(\boldsymbol{A})$ 的维数和一组基.

解 1) 显然 $C(\boldsymbol{A})$ 非空,又是 $P^{n\times n}$ 中加法封闭和数量乘法封闭的子集,故构成子空间.

2) $P^{n\times n}$ 中任一矩阵都与 $\boldsymbol{E}$ 交换,故 $C(\boldsymbol{E})=P^{n\times n}$.

3) 设 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$,满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}$,即

$$\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}1&&&\\&2&&\\&&\ddots&\\&&&n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&&\\&2&&\\&&\ddots&\\&&&n\end{pmatrix}\boldsymbol{B},$$

则 $b_{ij}j=ib_{ij}$, $i,j=1,2,\cdots,n$. 故当 $i\neq j$ 时有 $b_{ij}=0$,即 $\boldsymbol{B}$ 是对角阵. 反之,对角阵也属于 $C(\boldsymbol{A})$. 这就证明了 $C(\boldsymbol{A})$ 是 $P^{n\times n}$ 中全体对角阵所成的子空间.

$C(\boldsymbol{A})$ 的一组基可取 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{22},\cdots,\boldsymbol{E}_{nn}$,其维数为 n.

14. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&1&2\end{pmatrix},$$

求 $P^{3\times3}$ 中全体与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵所成子空间的维数和一组基.

解 令

$$T = A - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

显然 $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{3\times 3} \in C(\boldsymbol{A})$当且仅当 $\boldsymbol{B} \in C(\boldsymbol{T})$,也即 $\boldsymbol{BT} = \boldsymbol{TB}$.写出来就是

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},$$

即为

$$\begin{pmatrix} 3b_{13} & b_{13} & b_{13} \\ 3b_{23} & b_{23} & b_{23} \\ 3b_{33} & b_{33} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3b_{11} + b_{21} + b_{31} & 3b_{12} + b_{22} + b_{32} & 3b_{13} + b_{23} + b_{33} \end{pmatrix}.$$

由对应元素相等,得出

$$\begin{cases} b_{13} = b_{23} = 0, \\ 3b_{33} = 3b_{11} + b_{21} + b_{31}, \\ b_{33} = 3b_{12} + b_{22} + b_{32}, \\ b_{33} = 3b_{13} + b_{23} + b_{33}, \end{cases}$$

求解这个齐次线性方程组,得一般解为

$$\begin{cases} b_{13} = b_{23} = 0, \\ b_{33} = 3b_{12} + b_{22} + b_{32}, \\ b_{31} = 9b_{12} + 3b_{22} + 3b_{32} - 3b_{11} - b_{21}, \end{cases}$$

其中 $b_{11}, b_{21}, b_{12}, b_{22}, b_{32}$ 是自由未知量.分别对自由未知量取 $b_{12} = 1$,其余为零;$b_{22} = 1$,其余为零;$b_{32} = 1$,其余为零;$b_{11} = 1$,其余为零;$b_{21} = 1$,其余为零,得 5 组解.分别对应了 $C(\boldsymbol{A})$中 5 个矩阵:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A_4=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{pmatrix},A_5=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\3&1&1\end{pmatrix}.$$

任意 $\boldsymbol{B}\in C(\boldsymbol{A})$当且仅当

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&0\\b_{21}&b_{22}&0\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix},$$

且其中

$b_{33}=3b_{12}+b_{22}+b_{32}$,

$b_{31}=9b_{12}+3b_{22}+3b_{32}-3b_{11}-b_{21}$,

则

$$\boldsymbol{B}=b_{11}\boldsymbol{A}_1+b_{21}\boldsymbol{A}_2+b_{12}\boldsymbol{A}_3+b_{22}\boldsymbol{A}_4+b_{32}\boldsymbol{A}_5,$$

且 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4,\boldsymbol{A}_5$ 线性无关,故是 $C(\boldsymbol{A})$的一组基. $C(\boldsymbol{A})$是 5 维的.

15. 如果 $c_1\boldsymbol{\alpha}+c_2\boldsymbol{\beta}+c_3\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{0}$,且 $c_1c_3\neq0$,证明:$L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=L(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$.

证明 我们只要证明$\{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\}$与$\{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\}$等价,由 $c_1c_3\neq0$,知 $c_1\neq0$. 于是 $\boldsymbol{\alpha}=-\frac{c_2}{c_1}\boldsymbol{\beta}-\frac{c_3}{c_1}\boldsymbol{\gamma}$, $\{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\}$可经$\{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\}$线性表出,同样由 $c_3\neq0$ 可证$\{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\}$可经$\{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\}$线性表出. 故它们是等价的,且 $L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=L(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$.

16. 在 P^4 中,求由向量 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3,4)$生成的子空间的基与维数. 设

$$1)\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=(\ \ 2,1,\ \ 3,1),\\\boldsymbol{\alpha}_2=(\ \ 1,2,\ \ 0,1),\\\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,-3,0),\\\boldsymbol{\alpha}_4=(\ \ 1,1,\ \ 1,1);\end{cases}\qquad 2)\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=(\ \ 2,1,\ \ 3,-1),\\\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,-3,\ \ 1),\\\boldsymbol{\alpha}_3=(\ \ 4,5,\ \ 3,-1),\\\boldsymbol{\alpha}_4=(\ \ 1,5,-3,\ \ 1).\end{cases}$$

解 1) 把 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 按列排成矩阵. 由第三章的学习指导

中补充内容中的方法,可对它用初等行变换来求极大线性无关组.

$$\begin{pmatrix}2&1&-1&1\\1&2&1&1\\3&0&-3&1\\1&1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1\\2&1&-1&1\\3&0&-3&1\\1&1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&-3&-3&-1\\0&-6&-6&-2\\0&-1&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&-3&-3&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

它的第 1,2,4 列,是列向量的极大线性无关组.因而原矩阵的第 1,2,4 列也是自己的列向量的极大线性无关组.即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的极大线性无关组,也是 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$的一组基. $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$是 3 维的.

2) 按 1)题同样的方法,可求出 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 的一组基,而其维数是 2.

17. 在 P^4 中,求由齐次方程组

$$\begin{cases}3x_1+2x_2-5x_3+4x_4=0,\\3x_1-x_2+3x_3-3x_4=0,\\3x_1+5x_2-13x_3+11x_4=0\end{cases}$$

确定的解空间的基与维数.

解

$$\begin{pmatrix}3&2&-5&4\\3&-1&3&-3\\3&5&-13&11\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&2&-5&4\\0&-3&8&-7\\0&3&-8&7\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}3&2&-5&4\\0&-3&8&-7\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\frac{2}{3}&-\frac{5}{3}&\frac{4}{3}\\0&1&-\frac{8}{3}&\frac{7}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9}\\ 0 & 1 & -\frac{8}{3} & \frac{7}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

得到一般解

$$\begin{cases}x_1=-\frac{1}{9}x_3+\frac{2}{9}x_4,\\ x_2=\frac{8}{3}x_3-\frac{7}{3}x_4.\end{cases}$$

解空间的一组基是 $\boldsymbol{\alpha}_1=\left(-\frac{1}{9},\frac{8}{3},1,0\right)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\left(\frac{2}{9},-\frac{7}{3},0,1\right)$. 解空间的维数是 2.

18. 求由向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 生成的子空间与由向量 $\boldsymbol{\beta}$ 生成的子空间的交的基和维数. 设

1) $\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1,0),\\ \boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,1,1),\end{cases}$ $\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=(2,-1,0,1),\\ \boldsymbol{\beta}_2=(1,-1,3,7);\end{cases}$

2) $\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,0),\\ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1,1),\end{cases}$ $\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=(0,0,1,1),\\ \boldsymbol{\beta}_2=(0,1,1,0);\end{cases}$

3) $\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,-2),\\ \boldsymbol{\alpha}_2=(3,1,1,1),\\ \boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,1,-1),\end{cases}$ $\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=(2,5,-6,-5),\\ \boldsymbol{\beta}_2=(-1,2,-7,3).\end{cases}$

解 1) $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2$ 属于 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\cap L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$ 当且仅当存在 $y_1\boldsymbol{\beta}_1+y_2\boldsymbol{\beta}_2$ 使得

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2=y_1\boldsymbol{\beta}_1+y_2\boldsymbol{\beta}_2$$

或存在 $y_1\boldsymbol{\beta}_1+y_2\boldsymbol{\beta}_2$ 使

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+y_1\boldsymbol{\beta}_1+y_2\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0}.$$

我们要找出使上面向量方程有解的全部 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2$，它们就是 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\cap L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$ 的全部向量.

按题设的 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 将上述方程按各个分量写出来就是下述齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2+2y_1+y_2=0,\\ 2x_1+x_2-y_1-y_2=0,\\ x_1+x_2+3y_2=0,\\ x_2+y_1+7y_2=0,\end{cases}$$

可求得基础解系只有一个解$(-1,4,3,-1)$，全部解是 $x(-1,4,3,-1)$. 于是 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\cap L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$的全部向量是

$$-x\boldsymbol{\alpha}_1+4x\boldsymbol{\alpha}_2=x(-5,2,3,4).$$

$(5,-2,-3,-4)$是它的基，它是一维的.

2) 与 1)题同样方法，知 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\cap L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$的全部向量 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2$ 是使得下列方程

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+y_1\boldsymbol{\beta}_1+y_2\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0}$$

有解的全部向量 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2$. 将上述向量方程按分量写出来就是齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2=0,\\ x_1+y_2=0,\\ x_2+y_1+y_2=0,\\ x_2+y_1=0.\end{cases}$$

该方程组只有零解. 故子空间 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\cap L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=\{\mathbf{0}\}$，没有基.

3) $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\cap L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$的全部向量 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$ 是使方程

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+y_1\boldsymbol{\beta}_1+y_2\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0}$$

有解的全部向量 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$，将上述方程按各分量写出来，得

$$\begin{cases} x_1+3x_2-x_3+2y_1-y_2=0,\\ 2x_1+x_2+5y_1+2y_2=0,\\ -x_1+x_2+x_3-6y_1-7y_2=0,\\ -2x_1+x_2-x_3-5y_1+3y_2=0.\end{cases}$$

可求得它的全部解 $x(-3,1,2,1,0)$. 故交子空间的全部向量是 $x(-3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)=x\boldsymbol{\beta}_1$, 它是一维的, $\boldsymbol{\beta}_1$ 是基.

19. 设 V_1 与 V_2 分别是齐次方程组 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 与 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 的解空间, 证明 $P^n=V_1\oplus V_2$.

证明 任意$(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in P^n$, 可写成

$$(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\left(t_1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n t_i,t_2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n t_i,\cdots,t_n-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n t_i\right)+\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n t_i,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n t_i,\cdots,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n t_i\right),$$

其中第一个向量属于 V_1, 第二个向量属于 V_2. 故 $P^n=V_1+V_2$. 即有维$(V_1+V_2)=n$. 又易知维$(V_1)=n-1$, 维$(V_2)=1$. 再由维(V_1+V_2)+维$(V_1\cap V_2)$=维(V_1)+维(V_2), 知 $V_1\cap V_2=\{\mathbf{0}\}$. 于是有

$$P^n=V_1\oplus V_2$$

20. 证明: 如果 $V=V_1\oplus V_2$, $V_1=V_{11}\oplus V_{12}$, 那么 $V=V_{11}\oplus V_{12}\oplus V_2$.

证明 由题设 $V=V_{11}+V_{12}+V_2$, 只要证零向量在这些子空间的和中的分解式唯一. 设 $\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_1\in V_{11}$, $\boldsymbol{\alpha}_2\in V_{12}$, $\boldsymbol{\beta}\in V_2$. 来证 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\beta}=0$. 因 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\in V_1$, $\boldsymbol{\beta}\in V_2$, 而 $V=V_1\oplus V_2$, 于是 $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$ 及 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}$. 而 $V_1=V_{11}\oplus V_{12}$, $\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 又是 $\mathbf{0}$ 在 $V_{11}+V_{12}$中的分解, 即得 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}$. 故 $V=V_{11}\oplus V_{12}\oplus V_2$.

21. 证明: 每一个 n 维线性空间都可以表示成n 个一维子空间的直和.

证明 取此空间 V 的一组基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$. 显然 $V=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=L(\boldsymbol{\alpha}_1)+\cdots+L(\boldsymbol{\alpha}_n)$. 又维$(V)=n$=维 $L(\boldsymbol{\alpha}_1)$+维 $L(\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+$维 $L(\boldsymbol{\alpha}_n)$, 故 $V=L(\boldsymbol{\alpha}_1)\oplus\cdots\oplus L(\boldsymbol{\alpha}_n)$是 n 个一维子空间的直和.

22. 证明：和 $\sum_{i=1}^{s} V_i$ 是直和的充分必要条件是：

$$V_i \cap \sum_{j=1}^{i-1} V_j = \{\mathbf{0}\} \quad (i = 2, \cdots, s).$$

证明 由于

$$V_i \cap \sum_{j=1}^{i-1} V_j \subset V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = \{\mathbf{0}\},$$

故必要性成立.

充分性. 设有零向量的一个分解

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_s, \quad \boldsymbol{\alpha}_i \in V_i.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_{s-1} \in V_1 + \cdots + V_{s-1}$，$\boldsymbol{\alpha}_s \in V_s$，而 $\sum_{j=1}^{s-1} V_j \oplus V_s$ 是直和，故 $\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$，且 $\mathbf{0} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_{s-1}$. 再由 $\sum_{j=1}^{s-2} V_j \cap V_{s-1} = \{\mathbf{0}\}$，用同样方法可得 $\boldsymbol{\alpha}_{s-1} = \mathbf{0}$. 逐次做下去，即得所有 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 全为零. 就证明了 $V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$ 是直和.

23. 在给定了空间直角坐标系的三维空间中，所有自原点引出的向量添上零向量构成一个三维线性空间 $\mathbf{R}^3$.

1) 问所有终点都在一个平面上的向量是否为子空间；

2) 设有过原点的三条直线，这三条直线上的全部向量分别成为三个子空间 L_1, L_2, L_3. 问 $L_1 + L_2, L_1 + L_2 + L_3$ 能构成哪些类型的子空间，试全部列举出来.

3) 就用几何空间的例子来说明：若 U, V, X, Y 是子空间，满足 $U + V = X, X \supset Y$，是否一定有 $Y = Y \cap U + Y \cap V$.

解 1) 若原点在所指的平面上，则终点在该平面上的全部向量构成子空间.

若原点不在该平面上，则零向量的终点不在该平面上，因而不在此向量集合中. 故该集合不能构成子空间.

2) 设 l_1, l_2, l_3 是过原点的三条直线(可以有重合的)，$l_i, i =$

1,2,3,上全部向量作成的子空间为 L_i.

1° 考察 L_1+L_2:

当 l_1,l_2 重合时,$L_1+L_2=L_1=L_2$ 是一维子空间.

当 l_1,l_2 不重合时,只交于原点,故 $L_1\cap L_2=\{\mathbf{0}\}$,因而 $L_1+L_2=L_1\oplus L_2$ 是直和,它是二维子空间.

2° 考察 $L_1+L_2+L_3$:

当 l_1,l_2,l_3 重合时,$L_1+L_2+L_3=L_1=L_2=L_3$ 是一维子空间.

当 l_1,l_2,l_3 在同一平面上,但不全重合时,不妨设 l_1,l_2 不重合.各取 l_i 上一个非零向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$, $i=1,2$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是平面上不共线的向量. $\boldsymbol{\alpha}_3$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 所在的平面上必是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 的线性组合,故 $\boldsymbol{\alpha}_3\in L_1+L_2$,因而 $L_3\subset L_1+L_2$.由 1°,$L_1+L_2=L_1\oplus L_2$.结果 $L_1+L_2+L_3=L_1+L_2=L_1\oplus L_2$ 是二维子空间.

当 l_1,l_2,l_3 不共面时,各取 l_i 上的一个非零向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$, $i=1,2,3$.空间中任一向量是这三个不共面的向量的线性组合. $L_1+L_2+L_3=L(\boldsymbol{\alpha}_1)+L(\boldsymbol{\alpha}_2)+L(\boldsymbol{\alpha}_3)=$ 三维几何空间的全部向量.构成三维空间.且因维$(L_1+L_2+L_3)=3=$ 维$(L_1)+$ 维$(L_2)+$ 维(L_3),$L_1+L_2+L_3=L_1\oplus L_2\oplus L_3$ 是直和.

3) 不一定成立.例取过原点的不重合的两直线 l_1,l_2. l_1 和 l_2 上的全部向量分别构成两个一维子空间 U 和 V. $U+V$ 是 l_1,l_2 决定的平面上全部向量组成的二维子空间.再取此平面上过原点的一条直线 l,它不与 l_1,l_2 重合.令它上面的全部向量构成的子空间为 Y.由 2)题 1°. $Y\cap U=Y\cap V=\{\mathbf{0}\}$,故 $Y\neq Y\cap U+Y\cap V$.

四、补充题、提示与解答

1. 1) 证明:在 $P[x]_n$ 中,多项式

$f_i=(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_n)$, $i=1,2,\cdots,n$

是一组基,其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是互不相同的数;

2) 在 1)中,取 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是全体 n 次单位根,求由基 1, $x,\cdots,x^{n-1}$到基 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 的过渡矩阵.

证明 1) $f_i(x)$的特性是 $f_i(a_j)=0,j\neq i,f_i(a_i)\neq 0$.设

$$k_1f_1(x)+k_2f_2(x)+\cdots+k_{i-1}f_{i-1}(x)+k_if_i(x)+k_{i+1}f_{i+1}(x)+\cdots+k_nf_n(x)=0.$$

用上述特性,将 $x=a_i$ 代入,得到

$$k_1f_1(a_i)+\cdots+k_{i-1}f_{i-1}(a_i)+k_if_i(a_i)+k_{i+1}f_{i+1}(a_i)+\cdots+k_nf_n(a_i)=0.$$

由 $j\neq i$ 时$k_jf_j(a_i)=0$,即有 $k_if_i(a_i)=0$.但 $f_i(a_i)\neq 0$.故 $k_i=0$.当 i 从 1 到 n 取值后就有

$$k_1=k_2=\cdots=k_n=0.$$

这就证明了 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$是线性无关的.又 $P[x]_n$ 是 n 维的,故 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$是它的基.

2) **提示** 全体 n 次单位根是 $a_1=1$, $a_2=\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}\underset{\cdots\cdots}{\text{记成}}\varepsilon$, $a_3=\varepsilon^2,\cdots,a_n=\varepsilon^{n-1}$.于是 $x^n-1=(x-1)(x-\varepsilon)\cdots(x-\varepsilon^{n-1})$及 $f_i(x)=\frac{x^n-1}{x-\varepsilon^{i-1}}=\frac{x^n-(\varepsilon^{i-1})^n}{x-\varepsilon^{i-1}}$,将它展开成 x 的多项式,它的各系数可以简单地用单位根表示出来.

解

$$x^n-1=(x-1)(x-\varepsilon)\cdots(x-\varepsilon^{n-1}),$$

$$f_1(x)=(x-\varepsilon)\cdots(x-\varepsilon^{n-1})=\frac{x^n-1}{x-1}=1+x+\cdots+x^{n-1},$$

$$f_2(x)=\frac{x^n-1}{x-\varepsilon}=\frac{x^n-\varepsilon^n}{x-\varepsilon}=\varepsilon^{n-1}+\varepsilon^{n-2}x+\cdots+x^{n-1},$$

$$f_3(x)=\frac{x^n-1}{x-\varepsilon^2}=\frac{x^n-(\varepsilon^2)^n}{x-\varepsilon^2}=\varepsilon^{2(n-1)}+\varepsilon^{2(n-2)}x+\cdots+x^{n-1},$$

…………

$$f_n(x)=\frac{x^n-1}{x-\varepsilon^{n-1}}$$

$$=\frac{x^n-(\varepsilon^{n-1})^n}{x-\varepsilon^{n-1}}=\varepsilon^{(n-1)^2}+\varepsilon^{(n-1)(n-2)}x+\cdots+x^{n-1},$$

故过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon^{n-1} & (\varepsilon^{n-1})^2 & \cdots & (\varepsilon^{n-1})^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^{n-2} & (\varepsilon^{n-2})^2 & \cdots & (\varepsilon^{n-2})^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \cdots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基，$\boldsymbol{A}$ 是一 $n\times s$ 矩阵，

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}.$$

证明：$L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)$的维数等于 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 的基，则有线性空间的下列同构

$$V\to P^n,$$

$$\boldsymbol{\alpha}\mapsto \boldsymbol{Z},\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{Z}.$$

上面 $\boldsymbol{Z}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标作成的列向量. 在这同构对应下，线性组合对应成线性组合，线性无关对应成线性无关. 设向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标列向量是 $\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2,\cdots,\boldsymbol{Y}_s$. 则将它们按列排成矩阵就是 $\boldsymbol{A}$. 即

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)(\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2,\cdots,\boldsymbol{Y}_s)$$
$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}.$$

不妨设 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的极大线性无关组为 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$，则 $\boldsymbol{Y}_1,\cdots,\boldsymbol{Y}_r$ 是线性无关的. 因任意 $\boldsymbol{\beta}_i$ 是 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 的线性组合，故任意 $\boldsymbol{Y}_i$ 是 $\boldsymbol{Y}_1,\cdots,\boldsymbol{Y}_r$ 的线性组合. 于是 $\boldsymbol{Y}_1,\cdots,\boldsymbol{Y}_r$ 是 $\boldsymbol{Y}_1,\cdots,\boldsymbol{Y}_s$ 的极大线性无关组. 即 r 是 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

3. 设 $f(x_1,\cdots,x_n)$是一秩为 n 的二次型,证明:存在 $\mathbf{R}^n$ 的一个

$$\frac{1}{2}(n-|s|)$$

维子空间 V_1(其中 s 为符号差数),使对任一$(x_1,\cdots,x_n)\in V_1$ 有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$.

提示 1) 考察标准形 $y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_n^2$,在 $p\leqslant n-p$ 时来找出这样的子空间.

2) 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}=(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y})'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y})=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_n^2$,则映射:

$$\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

建立了 $\mathbf{R}^n$ 中的自同构.由此来找寻 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的相应的子空间.

证明 设经可逆线性替换 $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$,将 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$变成标准形,即

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}=(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y})'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y})=g(\boldsymbol{Y})\\ &=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_n^2.\end{aligned}$$

不妨设 $p\leqslant n-p$.则下列向量集合

$$U_1=\{(y_1,y_2,\cdots,y_p,\underbrace{0,\cdots,0}_{n-2p},y_1,y_2,\cdots,y_p)'\mid y_1,y_2,\cdots,y_p\in\mathbf{R}\}$$

构成 $\mathbf{R}^n$ 中一个子空间,其维数为 p.任意向量 $\boldsymbol{Y}=(y_1,\cdots,y_p,\underbrace{0,\cdots,0}_{n-2p},y_1,\cdots,y_p)'$代入$g(\boldsymbol{Y})$有

$$g(\boldsymbol{Y})=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_1^2-\cdots-y_p^2=0.$$

作 $V_1=\{\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}\mid\boldsymbol{Y}\in U\}$,则 V_1 中任一 $\boldsymbol{Z}$ 代入$f(\boldsymbol{Z})$中有

$$f(\boldsymbol{Z})=\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}=(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y})'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y})=g(\boldsymbol{Y}),$$

但 $\boldsymbol{Y}\in U$,故 $f(\boldsymbol{Z})=g(\boldsymbol{Y})=0$.

由于对应

$$U \to V_1,$$
$$\boldsymbol{Y} \mapsto \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$$

是同构对应，故 V_1 也是 p 维的．而 $f(\boldsymbol{Z}) = g(\boldsymbol{Y})$ 的符号差 $s = (n-p)-p$，故有 $\frac{1}{2}(n-s) = \frac{1}{2}(n-(n-2p)) = p$．这就证明了题目中的结论．

4．设 V_1, V_2 是线性空间 V 的两个非平凡的子空间，证明：在 V 中存在 $\boldsymbol{\alpha}$ 使 $\boldsymbol{\alpha} \overline{\in} V_1, \boldsymbol{\alpha} \overline{\in} V_2$ 同时成立．

提示　因 V_1, V_2 非平凡，故有 $\boldsymbol{\alpha}_1 \overline{\in} V_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \overline{\in} V_2$．若有 $\boldsymbol{\alpha}_1 \overline{\in} V_2$，或 $\boldsymbol{\alpha}_2 \overline{\in} V_1$ 则已完成证明．对其他情形，再设法完成证明．

证明　因 V_1, V_2 非平凡，故有 $\boldsymbol{\alpha}_1 \overline{\in} V_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \overline{\in} V_2$．若有 $\boldsymbol{\alpha}_1 \overline{\in} V_2$，或 $\boldsymbol{\alpha}_2 \overline{\in} V_1$，则已完成证明．若 $\boldsymbol{\alpha}_1 \in V_2$，且 $\boldsymbol{\alpha}_2 \in V_1$，考察 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$．由 $\boldsymbol{\alpha}_1 \in V_2, \boldsymbol{\alpha}_2 \overline{\in} V_2$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 \overline{\in} V_2$．否则 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 \in V_2$，$\boldsymbol{\alpha}_1 \in V_2$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + (-\boldsymbol{\alpha}_1) = \boldsymbol{\alpha}_2 \in V_2$，矛盾．同样由 $\boldsymbol{\alpha}_2 \in V_1$ 及 $\boldsymbol{\alpha}_1 \overline{\in} V_1$ 可得 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 \overline{\in} V_1$．故 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$ 是所要求的向量．

注　证明中只用到了 V_1, V_2 是 V 的真子空间这个性质．

5．设 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 是线性空间 V 的 s 个非平凡的子空间，证明：V 中至少有一向量不属于 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 中任何一个．

证明　对子空间的数目 n 作归纳法．

当 $n=1$ 时显然成立．设 $n = s-1$ 时题目的结论成立．当 $n = s$ 时．取 $\boldsymbol{\beta} \overline{\in} V_s$．又由归纳假设有 $\boldsymbol{\alpha} \overline{\in} V_1, V_2, \cdots, V_{s-1}$．于是对任 V_i，$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 不能同时属于 V_i．考察 $\boldsymbol{\alpha} + k_i\boldsymbol{\beta}$，任意 k_i．若 $\boldsymbol{\alpha} + k_i\boldsymbol{\beta} \in V_i$，则任何其他 $k \neq k_i$ 有 $\boldsymbol{\alpha} + k_i\boldsymbol{\beta} \overline{\in} V_i$．否则由 $\boldsymbol{\alpha} + k_i\boldsymbol{\beta} \in V_i$ 及 $\boldsymbol{\alpha} + k\boldsymbol{\beta} \in V_i, k \neq k_i$，易得 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V_i$，矛盾，故对于任一 V_i，最多仅有一个值 k_i 使 $\boldsymbol{\alpha} + k_i\boldsymbol{\beta} \in V_i$．取 $k \in P$ 使 $k \neq k_1, k_2, \cdots, k_s$，则 $\boldsymbol{\alpha} + k\boldsymbol{\beta} \overline{\in} V_i$，$i = 1, 2, \cdots, s$．完成了归纳法．

注　实际上本题目中只用到各 $V_i \neq V$ 就可得到证明．

第七章　线性变换

一、内容提要

1. 线性变换的定义与运算

线性变换的定义，简单性质：保持线性组合不变（因而保持零元，负元，线性相关性不变）.

线性变换的运算：可以定义线性变换的加法，数量乘法，乘积，幂和多项式.

2. 线性变换的矩阵.

线性变换在给定基下的矩阵. 线性变换由它在任一基下的矩阵唯一决定. 由该矩阵可计算任一向量在该变换下的像.

线性变换在不同基下矩阵是相似的，相似有反身性、对称性、传递性.

线性变换的和、差、数量乘积、乘积、逆变换与其矩阵的和、差、数量乘积、乘积、逆矩阵之间的对应关系.

3. 线性变换的特征值和特征向量

定义及其计算. 矩阵的特征值、特征向量和特征多项式，特征多项式分解成一次因式的乘积，用特征值表示它的各项系数. 相似矩阵有相同的特征多项式. 哈密顿－凯莱定理.

4. 线性变换有对角矩阵的条件. 矩阵相似于对角阵的条件

线性变换能在某基下具有对角矩阵的充要条件是有一组特征向量作为空间的基.

不同特征值的特征向量线性无关. n 维空间的线性变换若有

n 个不同特征值,则在某基下矩阵是对角阵.

特征子空间 V_{λ_0}. 线性变换能在某基下具有对角矩阵的充要条件为 $\sum_{i=1}^{s}$ 维$(V_{\lambda_i}) = n$,其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 是它的全部特征值.

线性变换的值域和核,它们的维数关系. 由核的基及值域的基的原像可作成整个空间的基.

有限维空间的线性变换是单射当且仅当它是满射,当且仅当它是同构.

不变子空间的定义与例子. 不变子空间在化简线性变换矩阵中的作用. 特征多项式的分解引起空间分解为根子空间 $V_i = \{\boldsymbol{\xi} \mid (\mathscr{A} - \lambda_i \mathscr{E})^{r_i}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}\}$ 的直和.

5. 若尔当标准形

若尔当块矩阵与若尔当形矩阵.

复数域上线性空间中的线性变换必能在某基下具有若尔当形矩阵.

若幂零线性变换在某基下矩阵为若尔当形,则任一 r 级若尔当块相应的那部分基元素可由一个基元经该变换逐次变换而得(见原书 314 页(2))

6. 最小多项式. 若尔当块的最小多项式,对角阵的最小多项式,准对角阵的最小多项式. 最小多项式是特征多项式的因式.

二、学习指导

1. 线性变换的几何背景

几何上的旋转变换、镜面反射、相似变换、切变都是线性变换在几何方面的来源. 力学上在描述物体的形变时应用了数学分析的方法. 首先研究其一次项,这是其主要项,它就是线性变换. 代数上两组 n 个变量组成的变量组之间的关系如是线性关系(例如线性替换),就可把它解释成 n 维向量空间的线性变换. 研究线性变

换对几何、其他数学、力学、物理、工程和其他科学都有重要意义.

2. 如何研究线性变换

第一个手段是对某空间 V 的全体线性变换的集合 $L(V)$ 引进运算:加法、数量乘积、乘积. 这样 $L(V)$ 就构成了 P 上线性空间,此外还有乘法. 数学上称 $L(V)$ 构成了 P 上的一个代数. 我们可利用这些运算来研究线性变换. 例如哈密顿-凯莱定理的证明及空间分解成根子空间的直和就是这样做的.

第二个手段. 在空间给定一组基,在该基下可引入线性变换的矩阵. 从而把空间的几何对象"线性变换"与数量对象"矩阵"进行了对应. 回忆解析几何中在给定坐标系下,点(或向量)与其坐标组进行了对应. 当时称这种对应为"形""数"转换,现在线性变换与矩阵的对应是更广义的"形""数"转换. 这种转换有两方面的好处:一方面可把线性空间与线性变换的一些问题转化为数字计算的问题;另一方面可把一些数量关系的问题联系上空间的性质(如线性变换的性质)而得到解决.

这一章的内容就是用运算的性质及线性变换的矩阵来研究线性变换(也是矩阵)的性质.

本章的精华正是将线性变换的问题化成矩阵计算的问题,以及将一些矩阵问题利用线性变换的性质来解决.

3. "形""数"转换的标准格式,应用举例

对 P 上 n 维线性空间 V,给定一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$. 建立 V 到 P^n 的线性空间同构:

$$V \xrightarrow{\varphi} P^n,$$

$$\boldsymbol{\xi} = \sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{\varepsilon}_i \mapsto \boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

任意线性变换 $\mathscr{A}$,它在 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$,作对应

$$\mathscr{A} \mapsto \boldsymbol{A},$$

这就建立了 V 上全部线性变换的线性空间 $L(V)$ 到 $P^{n\times n}$ 的双射. 又保持加法和数量乘法运算,这还是线性空间的同构. 还保持乘法运算. 数学上称为 P 上代数 $L(V)$ 到 P 上代数 $P^{n\times n}$ 的代数同构.

由于

$$(\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1, \mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_n) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{A},$$

就有

$$\mathscr{A}\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{AZ}.$$

故前面的同构下有重要性质:

$$\mathscr{A}\boldsymbol{\xi} \mapsto \boldsymbol{AZ}.$$

这是线性变换到矩阵的"形""数"转换的重要性质,它把线性变换对向量的变换转换为矩阵的计算.

下面应用这个重要性质到特征向量的计算. 求线性变换 $\mathscr{A}$ 的特征向量与特征值.

找向量 $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{Z} \neq \boldsymbol{0}$ 使

$$\mathscr{A}\boldsymbol{\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi} \tag{1}$$

对上述两边同取在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的坐标,分别是 $\boldsymbol{AZ}$ 及 $\lambda\boldsymbol{Z}$,故找 $\boldsymbol{\xi} \neq \boldsymbol{0}$ 满足(1)式就等价于找 $\boldsymbol{Z} \neq \boldsymbol{0}$ 使

$$\boldsymbol{AZ} = \lambda\boldsymbol{Z} \tag{2}$$

这就化为一个数量问题.

如何找呢? 首先决定有哪些 λ 使(2)有非零解? (2)式也即

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{0}.$$

故 λ 使(2)有非零解等价于 $|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}| = 0$. $|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}|$ 即为 $\mathscr{A}$ 的特征多项式,于是形成下述寻找步骤:

(1) 计算出特征多项式的全部根.

(2) 对特征多项式的任一根 λ_0,求得

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_0\boldsymbol{E})\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{0}$$

的全部解. 令解集合为 $P_{\lambda_0}^n$,

$$P_{\lambda_0}^n = \{ \boldsymbol{Z} \mid \boldsymbol{AZ} = \lambda_0 \boldsymbol{Z} \}.$$

(3) $\mathscr{A}$ 的属于 λ_0 的全部特征向量的集合是 $\{ \boldsymbol{\xi} \mid \boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{Z} \in P_{\lambda_0}^n \}$.

4. "形""数"转换的又一表现,矩阵相似与空间观点.

线性空间 V 的一个线性变换及 V 的两组基 $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n\}$, $\{\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n\}$. 设

$$(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{T},$$

及 $\mathscr{A}$ 在这两组基下的矩阵分别为 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{B}$,则有

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}.$$

即 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 相似. 因此讨论矩阵相似的某些问题时,藉助于基的改变来达到要求有方便之处. 这种藉助基的改变来实现矩阵相似变换下的一些结果的研究思路,叫做空间观点.

以下是应用空间观点的典型例子:

(1) 找出 $n \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵的充要条件.

把它看成 n 维空间 V 的某线性变换 $\mathscr{A}$ 在某基下的矩阵. 则 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵等价于 $\mathscr{A}$ 有一组特征向量组成 V 的基或有 n 个无关特征向量. 也等价于 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为零. 找出它相似于只有一个若尔当块的矩阵的充要条件.

同样地把它看成某线性变换 $\mathscr{A}$ 在某组基下的矩阵. $\boldsymbol{A}$ 相似于若尔当块等价于有向量 $\boldsymbol{\xi}$ 满足 $\mathscr{A}^{n-1}\boldsymbol{\xi} \neq \boldsymbol{0}$, $\mathscr{A}^n\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{0}$. 这时 $\boldsymbol{\xi}$, $\mathscr{A}\boldsymbol{\xi}, \cdots, \mathscr{A}^{n-1}\boldsymbol{\xi}$ 是空间的一组基(见第 10,11 习题)也等价于存在 $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{Z} \in P^n$,使 $\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{Z} \neq \boldsymbol{0}$,但 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{0}$.

(3) 证明:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{与} \begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix}$$

是相似的，其中 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列.

任取空间一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$，作线性变换 $\mathscr{A}$，使

$$(\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{A},$$

则 $\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_i=\lambda_i\boldsymbol{\varepsilon}_i,i=1,2,\cdots,n$. 将基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 重新排序为 $\boldsymbol{\varepsilon}_{i_1},\boldsymbol{\varepsilon}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_{i_n}$. 则

$$(\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_{i_1},\cdots,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_{i_n})=(\boldsymbol{\varepsilon}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_{i_n})\begin{pmatrix}\lambda_{i_1}&&&\\&\lambda_{i_2}&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_{i_n}\end{pmatrix}.$$

故前面所述两矩阵相似.

三、习题、提示与解答

1. 判别下面所定义的变换，哪些是线性的，哪些不是：

1）在线性空间 V 中，$\mathscr{A}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}\in V$ 是一固定的向量；

2）在线性空间 V 中，$\mathscr{A}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\alpha}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}\in V$ 是一固定的向量；

3）在 P^3 中，$\mathscr{A}(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2,x_2+x_3,x_3^2)$；

4）在 P^3 中，$\mathscr{A}(x_1,x_2,x_3)=(2x_1-x_2,x_2+x_3,x_1)$；

5）在 $P[x]$中，$\mathscr{A}f(x)=f(x+1)$；

6）在 $P[x]$中，$\mathscr{A}f(x)=f(x_0)$，其中 $x_0\in P$ 是一固定的数；

7）把复数域看作复数域上的线性空间，$\mathscr{A}\boldsymbol{\xi}=\overline{\boldsymbol{\xi}}$；

8）在 $P^{n\times n}$ 中，$\mathscr{A}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{BXC}$，其中 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\in P^{n\times n}$ 是两个固定的矩阵.

解 1）当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 时，$\mathscr{A}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}$，有

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta})=\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}=\mathscr{A}\boldsymbol{\xi}+\mathscr{A}\boldsymbol{\eta},$$

$$\mathscr{A}(k\boldsymbol{\xi})=k\boldsymbol{\xi}=k\mathscr{A}\boldsymbol{\xi}.$$

故 $\mathscr{A}$ 是线性变换.

当 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$ 时,则有

$\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\xi})=\mathscr{A}(2\boldsymbol{\xi})=2\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}$,但 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi})+\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\xi}+2\boldsymbol{\alpha}\neq\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\xi})$.

这时 $\mathscr{A}$ 不是线性变换.

2) 当 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$ 时是线性变换.

当 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$ 时,$\mathscr{A}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$,故不是线性变换.

3) 计算下面式子.

$\mathscr{A}(2,1,1)=(4,2,1)$,

$\mathscr{A}(2(2,1,1))=\mathscr{A}(4,2,2)=(16,4,4)\neq2\mathscr{A}(2,1,1)$.

故 $\mathscr{A}$ 不是线性变换.

4) 由

$$\mathscr{A}(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix},$$

易知 $\mathscr{A}(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)=\mathscr{A}(x_1,x_2,x_3)+\mathscr{A}(y_1,y_2,y_3)$ 及 $\mathscr{A}(kx_1,kx_2,kx_3)=k\mathscr{A}(x_1,x_2,x_3)$. 故 $\mathscr{A}$ 是线性变换

5) 由于

$(f+g)(x+1)=f(x+1)+g(x+1)$,$(kf)(x+1)=kf(x+1)$,

知

$\mathscr{A}(f(x)+g(x))=\mathscr{A}(f(x))+\mathscr{A}(g(x))$,

$\mathscr{A}(kf(x))=k\mathscr{A}(f(x))$,

故 $\mathscr{A}$ 是 $P[x]$ 上线性变换.

6) 由于

$(f+g)(x_0)=f(x_0)+g(x_0)$,

$(kf)(x_0)=kf(x_0)$,

故有

$\mathscr{A}(f(x)+g(x))=\mathscr{A}(f(x))+\mathscr{A}(g(x))$,

$\mathscr{A}(kf(x))=k\mathscr{A}(f(x))$,

即 $\mathscr{A}$ 是线性变换.

7) 不是,例 $\mathscr{A}(\mathrm{i}\cdot 1)=\overline{\mathrm{i}\cdot 1}\neq \mathrm{i}=\mathrm{i}\mathscr{A}(1)$.

8) 是.

2. 在几何空间中,取正交坐标系 $Oxyz$. 以 $\mathscr{A}$ 表示将空间绕 Ox 轴由 Oy 向 Oz 方向旋转 90°的变换,以 $\mathscr{B}$ 表示绕 Oy 轴由 Oz 向 Ox 方向旋转 90°的变换,以 $\mathscr{C}$ 表示绕 Oz 轴由 Ox 向 Oy 方向旋转 90°的变换. 证明:

$$\mathscr{A}^4=\mathscr{B}^4=\mathscr{C}^4=\mathscr{E},\mathscr{A}\mathscr{B}\neq\mathscr{B}\mathscr{A},\text{但 }\mathscr{A}^2\mathscr{B}^2=\mathscr{B}^2\mathscr{A}^2,$$

并检验 $(\mathscr{A}\mathscr{B})^2=\mathscr{A}^2\mathscr{B}^2$ 是否成立.

解 取任意向量 $\boldsymbol{\alpha}=(x,y,z)$,则

$\mathscr{A}(x,y,z)=(x,-z,y)$, $\mathscr{B}(x,y,z)=(z,y,-x)$,

$\mathscr{C}(x,y,z)=(-y,x,z)$.

于是有

1) $\mathscr{A}^2\boldsymbol{\alpha}=(x,-y,-z)$, $\mathscr{A}^3\boldsymbol{\alpha}=(x,z,-y)$, $\mathscr{A}^4\boldsymbol{\alpha}=(x,y,z)$, 故有 $\mathscr{A}^4=\mathscr{E}$. 同样有 $\mathscr{B}^4=\mathscr{E}$, $\mathscr{C}^4=\mathscr{E}$.

2) $\mathscr{A}\mathscr{B}\boldsymbol{\alpha}=\mathscr{A}(z,y,-x)=(z,x,y)$, $\mathscr{B}\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}=\mathscr{B}(x,-z,y)$

$=(y,-z,-x)$,

故 $\mathscr{A}\mathscr{B}\neq\mathscr{B}\mathscr{A}$.

3) $\mathscr{A}^2\mathscr{B}^2\boldsymbol{\alpha}=\mathscr{A}^2(-x,y,-z)=(-x,-y,z)$,

$\mathscr{B}^2\mathscr{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\mathscr{B}^2(x,-y,-z)=(-x,-y,z)$,

故 $\mathscr{A}^2\mathscr{B}^2=\mathscr{B}^2\mathscr{A}^2$.

4) $(\mathscr{A}\mathscr{B})^2\boldsymbol{\alpha}=(\mathscr{A}\mathscr{B})(\mathscr{A}\mathscr{B})\boldsymbol{\alpha}=\mathscr{A}\mathscr{B}(z,x,y)=(y,z,x)$, $(\mathscr{B}\mathscr{A})^2\boldsymbol{\alpha}=\mathscr{B}\mathscr{A}(y,-z,-x)=(-z,+x,-y)$,

故 $(\mathscr{A}\mathscr{B})^2\neq(\mathscr{B}\mathscr{A})^2$.

3. 在 $P[x]$ 中, $\mathscr{A}f(x)=f'(x)$, $\mathscr{B}f(x)=xf(x)$. 证明:

$$\mathscr{A}\mathscr{B}-\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{E}.$$

证明

$(\mathscr{A}\mathscr{B}-\mathscr{B}\mathscr{A})f(x)=\mathscr{A}(xf(x))-\mathscr{B}(f'(x))$

$=(xf(x))'-xf'(x)=f(x)+xf'(x)-xf'(x)$

$= f(x) = \mathscr{E} f(x)$,

故 $\mathscr{A}\mathscr{B} - \mathscr{B}\mathscr{A} = \mathscr{E}$.

4. 设 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 是线性变换,如果 $\mathscr{A}\mathscr{B} - \mathscr{B}\mathscr{A} = \mathscr{E}$,证明:

$$\mathscr{A}^k \mathscr{B} - \mathscr{B}\mathscr{A}^k = k\mathscr{A}^{k-1}, k > 1.$$

证明 对 k 作数学归纳法, $k = 2$ 时,

$$\begin{aligned}\mathscr{A}^2 \mathscr{B} - \mathscr{B}\mathscr{A}^2 &= \mathscr{A}(\mathscr{A}\mathscr{B} - \mathscr{B}\mathscr{A}) + (\mathscr{A}\mathscr{B} - \mathscr{B}\mathscr{A})\mathscr{A} \\ &= \mathscr{A}\mathscr{E} + \mathscr{E}\mathscr{A} = 2\mathscr{A},\end{aligned}$$

结论成立.

设 $k = m$ 时结论成立,即 $\mathscr{A}^m \mathscr{B} - \mathscr{B}\mathscr{A}^m = m\mathscr{A}^{m-1}$. 于是

$$\mathscr{A}^{m+1}\mathscr{B} - \mathscr{B}\mathscr{A}^{m+1} = \mathscr{A}^m(\mathscr{A}\mathscr{B} - \mathscr{B}\mathscr{A}) + (\mathscr{A}^m\mathscr{B} - \mathscr{B}\mathscr{A}^m)\mathscr{A}$$

$$= \mathscr{A}^m\mathscr{E} + m\mathscr{A}^{m-1}\mathscr{A} = (m+1)\mathscr{A}^m,$$

故 $k = m + 1$ 时结论也成立. 于是对一切 $k > 1$,结论成立. 完成了归纳法.

5. 证明:可逆变换是双射.

证明 设 $\mathscr{A}$ 为可逆变换,即有逆变换 $\mathscr{A}^{-1}$ 使 $\mathscr{A}\mathscr{A}^{-1} = \mathscr{A}^{-1}\mathscr{A} = \mathscr{E}$. 证明 $\mathscr{A}$ 是单射. 对 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$,若有 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathscr{A}\boldsymbol{\beta}$. 用 $\mathscr{A}^{-1}$ 同乘此式两边,则左 $= \mathscr{A}^{-1}(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}$,右 $= \mathscr{A}^{-1}(\mathscr{A}\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\beta}$,故 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$,即 $\mathscr{A}$ 是单射.

证明 $\mathscr{A}$ 是满射. 对 $\boldsymbol{\alpha}$,找 $\boldsymbol{\beta}$ 使 $\mathscr{A}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}$. 可令 $\boldsymbol{\beta} = \mathscr{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$,则 $\mathscr{A}\boldsymbol{\beta} = \mathscr{A}(\mathscr{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}$. 故 $\mathscr{A}$ 是满射.

$\mathscr{A}$ 既是单射,又是满射,因而是双射.

6. 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是线性空间 V 的一组基, $\mathscr{A}$ 是 V 上的线性变换,证明 $\mathscr{A}$ 可逆当且仅当 $\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1, \mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性无关.

证明 设 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$,

$$(\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1, \mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_n) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{A}.$$

$\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1, \mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是线性无关的充要条件是秩$(\boldsymbol{A}) = n$(前一章补充题 2). $\mathscr{A}$ 可逆的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 可逆,即秩$(\boldsymbol{A}) = n$(定理 2). 故 $\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1, \mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性无关的充要条件是 $\mathscr{A}$ 可逆.

另证,设 $\mathscr{A}$ 可逆,则是 n 维线性空间 V 的自同构. 它把 V 的

基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 变成 V 的基，故 $\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 V 的基，因而线性无关.

设 $\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 n 个线性无关的向量，故是 V 的基，V 的任一元 $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的线性组合，

$$k_1\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1+k_2\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+k_n\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_n=\mathscr{A}(k_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+k_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\varepsilon}_n).$$

即都是某元在 $\mathscr{A}$ 变换下的像. 即 $\mathscr{A}$ 是满射. 再由定理 11 的推论，知 $\mathscr{A}$ 也是单射，故 $\mathscr{A}$ 是可逆的.

7. 求下列线性变换在所指定基下的矩阵：

1）第 1 题 4）中变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0),\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0),\boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,0,1)$ 下的矩阵；

2）$[O;\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2]$ 是平面上一直角坐标系，$\mathscr{A}$ 是平面上的向量对第一和第三象限角的平分线的垂直投影，$\mathscr{B}$ 是平面上的向量对 $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 的垂直投影，求 $\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{A}\mathscr{B}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 下的矩阵；

3）在空间 $P[x]_n$ 中，设变换 $\mathscr{A}$ 为 $f(x)\to f(x+1)-f(x)$. 求 $\mathscr{A}$ 在基

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0=1,\boldsymbol{\varepsilon}_i=\frac{x(x-1)\cdots(x-i+1)}{i!}\ (i=1,2,\cdots,n-1)$$

下的矩阵；

4）六个函数

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\mathrm{e}^{ax}\cos bx,\qquad \boldsymbol{\varepsilon}_2=\mathrm{e}^{ax}\sin bx,$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}_3=x\mathrm{e}^{ax}\cos bx,\qquad \boldsymbol{\varepsilon}_4=x\mathrm{e}^{ax}\sin bx,$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}_5=\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{ax}\cos bx,\quad \boldsymbol{\varepsilon}_6=\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{ax}\sin bx$$

的所有实系数线性组合构成实数域上一个六维线性空间. 求微分变换 $\mathscr{D}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_i(i=1,2,\cdots,6)$ 下的矩阵；

5）已知 P^3 中线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1=(-1,1,1),\boldsymbol{\eta}_2=(1,0,-1),\boldsymbol{\eta}_3=(0,1,1)$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0),\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0),\boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,0,1)$ 下的矩阵；

6）在 P^3 中，$\mathscr{A}$ 定义如下.

$$\begin{cases} \mathscr{A}\boldsymbol{\eta}_1=(-5,\ \ 0,3), \\ \mathscr{A}\boldsymbol{\eta}_2=(0,-1,6), \\ \mathscr{A}\boldsymbol{\eta}_3=(-5,-1,9), \end{cases} \quad \text{其中} \begin{cases} \boldsymbol{\eta}_1=(-1,\ \ 0,2), \\ \boldsymbol{\eta}_2=(\ \ 0,\ \ 1,1), \\ \boldsymbol{\eta}_3=(\ \ 3,-1,0). \end{cases}$$

求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0),\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0),\boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,0,1)$ 下的矩阵；

7）同上.求 $\mathscr{A}$ 在 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 下的矩阵.

解　1）$\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1=(2,0,1)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)(2,0,1)'$

$$\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2=(-1,1,0)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)(-1,1,0)'$$

$$\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,1,0)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)(0,1,0)'.$$

故 $\mathscr{A}$ 在 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2）$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0),\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1)$.则 $\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1=\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_1+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_2$.故 $\mathscr{A}$ 在 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

又 $\mathscr{B}\boldsymbol{\varepsilon}_1=\boldsymbol{0},\mathscr{B}\boldsymbol{\varepsilon}_2=\boldsymbol{\varepsilon}_2$，于是 $\mathscr{B}$ 在 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathscr{A}\mathscr{B}$ 在 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{AB}$，

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

3）计算

$\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_0=1-1=\mathbf{0}$,

$\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1=(x+1)-x=1=\boldsymbol{\varepsilon}_0$,

$\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2=\dfrac{(x+1)x}{2!}-\dfrac{x(x-1)}{2!}=\dfrac{2x}{2!}=x=\boldsymbol{\varepsilon}_1$,

……

$$\begin{aligned}\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}&=\frac{(x+1)x\cdots(x-(n-3))}{(n-1)!}-\frac{x(x-1)\cdots[x-(n-2)]}{(n-1)!}\\&=\frac{x(x-1)\cdots(x-(n-3))}{(n-1)!}\{(x+1)-(x-(n-2))\}\\&=\frac{x(x-1)\cdots(x-(n-3))}{(n-2)!}=\boldsymbol{\varepsilon}_{n-2}.\end{aligned}$$

故 $\mathscr{A}$ 在 $\boldsymbol{\varepsilon}_0,\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}$ 的矩阵为

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

4）略去计算．$\mathscr{D}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_6$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}a & b & 1 & 0 & 0 & 0\\ -b & a & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & b & 1 & 0\\ 0 & 0 & -b & a & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b & a\end{pmatrix}.$$

5）因

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix},$$

故

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)&=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\\ &=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

及 $\mathscr{A}$ 在 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵是

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix}-1 & 1 & -2\\ 2 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

6）因

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$(\mathscr{A}\boldsymbol{\eta}_1,\mathscr{A}\boldsymbol{\eta}_2,\mathscr{A}\boldsymbol{\eta}_3)=(\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

又由题设有

$$(\mathscr{A}\boldsymbol{\eta}_1,\mathscr{A}\boldsymbol{\eta}_2,\mathscr{A}\boldsymbol{\eta}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix}-5 & 0 & -5\\ 0 & -1 & -1\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix},$$

故

$$(\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix}-5 & 0 & -5\\ 0 & -1 & -1\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix}-\frac{5}{7} & \frac{20}{7} & -\frac{20}{7}\\ -\frac{4}{7} & -\frac{5}{7} & -\frac{2}{7}\\ \frac{27}{7} & \frac{18}{7} & \frac{24}{7}\end{pmatrix}.$$

7）又因

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}^{-1},$$

故

$$(\mathscr{A}\boldsymbol{\eta}_1,\mathscr{A}\boldsymbol{\eta}_2,\mathscr{A}\boldsymbol{\eta}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix}-5 & 0 & -5\\ 0 & -1 & -1\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-5 & 0 & -5\\ 0 & -1 & -1\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{3}{7}\\ \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & \frac{1}{7}\\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5 & 0 & -5\\ 0 & -1 & -1\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)\begin{pmatrix}2&3&5\\-1&0&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}.$$

8. 在 $P^{2\times 2}$ 中定义线性变换

$$\mathscr{A}_1(\boldsymbol{X})=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\boldsymbol{X},$$

$$\mathscr{A}_2(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

$$\mathscr{A}_3(\boldsymbol{X})=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}.$$

求 $\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\mathscr{A}_3$ 在基 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$ 下的矩阵.

解 $\mathscr{A}_1\boldsymbol{E}_{11}=a\boldsymbol{E}_{11}+c\boldsymbol{E}_{21}$, $\qquad \mathscr{A}_1\boldsymbol{E}_{12}=a\boldsymbol{E}_{12}+c\boldsymbol{E}_{22}$,

$\mathscr{A}_1\boldsymbol{E}_{21}=b\boldsymbol{E}_{11}+d\boldsymbol{E}_{21}$, $\qquad \mathscr{A}_1\boldsymbol{E}_{22}=b\boldsymbol{E}_{12}+d\boldsymbol{E}_{22}$,

故 $\mathscr{A}_1$ 在 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix}a&0&b&0\\0&a&0&b\\c&0&d&0\\0&c&0&d\end{pmatrix}.$$

类似的计算可得 $\mathscr{A}_2,\mathscr{A}_3$ 在 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$ 下的矩阵分别是

$$\begin{pmatrix}a&c&0&0\\b&d&0&0\\0&0&a&c\\0&0&b&d\end{pmatrix} \text{及} \begin{pmatrix}a^2&ac&ab&bc\\ab&ad&b^2&bd\\ac&c^2&ad&cd\\cb&cd&bd&d^2\end{pmatrix}.$$

9. 设三维线性空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}.$$

1) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_1$ 下的矩阵;

2) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,k\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵,其中 $k\in P$ 且 $k\neq 0$;

3) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵.

解 1) $\mathscr{A}$ 在 $\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_1$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

2) $\mathscr{A}$ 在 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,k\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ \frac{1}{k}a_{21} & a_{22} & \frac{1}{k}a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

3) $\mathscr{A}$ 在 $\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} a_{11}+a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a_{22}-a_{11}-a_{12} & a_{22}-a_{12} & a_{23}-a_{13} \\ a_{31}+a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

10. 设 $\mathscr{A}$ 是线性空间 V 上的线性变换,如果 $\mathscr{A}^{k-1}\boldsymbol{\xi}\neq\mathbf{0}$,但 $\mathscr{A}^k\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}$,求证 $\boldsymbol{\xi},\mathscr{A}\boldsymbol{\xi},\cdots,\mathscr{A}^{k-1}\boldsymbol{\xi}(k>0)$线性无关.

证明 设有 $a_1\boldsymbol{\xi}+a_2\mathscr{A}\boldsymbol{\xi}+\cdots+a_k\mathscr{A}^{k-1}\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}$,用 $\mathscr{A}^{k-1}$ 作用于此式两端.由于 $\mathscr{A}^k\boldsymbol{\xi}=\mathscr{A}^{k+1}\boldsymbol{\xi}=\cdots=\mathbf{0}$.得 $a_1\mathscr{A}^{k-1}\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}$.但 $\mathscr{A}^{k-1}\boldsymbol{\xi}\neq\mathbf{0}$,故 $a_1=0$,上式成为

$$a_2\mathscr{A}\boldsymbol{\xi}+a_3\mathscr{A}^2\boldsymbol{\xi}+\cdots+a_k\mathscr{A}^{k-1}\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}.$$

再用 $\mathscr{A}^{k-2}$作用于此式两端,可得 $a_2\mathscr{A}^{k-1}\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}$.由 $\mathscr{A}^{k-1}\boldsymbol{\xi}\neq\mathbf{0}$,得 $a_2=0$.这样继续作下去,即得到

$$a_1=a_2=\cdots=a_k=0.$$

因此

$$\xi, \mathscr{A}\xi, \cdots, \mathscr{A}^{n-1}\xi$$

线性无关.

11. 在 n 维线性空间中,设有线性变换 $\mathscr{A}$ 与向量 $\boldsymbol{\xi}$,使得 $\mathscr{A}^{n-1}\boldsymbol{\xi}\neq\mathbf{0}$,但 $\mathscr{A}^n\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}$.求证 $\mathscr{A}$ 在某组基下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

证明 由上一题的结论,$\boldsymbol{\xi}, \mathscr{A}\boldsymbol{\xi}, \cdots, \mathscr{A}^{n-1}\boldsymbol{\xi}$ 线性无关,因而是 V 的一组基.$\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵就是

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

12. 设 V 是数域 P 上 n 维线性空间.证明:V 的与全体线性变换可以交换的线性变换是数乘变换.

提示 取 V 的一组基,线性变换与它在该基下的矩阵一一对应,且保持乘积.这就把本题目化成讨论与一切 n 级方阵都可交换的矩阵问题了.

证明 取 V 的一组基,线性变换和它在该基下的矩阵成一一对应.且全体线性变换对应到全体 n 级方阵.设 $\mathscr{A}$ 在该基下矩阵为 $\boldsymbol{A}$.任一线性变换 $\mathscr{B}$,设在该基下矩阵为 $\boldsymbol{B}$.$\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.由此知 $\mathscr{A}$ 与全体线性变换都可交换的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 与全体 n 级方阵都可交换.由第四章习题 7 的 3),$\boldsymbol{A}$ 是数量矩阵.因此与全体线性变换都可交换的线性变换是数乘变换.

13. $\mathscr{A}$ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一个线性变换.证明:如果 $\mathscr{A}$ 在任意一组基下的矩阵都相同,那么 $\mathscr{A}$ 是数乘变换.

证明 取 V 的一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$. 设 $\mathscr{A}$ 在该基下矩阵为 $\boldsymbol{A}$. 我们证明 $\boldsymbol{A}$ 是数量矩阵.

取可逆矩阵 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_{ij}$, 任何 $i,j=1,2,\cdots,n$. 则

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_{ij})$$

是一组基. 于是 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵是

$$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_{ij})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_{ij}).$$

但题设它的矩阵也为 $\boldsymbol{A}$. 于是

$$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_{ij})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_{ij})=\boldsymbol{A}, \text{或 } \boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_{ij})=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_{ij})\boldsymbol{A}.$$

由 $\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{EA}$. 故 $\boldsymbol{AE}_{ij}=\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}$, 对任何 $1\leqslant i,j\leqslant n$ 成立. 于是任何 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}b_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 可交换. 由第四章习题 7 的 3), 知 $\boldsymbol{A}$ 是数量矩阵, 从而 $\mathscr{A}$ 是数乘变换.

14. 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 是四维线性空间 V 的一组基, 已知线性变换 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1-2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_4$, $\boldsymbol{\eta}_2=3\boldsymbol{\varepsilon}_2-\boldsymbol{\varepsilon}_3-\boldsymbol{\varepsilon}_4$, $\boldsymbol{\eta}_3=\boldsymbol{\varepsilon}_3+\boldsymbol{\varepsilon}_4$, $\boldsymbol{\eta}_4=2\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 下的矩阵;

2) 求 $\mathscr{A}$ 的核与值域;

3) 在 $\mathscr{A}$ 的核中选一组基, 把它扩充成 V 的一组基, 并求 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵;

4) 在 $\mathscr{A}$ 的值域中选一组基, 把它扩充成 V 的一组基, 并求 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵.

解 1)

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-1&1&0\\1&-1&1&2\end{pmatrix}.$$

$\mathscr{A}$在 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-1&1&0\\1&-1&1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-1&1&0\\1&-1&1&2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}6&-9&9&6\\2&-4&10&10\\8&-16&40&40\\0&3&-21&-24\end{pmatrix}.$$

2) 设 $\boldsymbol{\xi}\in\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0}),\boldsymbol{\xi}=x_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+x_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+x_3\boldsymbol{\varepsilon}_3+x_4\boldsymbol{\varepsilon}_4$,则 $\mathscr{A}\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}$.由定理 3,有

$$\begin{pmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\mathbf{0}.$$

解这个齐次线性方程组,得基础解系

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\left(-2,-\frac{3}{2},1,0\right)',\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,-2,0,1)'.$$

于是令 $\boldsymbol{\xi}_1=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\left(-2,-\frac{3}{2},1,0\right)',\boldsymbol{\xi}_2=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)(-1,-2,0,1)'$,它就是 $\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})$的一组基,$\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})=L(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)$.

再求 $\mathscr{A}V$.由定理 10 知

$$\mathscr{A}V=L(\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_3,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_4).$$

由于

$$(\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_3,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_4)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\begin{pmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{pmatrix},$$

易计算右端矩阵的前两列构成列向量的极大线性无关组，故 $\boldsymbol{\eta}_1=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)(1,-1,1,2)'$，$\boldsymbol{\eta}_2=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)(0,2,2,-2)'$，是 $\mathscr{A}V$ 的一组基，且 $\mathscr{A}V=L(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2)$.

3) 易计算 $(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\boldsymbol{Z}$，

$$\boldsymbol{Z}=\begin{pmatrix}1&0&-2&-1\\0&1&-\frac{3}{2}&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

由于 $|\boldsymbol{Z}|\neq0$，$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 构成 V 的一组基，且是 $\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})$ 的基 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 的扩充.

由于 $\boldsymbol{\xi}_1=-2\boldsymbol{\varepsilon}_1-\frac{3}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3$，　$\boldsymbol{\xi}_2=-\boldsymbol{\varepsilon}_1-2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_4$，得

$$\boldsymbol{\varepsilon}_3=2\boldsymbol{\varepsilon}_1+\frac{3}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\xi}_1,\qquad \boldsymbol{\varepsilon}_4=\boldsymbol{\varepsilon}_1+2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\xi}_2.$$

于是

$$\begin{aligned}&\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3+2\boldsymbol{\varepsilon}_4=5\boldsymbol{\varepsilon}_1+\frac{9}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\xi}_1+2\boldsymbol{\xi}_2,\\&\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2=2\boldsymbol{\varepsilon}_2+2\boldsymbol{\varepsilon}_3-2\boldsymbol{\varepsilon}_4=2\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2+2\boldsymbol{\xi}_1-2\boldsymbol{\xi}_2,\\&\mathscr{A}\boldsymbol{\xi}_1=\mathbf{0},\\&\mathscr{A}\boldsymbol{\xi}_2=\mathbf{0},\end{aligned}$$

$\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}5&2&0&0\\\frac{9}{2}&1&0&0\\1&2&0&0\\2&-2&0&0\end{pmatrix}.$$

4)

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\1&2&1&0\\2&-2&0&1\end{pmatrix},$$

右端矩阵的行列式不为零,故 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 构成 V 的一组基,且是 $\mathscr{A}V$ 的基的扩充.

$$\begin{aligned}
&(\mathscr{A}\boldsymbol{\eta}_1,\mathscr{A}\boldsymbol{\eta}_2,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_3,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_4)\\
&=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\1&2&1&0\\2&-2&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\1&2&1&0\\2&-2&0&1\end{pmatrix}\\
&=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\-2&-1&1&0\\-1&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\1&2&1&0\\2&-2&0&1\end{pmatrix}\\
&=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&\frac{3}{2}&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\1&2&1&0\\2&-2&0&1\end{pmatrix}\\
&=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\begin{pmatrix}5&2&2&1\\\frac{9}{2}&1&\frac{3}{2}&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

15. 给定 P^3 的两组基

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,1),\boldsymbol{\varepsilon}_2=(2,1,0),\boldsymbol{\varepsilon}_3=(1,1,1),$$

$$\boldsymbol{\eta}_1=(1,2,-1),\boldsymbol{\eta}_2=(2,2,-1),\boldsymbol{\eta}_3=(2,-1,-1).$$

定义线性变换 $\mathscr{A}$:

$$\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_i=\boldsymbol{\eta}_i,\quad i=1,2,3.$$

1) 写出由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 的过渡矩阵;

2) 写出 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵;

3) 写出 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 下的矩阵.

解 1) 令 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)$,则

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&2&2\\2&2&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix},$$

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

又令过渡矩阵为 $\boldsymbol{Z}$,

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\boldsymbol{Z},$$

对两端将 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 的表达式代入后,得到

$$\begin{pmatrix}1&2&2\\2&2&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{Z}.$$

解此方程,得

$$\boldsymbol{Z}=\begin{pmatrix}-2&-\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\\1&\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\\1&\frac{1}{2}&-\frac{5}{2}\end{pmatrix}$$

2) 因为

$$(\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_3)=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\boldsymbol{Z},$$

$\mathscr{A}$在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵就是 $\boldsymbol{Z}$.

3) 因

$$(\mathscr{A}\boldsymbol{\eta}_1,\mathscr{A}\boldsymbol{\eta}_2,\mathscr{A}\boldsymbol{\eta}_3)=(\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_3)\boldsymbol{Z}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)\boldsymbol{Z},$$

故 $\mathscr{A}$ 在 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 下的矩阵仍为 $\boldsymbol{Z}$.

16. 证明:

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix} 与 \begin{pmatrix}\lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n}\end{pmatrix}$$

相似,其中 $i_1 i_2 \dots i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列.

证明 在任意 n 维线性空间 V 中取一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$. 作一线性变换 $\mathscr{A}$,它在 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

于是有

$$\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_i=\lambda_i\boldsymbol{\varepsilon}_i,\ i=1,2,\cdots,n.$$

现在将 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 重新排序成为基 $\boldsymbol{\varepsilon}_{i_1},\boldsymbol{\varepsilon}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_{i_n}$,在新基下

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_{i_1},\boldsymbol{\varepsilon}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_{i_n})=(\boldsymbol{\varepsilon}_{i_1},\boldsymbol{\varepsilon}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_{i_n})\begin{pmatrix}\lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n}\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix} 与 \begin{pmatrix}\lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n}\end{pmatrix}$$是同一线性变换 $\mathscr{A}$ 在不同基下矩阵,故相似.

17. 如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆,证明:$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似.

证明 $\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}$,故 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似.

18. 如果 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,$\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 相似,证明 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}$ 相似.

证明 设 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Z}^{-1}\boldsymbol{AZ}$,$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{CY}$,则

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{Z} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Y}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{Z} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Z}^{-1}\boldsymbol{AZ} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{CY}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}.$$

故 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}$ 相似.

19. 求复数域上线性空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 的特征值与特征向量,已知 $\mathscr{A}$ 在一组基下的矩阵为:

1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 2\end{pmatrix}$;　　2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{pmatrix}$;

3) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$;　　4) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5 & 6 & -3\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$;

5) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$;　　6) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ -2 & 0 & 3\\ -1 & -3 & 0\end{pmatrix}$;

7) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -4 & -1 & 0\\ 4 & -8 & -2\end{pmatrix}$.

解 1)

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -4\\ -5 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda-14=(\lambda-7)(\lambda+2),$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $7,-2$.

求特征向量.对 $\lambda=7$,相应的齐次线性方程组为

$$\begin{cases}4x_1-4x_2=0,\\ -5x_1+5x_2=0.\end{cases}$$

它的基础解系为(1,1).于是 $\mathscr{A}$ 的属于特征值 7 的全部特征向量为 $k(\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2)$,$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 是 V 的给定的基,$k\neq0$ 取全体数值.

对特征值 $\lambda=-2$,相应的方程组为

$$\begin{cases}-5x_1-4x_2=0,\\ -5x_1-4x_2=0.\end{cases}$$

其基础解系为$(4,-5)$.$\mathscr{A}$ 的属于特征值 -2 的全部特征向量为 $k(4\boldsymbol{\varepsilon}_1-5\boldsymbol{\varepsilon}_2)$,$k\neq0$,取所有数值.

2) 当 $a=0$ 时,$\mathscr{A}$ 的特征值为 0,任何非零向量都是特征向量.

当 $a\neq0$ 时,特征值 $\lambda=\pm a\mathrm{i}$.

属于 $\lambda=a\mathrm{i}$ 的全部特征向量为 $k(-\mathrm{i}\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2)$,$k$ 为任意非零复数.

属于 $\lambda=-a\mathrm{i}$ 的全部特征向量为 $k(\mathrm{i}\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2)$,$k$ 为任意非零复数.

3) 特征值 $\lambda=2$ 及 -2.

属于特征值 2 的全部特征向量为 $k_1(\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2)+k_2(\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_3)+k_3(\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_4)$,其中 k_1,k_2,k_3 为不全为零的任意数值.

属于特征值 -2 的全部特征向量为 $k(\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_2-\boldsymbol{\varepsilon}_3-\boldsymbol{\varepsilon}_4)$,$k\neq$

0 为任意数.

4) 特征值 $\lambda=2,1+\sqrt{3},1-\sqrt{3}$.

属于特征值 2 的全部特征向量为 $k(2\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_2)$, $k\neq 0$ 为任意数.

属于特征值 $1+\sqrt{3}$ 的全部特征向量为 $k(3\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_2+(2-\sqrt{3})\boldsymbol{\varepsilon}_3)$, $k\neq 0$, 取任意数值.

属于特征值 $1-\sqrt{3}$ 的全体特征向量为 $k(3\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_2+(2+\sqrt{3})\boldsymbol{\varepsilon}_3)$, $k\neq 0$, 取任意数值.

5) 特征值为 $\lambda=1,-1$.

属于特征值 1 的全体特征向量为 $k_1(\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_3)+k_2\boldsymbol{\varepsilon}_2$, k_1,k_2 取不全为零的全体数值.

属于特征值 -1 的全体特征向量为 $k(\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_3)$, $k\neq 0$, 取任意数值.

6) 特征值为 0 及 $\pm\sqrt{14}\mathrm{i}$.

属于特征值 0 的全部特征向量为 $k(3\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_2+2\boldsymbol{\varepsilon}_3)$, $k\neq 0$, 取任意数值.

属于 $\sqrt{14}\mathrm{i}$ 的全部特征向量为 $k((6+\sqrt{14}\mathrm{i})\boldsymbol{\varepsilon}_1+(-2+3\sqrt{14}\mathrm{i})\boldsymbol{\varepsilon}_2-10\boldsymbol{\varepsilon}_3)$, $k\neq 0$, 取任意数值.

属于 $-\sqrt{14}\mathrm{i}$ 的全部特征向量为 $k((6-\sqrt{14}\mathrm{i})\boldsymbol{\varepsilon}_1+(-2-3\sqrt{14}\mathrm{i})\boldsymbol{\varepsilon}_2-10\boldsymbol{\varepsilon}_3)$, $k\neq 0$, 取任意数值.

7) 特征值为 $\lambda=1,-2$.

属于特征值 1 的全部特征向量为 $k(3\boldsymbol{\varepsilon}_1-6\boldsymbol{\varepsilon}_2+20\boldsymbol{\varepsilon}_3)$, $k\neq 0$, 取任意数值. 属于特征值 -2 的全部特征向量为 $k\boldsymbol{\varepsilon}_3$, $k\neq 0$, 取任意数值.

20. 在上题中哪些变换的矩阵可以在适当的基下变成对角形? 在可以化成对角形的情况, 写出相应的基变换的过渡矩阵 $\boldsymbol{T}$,

并验算 $T^{-1}AT$.

解 由定理 7 知 n 维线性空间的线性变换的矩阵能在某组基下成为对角形的充要条件是它有 n 个无关的特征向量. 这样, 上一题中 1) 到 6) 都可以化成对角形, 而 7) 不可能. 下面分别写出其过渡矩阵 T.

1) 一对线性无关的特征向量作为基, 其过渡矩阵是

$$T=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1 & -5\end{pmatrix}.$$

$\mathscr{A}$ 在此基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}7 & \\ & -2\end{pmatrix}=T^{-1}AT=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1 & -5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1 & -5\end{pmatrix}.$$

2) 当 $a=0$ 时, $A=O$ 已是对角形.

当 $a\neq 0$ 时, 一对线性无关的特征向量作为基, 其过渡矩阵 T,

$$T=\begin{pmatrix}-\mathrm{i} & \mathrm{i}\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

$\mathscr{A}$ 在此基下的矩阵为对角形 $\begin{pmatrix}a\mathrm{i} & 0\\ 0 & -a\mathrm{i}\end{pmatrix}=T^{-1}AT$

$$=\begin{pmatrix}-\mathrm{i} & \mathrm{i}\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\mathrm{i} & \mathrm{i}\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

3) 取四个线性无关的特征向量为基, 其过渡矩阵

$$T=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

$\mathscr{A}$ 在此基下矩阵为

$$\begin{pmatrix}2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & -2\end{pmatrix}=T^{-1}AT$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}.$$

4) 取三个线性无关的特征向量为基,其过渡矩阵为

$$T=\begin{pmatrix}2&3&3\\-1&-1&-1\\0&2-\sqrt{3}&2+\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

$\mathscr{A}$在该基下矩阵为

$$\begin{pmatrix}2&&\\&1+\sqrt{3}&\\&&1-\sqrt{3}\end{pmatrix}=T^{-1}AT$$

$$=\begin{pmatrix}2&3&3\\-1&-1&-1\\0&2-\sqrt{3}&2+\sqrt{3}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}5&6&3\\-1&0&1\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&3\\-1&-1&-1\\0&2-\sqrt{3}&2+\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

5) 取三个线性无关的特征向量为基,其过渡矩阵为

$$T=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}.$$

$\mathscr{A}$在该基下矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}=T^{-1}AT=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}.$$

6) 取三个线性无关的特征向量为基,其过渡矩阵为

$$T=\begin{pmatrix}3&6+\sqrt{14}\mathrm{i}&6-\sqrt{14}\mathrm{i}\\-1&-2+3\sqrt{14}\mathrm{i}&-2-3\sqrt{14}\mathrm{i}\\2&-10&-10\end{pmatrix}.$$

$\mathscr{A}$在此基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}0 & & \\ & \sqrt{14}\mathrm{i} & \\ & & -\sqrt{14}\mathrm{i}\end{pmatrix} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix}3 & 6+\sqrt{14}\mathrm{i} & 6-\sqrt{14}\mathrm{i}\\ -1 & -2+3\sqrt{14}\mathrm{i} & -2-3\sqrt{14}\mathrm{i}\\ 2 & -10 & -10\end{pmatrix}^{-1}\cdot$$

$$\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ -2 & 0 & 3\\ -1 & -3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 6+\sqrt{14}\mathrm{i} & 6-\sqrt{14}\mathrm{i}\\ -1 & -2+3\sqrt{14}\mathrm{i} & -2-3\sqrt{14}\mathrm{i}\\ 2 & -10 & -10\end{pmatrix}.$$

21. 在 $P[x]_n$ 中($n>1$),求微分变换 $\mathscr{D}$ 的特征多项式,并证明,$\mathscr{D}$ 在任何一组基下的矩阵都不可能是对角矩阵.

解 取 $P[x]_n$ 的基为 $1,x,\cdots,x^{n-1}$,则 $\mathscr{D}$ 在该基下矩阵为

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

它的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{D}| = \begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & -2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -(n-1)\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{vmatrix} = \lambda^n.$$

它只有 0 为特征值.$(0\cdot\boldsymbol{E}-\boldsymbol{D}) = -\boldsymbol{D}$ 的秩为 $n-1$,因此齐次线性方程组

$$(0\cdot\boldsymbol{E}-\boldsymbol{D})\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

的基础解系中只一个解.即 $\boldsymbol{D}$ 只有一个线性无关的特征向量.而 $P[x]_n$ 的维数 $n>1$.由定理 7,$\mathscr{D}$ 在任何基下的矩阵都不是对

角阵.

22. 设

$$A=\begin{pmatrix}1&4&2\\0&-3&4\\0&4&3\end{pmatrix},$$

求 A^k.

提示 设法找 T 使 $T^{-1}AT$ 为对角形. 于是 $T^{-1}A^kT=(T^{-1}AT)^k$. 右端 $T^{-1}AT$ 是对角形,它的 k 次幂容易求得. 于是 $A^k=T(T^{-1}AT)^kT^{-1}$可求得.

解

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-4&-2\\0&\lambda+3&-4\\0&-4&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+5)(\lambda-5).$$

A 的特征值为 $1,\pm5$.

属于 1 的特征向量设为$(x_1,x_2,x_3)'$,则

$$\begin{cases}0\cdot x_1-4x_2-2x_3=0,\\0\cdot x_1+4x_2-4x_3=0,\\0\cdot x_1-4x_2-2x_3=0.\end{cases}$$

取一个解$(1,0,0)'$,它是 A 的属于特征值为 1 的特征向量.

属于 5 的特征向量设为$(x_1,x_2,x_3)'$,则

$$\begin{cases}4x_1-4x_2-2x_3=0,\\\qquad 8x_2-4x_3=0,\\\quad -4x_2+2x_3=0.\end{cases}$$

取一个解$(2,1,2)'$,它是 A 的属于 5 的特征向量.

属于 -5 的特征向量设为$(x_1,x_2,x_3)'$,则

$$\begin{cases}-6x_1-4x_2-2x_3=0,\\\qquad -2x_2-4x_3=0,\\\qquad -4x_2-8x_3=0.\end{cases}$$

取一个解$(1,-2,1)'$,它是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 -5 的特征向量.

令

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-2\\0&2&1\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}1&&\\&5&\\&&-5\end{pmatrix}\text{及 }\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})^k=\begin{pmatrix}1&&\\&5^k&\\&&(-5)^k\end{pmatrix}.$$

故

$$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{T})\boldsymbol{T}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-2\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&5^k&\\&&(-5)^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-2\\0&2&1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2\cdot5^k&(-5)^k\\0&5^k&-(-5)^k\\0&2\cdot5^k&(-5)^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\\0&-\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2\cdot5^{k-1}(1+(-1)^{k+1})&5^{k-1}(4+(-1)^k)-1\\0&5^{k-1}(1+4(-1)^k)&2\cdot5^{k-1}(1+(-1)^{k+1})\\0&2\cdot5^{k-1}(1+(-1)^{k+1})&5^{k-1}(4+(-1)^k)\end{pmatrix}.$$

23. 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 是四维线性空间 V 的一组基,线性变换 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&-2&-4&3\\3&-1&-3&2\\-3&\frac{1}{2}&\frac{9}{2}&-\frac{5}{2}\\-10&3&11&-7\end{pmatrix},$$

1) 求 $\mathscr{A}$ 在基

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}_1&=\boldsymbol{\varepsilon}_1+2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3+\boldsymbol{\varepsilon}_4,\\ \boldsymbol{\eta}_2&=2\boldsymbol{\varepsilon}_1+3\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3,\\ \boldsymbol{\eta}_3&=\boldsymbol{\varepsilon}_3,\\ \boldsymbol{\eta}_4&=\boldsymbol{\varepsilon}_4\end{aligned}$$

下的矩阵；

2）求 $\mathscr{A}$ 的特征值与特征向量；

3）求一可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$，使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 成对角形.

解 1）

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\begin{pmatrix}1&2&0&0\\2&3&0&0\\1&1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}.$$

$\mathscr{A}$ 在 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$，下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&2&0&0\\2&3&0&0\\1&1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}5&-2&-4&3\\3&-1&-3&2\\-3&\frac{1}{2}&\frac{9}{2}&-\frac{5}{2}\\-10&3&11&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0&0\\2&3&0&0\\1&1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-3&2&0&0\\2&-1&0&0\\1&-1&1&0\\3&-2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&-2&-4&3\\3&-1&-3&2\\-3&\frac{1}{2}&\frac{9}{2}&-\frac{5}{2}\\-10&3&11&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0&0\\2&3&0&0\\1&1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&6&-5\\0&0&-5&4\\0&0&\frac{7}{2}&-\frac{3}{2}\\0&0&5&-2\end{pmatrix}.$$

2)

$$\left|\lambda E-\begin{pmatrix}0&0&6&-5\\0&0&-5&+4\\0&0&\dfrac{7}{2}&-\dfrac{3}{2}\\0&0&5&-2\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-6&5\\0&\lambda&5&-4\\0&0&\lambda-\dfrac{7}{2}&\dfrac{3}{2}\\0&0&-5&\lambda+2\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^2(\lambda-1)(\lambda-\frac{1}{2}).$$

特征值为 $0,1,\frac{1}{2}$.

属于特征值 0 的特征向量设为 $x_1\boldsymbol{\eta}_1+x_2\boldsymbol{\eta}_2+x_3\boldsymbol{\eta}_3+x_4\boldsymbol{\eta}_4$，则 x_1,x_2,x_3,x_4 满足方程组

$$\begin{cases}-6x_3+5x_4=0,\\ 5x_3-4x_4=0,\\ -\dfrac{7}{2}x_3+\dfrac{3}{2}x_4=0,\\ -5x_3+2x_4=0.\end{cases}$$

$(1,0,0,0)$及$(0,1,0,0)$是它的一组基础解系. 属于特征值 0 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2=k_1(\boldsymbol{\varepsilon}_1+2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3+\boldsymbol{\varepsilon}_4)+k_2(2\boldsymbol{\varepsilon}_1+3\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3)$，$k_1,k_2$ 取不全为零的任意数值.

属于特征值 1 的特征向量设为 $x_1\boldsymbol{\eta}_1+x_2\boldsymbol{\eta}_2+x_3\boldsymbol{\eta}_3+x_4\boldsymbol{\eta}_4$，则 x_1,x_2,x_3,x_4 满足方程组

$$\begin{cases}x_1\quad-6x_3+5x_4=0,\\ x_2+5x_3-4x_4=0,\\ -\dfrac{5}{2}x_3+\dfrac{3}{2}x_4=0,\\ -5x_3+3x_4=0.\end{cases}$$

$(-7,5,3,5)$是基础解系. 属于特征值 1 的全部特征向量是 $k(-7\boldsymbol{\eta}_1+5\boldsymbol{\eta}_2+3\boldsymbol{\eta}_3+5\boldsymbol{\eta}_4)=k(3\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3-2\boldsymbol{\varepsilon}_2)$，$k\neq0$，取任意数值.

属于特征值$\frac{1}{2}$的特征向量设为 $x_1\boldsymbol{\eta}_1+x_2\boldsymbol{\eta}_2+x_3\boldsymbol{\eta}_3+x_4\boldsymbol{\eta}_4$，则 x_1,x_2,x_3,x_4 满足方程组：

$$\begin{cases}\frac{1}{2}x_1 \qquad\quad - 6x_3+5x_4=0,\\ \qquad \frac{1}{2}x_2+5x_3-4x_4=0,\\ \qquad\qquad -\frac{6}{2}x_3+\frac{3}{2}x_4=0,\\ \qquad\qquad -5x_3+\frac{5}{2}x_4=0.\end{cases}$$

$(-8,6,1,2)$是它的基础解系，属于$\frac{1}{2}$的全部特征向量是 $k(-8\boldsymbol{\eta}_1+6\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3+2\boldsymbol{\eta}_4)=k(4\boldsymbol{\varepsilon}_1+2\boldsymbol{\varepsilon}_2-\boldsymbol{\varepsilon}_3-6\boldsymbol{\varepsilon}_4)$，$k\neq0$，取任意数值.

3）取

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&1&2\\1&3&1&-1\\1&0&-2&-6\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}0&&&\\&0&&\\&&1&\\&&&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

24. 1）设 λ_1,λ_2 是线性变换 $\mathscr{A}$ 的两个不同特征值，$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 是分别属于 λ_1,λ_2 的特征向量，证明：$\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 不是 $\mathscr{A}$ 的特征向量；

2）证明：如果线性空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 以 V 中每个非零向量作为它的特征向量，那么 $\mathscr{A}$ 是数乘变换.

提示 1）如 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 都是特征向量，则 $\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1+\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2=$

$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2)$不能成立.

2) 应用1),这时$\mathscr{A}$只能有一个特征值.

证明 1) 反证法.设$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2)=\lambda(\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2)$.但$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2)=\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1+\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2=\lambda_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+\lambda_2\boldsymbol{\varepsilon}_2$.故$\lambda(\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2)=\lambda_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+\lambda_2\boldsymbol{\varepsilon}_2$,于是

$$(\lambda-\lambda_1)\boldsymbol{\varepsilon}_1+(\lambda-\lambda_2)\boldsymbol{\varepsilon}_2=\mathbf{0}.$$

因$\lambda_1\neq\lambda_2$,$\lambda-\lambda_1$与$\lambda-\lambda_2$不全为零.但由定理8,$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$是线性无关的,矛盾.故$\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2$不能是特征向量.

2) 任取V的两个非零向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$,由题设它们都是$\mathscr{A}$的特征向量,且它们的和也是特征向量.由1)知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$属于同一个特征值.因此$V$中任一非零向量都是属于同一特征值的特征向量,$\mathscr{A}$就是数乘变换.

25. 设V是复数域上的n维线性空间,$\mathscr{A},\mathscr{B}$是V的线性变换,且$\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}$.证明:

1) 如果λ_0是$\mathscr{A}$的一特征值,那么V_{λ_0}是$\mathscr{B}$的不变子空间;

2) $\mathscr{A},\mathscr{B}$至少有一个公共的特征向量.

提示 2) 设V_{λ_0}是$\mathscr{A}$的一个特征子空间,由1)$\mathscr{B}$在V_{λ_0}上也成为线性变换,至少有一个特征向量.

证明 1) 设$\boldsymbol{\alpha}\in V_{\lambda_0}$,则$\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}$.于是

$$\mathscr{A}\mathscr{B}\boldsymbol{\alpha}=\mathscr{B}(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha})=\lambda_0\mathscr{B}\boldsymbol{\alpha},$$

即有$\mathscr{B}\boldsymbol{\alpha}\in V_{\lambda_0}$.故$V_{\lambda_0}$是$\mathscr{B}$的不变子空间.

2) V_{λ_0}是$\mathscr{B}$的不变子空间,令$\mathscr{B}_0=\mathscr{B}|_{V_{\lambda_0}}$是$V_{\lambda_0}$上的线性变换.因$V_{\lambda_0}$是复数域上线性空间,$\mathscr{B}_0$在复数域上必有特征值,设为$\mu$.$V_{\lambda_0}$上有$\mathscr{B}_0$的属于$\mu$的特征向量$\boldsymbol{\alpha}$.$\boldsymbol{\alpha}\in V_{\lambda_0}$,它也是$\mathscr{A}$的属于$\lambda_0$的特征向量.这时

$$\mathscr{B}\boldsymbol{\alpha}=\mathscr{B}_0\boldsymbol{\alpha}=\mu\boldsymbol{\alpha},\ \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha},$$

故$\boldsymbol{\alpha}$是$\mathscr{A},\mathscr{B}$的公共特征向量.

26. 设 V 是复数域上的 n 维线性空间，而线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的矩阵是一若尔当块. 证明：

1）V 中包含 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ 的 $\mathscr{A}$-子空间只有 V 自身；

2）V 中任一非零 $\mathscr{A}$-子空间都包含 $\boldsymbol{\varepsilon}_n$；

3）V 不能分解成两个非平凡的 $\mathscr{A}$-子空间的直和.

提示 2）$\mathscr{A}$ 在 V 中只有唯一的特征向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_n$（除相差一个倍数），且 $\mathscr{A}$ 在它的任何非零的不变子空间中皆有特征向量.

证明 1）设

$$(\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\begin{pmatrix}\lambda_0 & & & \\ 1 & \lambda_0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_0\end{pmatrix},$$

即有

$$(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{E})\boldsymbol{\varepsilon}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_2,(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{E})\boldsymbol{\varepsilon}_2=\boldsymbol{\varepsilon}_3,\cdots,(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{E})\boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}=\boldsymbol{\varepsilon}_n.$$

设 W 是 $\mathscr{A}$-不变子空间，含有 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，则含有 $\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1-\lambda_0\boldsymbol{\varepsilon}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_2,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2-\lambda_0\boldsymbol{\varepsilon}_2=\boldsymbol{\varepsilon}_3,\cdots,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}-\lambda_0\boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}=\boldsymbol{\varepsilon}_n$. 则 W 含有 V 的一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$，即有 $W=V$.

2）$\mathscr{A}$ 只有一个特征值 λ_0，设特征向量 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{\varepsilon}_i$. $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足的方程组是

$$\begin{cases}0\cdot x_1+0\cdot x_2+\cdots+0\cdot x_n=0,\\ 1\cdot x_1+0\cdot x_2+\cdots+0\cdot x_n=0,\\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\ 0\cdot x_1+\cdots+1\cdot x_{n-1}+0\cdot x_n=0,\end{cases}$$

基础解系是 $(0,0,\cdots,0,1)$. 全部特征向量是 $k\boldsymbol{\varepsilon}_n$，$k\neq0$，取任意复数值.

故 $\mathscr{A}$ 所有的特征向量都是 $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的倍数.

任取 V 中的一个非零的 $\mathscr{A}$-子空间 W，$\mathscr{A}|_W$ 在 W 上必有复

特征值,它也是 $\mathscr{A}$ 的特征值,只能为 λ_0. $\mathscr{A}\big|_W$ 的属于 λ_0 的特征向量也是 $\mathscr{A}$ 的属于 λ_0 的特征向量,必是 $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的倍数. 它属于 $\boldsymbol{W}$,则 $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 也属于 $\boldsymbol{W}$.

3) 设 $\boldsymbol{W}_1,\boldsymbol{W}_2$ 皆为非零的 $\mathscr{A}$-子空间. 由 2),$\boldsymbol{\varepsilon}_n\in \boldsymbol{W}_1\cap \boldsymbol{W}_2$. 即 $\boldsymbol{W}_1\cap \boldsymbol{W}_2\neq\{\boldsymbol{0}\}$. 自然地,$\boldsymbol{W}_1+\boldsymbol{W}_2$ 不能是直和.

27. 求下列矩阵的最小多项式

1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

解 1) 以 $\boldsymbol{A}$ 记题目所设的矩阵. 它的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1),$$

$\boldsymbol{A}$ 的最小多项式是$(\lambda-1)^2(\lambda+1)$的因式. 现计算得到

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\neq\boldsymbol{O},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\neq\boldsymbol{O},\text{但}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}.$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式为λ^2-1.

2) 仍以 $\boldsymbol{A}$ 记题目所设的矩阵. 它的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & \lambda-3 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & \lambda+3 & -1 \\ 1 & -3 & -1 & \lambda+3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -\lambda \\ -3 & 1 & \lambda+3 & -1 \\ 1 & -3 & -1 & \lambda+3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ -3 & 1 & \lambda & 0 \\ 1 & -3 & 0 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^4.$$

$\boldsymbol{A}$ 的最小多项式是 λ^4 的因式，现计算出

$$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O},\quad \boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}.$$

故最小多项式为 λ^2.

四、补充题、提示与解答

1. 设 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 是线性变换，$\mathscr{A}^2=\mathscr{A},\mathscr{B}^2=\mathscr{B}$. 证明：

1) 如果 $(\mathscr{A}+\mathscr{B})^2=\mathscr{A}+\mathscr{B}$，那么 $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{O}$；

2) 如果 $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}$，那么 $(\mathscr{A}+\mathscr{B}-\mathscr{A}\mathscr{B})^2=\mathscr{A}+\mathscr{B}-\mathscr{A}\mathscr{B}$.

证明 1) $(\mathscr{A}+\mathscr{B})^2=\mathscr{A}^2+\mathscr{A}\mathscr{B}+\mathscr{B}\mathscr{A}+\mathscr{B}^2=\mathscr{A}+\mathscr{B}+\mathscr{A}\mathscr{B}+\mathscr{B}\mathscr{A}$. 因题设 $(\mathscr{A}+\mathscr{B})^2=\mathscr{A}+\mathscr{B}$，得 $\mathscr{A}\mathscr{B}+\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{O}$，于是 $\mathscr{A}\mathscr{B}=-\mathscr{B}\mathscr{A}$. 又 $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{A}^2\mathscr{B}=-\mathscr{A}\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{B}\mathscr{A}^2=\mathscr{B}\mathscr{A}=-\mathscr{A}\mathscr{B}$，故 $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{O}$.

2) $(\mathscr{A}+\mathscr{B}-\mathscr{A}\mathscr{B})^2=\mathscr{A}^2+\mathscr{B}^2+(\mathscr{A}\mathscr{B})^2+\mathscr{A}\mathscr{B}-\mathscr{A}^2\mathscr{B}-\mathscr{B}\mathscr{A}\mathscr{B}+\mathscr{B}\mathscr{A}-\mathscr{A}\mathscr{B}\mathscr{A}-\mathscr{A}\mathscr{B}^2=\mathscr{A}+\mathscr{B}+\mathscr{A}^2\mathscr{B}^2+\mathscr{A}\mathscr{B}-\mathscr{A}\mathscr{B}-\mathscr{A}\mathscr{B}+\mathscr{A}\mathscr{B}-\mathscr{A}\mathscr{B}-\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{A}+\mathscr{B}-\mathscr{A}\mathscr{B}$.

2. 设 V 是数域 P 上 n 维线性空间. 证明：由 V 的全体线性变换组成的线性空间是 n^2 维的.

提示 先证 $P^{n\times n}$ 是 n^2 维的.

证明 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\cdots,\boldsymbol{E}_{1n},\boldsymbol{E}_{21},\cdots,\boldsymbol{E}_{2n},\cdots,\boldsymbol{E}_{n1},\boldsymbol{E}_{n2},\cdots,\boldsymbol{E}_{nn}$ 这组元素是 $P^{n\times n}$ 的生成元，任一元 $\boldsymbol{A}\in P^{n\times n}$，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}$. 又若 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}=\boldsymbol{O}$，即有 $(a_{ij})_{n\times n}=\boldsymbol{O}$，于是 $a_{ij}=0,\forall 1\leqslant i,j\leqslant n$. 故 $\{\boldsymbol{E}_{ij}\mid 1\leqslant i,j\leqslant n\}$ 是线性无关的. 因此它们是 $P^{n\times n}$ 的一组基，从而 $P^{n\times n}$ 是 n^2 维的.

设 V 是 P 上 n 维线性空间，$L(V)$ 是 V 上全体线性变换所成的空间. 给定 V 上一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$. 任一线性变换与它在该基下的矩阵相对应，这就建立了 $L(V)$ 到 $P^{n\times n}$ 上的一个映射，它是双射，又保持各自的加法和数量乘法，因而是线性空间 $L(V)$ 到线性空间 $P^{n\times n}$ 上的同构. 由于是同构，它们的维数相同，即 $L(V)$

也是 n^2 维的.

3. 设 $\mathscr{A}$ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一个线性变换.证明:

1) 在 $P[x]$ 中有一次数 $\leqslant n^2$ 的多项式 $f(x)$,使 $f(\mathscr{A})=\mathscr{O}$;

2) 如果 $f(\mathscr{A})=\mathscr{O}, g(\mathscr{A})=\mathscr{O}$,那么 $d(\mathscr{A})=\mathscr{O}$,这里 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式;

3) $\mathscr{A}$ 可逆的充分必要条件是,有一常数项不为零的多项式 $f(x)$ 使 $f(\mathscr{A})=\mathscr{O}$.

提示 1) 有一个次数 $\leqslant n^2$ 的多项式 $f(x)$ 使 $f(\mathscr{A})=\mathscr{O}$,这个事实写出来就是存在 $a_0,a_1,\cdots,a_{n^2}$ 不全为零,使

$$a_0\mathscr{E}+a_1\mathscr{A}+a_2\mathscr{A}^2+\cdots+a_{n^2}\mathscr{A}^{n^2}=\mathscr{O}. \qquad (*)$$

或说 $\mathscr{E},\mathscr{A},\mathscr{A}^2,\cdots,\mathscr{A}^{n^2}$ 是线性相关的.

3) 必要性.从 1) 中 $(*)$ 式出发去证明.

充分性.把题目所设 $f(\mathscr{A})=\mathscr{O}$ 的左边展开,再证明.

证明 1) $\mathscr{A}$ 是 V 上全体线性变换所成的线性空间中的元素.该空间是 n^2 维的,任意 n^2+1 个元素皆线性相关.$\mathscr{E},\mathscr{A},\mathscr{A}^2,\cdots,\mathscr{A}^{n^2}$ 是该空间中 n^2+1 个元素,必线性相关.故存在不全为零的一组数 $a_0,a_1,\cdots,a_{n^2}$ 使

$$a_0\mathscr{E}+a_1\mathscr{A}+a_2\mathscr{A}^2+\cdots+a_{n^2}\mathscr{A}^{n^2}=\mathscr{O}.$$

令 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n^2}x^{n^2}$,它的次数 $\leqslant n^2$,且使 $f(\mathscr{A})=\mathscr{O}$.

2) $d(x)$ 是 $f(x),g(x)$ 的最大公因式,必有 $u(x),v(x)\in P[x]$ 使 $d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$.于是 $d(\mathscr{A})=u(\mathscr{A})f(\mathscr{A})+v(\mathscr{A})g(\mathscr{A})=\mathscr{O}$.

3) 必要性.由 1),有 $a_0,a_1,\cdots,a_{n^2}$ 不全为零使

$$a_0\mathscr{E}+a_1\mathscr{A}+\cdots+a_{n^2}\mathscr{A}^{n^2}=\mathscr{O}.$$

设 a_i 是 $a_0,a_1,a_2,\cdots$ 中第一个不为零的数.由 $\mathscr{A}$ 可逆,这个 $i\neq n^2$.否则有 $a_{n^2}\neq0$ 及 $\mathscr{A}^{n^2}\neq\mathscr{O}$,但 $a_{n^2}\mathscr{A}^{n^2}=\mathscr{O}$,这是不可能的.故 $i<$

n^2. 于是

$$a_i\mathscr{A}^i + a_{i+1}\mathscr{A}^{i+1} + \cdots + a_{n^2}\mathscr{A}^{n^2}$$
$$= \mathscr{A}^i(a_i\mathscr{E} + a_{i+1}\mathscr{A} + \cdots + a_{n^2}\mathscr{A}^{n^2-i}) = \mathscr{O}.$$

因 $\mathscr{A}$ 可逆,就有 $a_i\mathscr{E} + a_{i+1}\mathscr{A} + \cdots + a_{n^2}\mathscr{A}^{n^2-i} = \mathscr{O}$. 令

$$f(x) = a_i + a_{i+1}x + \cdots + a_{n^2}x^{n^2-i},$$

则常数项 $a_i \neq 0$,且 $f(\mathscr{A}) = \mathscr{O}$.

充分性. 设 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k$, $a_0 \neq 0$,使 $f(\mathscr{A}) = \mathscr{O}$. 写出来就是

$$a_0\mathscr{E} + a_1\mathscr{A} + \cdots + a_k\mathscr{A}^k = \mathscr{O}.$$

于是

$$\mathscr{A}(a_1\mathscr{E} + a_2\mathscr{A} + \cdots + a_k\mathscr{A}^{k-1}) = -a_0\mathscr{E},$$
$$\mathscr{A}\left(-\frac{a_1}{a_0}\mathscr{E} - \frac{a_2}{a_0}\mathscr{A} - \cdots - \frac{a_k}{a_0}\mathscr{A}^{k-1}\right) = \mathscr{E}.$$

即 $\mathscr{A}$ 是可逆变换.

4. 设 $\mathscr{A}$ 是线性空间 V 上的可逆线性变换.

1) 证明:$\mathscr{A}$ 的特征值一定不为 0;

2) 证明:如果 λ 是 $\mathscr{A}$ 的特征值,那么 $\frac{1}{\lambda}$ 是 $\mathscr{A}^{-1}$ 的特征值.

提示 1) 考察 n 级矩阵 $\boldsymbol{A}$, $|\boldsymbol{A}| = 0$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 以 0 为特征值.

2) 考察:从式子 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}$ 能推出 $\mathscr{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha} = ?$

证明 1) 设 $\mathscr{A}$ 在某基下的矩阵 $\boldsymbol{A}$,则 $\mathscr{A}$ 的特征值 λ 就是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 由于

$$|0\cdot\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = (-1)^n|\boldsymbol{A}|,$$

$\boldsymbol{A}$ 有特征值为零的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}| = 0$. 故 $\mathscr{A}$ 可逆时即 $\boldsymbol{A}$ 可逆时,它的全部特征值皆不为零.

2) 设 λ 是 $\mathscr{A}$ 的特征值,$\boldsymbol{\alpha}$ 是属于 λ 的特征向量,则

$$\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}.$$

两边用 $\mathscr{A}^{-1}$ 去作用它，则 $\boldsymbol{\alpha}=\lambda\mathscr{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$. 由 1)，$\lambda\neq 0$. 再用 λ^{-1} 乘它的两边，则得

$$\mathscr{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}=\lambda^{-1}\boldsymbol{\alpha}.$$

即 λ^{-1} 是 $\mathscr{A}^{-1}$ 的特征值.

5. 设 $\mathscr{A}$ 是线性空间 V 上的线性变换，证明：$\mathscr{A}$ 的行列式为零的充分必要条件是 $\mathscr{A}$ 以零作为一个特征值.

证明 在补充题 4 中已证明过这一结论.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是一 n 级下三角矩阵，证明：

1) 如果 $a_{ii}\neq a_{jj}$ 当 $i\neq j$，$i,j=1,2,\cdots,n$，那么 $\boldsymbol{A}$ 相似于一对角矩阵；

2) 如果 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}$，而至少有一 $a_{i_0j_0}\neq 0(i_0>j_0)$，那么 $\boldsymbol{A}$ 不与对角矩阵相似.

提示 1) $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn})$.

2) 数量矩阵只与自己相似.

证明 1) $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn})$，故 a_{11}，a_{22}，$\cdots$，a_{nn} 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个不同的特征值. 由定理 8 的推论 1，$\boldsymbol{A}$ 相似于一个对角阵.

2) $\boldsymbol{A}$ 若与对角阵

$$\begin{pmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{pmatrix}$$

相似，则 $\boldsymbol{A}$ 与它有相同特征值. 于是 $\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$ 与 $\{a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}\}$ 相同，则有 $b_1=b_2=\cdots=b_n$. 因而它是数量矩阵、数量矩阵可与任何矩阵交换，它只能相似于自己. 若 $\boldsymbol{A}$ 与它相似，则 $\boldsymbol{A}$ 必为数量矩阵. 但现在 $\boldsymbol{A}$ 不是数量矩阵，矛盾. 故 $\boldsymbol{A}$ 不能相似于对角阵.

7. 证明：对任一 $n\times n$ 复系数矩阵 $\boldsymbol{A}$，存在可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$，使

$T^{-1}AT$ 是上三角矩阵.

证明 一种方法,它相似于若尔当形,即相似于一个下三角阵.把基的次序换一下就可得上三角阵.

另一种方法是直接证明:取 n 维线性空间 V 的一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$.作 V 上的一个线性变换 $\mathscr{A}$,使 $\mathscr{A}$ 在该基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$.由于是复数域,$\mathscr{A}$ 必有复特征值,取一个特征值 λ_1 及属于 λ_1 的一个特征向量 $\boldsymbol{\eta}_1$.补充 $\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$,使 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 为 V 的一组基,设

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{T}_1,$$

及

$$(\mathscr{A}\boldsymbol{\eta}_1,\mathscr{A}\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\mathscr{A}\boldsymbol{\eta}_n)=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix},$$

则有

$$\boldsymbol{T}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & b_{12}\cdots b_{1n}\\ 0 & \\ \vdots & \boldsymbol{B}_{(n-1)\times(n-1)}\\ 0 & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \boldsymbol{\alpha}_{1\times(n-1)}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}.$$

对 $\boldsymbol{A}$ 的级数 n 作归纳法.$n=1$,结论显然.又设 $n-1$ 时结论成立,即对 $(n-1)$ 级方阵 $\boldsymbol{B}$ 有可逆阵 $\boldsymbol{T}_2$ 使 $\boldsymbol{T}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}_2$ 为上三角阵.则

$$\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{T}_2\end{pmatrix}^{-1}\boldsymbol{T}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_1\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{T}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{T}_2^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{T}_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{T}_2\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{T}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}_2\end{pmatrix}.$$

由于 $\boldsymbol{T}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}_2$ 已是上三角阵,故上式右端成为上三角阵.令

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}_1\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{T}_2\end{pmatrix},$$

则左端$=T^{-1}AT$.这就证明了$T^{-1}AT$是上三角矩阵.

8. 如果$\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_s$是线性空间$V$的$s$个两两不同的线性变换,那么在$V$中必存在向量$\boldsymbol{\alpha}$,使$\mathscr{A}_1\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}_2\boldsymbol{\alpha},\cdots,\mathscr{A}_s\boldsymbol{\alpha}$也两两不同.

提示 对任意线性变换$\mathscr{A}$,$\mathscr{A}$的核是线性子空间.$\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$意味着$\boldsymbol{\alpha}$在核子空间之外.再利用第六章习题5.

证明 $\boldsymbol{\alpha}\in V$使$\mathscr{A}_i\boldsymbol{\alpha}\neq\mathscr{A}_j\boldsymbol{\alpha}$当且仅当$\boldsymbol{\alpha}\overline{\in}(\mathscr{A}_i-\mathscr{A}_j)$的核.$i\neq j$时,$\mathscr{A}_i$与$\mathscr{A}_j$两两不同,即$\mathscr{A}_i-\mathscr{A}_j$不是零变换或它们的核不是$V$.我们暂时不考虑$\mathscr{A}_i-\mathscr{A}_j$的核是零子空间的情形,即先考虑$\mathscr{A}_i-\mathscr{A}_j$的核是非平凡子空间的情形.由第六章补充题5.有$\boldsymbol{\alpha}$不属于所有这些非平凡子空间.这时$\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$.当$\mathscr{A}_i-\mathscr{A}_j$的核是零子空间时,当然$\boldsymbol{\alpha}$也不在$\mathscr{A}_i-\mathscr{A}_j$的核中.故这$\boldsymbol{\alpha}$不在所有$i\neq j$的$\mathscr{A}_i-\mathscr{A}_j$的核中,即$\mathscr{A}_i\boldsymbol{\alpha}\neq\mathscr{A}_j\boldsymbol{\alpha}$.

9. 设$\mathscr{A}$是有限维线性空间V的线性变换,W是V的子空间,$\mathscr{A}W$表示由W中向量的像组成的子空间.证明:

$$\text{维}(\mathscr{A}W)+\text{维}(\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})\cap W)=\text{维}(W).$$

提示 因$\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})\cap W\subset W$,取$\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})\cap W$的一组基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_s$,把它扩充成$W$的一组基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_s,\boldsymbol{\varepsilon}_{s+1},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_r$.证明$\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_{s+1},\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_{s+2},\cdots,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_r$是$\mathscr{A}W$的一组基.

证明 按提示的方法取W的基.$\mathscr{A}W=L(\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_s,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_{s+1},\cdots,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_r)$.因$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_s\in\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})$,$\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1=\cdots=\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_s=\mathbf{0}$.故$\mathscr{A}W=L(\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_{s+1},\cdots,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_r)$.设

$$l_{s+1}\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_{s+1}+\cdots+l_r\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_r=\mathbf{0},$$

则
$$\mathscr{A}(l_{s+1}\boldsymbol{\varepsilon}_{s+1}+\cdots+l_r\boldsymbol{\varepsilon}_r)=\mathbf{0}.$$

于是 $l_{s+1}\boldsymbol{\varepsilon}_{s+1}+\cdots+l_r\boldsymbol{\varepsilon}_r\in\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})$.它又须是$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_s$的线性组合,就有一组数$l_1,l_2,\cdots,l_s$使

$$l_{s+1}\boldsymbol{\varepsilon}_{s+1}+\cdots+l_r\boldsymbol{\varepsilon}_r=l_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+\cdots+l_s\boldsymbol{\varepsilon}_s,$$

或
$$l_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+\cdots+l_s\boldsymbol{\varepsilon}_s-l_{s+1}\boldsymbol{\varepsilon}_{s+1}-\cdots-l_r\boldsymbol{\varepsilon}_r=\mathbf{0}.$$

又由 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_s,\boldsymbol{\varepsilon}_{s+1},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_r$ 线性无关,故 $l_1=l_2=\cdots=0$.
特别地 $l_{s+1}=\cdots=l_r=0$,证明了 $\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_{s+1},\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_{s+2},\cdots,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_r$ 线性无关,因而是 $\mathscr{A}W$ 的一组基.

现在 维$(\mathscr{A}W)=r-s$,$\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})\cap W=s$,维$(W)=r$,故

$$维(\mathscr{A}W)+维\ \mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})\cap W=维(W).$$

10. 设 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 是 n 维线性空间 V 的两个线性变换.证明:

$$\mathscr{A}\mathscr{B}\text{ 的秩}\geqslant\mathscr{A}\text{ 的秩}+\mathscr{B}\text{ 的秩}-n.$$

提示 化成相应的矩阵问题.

证明 在 V 中取一组基,设 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 在该基下矩阵为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$,则 $\mathscr{A}\mathscr{B}$ 在该基下的矩阵是 $\boldsymbol{AB}$.由第四章补充题第 10 题知,对于矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{AB}$ 有

$$秩(\boldsymbol{AB})\geqslant秩(\boldsymbol{A})+秩(\boldsymbol{B})-n.$$

因此,对应于线性变换就有

$$秩(\mathscr{A}\mathscr{B})\geqslant秩(\mathscr{A})+秩(\mathscr{B})-n.$$

11. 设 $\mathscr{A}^2=\mathscr{A},\mathscr{B}^2=\mathscr{B}$.证明:

1) $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 有相同值域的充分必要条件是 $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B},\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{A}$;

2) $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 有相同的核的充分必要条件是 $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{A},\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{B}$.

证明 1) 充分性.已知 $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}$ 及 $\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{A}$.则

$$\mathscr{A}V=\mathscr{B}\mathscr{A}V\subset\mathscr{B}V \quad 及 \quad \mathscr{B}V=\mathscr{A}\mathscr{B}V\subset\mathscr{A}V,$$

故 $\mathscr{A}V=\mathscr{B}V$.

必要性.已知 $\mathscr{A}V=\mathscr{B}V$.对 $\forall\,\boldsymbol{\alpha}\in V$,有 $\boldsymbol{\beta}\in V$ 使 $\mathscr{B}\boldsymbol{\beta}=\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}$.则 $\mathscr{B}\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}=\mathscr{B}(\mathscr{B}\boldsymbol{\beta})=\mathscr{B}^2\boldsymbol{\beta}=\mathscr{B}\boldsymbol{\beta}=\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}$.故 $\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{A}$.同样可证 $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}$.

2) 充分性.已知 $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{A}$ 及 $\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{B}$.取 $\boldsymbol{\alpha}\in V$,使 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$,则 $\mathscr{B}\boldsymbol{\alpha}=\mathscr{B}\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.若 $\boldsymbol{\alpha}\in V$ 使 $\mathscr{B}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$,则 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}=\mathscr{A}\mathscr{B}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.故 $\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})=\mathscr{B}^{-1}(\mathbf{0})$.

必要性.已知 $\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})=\mathscr{B}^{-1}(\mathbf{0})$.对 $\forall\,\boldsymbol{\beta}\in V$.由 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}-\mathscr{A}\boldsymbol{\beta})=\mathscr{A}\boldsymbol{\beta}-\mathscr{A}^2\boldsymbol{\beta}=\mathscr{A}\boldsymbol{\beta}-\mathscr{A}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$,得 $\mathscr{B}(\boldsymbol{\beta}-\mathscr{A}\boldsymbol{\beta})=\mathscr{B}\boldsymbol{\beta}-\mathscr{B}\mathscr{A}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$,即 $\mathscr{B}\boldsymbol{\beta}=\mathscr{B}\mathscr{A}\boldsymbol{\beta}$,故 $\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}$.

同样可证 $\mathscr{A}=\mathscr{A}\mathscr{B}$.

*第八章　λ－矩阵

一、内容提要

1. λ－矩阵

λ－矩阵

λ－矩阵的秩(定义 1)

可逆 λ－矩阵(定义 2)

λ－矩阵可逆的条件(定理 1)

2. λ－矩阵在初等变换下的标准形

λ－矩阵的初等变换

λ－矩阵的等价. λ－矩阵的等价是一种等价关系.

λ－矩阵在等价关系下的标准形. 标准形的存在及计算方法.

3. 标准形的唯一性

λ－矩阵的不变因子、行列式因子、标准形以及它们之间的关系与计算方法.

标准形的唯一性

4. 两个 λ－矩阵等价的条件

$\boldsymbol{A}(\lambda)$与 $\boldsymbol{B}(\lambda)$等价的充分必要条件是:它们有相同的各级行列式因子,或有相同的各级不变因子(定理 5);有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}(\lambda)$,$\boldsymbol{Q}(\lambda)$,使 $\boldsymbol{B}(\lambda)=\boldsymbol{P}(\lambda)\boldsymbol{A}(\lambda)\boldsymbol{Q}(\lambda)$(定理 6 推论).

λ－矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$可逆的条件:与单位矩阵等价;可表成一些初等矩阵的乘积.

5. 数字矩阵相似的条件

数字矩阵相似的条件(定理 7 及其推论).

6. 初等因子

初等因子的定义(定义 7).

两个复数矩阵相似的充要条件是它们有相同的初等因子(定理 8).

对角矩阵的初等因子(定理 9).

7. 若尔当标准形

若尔当标准形的理论推导(定理 10).

若尔当标准形的存在及计算(定理 10),关于线性变换的相应结论(定理 11).

8. 复数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件

(1) $\boldsymbol{A}$ 的初等因子全为 1 次的(定理 12);

(2) $\boldsymbol{A}$ 的不变因子都没有重根(定理 13).

9. 有理标准形

多项式 $d(\lambda)$ 的伴侣阵

有理标准形的定义

有理标准形的存在唯一及计算(定理 14)

二、学习指导

1. 在上一章中我们借助于线性变换的不变子空间的直和分解并适当选取基向量,证明了任一个复数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都与一个若尔当形矩阵相似.为了简单地计算矩阵的若尔当形并讨论两个复数矩阵相似的条件,我们在这一章引进了 λ - 矩阵并以 λ - 矩阵的等价问题的讨论作为解决以上问题的方法.

学习这一章首先需要注意的是 λ - 矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 与数字矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的主要不同之处是 $\boldsymbol{A}$ 中元素都属于某个数域,因此只要是非零的,就都有逆元素;而 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 中元素是 λ 的多项式,一个非零多项式不一定有逆元素,只有零次多项式(非零常数)才可逆.

2. λ－矩阵的初等变换及标准形

本章第二节讨论了λ－矩阵的等价及标准形问题，对于数字矩阵，这些问题是我们熟悉的，所以在学习这一节时可以用数字矩阵的等价问题及标准形来加以比较，特别需要注意有什么不同，如何解决.

首先关于λ－矩阵的初等因子的定义(定义3).这个定义与以前数字矩阵的初等变换(第2章定义6及第73页)有什么不同呢？第一种初等变换当然是一样的，把运算的对象由"数"改为"λ－多项式".第3种变换的定义也是理所当然的.至于第2条，在数字矩阵的初等变换中，某行(列)乘以非零常数c，这一点是因为要求初等变换是可逆的.那么什么样的λ－多项式是可逆的呢？当然是零次多项式即非零常数，即：在数域P及多项式环$P[x]$中其可逆元素是相同的，即P中非零数.因此第2种初等变换的定义又是相同的了.

在应用初等变换把λ－矩阵化为对角矩阵时，又一个与前不同之处，也是困难之处是：当$a_{11}(\lambda)\neq 0$时，$a_{11}(\lambda)$不一定能整除$a_{21}(\lambda),\cdots,a_{n1}(\lambda)$.因此必须应用引理(第331页)把$a_{11}(\lambda)$的次数降低，直至降到$a_{11}(\lambda)$能整除$a_{ij}(\lambda)(i,j=1,2,\cdots,n)$为止.为什么是$a_{ij}(\lambda),i,j=1,2,\cdots,n$，而不仅是$a_{i1}(\lambda)(i=1,2,\cdots,n)$呢？这是为了最后得到的对角矩阵

$$\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

要满足$d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda),i=1,2,\cdots,r-1$.注意了这一点，其他推导和证明就和以前基本相同了.

应用这个引理，定理2给出了λ－矩阵在等价关系下的标准形的存在及算法，读者可以参考第334页的例题.

3. 行列式因子,不变因子

为了证明标准形的唯一性,需要用到行列式因子.通过行列式因子在初等变换下的不变性以及标准形中 $d_1(\lambda),\cdots,d_r(\lambda)$ 与行列式因子的关系,可以证明标准形的唯一性(定理 4).因而可把 $d_1(\lambda),\cdots,d_r(\lambda)$ 称为不变因子.

值得提到的是,读者在作习题时,可以发现,把一个 λ - 矩阵用初等变换化为"对角矩阵"比化为"标准形"来说,要容易多了,通过行列式因子与不变因子的关系,可以由对角矩阵通过简单的计算得到行列式因子,从而得到不变因子、标准形.

希望读者通过练习,学会灵活应用初等变换,行列式因子,不变因子的概念并应用它们之间的关系求出标准形.

4. 矩阵相似的条件

矩阵相似的问题是不能用初等变换来计算的.因为,如果 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵 $\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$ 相似,那么 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,是无法用初等变换算出来的.

这一节证明了数字矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 相似的充分必要条件是其特征矩阵 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 与 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$ 等价,从而把相似问题化为简单的可用初等变换来计算的等价问题.

主要结论是定理 7 及其推论.定理 7 与引理的证明运用了关于 λ - 矩阵的一些常用方法.对于结论必须掌握,至于证明,读者可视时间酌情处理.

5. 初等因子、若尔当形

本章在此以前的讨论都是在一个取定的数域内加以讨论的.这一节却必须在复数域中加以讨论.

这一节通过初等因子来构造若尔当标准形.方法是通过初等

因子与若尔当块的关系，应用 **A** 的初等因子，写出全部若尔当块、排成与 **A** 相似的若尔当形.

在计算时必须正确了解初等因子的定义与算法.并知道计算 **A** 的若尔当形的理论根据.从这一节的计算还可看出，只要把 $\lambda E - A$ 化为对角形(而不是标准形)就可算出 **A** 的全部初等因子，从而写出 **A** 的若尔当形.

6. 有理标准形

若尔当标准形是复矩阵的标准形，必须在复数域中进行运算.这是由于初等因子是一次多项式的方幂.对于一般数域 P，P 上矩阵 **A** 的特征矩阵 $A(\lambda)$ 可以用前面介绍的方法化为标准形

$$\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & \\ & d_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n(\lambda) \end{pmatrix}, d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda), i = 1, 2, \cdots, n-1.$$

但是 $d_i(\lambda)$ 不一定能分解成 $P[\lambda]$ 中一次多项式的乘积，无法构造与 **A** 相似的 $P^{n\times n}$ 中的若尔当形矩阵.

为此本节介绍了有理标准形.$P^{n\times n}$ 中矩阵 **A** 的有理标准形仍在 $P^{n\times n}$ 中.

这一节只要学会如何应用伴侣矩阵写出有理系数矩阵 **A** 的有理标准形即可.

因为任何数域 P 都包含有理数域，所以这一节介绍的有理标准形对任何数域都可应用.

有理标准形的构造说明了定理 7 的重要性.只要掌握了定理 7，读者可以应用 **A** 的不变因子来构造自己所需要的满意的 **A** 的标准形.

*7. 若尔当形在常微分方程中的应用

一般高阶线性常微分方程组都可以化成一阶线性微分方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n,\\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n.\end{cases}$$

用矩阵表示就是

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t),$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{pmatrix}$是由 n 个未知函数 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$组成的一个 n 维列向量. $\boldsymbol{A}=(a_{ij}(t))$是以已知复值函数 $a_{ij}(t)$, $i,j=1,2,\cdots,n$,为元素的一个 $n\times n$ 矩阵.

如果 $a_{ij}(t)$为常数,为了求这个方程组的解,可作线性变换

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}(t),$$

其中

$$\boldsymbol{y}(t)=\begin{pmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\\ \vdots\\ y_n(t)\end{pmatrix},\boldsymbol{P}=(p_{ij})$$

是一个非退化复数矩阵,于是 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{P}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}(t)$或 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}(t)$.

设 $\boldsymbol{J}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形,且可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 满足

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}.$$

为了简单起见,我们假设 $\boldsymbol{J}$ 只有一个若尔当块:

$$
\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_1\end{pmatrix},
$$

在这种情况下,即得

$$
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}(t)}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_1\end{pmatrix}\boldsymbol{y}(t),
$$

即

$$
\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y_1(t)}{\mathrm{d}t}=\lambda_1 y_1(t),\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y_2(t)}{\mathrm{d}t}=y_1(t)+\lambda_1 y_2(t),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{\mathrm{d}y_n(t)}{\mathrm{d}t}=y_{n-1}(t)+\lambda_1 y_n(t),\end{cases}
$$

由此可以解出 $y_1(t),y_2(t),\cdots,y_n(t)$,从而解得 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$.

如果 $\boldsymbol{J}$ 不止一个若尔当块,也可用同样方法求出 $y_1(t),\cdots,y_n(t)$及 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$.

三、习题、提示与解答

1. 化下列 λ - 矩阵成标准形:

1) $\begin{pmatrix}\lambda^3-\lambda & 2\lambda^2\\ \lambda^2+5\lambda & 3\lambda\end{pmatrix}$;2) $\begin{pmatrix}1-\lambda & \lambda^2 & \lambda\\ \lambda & \lambda & -\lambda\\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} \lambda^2+\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^2-\lambda & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0 & 0 \\ \lambda^2-\lambda & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 3\lambda^2+2\lambda-3 & 2\lambda-1 & \lambda^2+2\lambda-3 \\ 4\lambda^2+3\lambda-5 & 3\lambda-2 & \lambda^2+3\lambda-4 \\ \lambda^2+\lambda-4 & \lambda-2 & \lambda-1 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} 2\lambda & 3 & 0 & 1 & \lambda \\ 4\lambda & 3\lambda+6 & 0 & \lambda+2 & 2\lambda \\ 0 & 6\lambda & \lambda & 2\lambda & 0 \\ \lambda-1 & 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 3\lambda-3 & 1-\lambda & 2\lambda-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

提示 灵活应用 λ - 矩阵的初等变换及行列式因子,不变因子,初等因子之间的关系.

解 1) 因为

$D_1(\lambda)=\lambda$,

$$D_2(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda^3-\lambda & 2\lambda^2 \\ \lambda^2+5\lambda & 3\lambda \end{vmatrix}$$
$$=\lambda^4-10\lambda^3-3\lambda^2=\lambda^2(\lambda^2-10\lambda-3),$$

所以

$d_1(\lambda)=\lambda$,

$d_2(\lambda)=\lambda(\lambda^2-10\lambda-3)$,

标准形为

$$\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda(\lambda^2-10\lambda-3) \end{pmatrix}.$$

2）作初等变换

$$\begin{pmatrix}1-\lambda & \lambda^2 & \lambda\\ \lambda & \lambda & -\lambda\\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & \lambda^2+\lambda & 0\\ \lambda & \lambda & -\lambda\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -\lambda\\ 0 & \lambda^2+\lambda & 0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & \lambda^2+\lambda & \lambda^2+\lambda\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1)\end{pmatrix}.$$

3）初等因子：$\lambda,\lambda,\lambda+1,(\lambda+1)^2$.

标准形：$\begin{pmatrix}1 & & \\ & \lambda(\lambda+1) & \\ & & \lambda(\lambda+1)^2\end{pmatrix}$.

4）初等因子：$\lambda,\lambda,\lambda^2,\lambda-1,\lambda-1,(\lambda-1)^2$.

标准形：$\begin{pmatrix}1 & & & \\ & \lambda(\lambda-1) & & \\ & & \lambda(\lambda-1) & \\ & & & \lambda^2(\lambda-1)^2\end{pmatrix}$.

5）标准形为

$$\begin{pmatrix}1 & & \\ & \lambda-1 & \\ & & (\lambda-1)^2(\lambda+1)\end{pmatrix}.$$

6）标准形为

$$\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \lambda(\lambda-1) & \\ & & & & \lambda^2(\lambda-1)\end{pmatrix}.$$

2. 求下列 λ－矩阵的不变因子：

1) $\begin{pmatrix} \lambda-2 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}$；2) $\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 5 & 4 & 3 & \lambda+2 \end{pmatrix}$；

3) $\begin{pmatrix} \lambda+\alpha & \beta & 1 & 0 \\ -\beta & \lambda+\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+\alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \lambda+\alpha \end{pmatrix}$；

4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \lambda+2 \\ 0 & 1 & \lambda+2 & 0 \\ 1 & \lambda+2 & 0 & 0 \\ \lambda+2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$；

5) $\begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}$.

解 1) 因为 $D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=1, D_3(\lambda)=(\lambda-2)^3$，所以不变因子为 $1,1,(\lambda-2)^3$.

2) 因为 $D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=D_3(\lambda)=1$，

$$D_4(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 5 & 4 & 3 & \lambda+2 \end{vmatrix}=\lambda^4+2\lambda^3+3\lambda^2+4\lambda+5,$$

所以，不变因子为

$$1,1,1,\lambda^4+2\lambda^3+3\lambda^2+4\lambda+5.$$

3) 当 $\beta=0$ 时，

原矩阵成为

$$\begin{pmatrix} \lambda+\alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda+\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+\alpha \end{pmatrix}$$

此时 $D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=1, D_3(\lambda)=(\lambda+\alpha)^2, D_4(\lambda)=(\lambda+\alpha)^4$.

不变因子为 $1,1,(\lambda+\alpha)^2,(\lambda+\alpha)^2$.

当 $\beta\neq 0$ 时,

$$D_4(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda+\alpha & \beta & 1 & 0 \\ -\beta & \lambda+\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+\alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \lambda+\alpha \end{vmatrix}=[(\lambda+\alpha)^2+\beta^2]^2,$$

有一个 3 级子式

$$\begin{vmatrix} \lambda+\alpha & 1 & 0 \\ -\beta & 0 & 1 \\ 0 & -\beta & \lambda+\alpha \end{vmatrix}=2\beta(\lambda+\alpha)$$

与 $D_4(\lambda)$互素.所以得

$$D_3(\lambda)=D_2(\lambda)=D_1(\lambda)=1.$$

因此不变因子为

$$1,1,1,[(\lambda+\alpha)^2+\beta^2]^2.$$

4) 答:$1,1,1,(\lambda+2)^4$.

5) 答:$1,1,1,(\lambda^2-1)(\lambda^2-4)$.

3. 证明

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda+a_1 \end{pmatrix}$$

的不变因子是$\overbrace{1,1,\cdots,1}^{n-1\text{个}},f(\lambda)$，其中 $f(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$.

提示 应用行列式因子，并参考第二章习题 18,27.

证明 记

$$A=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda+a_1 \end{pmatrix}.$$

则

$$|A|=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=f(\lambda).$$

A 有一个 $n-1$ 级子式

$$\begin{vmatrix} -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}\neq 0,$$

因此

$$D_{n-1}(\lambda)=1,$$

从而

$$D_{n-2}(\lambda)=\cdots=D_1(\lambda)=1,$$

所以 A 的不变因子是

$$1,1,\cdots,1,f(\lambda).$$

4. 设 A 是数域 P 上一个 $n\times n$ 矩阵，证明 A 与 A' 相似.

提示 证明 $\lambda E-A$ 与 $\lambda E-A'$ 等价.

证明 因为

$$(\lambda E - A') = (\lambda E - A)',$$

而 $\lambda E - A$ 与$(\lambda E - A)'$的各个子式之间按转置关系有一个一一对应.对应的子式因为彼此互为转置,所以是相等的.因此 $\lambda E - A$ 与 $\lambda E - A'$有相同的行列式因子,$\lambda E - A$ 与 $\lambda E - A'$等价.根据本章定理 7,A 与 A'相似.

5. 设

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix},$$

求 A^k.

提示 将 A 表成

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

用二项公式展开.

解 将 A 表成

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

其中$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$可交换,并且

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^4 = \cdots = O,$$

所以

$$
A^k=\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}^k+k\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}^{k-1}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}+
$$

$$
\frac{k(k-1)}{2}\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}^{k-2}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}^2+O
$$

$$
=\begin{pmatrix}\lambda^k&0&0\\k\lambda^{k-1}&\lambda^k&0\\\frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}&k\lambda^{k-1}&\lambda^k\end{pmatrix}.
$$

6. 求下列复系数矩阵的若尔当标准形：

1) $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&0\\-2&-2&-1\end{pmatrix}$； 2) $\begin{pmatrix}13&16&16\\-5&-7&-6\\-6&-8&-7\end{pmatrix}$；

3) $\begin{pmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{pmatrix}$； 4) $\begin{pmatrix}4&5&-2\\-2&-2&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$；

5) $\begin{pmatrix}3&7&-3\\-2&-5&2\\-4&-10&3\end{pmatrix}$； 6) $\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&-3&6\\2&-2&4\end{pmatrix}$；

7) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\-3&-3&3\\-2&-2&2\end{pmatrix}$； 8) $\begin{pmatrix}-4&2&10\\-4&3&7\\-3&1&7\end{pmatrix}$；

9) $\begin{pmatrix}0&3&3\\-1&8&6\\2&-14&-10\end{pmatrix}$； 10) $\begin{pmatrix}8&30&-14\\-6&-19&9\\-6&-23&11\end{pmatrix}$；

11) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -7 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$；12) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；

13) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & 6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$； 14) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

提示 参照本章第6节例2.

解 1) $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 2 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$

$$=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 有3个不同的特征值，$\boldsymbol{A}$ 可以对角化. $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形为

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{pmatrix}.$$

2) $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda-13 & -16 & -16 \\ 5 & \lambda+7 & 6 \\ 6 & 8 & \lambda+7 \end{pmatrix}$,

$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 有二个互素的2级子式：

$$\begin{vmatrix} 5 & \lambda+7 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -6\lambda-2,$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 6 & \lambda+7 \end{vmatrix} = 5\lambda-1,$$

所以

$$D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=1.$$

又因

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)^2(\lambda+3),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子有 $\lambda+3,(\lambda-1)^2$. $\boldsymbol{A}$ 的若尔当形为

$$\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}.$$

3) $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$.

4) 因为 $D_2(\lambda)=1,D_3(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)^3$,
所以不变因子为 $1,1,(\lambda-1)^3$;初等因子为 $(\lambda-1)^3$;若尔当形为

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}.$$

5) $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)(\lambda^2+1)=(\lambda-1)(\lambda-\mathrm{i})(\lambda+\mathrm{i})$.
初等因子为 $\lambda-1,\lambda-\mathrm{i},\lambda+\mathrm{i}$,若尔当形为

$$\begin{pmatrix}1&&\\&\mathrm{i}&\\&&-\mathrm{i}\end{pmatrix}.$$

6) 用初等变换将 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 化为标准形

$$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda-1&1&-2\\-3&\lambda+3&-6\\-2&2&\lambda-4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0&1&0\\-\lambda^2-2\lambda&\lambda+3&2\lambda\\-2\lambda&2&\lambda\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\lambda^2-2\lambda&2\lambda\\0&-2\lambda&\lambda\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda^2-2\lambda\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda(\lambda-2)\end{pmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子为 $\lambda,\lambda,\lambda-2$. $\boldsymbol{A}$ 的若尔当形为

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

7) 初等因子：λ,λ^2.

若尔当标准形：

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

8) 初等因子：$(\lambda-2)^3$.

若尔当标准形

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&0\\0&1&2\end{pmatrix}.$$

9) 初等因子：$\lambda,(\lambda+1)^2$.

若尔当标准形

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}.$$

10) 不变因子，$1,1,f(\lambda)=\lambda^3+30\lambda-8$.

初等因子：$\lambda-\lambda_1,\lambda-\lambda_2,\lambda-\lambda_3$,

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 $f(\lambda)$的三个根：

$$\lambda_1=\sqrt[3]{4+2\sqrt{254}}+\sqrt[3]{4-2\sqrt{254}},$$

$$\lambda_2=\omega\sqrt[3]{4+2\sqrt{254}}+\omega^2\sqrt[3]{4-2\sqrt{254}},$$

$$\lambda_3=\omega^2\sqrt[3]{4+2\sqrt{254}}+\omega\sqrt[3]{4-2\sqrt{254}},$$

这里 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

若尔当标准形：

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

11) $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda+1 & 0 & 0 \\ -7 & -1 & \lambda-2 & -1 \\ 7 & 6 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$,

$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 有下面 2 个 3 级子式是互素的:

$$\begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda+1 & 0 \\ 7 & 6 & 1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2,$$

$$\begin{vmatrix} 4 & \lambda+1 & 0 \\ -7 & -1 & -1 \\ 7 & 6 & \lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & \lambda+1 & 0 \\ -7 & -1 & -1 \\ -7\lambda+7 & -\lambda+6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 4 & \lambda+1 \\ -7\lambda+7 & -\lambda+6 \end{vmatrix}=7\lambda^2-4\lambda+17,$$

所以

$D_3(\lambda)=D_2(\lambda)=D_1(\lambda)=1, D_4(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)^4$,

$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=1, d_4(\lambda)=(\lambda-1)^4$,

初等因子:$(\lambda-1)^4$.

若尔当标准形:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

12) 若尔当标准形

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

13）对特征矩阵进行初等变换

$$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda-1 & 3 & 0 & -3\\ 2 & \lambda-6 & 0 & -13\\ 0 & 3 & \lambda-1 & -3\\ 1 & -2 & 0 & \lambda-8\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}\lambda-1 & 3 & 0 & -3\\ 2 & \lambda-6 & 0 & -13\\ -\lambda+1 & 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & -2 & 0 & \lambda-8\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}\lambda-1 & 3 & 0 & -3\\ 2 & \lambda-6 & 0 & -13\\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & -2 & 0 & \lambda-8\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}\lambda-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 3 & -3\\ 0 & 2 & \lambda-6 & -13\\ 0 & 1 & -2 & \lambda-8\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}\lambda-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\lambda+1 & -\lambda^2+9\lambda-11\\ 0 & 0 & \lambda-2 & -2\lambda+3\\ 0 & 1 & -2 & \lambda-8\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}\lambda-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\lambda+1 & -\lambda^2+9\lambda-11\\ 0 & 0 & \lambda-2 & -2\lambda+3\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\lambda-1&\\&&&(\lambda-1)(\lambda^2-14\lambda+19)\end{pmatrix}.$$

不变因子：$1,1,\lambda-1,(\lambda-1)(\lambda^2-14\lambda+19)$.

初等因子：$\lambda-1,\lambda-1,7+\sqrt{30},7-\sqrt{30}$.

若尔当标准形：

$$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&7+\sqrt{30},&\\&&&7-\sqrt{30}\end{pmatrix}.$$

14）

$$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda&-1&0&\cdots&0&0\\0&\lambda&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&\lambda&-1\\-1&0&0&\cdots&0&\lambda\end{pmatrix}.$$

不变因子：

$$1,1,\cdots,1,\lambda^n-1.$$

初等因子：$\lambda-\varepsilon_1,\lambda-\varepsilon_2,\cdots,\lambda-\varepsilon_n$，

其中

$$\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n},k=1,2,\cdots,n.$$

（参考第一章习题 26）

故 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形为

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_1&&&\\&\varepsilon_2&&\\&&\ddots&\\&&&\varepsilon_n\end{pmatrix}.$$

7. 把习题 6 中各矩阵看成有理数域上矩阵,试写出它们的有理标准形.

提示 求出 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子,应用伴侣阵(本章 §7 定义 8),写出有理标准形.

答 1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

7) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

8) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

9) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

10) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & -30 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

11) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

12) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

13) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & -33 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{pmatrix}$.

14) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

四、补充题、提示与解答

1. $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 上的一个线性变换.

1）若 $\mathscr{A}$ 在 V 的某基下矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是多项式 $d(\lambda)$ 的伴侣阵，则 $\mathscr{A}$ 的最小多项式是 $d(\lambda)$.

2) 设 $\mathscr{A}$ 的最高次的不变因子是 $d(\lambda)$，则 $\mathscr{A}$ 的最小多项式是 $d(\lambda)$.

提示 1) 证明：$d(\boldsymbol{A})=0$，而 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{A},\cdots,\boldsymbol{A}^{n-1}$ 线性无关.

证明 1) 因为 $\boldsymbol{A}$ 是 $d(\lambda)$ 的伴侣阵，所以 $d(\lambda)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式，因此 $d(\boldsymbol{A})=0$，即有 $d(\mathscr{A})=0$.

设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \\ 1 & \\ 0 & \boldsymbol{A}_1 \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix} 0 & \\ 0 & \\ 1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix} 0 & \\ 0 & \\ 0 & \boldsymbol{A}_3 \\ 1 & \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix},$$

…………

$$\boldsymbol{A}^{n-1}=\begin{pmatrix} 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \boldsymbol{A}_{n-1} \\ \vdots & \\ 1 & \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_i(i=1,2,\cdots,n)$都是$(n-1)\times n$ 矩阵.

又单位矩阵可表成

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & \\ \vdots & \boldsymbol{A}_n \\ 0 & \end{pmatrix}.$$

因此,$\boldsymbol{E},\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^2,\cdots,\boldsymbol{A}^{n-1}$线性无关,对次数小于 n 的多项式 $g(\lambda)$,都有 $g(\boldsymbol{A})\neq\boldsymbol{0}$,即 $g(\mathscr{A})\neq\boldsymbol{0}$.

综上,$d(x)$是 $\mathscr{A}$ 的最小多项式.

2) 设 $\mathscr{A}$ 的不变因子是

$$d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda),\ i=1,2,\cdots,s-1,$$

其中 $d_s(\lambda)$是 $\mathscr{A}$ 的次数最高的不变因子.

用 B_i 表示$d_i(\lambda)$的伴侣矩阵,$i=1,2,\cdots,s$,那么 $\boldsymbol{A}$ 与下列矩阵相似

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & & & \\ & \boldsymbol{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{B}_s \end{pmatrix}.$$

由 1),$\boldsymbol{B}_i$ 的最小多项式为 $d_i(\lambda)$,因此,由 $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)$,$d_s(\lambda)$满足

$$d_s(\boldsymbol{B}_i)=\boldsymbol{0},\ i=1,2,\cdots,s,$$

即得

$$d_s(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}.$$

由于 $d_s(\lambda)$是 $\boldsymbol{B}_s(\lambda)$的最小多项式,因此 $d_s(\lambda)$是 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式,也就是 $\mathscr{A}$ 的最小多项式.

第九章　欧几里得空间

一、内 容 提 要

1. 欧氏空间

内积及欧氏空间的定义

长度,单位向量,向量的单位化

柯西－布涅柯夫斯基不等式及其应用

夹角及其定义的可行性,正交

度量矩阵不同基的度量矩阵的关系.

2. 标准正交基

正交向量组,正交向量组的线性无关性

正交基,标准正交基,存在性.

任一组线性无关向量都有与之等价的正交单位向量组,施密特正交化方法

欧氏空间中任一个正交向量组都可扩充成一组正交基,每一组正交的向量都可扩充成一组标准正交基,具体作法(定理 1).

如果 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是欧氏空间的一组标准正交基,由 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 的过渡矩阵是 $\boldsymbol{A}$,则 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 是标准正交基的充分必要条件是:$\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵.

3. 同构

同构映射

同构关系是等价关系

两个欧氏空间同构的充要条件是它们的维数相同(定理 3)

任一欧氏空间都与 $\mathbf{R}^n$ 同构.

4. 正交变换

正交变换的定义

正交变换的一些等价条件

第一类,第二类正交变换,镜面反射

5. 子空间

子空间的正交,正交和是直和

正交补的存在,唯一性及求法

6. 对称变换与实对称矩阵

对称变换的定义

对称变换在标准正交基下的矩阵是对称矩阵

实对称矩阵的特征值都是实数

对称变换 $\mathscr{A}$ 的不变子空间的正交补也是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间.

$\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵,则 $\mathbf{R}^n$ 中属于 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值的特征向量必正交;对称变换 $\mathscr{A}$ 的属于不同特征值的特征向量必正交.

对于任意一个 n 级实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$,都存在一个正交矩阵 $\boldsymbol{T}$,使 $\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为对角矩阵;对于对称变换 $\mathscr{A}$,可找到一组标准正交基,使 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵是对角矩阵.

7. 对实二次型的应用

任意一个实二次型 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 都可经正交线性替换化成平方和:

$$\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2,$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值.

由此还可得到实二次型 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 是正定($\boldsymbol{A}$ 是正定)的充分必要条件是 $\lambda_i>0, i=1,2,\cdots,n$.

8. 最小二乘法

向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 到 $\boldsymbol{\beta}$ 的距离

距离满足的一些性质

向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 到子空间 W 的距离

最小二乘法问题:最小二乘解,最小二乘解所满足的线性方

程组.

*9. 酉空间

酉空间的定义

向量的正交

正交基,标准正交基

施密特正交化方法

酉矩阵与酉变换

埃尔米特矩阵,埃尔米特二次型.

二、学习指导

1. 我们曾将2维、3维几何空间作过几次推广,首先将2维、3维的向量加以推广.有两个方面,一是将向量的维数推广成为 n 维(n 可为任意正整数),二是将向量的分量接以推广,从实数推广为任意取定数域中的数.得到数域 P 上 n 维向量的概念.而把 P 上全部向量所成的集合称为数域 P 上 n 维向量空间,记作 P^n.这种推广的优越性在于把任意数域 P 上的任意 $n(n=2,3,\cdots)$ 维向量可以加以统一的讨论.得到一般的结论对任意数域,任意 n 维向量都行之有效.这一点在线性方程组及二次型等问题的讨论上大家都可以看到.

但是在有些关于向量问题的讨论中,还要遇到"度量"的概念,例如在解析几何中,当讨论二次曲线或二次曲面的分类问题时,所用到的是"直角"坐标系,这是一种用正交及长度来定义的坐标系,为此,要把长度、角度等有关度量的概念引入线性空间,它就是这一章所讨论的欧氏空间.因为在有度量的空间中,一个非零数的平方必须大于0,而且每个正数都可以开方,这些必须在实数域中进行讨论,所以这一章是在实数域中进行讨论的.

2. 欧氏空间是通过内积来定义的,因而必须把其他有关度量的概念如长度、夹角距离等都通过内积来表达,所以读者必须理解

在内积定义中条件 1—4 的意义及必要性.

在定义夹角时用到了柯西－布涅柯夫斯基不等式. 这个性质不仅用来说明通过内积定义夹角的可能性,而且还可由内积的定义得到一些重要的不等式(参考 362 页). 因此可以进一步体会到应用柯西－布涅柯夫斯基不等式一定还可以证明其他一些有用的你所需要的不等式.

度量矩阵使得内积的计算公式化,度量矩阵是正定矩阵,不同基的度量矩阵是合同的,了解了两组基的度量矩阵的关系,才能通过度量矩阵满足的条件选取合适的基.

3. 标准正交基

我们已知不同基的度量矩阵是不同的,但是是合同的. 因此可以通过合同关系来选取合适的基.

从计算的角度来看,最简单的基是标准正交基,因为它的度量矩阵是单位矩阵,因此是最简单最方便的,读者从向量的坐标及两个向量的内积通过标准正交基来表示的方法就能看出这一点.

标准正交基的存在性可以通过矩阵关系(即两组基的度量矩阵的关系)得到,也可由一组基经施密特正交化,再单位化而得到.

需要掌握的不仅是标准基的存在,还要会构造满足附加条件的标准正交基.

例如需要掌握把正交单位向量组扩充成标准正交基的方法.

4. 关于欧氏空间的同构与线性空间的同构的比较:因为线性空间是研究向量在线性运算下的性质,所以同构映射必须保持线性运算. 现在欧氏空间是讨论实向量在线性空间以及内积下的性质,所以欧氏空间的同构除了保持线性运算以外,还要求保持内积. 了解了这一点,其他一些讨论就很容易理解了. 和线性空间一样通过同构,在不考虑空间中向量的具体特性的前提下,一些问题的结论对同构的空间是一样的. 因此可以选择简单的线性空间,例如 $\mathbf{R}$, P^n 来进行讨论,而最简单的欧氏空间就是 $\mathbf{R}^n$,其中内积按通常的定义,所以一般问题可以在欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中讨论.

5. 正交变换是欧氏空间的一类重要的线性变换.它是保持内积的变换.书中给出了一个线性变换是正交变换的一些条件,读者应该熟练地掌握这些条件,并会灵活应用.

因为正交变换在标准正交基下的矩阵是正交矩阵,因此,有关正交矩阵的一些结论也是关于正交变换的结论,反之亦然.

正交变换根据它的行列式的正、负,分成第一类、第二类两种.

6. 因为欧氏空间 V 的子空间 W 也可看成线性空间 V 的子空间,因此以前关于线性空间的子空间的一切讨论和结论在这里都可应用.

因而讨论欧氏空间的子空间除了作为线性空间的子空间讨论外,所需讨论的就是子空间之间的度量关系,要了解:

向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与子空间 W 正交的概念,

子空间 W_1 与子空间 W 正交的概念,

而且要知道正交和一定是直和(定理 5).

还有一个重要的概念:正交补.要知道正交补是存在且唯一的(定理 6),而且要会求子空间 W_1 的正交补.

7. 除了正交变换,欧氏空间还有一类重要的线性变换:对称变换.

对称变换在标准正交基下的矩阵是实对称矩阵,因此对称变换的讨论与实对称矩阵(在相似变换下)的讨论可以互相推导,掌握了这一点就能灵活地处理这类问题.

关于实对称变换(实对称矩阵)有以下重要性质:

(1) 实对称矩阵的特征值都是实数(引理 1).

(2) 实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 的属于不同特征值的特征向量是相互正交的(引理 4)

当然,对称变换也有以上的性质.

(3) 如果 V_1 是对称变换 $\mathscr{A}$ 的不变子空间,那么 $V_1^{\perp}$ 也是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间(引理 3).

读者可以考虑一下引理 3 对于实对称矩阵来说,应如何叙

述呢?

定理 7说明了实对称矩阵 A 在相似关系下一定可以对角化,而且可以找到正交矩阵 T 使 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵.从对称变换来说就是任给欧氏空间 V 的一个对称变换 $\mathscr{A}$,一定可找到一组标准化正交基使 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵是对角矩阵.读者需要知道正交矩阵 T(及上述标准正交基)的求法,参考 380 页题的说明及例.

8. 对实二次型的应用

关于实对称矩阵的结论用二次型的语言来说,就是任一个实二次型 $f=X'AX$ 都可经正交的线性替换化为平方和:

$$\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2,$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的全部特征值(定理 8)

这个结论说明了如何用 A 的特征值来讨论二次型 $X'AX$ 的方法.例如 A 正定的条件是 A 的特征值全大于 0 及一些结论(例如习题 7).

9. 最小二乘法

我们通常都知道一个点到一个平面的距离,以垂线为最短,在欧氏空间中也有推广的结论"一个向量到一个子空间的向量的距离以'垂线最短'".

这也是最小二乘法的理论根据.

最小二乘法的具体做法:

给了线性方程组

$$Ax=B.$$

如果没有解,可以解下面的线性方程组而得到最小二乘解:

$$A'Ax=A'B.$$

而这个线性方程组一定是有解的(参考第五章习题 17).

*10. 酉空间

比较酉空间的内积与欧氏空间内积的异同之处,想明白为什么要这样定义.

关于酉空间及酉交换的结论可以参考欧氏空间的相应结论来

证明.

三、习题、提示与解答

1. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$是一个 n 级正定矩阵,而

$$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,\cdots,y_n).$$

在 $\mathbf{R}^n$ 中定义内积$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$为

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha A\beta}'.$$

1) 证明在这个定义之下,$\mathbf{R}^n$ 成一欧氏空间;

2) 求单位向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,\cdots,0),\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,\cdots,0),\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n=(0,0,\cdots,1)$的度量矩阵;

3) 具体写出这个空间中的柯西-布涅柯夫斯基不等式.

证明 1)

(i) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha A\beta}'=(\boldsymbol{\alpha A\beta}')'=\boldsymbol{\beta A}'\boldsymbol{\alpha}'=\boldsymbol{\beta A\alpha}'=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$;

(ii) $(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(k\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{A\beta}'=k(\boldsymbol{\alpha A\beta}')=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$;

(iii) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{A\gamma}'=\boldsymbol{\alpha A\gamma}'+\boldsymbol{\beta A\gamma}'=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$;

(iv) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha A\alpha}'$.

因为 $\boldsymbol{A}$ 正定,所以$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\geqslant 0$,当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 时,$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=0$,所以这样的$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$满足内积的条件,在这个定义之下,$\mathbf{R}^n$ 成一欧氏空间.

2) 度量矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$;

3) $\left|\sum\limits_{i,j}a_{ij}x_iy_j\right|\leqslant\sqrt{\sum\limits_{i,j}a_{ij}x_ix_j}\cdot\sqrt{\sum\limits_{i,j}a_{ij}y_iy_j}$.

2. 在 $\mathbf{R}^4$ 中,求 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 之间的夹角$<\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}>$(内积按通常定义).设

1) $\boldsymbol{\alpha}=(2,1,3,2),\boldsymbol{\beta}=(1,2,-2,1)$;

2) $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,2,3),\boldsymbol{\beta}=(3,1,5,1)$;

3) $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1,2),\boldsymbol{\beta}=(3,1,-1,0)$.

解 1) $<\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}> = \arccos\dfrac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|} = \arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}$.

2) $<\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}> = \dfrac{\pi}{4}$.

3) $<\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}> = \arccos\dfrac{3}{\sqrt{77}}$.

3. $d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = |\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|$通常称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的距离,证明:

$$d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}) \leqslant d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) + d(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}).$$

证明 $d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}) = |\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\gamma}| = |(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma})| \leqslant |\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}| + |\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}| = d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) + d(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$

4. 在 $\mathbf{R}^4$ 中求一单位向量与$(1,1,-1,1)$,$(1,-1,-1,1)$,$(2,1,1,3)$都正交.

解 向量(x_1,x_2,x_3,x_4)与$(1,1,-1,1)$,$(1,-1,-1,1)$,$(2,1,1,3)$都正交的充分必要条件是 x_1,x_2,x_3,x_4 满足下列线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

解得$(x_1,x_2,x_3,x_4) = k(4,0,1,-3)$,单位化后,得所求向量为 $\pm\dfrac{1}{\sqrt{26}}(4,0,1,-3)$.

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是欧氏空间 V 的一组基,证明:

1) 如果 $\boldsymbol{\gamma}\in V$ 使$(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_i)=0$, $i=1,2,\cdots,n$ 那么 $\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$;

2) 如果 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2\in V$ 对任一 $\boldsymbol{\alpha}\in V$ 有$(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\alpha})$,那么 $\boldsymbol{\gamma}_1=\boldsymbol{\gamma}_2$.

提示 1) 证明$(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma})=0$.

2) 证明$(\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\alpha})=0$,任一 $\boldsymbol{\alpha}\in V$.

证明 1) 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是欧氏空间的一组基,对任一 $\boldsymbol{\alpha}\in V$ 都是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的线性组合.由$(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_i)=0$,可推出$(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha})=0$.因此$(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma})=0$,得 $\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$.

2) 对任一 $\boldsymbol{\alpha}\in V$,由$(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\alpha})$,可得$(\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\alpha})=0$,由 1)得 $\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2=\mathbf{0}$,即 $\boldsymbol{\gamma}_1=\boldsymbol{\gamma}_2$.

6. 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 是三维欧氏空间中一组标准正交基,证明:
$\boldsymbol{\alpha}_1=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{\varepsilon}_1+2\boldsymbol{\varepsilon}_2-\boldsymbol{\varepsilon}_3)$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_2+2\boldsymbol{\varepsilon}_3)$,$\boldsymbol{\alpha}_3=\frac{1}{3}(\boldsymbol{\varepsilon}_1-2\boldsymbol{\varepsilon}_2-2\boldsymbol{\varepsilon}_3)$也是一组标准正交基.

提示 证明由 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵是正交矩阵.

证明 由 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵是

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&1\\2&-1&-2\\-1&2&-2\end{pmatrix}.$$

因为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{E},$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵,又题设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 是标准正交基,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 也是标准正交基.

7. 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4,\boldsymbol{\varepsilon}_5$ 是五维欧氏空间 V 的一组标准正交基,$V_1=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_5$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_4$,$\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3$,求 V_1 的一组标准正交基.

解 将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 正交化得

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_5,$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_1-2\boldsymbol{\varepsilon}_2+2\boldsymbol{\varepsilon}_4-\boldsymbol{\varepsilon}_5),$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3-\boldsymbol{\varepsilon}_5.$$

再单位化，即得 V_1 的一组标准正交基：

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_5),\frac{1}{\sqrt{10}}(\boldsymbol{\varepsilon}_1-2\boldsymbol{\varepsilon}_2+2\boldsymbol{\varepsilon}_4-\boldsymbol{\varepsilon}_5),\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3-\boldsymbol{\varepsilon}_5).$$

8. 求齐次线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4-3x_5=0,\\ x_1+x_2-x_3\qquad\quad+x_5=0\end{cases}$$

的解空间（作为 $\mathbf{R}^5$ 的子空间）的一组标准正交基.

解 齐次线性方程组的一个基础解系为

$$(0,1,1,0,0),(-1,1,0,1,0),(4,-5,0,0,1).$$

将这 3 个向量正交化得

$$(0,1,1,0,0),\frac{1}{2}(-2,1,-1,2,0),\frac{1}{5}(7,-6,6,13,5).$$

再单位化，即得解空间的一组标准正交基：

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0,0),\frac{1}{\sqrt{10}}(-2,1,-1,2,0),\frac{1}{3\sqrt{35}}(7,-6,6,13,5).$$

9. 在 $\mathbf{R}[x]_4$ 中定义内积为 $(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x$. 求 $\mathbf{R}[x]_4$ 的一组标准正交基（由基 $1,x,x^2,x^3$ 出发作正交化）.

答 $\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}x,\frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2-1),\frac{\sqrt{14}}{4}(5x^3-3x).$

10. 设 V 是一 n 维欧氏空间，$\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$ 是 V 中一固定向量，证明：1) $V_1=\{\boldsymbol{x}\mid(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha})=0,\boldsymbol{x}\in V\}$ 是 V 的一个子空间；

2) V_1 的维数等于 $n-1$.

证明 1) 因为 $(\mathbf{0},\boldsymbol{\alpha})=0$，所以 $\mathbf{0}\in V_1$，V_1 非空.

对 V 中两个向量 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 有

$$(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{\alpha})+(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{\alpha})=0,$$

所以 $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2\in V_1$.

对 V_1 中向量 $\boldsymbol{x}$ 及实数 k 有

$$(kx,\boldsymbol{\alpha})=k(x,\boldsymbol{\alpha})=0,$$

所以 $kx\in V_1$.

因此 V_1 是 V 的一个子空间.

2) 将 $\boldsymbol{\alpha}$ 扩充成 V 的一组标准正交基 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$. 易证 $V_1=L(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$,所以 V_1 是 $n-1$ 维的.

11. 1) 证明:欧氏空间中不同基的度量矩阵是合同的;

2) 利用上述结果证明:任一欧氏空间都存在标准正交基.

证明 1) 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 及 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 是欧氏空间 V 的两组基. 这两组基的度量矩阵分别是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$. 再设由 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 到 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 的过渡矩阵是 $\boldsymbol{C}$. 对 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$,设 $\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)\boldsymbol{Y}_1$,则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}_1$. 于是 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}_1'(\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{Y}_1=\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}_1$. 那么 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$. 所以不同基下的度量矩阵是合同的.

2) 设 V 是一个 n 维欧氏空间,任取 V 的一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$. 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的度量矩阵是 $\boldsymbol{A}$. 因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵,因此有可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使

$$\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}.$$

以 $\boldsymbol{C}$ 为过渡矩阵,得到 V 的另一组基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$. 而且 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 的度量矩阵为 $\boldsymbol{E}$. 所以 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 是 V 的一组标准正交基. 这说明任一欧氏空间都有标准正交基.

12. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是 n 维欧氏空间 V 中一组向量,而

$$\boldsymbol{\Delta}=\begin{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_m)\\ (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_m)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_m)\end{pmatrix}.$$

证明:当且仅当 $|\boldsymbol{\Delta}|\neq 0$ 时,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

提示 $\left(\sum_{i=1}^{m}x_i\boldsymbol{\alpha}_i,\sum_{i=1}^{m}x_i\boldsymbol{\alpha}_i\right)=(x_1,\cdots,x_m)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}$
是 $x_1,\cdots,x_m$ 的一个二次型.

证明 设 $\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m$,则

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=(x_1\ x_2\cdots\ x_m)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}$$

是一个 m 元二次型.

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关的充分必要条件是对任意不全为 0 的 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 都有 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$,即有

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=(x_1,x_2,\cdots,x_m)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}>0,$$

故 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵,当然 $|\boldsymbol{A}|\neq0$. 反之,设 $|\boldsymbol{A}|\neq0$,若有 $\sum_{i=1}^{m}x_i\boldsymbol{\alpha}_i=0$, 则有

$$\left(\sum_{i=1}^{m}x_i\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j\right)=\sum_{i=1}^{m}x_i(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=0,j=1,2,\cdots,m.$$

亦即

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

由于 $|\boldsymbol{A}|\neq0$,此方程组只有零解,即有 $x_1=x_2=\cdots=x_m=0$. 故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

13. 证明：上三角的正交矩阵必为对角矩阵，且对角线上的元素为 $+1$ 或 -1.

证明 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个上三角矩阵：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

如果 $\boldsymbol{A}$ 还是一个正交矩阵，则有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}'=\begin{pmatrix} a_{11}^2+a_{12}^2+\cdots+a_{1n}^2 & a_{11}a_{22}+a_{13}a_{23}+\cdots+a_{1n}a_{2n} & \cdots & a_{1n}a_{nn} \\ a_{12}a_{22}+a_{13}a_{23}+\cdots+a_{1n}a_{2n} & a_{22}^2+a_{23}^2+\cdots+a_{2n}^2 & \cdots & a_{2n}a_{nn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n}a_{nn} & a_{2n}a_{nn} & \cdots & a_{nn}^2 \end{pmatrix}$$

$=\boldsymbol{E}$,

由最后一行可得 $a_{nn}=\pm1$, $a_{1n}=a_{2n}=\cdots=a_{n-1,n}=0$. 逐行往上可得

$$a_{nn}=\pm1, a_{n-1,n-1}=\pm1, \cdots, a_{11}=\pm1,$$

$$a_{ij}=0, \quad i,j=1,\cdots,n, i\neq j,$$

即 $\boldsymbol{A}$ 为对角矩阵，且对角线上元素为 1 或 -1.

14. 1) 设 $\boldsymbol{A}$ 为一个 n 级实矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|\neq0$. 证明 $\boldsymbol{A}$ 可以分解成 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}$，其中 $\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵，$\boldsymbol{T}$ 是一上三角矩阵：

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix},$$

且 $t_{ii}>0(i=1,2,\cdots,n)$. 并证明这个分解是唯一的；

2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 级正定矩阵，证明存在一上三角形矩阵 $\boldsymbol{T}$，使

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}.$$

提示 1) 将 $\boldsymbol{A}$ 的列向量进行正交化和单位化相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘一些上三角矩阵，对角线上元素都大于零. 唯一性可由 13

题导出.

2) $\boldsymbol{A}$ 合同于单位矩阵,因而 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}'\boldsymbol{P}$,根据 1) $\boldsymbol{P}$ 可化成 $\boldsymbol{QT}$,于是即得结论.

证明 1) 设 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$.

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\cdots\boldsymbol{\alpha}_n].$$

将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 作施密特正交化,单位化,得到一组正交单位向量 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n$. 设为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\gamma}_1&=t_{11}\boldsymbol{\alpha}_1,\\
\boldsymbol{\gamma}_2&=t_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+t_{22}\boldsymbol{\alpha}_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\boldsymbol{\gamma}_n&=t_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1+t_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+t_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n,
\end{aligned}\tag{$*$}$$

并可取 $t_{ii}>0,i=1,2,\cdots,n$.

令

$$\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{\gamma}_1\ \boldsymbol{\gamma}_2\cdots\ \boldsymbol{\gamma}_n],\qquad \boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}t_{11}&t_{12}&\cdots&t_{1n}\\0&t_{22}&\cdots&t_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&t_{nn}\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵,$\boldsymbol{T}$ 为上三角矩阵,其对角线上元素都大于 0. 前面的($*$)可写成 $\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]\boldsymbol{T}=\boldsymbol{AT}$. 故有分解

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{QT}^{-1},$$

其中 $\boldsymbol{T}^{-1}$ 仍为上三角阵,它的对角线元素为 $t_{11}^{-1},t_{22}^{-1},\cdots,t_{nn}^{-1}$ 仍为正数.

如果 $\boldsymbol{A}$ 用两种方法表成

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{QT}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{T}_1,$$

其中 $\boldsymbol{Q},\boldsymbol{Q}_1$ 都是正交矩阵,$\boldsymbol{T},\boldsymbol{T}_1$ 都是对角线上元素都大于 0 的上三角矩阵. 于是

$$\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}^{-1},$$

$Q_1^{-1}Q$ 是正交矩阵，T_1T^{-1} 是上三角矩阵，且对角线上元素全大于 0. 由上题 T_1T^{-1} 为对角矩阵，且对角线上元素全等于 1. 所以 $T_1T^{-1}=E$，从而 $Q_1^{-1}Q=E$，即

$$Q=Q_1,T=T_1,$$

表法是唯一的.

2）因为 A 是正定矩阵，故有可逆矩阵 P 使

$$A=P'P,$$

应用 1)将 P 表成

$$P=QT,$$

其中 Q 为正交矩阵，T 是上三角矩阵，于是

$$A=T'Q'QT=T'T.$$

15. 设 η 是 n 维欧氏空间 V 中一单位向量，定义

$$\mathscr{A}\alpha=\alpha-2(\eta,\alpha)\eta.$$

证明：

1）$\mathscr{A}$ 是正交变换. 这样的正交变换称为镜面反射；

2）$\mathscr{A}$ 是第二类的；

3）如果 n 维欧氏空间中，正交变换 $\mathscr{A}$ 以 1 作为一个特征值，且属于特征值 1 的特征子空间 V_1 的维数为 $n-1$，那么 $\mathscr{A}$ 是镜面反射.

提示 考察 $\mathscr{A}$ 在 η 以及与 η 正交的向量上的作用.

证明 1）将 η 扩充成 V 的一组标准正交基：$\eta,\eta_2,\cdots,\eta_n$，于是

$$\mathscr{A}\eta=\eta-2(\eta,\eta)\eta=-\eta,$$
$$\mathscr{A}\eta_i=\eta_i-2(\eta,\eta_i)\eta=\eta_i,i=2,\cdots,n.$$

所以 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}-1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}.$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵,所以 $\mathscr{A}$ 是正交变换.

2) 因为 $|\boldsymbol{A}|=-1$,所以 $\mathscr{A}$ 是第二类的.

3) $V_1^{\perp}$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个 1 维不变子空间,取 $V_1^{\perp}$ 中一个单位向量 $\boldsymbol{\eta}$,则 $\mathscr{A}\boldsymbol{\eta}=\pm\boldsymbol{\eta}$.如 $\mathscr{A}\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}$,则 $\boldsymbol{\eta}\in V_1$,不可能,所以 $\mathscr{A}\boldsymbol{\eta}=-\boldsymbol{\eta}$,对 V 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\alpha}$ 可表成

$$\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\eta}_0,\qquad \boldsymbol{\eta}_0\in V_1.$$

令

$$\mathscr{B}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}-2(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\eta},$$

$\mathscr{B}$ 是一个镜面反射,而且

$$\mathscr{B}(\boldsymbol{\eta})=-\boldsymbol{\eta},$$

$$\mathscr{B}(\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\beta},\forall\,\boldsymbol{\beta}\in V_1,$$

所以 $\mathscr{B}=\mathscr{A}$,即 $\mathscr{A}$ 是一个镜面反射.

16. 证明:反对称实数矩阵的特征值是零或纯虚数.

提示 参考原书 377 页引理 1 的证明.

证明 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个反对称实矩阵.λ_0 是 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$ 的一个根,则有非零向量

$$\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

满足

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=\lambda_0\boldsymbol{\xi}.$$

令

$$\overline{\boldsymbol{\xi}}=\begin{pmatrix}\overline{x_1}\\\overline{x_2}\\\vdots\\\overline{x_n}\end{pmatrix},$$

其中 $\overline{x_i}$ 是 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的共轭复数.则 $\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}}=\overline{\lambda_0}\,\overline{\boldsymbol{\xi}}$.

于是

$$\overline{\boldsymbol{\xi}}'(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi})=\overline{\boldsymbol{\xi}}'(-\boldsymbol{A}')\boldsymbol{\xi}=-(\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}})'\boldsymbol{\xi}=-\overline{\lambda}_0\overline{\boldsymbol{\xi}}'\boldsymbol{\xi}$$

又因 $\boldsymbol{\xi}$ 是非零向量，

$$\overline{\boldsymbol{\xi}}'\boldsymbol{\xi}=\overline{x}_1x_1+\overline{x}_2x_2+\cdots+\overline{x}_nx_n$$

是一个非零实数.又因

$$\overline{\boldsymbol{\xi}}'(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi})=\overline{\boldsymbol{\xi}}'(\lambda_0\boldsymbol{\xi})=\lambda_0\overline{\boldsymbol{\xi}}'\boldsymbol{\xi}.$$

因此

$$-\overline{\lambda}_0=\lambda_0.$$

λ_0 是零或纯虚数.

17. 求正交矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使 $\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 成对角形，其中 $\boldsymbol{A}$ 为

1) $\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}$； 2) $\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$；

3) $\begin{pmatrix}0&0&4&1\\0&0&1&4\\4&1&0&0\\1&4&0&0\end{pmatrix}$； 4) $\begin{pmatrix}-1&-3&3&-3\\-3&-1&-3&3\\3&-3&-1&-3\\-3&3&-3&-1\end{pmatrix}$；

5) $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$.

解 1)

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&2&0\\2&\lambda-1&2\\0&2&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-4).$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值:1, −2,4.

属于 $\lambda=1$ 的全部特征向量为:$k_1(2,1,-2)'$, $k_1\neq0$.

属于 $\lambda=-2$ 的全部特征向量为:$k_2(1,2,2)'$, $k_2\neq0$.

属于 $\lambda=4$ 的全部特征向量为：$k_3(-2,2,-1)'$，$k_3\neq0$.
将 $(2,1,-2)'$，$(1,2,2)'$，$(-2,2,-1)'$ 分别单位化，并以此为列作矩阵

$$T=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix},$$

则 T 为正交矩阵且 $T'AT=\begin{pmatrix}1&&\\&-2&\\&&4\end{pmatrix}$ 为对角矩阵.

2)

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&2\\-2&\lambda-5&4\\2&4&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-10).$$

A 的特征值：1，1，10.

对 $\lambda=1$ 求特征向量，解齐次线性方程组：

$$\begin{cases}-x_1-2x_2+2x_3=0,\\-2x_1-4x_2+4x_3=0,\\2x_1+4x_2-4x_3=0,\end{cases}$$

求得基础解系：$\alpha_1=(2,-1,0)'$，$\alpha_2=(2,0,1)'$.

正交化：

$$\beta_1=\alpha_1=(2,-1,0)',$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\alpha_2-\frac{4}{5}\beta_1=\frac{1}{5}(2,4,5)'.$$

单位化：

$$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1,0)',$$

$$\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{3\sqrt{5}}(2,4,5)'.$$

再对 $\lambda=10$,求得一个特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,-2)'$.

单位化:

$$\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{3}(1,2,-2)'.$$

以 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$ 为列作一个矩阵

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{T}$ 为正交矩阵,且 $\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为对角矩阵 $\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 10\end{pmatrix}$.

3)

$$\boldsymbol{T}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}5 & & & \\ & -5 & & \\ & & 3 & \\ & & & -3\end{pmatrix}.$$

4)

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}-4 & & & \\ & -4 & & \\ & & -4 & \\ & & & 8\end{pmatrix}.$$

5）

$$T=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, T'AT=\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 4 \end{pmatrix}.$$

18. 用正交线性替换化下列二次型为标准形：

1）$x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$；

2）$x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$；

3）$2x_1x_2+2x_3x_4$；

4）$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-2x_1x_2+6x_1x_3-4x_1x_4-4x_2x_3+6x_2x_4-2x_3x_4$.

解 1）二次型 $x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$ 的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

求得正交矩阵

$$T=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

使 $T'AT$ 为对角矩阵

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & 5 \end{pmatrix}.$$

因此，正交线性替换

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3, \\ x_2 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3, \\ x_3 = \frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3, \end{cases}$$

把原二次型化为标准形

$$-y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2.$$

2）正交线性替换

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{5}\sqrt{5}y_1 + \frac{2\sqrt{5}}{15}y_2 - \frac{1}{3}y_3, \\ x_2 = \quad \frac{1}{5}\sqrt{5}y_1 + \frac{4\sqrt{5}}{15}y_2 - \frac{2}{3}y_3, \\ x_3 = \qquad\qquad\qquad \frac{\sqrt{5}}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3, \end{cases}$$

标准形

$$2y_1^2 + 2y_2^2 - 7y_3^2.$$

3）正交线性替换

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_4, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_4, \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_3, \\ x_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_3. \end{cases}$$

标准形为

$$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2.$$

4）正交线性替换

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_4, \\ x_2 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4, \\ x_3 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_4, \\ x_4 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4. \end{cases}$$

标准形为

$$y_1^2 - 3y_2^2 - y_3^2 + 7y_4^2.$$

19. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 级实对称矩阵,证明:$\boldsymbol{A}$ 正定的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式的根全大于零.

提示 应用本章定理 8.

证明 $\boldsymbol{A}$ 正定的充分必要条件是对应的实二次型

$$f = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$$

是正定的,设 f 经过正交线性替换化为平方和:

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值.二次型 f 正定的充分必要条件是其正惯指数等于 n,即 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 全大于零.这也是 $\boldsymbol{A}$ 正定的充分必要条件.

20. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 级实矩阵,证明:存在正交矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为三角矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式的根全是实的.

提示 充分性的证明应用数学归纳法.

证明 必要性.设有正交矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为三角矩阵

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

其中 $b_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$都是实数，而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}$ 有相同的特征多项式.它的根就是 $b_{11},b_{22},\cdots,b_{nn}$，都是实数.

充分性.用数学归纳法证明.

当 $n=1$ 时结论显然成立.

假设结论对 $n-1$ 级实矩阵成立.

如果 n 级实矩阵的特征多项式的根全是实数：$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.取一个根 λ_1，求出相应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$，以 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 为第 1 列，作一个正交矩阵 $\boldsymbol{T}_1$ 则

$$\boldsymbol{T}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & b_2 & \cdots & b_n\\ 0 & & & \\ \vdots & & \boldsymbol{A}_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}_1$ 是一个 $n-1$ 级实矩阵，它的特征多项式的根是 $\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 都是实数.因此根据数学归纳假设，存在正交矩阵 $\boldsymbol{T}_2$ 使

$$\boldsymbol{T}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{T}_2=\begin{pmatrix}\lambda_2 & & *\\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

为三角矩阵.令

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}_1\begin{pmatrix}1 & \\ & \boldsymbol{T}_2\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{T}$ 为正交矩阵，且

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & *\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

为上三角矩阵.

21. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是实对称矩阵，证明：存在正交矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}=\boldsymbol{B}$的充分必要条件是$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征多项式的根全部相同.

提示 充分性的证明可应用本章定理 7.

证明 因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是实对称矩阵.故有正交矩阵 $\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2$ 使

$$\boldsymbol{T}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_1=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix},\boldsymbol{T}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}_2=\begin{pmatrix}\mu_1&&&\\&\mu_2&&\\&&\ddots&\\&&&\mu_n\end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n;\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值.如果 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征多项式的根全部相同,则可重新排列 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 的次序使

$$\lambda_i=\mu_i,i=1,2,\cdots,n.$$

于是

$$\boldsymbol{T}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_1=\boldsymbol{T}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}_2,$$

$$(\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2^{-1}=\boldsymbol{B},$$

即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,这就证明了条件的充分性.

由于相似矩阵有相同的特征多项式,所以条件是必要的.

22. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 级实对称矩阵,且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,证明存在正交矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使得

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&1&&&&&\\&&\ddots&&&&\\&&&1&&&\\&&&&0&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&0\end{pmatrix}.$$

证明 由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 可知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda=0$ 或 1.因此有正交矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使

$$
T^{-1}AT=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&1&&&&&\\&&\ddots&&&&\\&&&1&&&\\&&&&0&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&0\end{pmatrix},
$$

其中 1 的个数等于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 1 的重数.

23. 证明:如果 $\mathscr{A}$ 是 n 维欧氏空间的一个正交变换,那么 $\mathscr{A}$ 的不变子空间的正交补也是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间.

提示 应用 $(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$.

证明 设 V_1 是 $\mathscr{A}$ 的一个不变子空间,$V_1^{\perp}$ 是 V_1 的正交补.对 $V_1^{\perp}$ 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$,及 V_1 中任一向量 $\boldsymbol{\beta}$,由于 $\mathscr{A}$ 限制在 V_1 上也是可逆变换,故有 $\boldsymbol{\gamma}\in V_1$ 使 $\mathscr{A}\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\beta}$.即有

$$
(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})=0,
$$

所以 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}\in V_1^{\perp}$,即 $V_1^{\perp}$ 也是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间.

24. 欧氏空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 称为**反对称的**,如果对任意的 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$,

$$
(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=-(\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\beta}).
$$

证明:

1) $\mathscr{A}$ 为反对称的充分必要条件是,$\mathscr{A}$ 在一组标准正交基下的矩阵为反对称的;

2) 如果 V_1 是反对称线性变换 $\mathscr{A}$ 的不变子空间,则 $V_1^{\perp}$ 也是.

证明 1) 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 V 的一组标准正交基,再设

$$
\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_i=a_{1i}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{2i}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_{ni}\boldsymbol{\varepsilon}_n,\quad i=1,2,\cdots,n,
$$

于是

$$
(\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j)=a_{ji},
$$

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_i, \mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_j) = a_{ji}, \qquad i,j = 1,2,\cdots,n,$$

所以 $\mathscr{A}$ 为反对称变换的充分必要条件是

$$a_{ij} = -a_{ji}, \qquad i,j = 1,2,\cdots,n,$$

即 $\mathscr{A}$ 在标准正交基下的矩阵是反对称的.

2) 设 $\boldsymbol{\alpha} \in V_1^{\perp}$. 对于 V_1 中任一向量 $\boldsymbol{\beta}$ 都有

$$(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = -(\boldsymbol{\alpha}, \mathscr{A}\boldsymbol{\beta}).$$

因为 V_1 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间,所以 $\mathscr{A}\boldsymbol{\beta} \in V_1$,故$(\boldsymbol{\alpha}, \mathscr{A}\boldsymbol{\beta}) = 0$. 于是

$$(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0,$$

$$\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha} \in V_1^{\perp},$$

$V_1^{\perp}$ 也是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间.

25. 证明:向量 $\boldsymbol{\beta} \in V_1$ 是向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在子空间 V_1 上的内射影的充分必要条件是,对任意的 $\boldsymbol{\xi} \in V_1$,

$$|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}| \leqslant |\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\xi}|.$$

证明 如果 $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 V_1 上的内射影,则对任意的 $\boldsymbol{\xi} \in V_1$,有

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\xi}|^2 &= |\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\xi}|^2 \\ &= |\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}|^2 + |\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\xi}|^2 + 2(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\xi}),\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} \in V_1^{\perp}$, $\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\xi} \in V_1$,故有$(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\xi}) = 0$,
因此

$$|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\xi}| \geqslant |\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}|,$$

即条件是必要的.

又若有 $\boldsymbol{\beta}' \in V_1$ 也满足对任意 $\boldsymbol{\xi} \in V_1$ 有

$$|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}'| \leqslant |\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\xi}|,$$

于是有

$$|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}'| = |\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}|.$$

但是已证明

$$|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}'|^2 = |\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}|^2 + |\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}'|^2,$$

故 $|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}'| = |\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}|$ 推出 $|\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}'| = 0$,即 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}'$,证明了充分

性.

26. 设 V_1, V_2 是欧氏空间 V 的两个子空间，证明：

$$(V_1+V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp},\quad (V_1\cap V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}+V_2^{\perp}.$$

证明 1) 如果 $\boldsymbol{\alpha}\in(V_1+V_2)^{\perp}$，则对任一 $\boldsymbol{\beta}\in V_1+V_2$ 都有 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$，特别地，对 $\boldsymbol{\beta}\in V_1$ 或 $\boldsymbol{\beta}\in V_2$ 有 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$，所以 $\boldsymbol{\alpha}\in V_1^{\perp}$，$\boldsymbol{\alpha}\in V_2^{\perp}$，因此 $\boldsymbol{\alpha}\in V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$，$(V_1+V_2)^{\perp}\subseteq V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$.

反之如果 $\boldsymbol{\alpha}\in V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$，则 $\boldsymbol{\alpha}\in V_1^{\perp}$，$\boldsymbol{\alpha}\in V_2^{\perp}$，对任一向量 $\boldsymbol{\beta}\in V_1+V_2$. 将 $\boldsymbol{\beta}$ 表成 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$，其中 $\boldsymbol{\beta}_i\in V_i\ (i=1,2)$；即得 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$，故 $\boldsymbol{\alpha}\in(V_1+V_2)^{\perp}$，所以 $V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}\subseteq(V_1+V_2)^{\perp}$.

由上知

$$(V_1+V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}.$$

2) 由 1) $(V_1^{\perp}+V_2^{\perp})^{\perp}=(V_1^{\perp})^{\perp}\cap(V_2^{\perp})^{\perp}=V_1\cap V_2$，

因此

$$(V_1\cap V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}+V_2^{\perp}.$$

27. 求下列方程的最小二乘解：

$$\begin{cases}0.39x-1.89y=1,\\0.61x-1.80y=1,\\0.93x-1.68y=1,\\1.35x-1.50y=1.\end{cases}$$

用"到子空间距离最短的线是垂线"的语言表达出上面方程的最小二乘解的几何意义，由此列出方程并求解.(用三位有效数字计算).

解 设系数矩阵的两列向量分别为 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0.39 & -1.89\\0.61 & -1.80\\0.93 & -1.68\\1.35 & -1.50\end{pmatrix}=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}].$$

又令

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$Y=AX=x\boldsymbol{\alpha}+y\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0.39x-1.89y\\0.61x-1.80y\\0.93x-1.68y\\1.35x-1.50y\end{pmatrix}.$$

求 X 使 $|AX-B|^2$ 最小,即求 Y 使 $Y-B$ 垂直于子空间 $L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$.或 $\boldsymbol{\alpha}'(AX-B)=\boldsymbol{\beta}'(AX-B)=0$,也即 $A'AX=A'B$.

计算即得

$$\begin{cases}3.212x-5.422y=3.28,\\-5.422x+11.884y=-6.87,\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x=0.197,\\y=-0.488.\end{cases}$$

四、补充题、提示与解答

1. 证明:正交矩阵的实特征根为 ±1.

证明 设 A 是一个正交矩阵,λ_0 是 A 的一个实特征根,$\boldsymbol{\alpha}$ 是对应于 λ_0 的一个特征向量.

$$A\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}.$$

于是

$$(A\boldsymbol{\alpha},A\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=(\lambda_0\boldsymbol{\alpha},\lambda_0\boldsymbol{\alpha})=\lambda_0^2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}).$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}\neq0$,所以,$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\neq0$ 得出 $\lambda_0^2=1$,即 $\lambda_0=\pm1$.

2. 证明:奇数维欧氏空间中的旋转一定以 1 作为它的一个特征值.

提示 旋转的行列式等于1,考虑一个 $n\times n$ 矩阵的行列式和它的特征值的关系.

证明 方法1 我们只证明正交矩阵 $\boldsymbol{A}$,若 $|\boldsymbol{A}|=1$,则以1为特征值,只要证 $|1\cdot\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 就行了.

$$\begin{aligned}|1\cdot\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|&=|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}'-\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}'-\boldsymbol{E}|\\&=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}|(-1)^n|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|.\end{aligned}$$

由于 n 为奇数,$(-1)^n=-1$,又有 $|\boldsymbol{A}|=1$,则

$$|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$$

故 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|1\cdot\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$,$\boldsymbol{A}$ 以1为特征值.

方法2 $\boldsymbol{A}$ 是实正交阵,也就是酉矩阵.它的虚特征值必成对出现,且其模为1,它的实特征值是 ±1.因此可设其全部的特征值为

$$\lambda_1,\bar{\lambda}_1,\cdots,\lambda_m,\bar{\lambda}_m,\underbrace{1,\cdots,1}_{k\text{个}},\underbrace{-1,\cdots,-1}_{t\text{个}},$$

其中 $\lambda_i\bar{\lambda}_i=1$, $i=1,2,\cdots,m$,且 $2m+k+t=n$.由于 $|A|=\lambda_1\bar{\lambda}_1\cdots\lambda_m\bar{\lambda}_m(-1)^t.1^k=1$,$t$ 一定是偶数.$k=n-t-2m$ 是奇数,至少是1.故 $\boldsymbol{A}$ 及 $\mathscr{A}$ 以1作为特征值.

3. 证明:第二类正交变换一定以 -1 作为它的一个特征值.

提示 仿照上题.

证明 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维欧氏空间的一个第二类正交变换。那么 $\mathscr{A}$ 的行列式等于 -1.如上题有

$$\lambda_1\bar{\lambda}_1\cdots\lambda_m\bar{\lambda}_m\cdot1^k(-1)^t=-1,$$

所以 t 一定是一个奇数,$t\geqslant1$,$\mathscr{A}$ 以 -1 为特征值.

4. 设 $\mathscr{A}$ 是欧氏空间 V 的一个变换.证明:如果 $\mathscr{A}$ 保持内积不变,即对于 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$,$(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$,那么它一定是线性的,因而它是正交变换.

提示 计算 $|\mathscr{A}(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta})-k\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}-l\mathscr{A}\boldsymbol{\beta}|^2$.

证明 $(\mathscr{A}(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta})-k\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}-l\mathscr{A}\boldsymbol{\beta},\mathscr{A}(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta})-k\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}-l\mathscr{A}\boldsymbol{\beta})$

$=(\mathscr{A}(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}),\mathscr{A}(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}))-k(\mathscr{A}(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}),\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha})-$

$$
\begin{aligned}
&l(\mathscr{A}(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}),\mathscr{A}\boldsymbol{\beta})-k(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}))+k^2(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\\
&\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha})+kl(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\beta})-l(\mathscr{A}\boldsymbol{\beta},\mathscr{A}(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}))+lk(\mathscr{A}\boldsymbol{\beta},\\
&\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha})+l^2(\mathscr{A}\boldsymbol{\beta},\mathscr{A}\boldsymbol{\beta})\\
=&(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta},k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta})-k(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})-l(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})-k\\
&(\boldsymbol{\alpha},k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta})+k^2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})+kl(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})-l(\boldsymbol{\beta},k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta})+\\
&lk(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})+l^2(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})\\
=&0.
\end{aligned}
$$

因此

$$\mathscr{A}(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta})-k\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}-l\mathscr{A}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0},$$
$$\mathscr{A}(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta})=k\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}+l\mathscr{A}\boldsymbol{\beta},$$

$\mathscr{A}$ 是一个线性变换,因而是一个正交变换.

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 是 n 维欧氏空间 V 中两个向量组.证明存在一正交变换 $\mathscr{A}$ 使

$$\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{\beta}_i,\ i=1,2,\cdots,m$$

的充分必要条件为

$$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_j),\ i,j=1,2,\cdots,m.$$

证明 记 $V_1=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$, $V_2=L(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$.
取 $V_1^{\perp}$ 的一组标准正交基 $\boldsymbol{\alpha}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$;取 $V_2^{\perp}$ 的一组标准正交基 $\boldsymbol{\beta}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$,得到 V 的两组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$;$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$.这两组基的度量矩阵相等,都等于

$$\begin{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_m) & \boldsymbol{O}\\ \vdots & & \vdots & \\ (\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_1) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_m) & \\ & \boldsymbol{O} & & \boldsymbol{E}\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}.$$

作 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 如下:

对 $\boldsymbol{\alpha}\in V$,将 $\boldsymbol{\alpha}$ 表成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的线性组合:

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

令

$$\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{\beta}_n,$$

则 $\mathscr{A}$ 是 V 的一个线性变换，且

$$\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{\beta}_i,\qquad i=1,2,\cdots,n$$

对 V 中任一个向量 $\boldsymbol{\beta}$：

$$\boldsymbol{\beta}=y_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+y_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

则

$$\mathscr{A}\boldsymbol{\beta}=y_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+y_n\boldsymbol{\beta}_n,$$

$$(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\beta})=(x_1,\cdots,x_n)\boldsymbol{C}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),$$

所以 $\mathscr{A}$ 是一个正交变换，这就是满足条件的正交变换.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 级实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，证明：存在正交矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使得

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{E}_{n-r}\end{pmatrix}.$$

证明 因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，所以它的特征值都是实数. 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$ 得 $\lambda^2=1$，因此 $\lambda=\pm1$. 设 $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数为 r，则 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的 r 重根，-1 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-r$ 重根，所以存在正交矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{E}_{n-r}\end{pmatrix}.$$

7. 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 是一实二次型，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式的根，且 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$. 证明对任一 $\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^n$，有

$$\lambda_1\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\leqslant\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\leqslant\lambda_n\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}.$$

提示 用正交变换将 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 化成 $f(x_1,\cdots,x_n)=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$，然后进行讨论。

证明 设正交变换

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{Y}$$

把 $f(x_1,\cdots,x_n)$化为

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2.$$

对任一 $\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^n$,

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Y},$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}&=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2\\&\leqslant\lambda_n(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)=\lambda_n\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X},\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\geqslant\lambda_1(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)=\lambda_1\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X},$$

所以有

$$\lambda_1\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\leqslant\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\leqslant\lambda_n\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}.$$

8. 设二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的矩阵为 $\boldsymbol{A}$,λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式的根,证明存在 $\mathbf{R}^n$ 中的非零向量$(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\cdots,\overline{x}_n)$使得

$$f(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\cdots,\overline{x}_n)=\lambda(\overline{x}_1^2+\overline{x}_2^2+\cdots+\overline{x}_n^2).$$

证明 因为 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式的根,所以齐次线性方程组

$$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$$

有非零解$(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\cdots,\overline{x}_n)$,

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}\overline{x}_1\\\overline{x}_2\\\vdots\\\overline{x}_n\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}\overline{x}_1\\\overline{x}_2\\\vdots\\\overline{x}_n\end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{aligned}f(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\cdots,\overline{x}_n)&=(\overline{x}_1\cdots\overline{x}_n)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}\overline{x}_1\\\vdots\\\overline{x}_n\end{pmatrix}\\&=\lambda(\overline{x}_1^2+\overline{x}_2^2+\cdots+\overline{x}_n^2).\end{aligned}$$

9. 1) 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是欧氏空间中两个不同的单位向量,证明存在一镜面反射 $\mathscr{A}$,使

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\beta};$$

2) 证明: $n(n\geqslant2)$维欧氏空间中任一正交变换都可以表成

一系列镜面反射的乘积.

提示 1）当 $\boldsymbol{\alpha}\neq-\boldsymbol{\beta}$ 时，利用本章习题15的3)求一个镜面反射将 $\boldsymbol{\alpha}$ 变为 $\boldsymbol{\beta}$.

2）对维数 n 作归纳法.

证明 1）如果 $\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{\alpha}$，将 $\boldsymbol{\alpha}$ 扩充成一组标准正交基 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$. 令线性变换 $\mathscr{A}$ 满足

$$\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha},$$
$$\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{\alpha}_i,\quad i=2,\cdots,n,$$

则 $\mathscr{A}$ 是一个镜面反射且 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

如果 $\boldsymbol{\beta}\neq-\boldsymbol{\alpha}$，则 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性无关. 令

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}),$$
$$\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}),$$

则 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2$ 是正交的单位向量，扩充成 V 的一组标准正交基 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n$.

令 $\mathscr{A}$ 是一个镜面反射满足

$$\mathscr{A}\boldsymbol{\gamma}_1=-\boldsymbol{\gamma}_1,$$
$$\mathscr{A}\boldsymbol{\gamma}_i=\boldsymbol{\gamma}_i,\qquad i=2,\cdots,n,$$

则

$$\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}.$$

2）对 V 的维数 n 作归纳法.

当 $n=1$ 时，设 $V=L(\boldsymbol{\alpha})$. 正交变换只能是 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}$，必有 $k=\pm1$. 令 V 上线性变换 $\mathscr{A}_1$：$\forall\,\boldsymbol{\beta}\in V,\boldsymbol{\beta}=l\boldsymbol{\alpha}$，则

$$\mathscr{A}_1\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}-\frac{2(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})}{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\beta},$$

它是 V 上的镜面反射. 若 $k=1$，则 $\mathscr{A}=\mathscr{A}_1^2$；若 $k=-1$，则 $\mathscr{A}=\mathscr{A}_1$. 命题已成立.

当 $n>1$ 时，设对 $n-1$ 维的欧氏空间命题已成立，现设 V 是

n 维的.

首先易知:设 W 是 V 的子空间,对于 $W^{\perp}$ 的由 $\boldsymbol{\eta}\in W^{\perp}$ 决定的镜面反射 $\widetilde{\mathscr{B}}$:$\widetilde{\mathscr{B}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}-\dfrac{2(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\alpha})}{(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta})}\boldsymbol{\eta}$. $\forall\,\boldsymbol{\alpha}\in W^{\perp}$ 可扩充为 V 的一个镜面反射 $\mathscr{B}$,满足 $\mathscr{B}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\in W$ 及 $\mathscr{B}|W^{\perp}=\widetilde{\mathscr{B}}$.

现在看 $\mathscr{A}$. 若 $\mathscr{A}=\mathscr{E}$,任取 V 的一个向量 $\boldsymbol{\eta}\neq\mathbf{0}$. 令 $\mathscr{A}_1$ 是反射:

$$\mathscr{A}_1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}-\frac{2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\eta})}{(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta})}\boldsymbol{\eta},\ \forall\,\boldsymbol{\alpha}\in V.$$

则 $\mathscr{A}=\mathscr{A}_1^2$ 命题已得证.

若 $\mathscr{A}\neq\mathscr{E}$,则必有单位向量 $\boldsymbol{\alpha}$,$\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{\alpha}$. 显然 $\boldsymbol{\beta}$ 也是单位向量. 由 1),有 V 的镜面反射 $\mathscr{A}_1$ 使 $\mathscr{A}_1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$. 由于 $\mathscr{A}_1^{-1}=\mathscr{A}_1$,于是 $\mathscr{A}_1^{-1}\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$.

令 $W=L(\boldsymbol{\alpha})$,则 $W^{\perp}$ 是 $n-1$ 维的欧氏空间,$\mathscr{A}_1^{-1}\mathscr{A}|W^{\perp}$ 也是正交变换,由归纳假设有 $W^{\perp}$ 上的镜面反射 $\widetilde{\mathscr{A}}_2,\cdots,\widetilde{\mathscr{A}}_k$ 使 $\mathscr{A}_1^{-1}\mathscr{A}|W^{\perp}=\widetilde{\mathscr{A}}_2\cdots\widetilde{\mathscr{A}}_k$. 前面已说到 $\widetilde{\mathscr{A}}_2,\cdots,\widetilde{\mathscr{A}}_k$ 可扩充为 V 的镜面反射 $\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_k$ 且满足 $\mathscr{A}_i\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$(因 $\boldsymbol{\alpha}\in W$). 于是

$$\mathscr{A}_1^{-1}\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}=\mathscr{A}_2\cdots\mathscr{A}_k\boldsymbol{\alpha}$$

及

$$\mathscr{A}_1^{-1}\mathscr{A}|W^{\perp}=\widetilde{\mathscr{A}}_2\cdots\widetilde{\mathscr{A}}_k=\mathscr{A}_2\cdots\mathscr{A}_k|W^{\perp}.$$

由于 $V=W+W^{\perp}$. 任意 $\boldsymbol{\gamma}\in V$,有 $l\,\boldsymbol{\alpha}\in W$,$\boldsymbol{\beta}\in W^{\perp}$ 使 $\boldsymbol{\gamma}=l\,\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$.

则

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_1^{-1}\mathscr{A}(l\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})&=\mathscr{A}_1^{-1}\mathscr{A}(l\boldsymbol{\alpha})+\mathscr{A}_1^{-1}\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})\\&=\mathscr{A}_2\cdots\mathscr{A}_k(l\boldsymbol{\alpha})+\mathscr{A}_2\cdots\mathscr{A}_k(\boldsymbol{\beta})=\mathscr{A}_2\cdots\mathscr{A}_k(l\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}).\end{aligned}$$

故 $\mathscr{A}_1^{-1}\mathscr{A}=\mathscr{A}_2\cdots\mathscr{A}_k$. 因此 $\mathscr{A}=\mathscr{A}_1\mathscr{A}_2\cdots\mathscr{A}_k$ 是 V 的一些镜面反射的乘积. 至此已完成了归纳法.

10. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个 $n\times n$ 实对称矩阵,且 $\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵,证

明存在一 $n\times n$ 实可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使 $\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 与 $\boldsymbol{T}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}$ 同时为对角形.

证明 因为 $\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵,故有可逆矩阵 $\boldsymbol{T}_1$ 使

$$\boldsymbol{T}'_1\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}_1=\boldsymbol{E}.$$

记

$$\boldsymbol{T}'_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_1=\boldsymbol{A}_1.$$

$\boldsymbol{A}_1$ 是实对称矩阵,故有正交矩阵 $\boldsymbol{T}_2$ 使 $\boldsymbol{T}'_2\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{T}_2$ 为对角矩阵.因为 $\boldsymbol{T}_2$ 是正交矩阵,故

$$\boldsymbol{T}'_2\boldsymbol{T}'_1\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2=\boldsymbol{T}'_2\boldsymbol{T}_2=\boldsymbol{E}.$$

令

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2,$$

则 $\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T},\boldsymbol{T}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}$ 同时为对角形.

11. 证明酉空间中两组标准正交基的过渡矩阵是酉矩阵.

提示 参考 370 页关于欧氏空间标准正交基的讨论.

证明 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 及 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 是酉空间 V 的两组标准正交基.由 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 到 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 的过渡矩阵是 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$,即

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

因为 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 是标准正交基,所以

$$(\boldsymbol{\eta}_i,\boldsymbol{\eta}_j)=a_{1i}\overline{a}_{1j}+a_{2i}\overline{a}_{2j}+\cdots+a_{ni}\overline{a}_{nj}=\begin{cases}1, & \text{当 } i=j,\\ 0, & \text{当 } i\neq j,\end{cases}$$

因此

$$\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{A}}'=\boldsymbol{E},$$

由此得

$$\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{A}}'=\overline{\boldsymbol{A}}'\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E},$$

即 $\boldsymbol{A}$ 是一个酉矩阵.

12. 证明:酉矩阵的特征根的模为 1.

证明 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个酉矩阵，λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征根，$\boldsymbol{\alpha}$ 是对应于 λ_0 的一个特征向量，即

$$\boldsymbol{A\alpha} = \lambda_0 \boldsymbol{\alpha},$$

于是

$$(\boldsymbol{A\alpha}, \boldsymbol{A\alpha}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) = \lambda_0 \overline{\lambda}_0 (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}).$$

因为 $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$，所以 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) \neq 0$，$\lambda_0 \overline{\lambda}_0 = 1$，即 $\boldsymbol{A}$ 的特征根的模为 1.

13. 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 级可逆复矩阵，证明 $\boldsymbol{A}$ 可以分解成

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{UT},$$

其中 $\boldsymbol{U}$ 是酉矩阵，$\boldsymbol{T}$ 是一个上三角矩阵

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix},$$

其中对角线元素 t_{ii} $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 都是正实数，并证明这个分解是唯一的.

提示 类似于前面 14 题的证明.

证明 设 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$.

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n),$$

将 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 用施密特过程正交化，再单位化，得到一组正交的单位向量 $\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_n$. 设为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}_1 &= t_{11} \boldsymbol{\alpha}_1, \\ \boldsymbol{\gamma}_2 &= t_{12} \boldsymbol{\alpha}_1 + t_{22} \boldsymbol{\alpha}_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{\gamma}_n &= t_{1n} \boldsymbol{\alpha}_1 + t_{n2} \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + t_{nn} \boldsymbol{\alpha}_n. \end{aligned} \qquad (*)$$

并可取 t_{ii} 是正实数 $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 令

$$\boldsymbol{U} = [\boldsymbol{\gamma}_1 \boldsymbol{\gamma}_2 \cdots \boldsymbol{\gamma}_n],$$

$$T=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix},$$

(*)可以写成为

$$\boldsymbol{U}=[\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]\boldsymbol{T}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}.$$

于是有分解

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{T}^{-1},$$

其中 $\boldsymbol{T}^{-1}$仍为上三角阵,且它的对角线元素为 $t_{11}^{-1},t_{22}^{-1},\cdots,t_{nn}^{-1}$,仍为正实数.

如果 $\boldsymbol{A}$ 还有另一种分法:

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{T}_1,$$

其中 $\boldsymbol{U}_1$ 是酉矩阵,$\boldsymbol{T}_1$ 是对角线元素都是正实数的上三角矩阵,则有

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{T}_1,$$

$$\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{U}_1=\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}_1^{-1}.$$

上式左边是一个酉矩阵,右边是一个上三角矩阵,其主对角线上元素全是正实数.类似于 13 题可证上三角形的酉矩阵必为对角阵,且对角线元素只能为 ±1.因此必有

$$\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{U}_1=\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}_1^{-1}=\boldsymbol{E},$$

即

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}_1,$$

表法唯一.

14. 证明埃尔米特矩阵的特征值是实数,并且它的属于不同特征值的特征向量相互正交.

提示 参考本章习题 16 的证明.

证明 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个埃尔米特矩阵,λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值.于是有非零向量

$$\xi=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

满足

$$\boldsymbol{A}\xi=\lambda_0\xi.$$

令

$$\overline{\xi}=\begin{pmatrix}\overline{x}_1\\\overline{x}_2\\\vdots\\\overline{x}_n\end{pmatrix},$$

其中 $\overline{x}_i(i=1,2,\cdots,n)$是 x_i 的共轭复数.故有$\overline{\boldsymbol{A}}\overline{\xi}=\overline{\lambda}_0\overline{\xi}$.

于是

$$\overline{\xi}'(\boldsymbol{A}\xi)=\overline{\xi}'\overline{\boldsymbol{A}}'\xi=(\overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\xi})'\xi,$$

上式左边为 $\lambda_0\overline{\xi}'\xi$,右边为 $\overline{\lambda}_0\overline{\xi}'\xi$.因为 $\overline{\xi}'\xi\neq0$,因此 $\lambda_0=\overline{\lambda}_0$,即 λ_0 是一个实数.

再设 λ_1 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个不等于λ_0 的特征值,$\boldsymbol{\eta}$ 是$\boldsymbol{A}$ 的一个属于 λ_1 的特征向量,

$$\boldsymbol{A\eta}=\lambda_1\boldsymbol{\eta},$$

于是

$$\overline{\xi}'\boldsymbol{A\eta}=\overline{\xi}'\lambda_1\boldsymbol{\eta}=\lambda_1\overline{\xi}'\boldsymbol{\eta}.$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 是埃尔米特矩阵,所以 $\overline{\boldsymbol{A}}'=\boldsymbol{A}$.又有

$$\overline{\xi}'\boldsymbol{A\eta}=\overline{\xi}'\overline{\boldsymbol{A}}'\boldsymbol{\eta}=(\overline{\boldsymbol{A}\xi})'\boldsymbol{\eta}=\overline{\lambda}_0\overline{\xi}'\boldsymbol{\eta}=\lambda_0\overline{\xi}'\boldsymbol{\eta}.$$

因为 $\lambda_0\neq\lambda_1$,所以 $\overline{\xi}'\boldsymbol{\eta}=0$,即 $\xi,\boldsymbol{\eta}$ 正交.也就是说明埃尔米特矩阵的属于不同特征值的特征向量相互正交.

第十章 双线性函数与辛空间

一、内容提要

1. 线性函数与对偶空间

线性函数的定义，线性函数由在基元素上的取值唯一决定.

对偶空间的定义，对偶基的定义与存在性，对偶基的例子. 基之间的过渡矩阵与相应的对偶基之间的过渡矩阵的关系.

空间 V^{**} 与 V 的同构.

2. 双线性函数

定义，度量矩阵及其意义. 不同基下度量矩阵是合同的.

非退化双线性函数，对称与反对称双线性函数，对称双线性函数的度量矩阵可化为对角阵(用合同变换和用"正交化"过程). 复数域和实数域上对称双线性函数的坐标表示式. 非退化对称双线性函数的正交基.

反对称双线性函数的度量矩阵的化简，V 中相应的基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{-1}, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_r, \boldsymbol{\varepsilon}_{-r}, \boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_s$ 的存在.

双线性度量空间、准欧氏空间，辛空间的定义.

*3. 辛空间

辛正交基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_{-1}, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_{-2}, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_{-n}$ 的定义及在此基下的度量矩阵. 辛变换的定义.

辛变换与子空间的性质.

二、学习指导

1. 前面几章中学习过二次型函数，欧氏空间和酉空间中的内积函数，它们的推广就是线性空间中的双线性函数. 它的第一个内容就是在给定基下写出它的坐标表示式，进一步，找适当基底使其坐标表示式最简单.

这时想仿照欧氏空间的度量性质，研究在双线性函数的一般度量下的长度、角度已不可能. 但是还能讨论正交，正交基以及保持双线性函数的线性变换，以及随之而来的空间分解成某些子空间的正交和等问题. 这就是本章讨论的内容.

保持双线性函数的线性变换在典型的基下的矩阵有一定的特征. 恰好在其他数学中，在力学中，工程计算中大量地出现了这样的矩阵，这就与双线性函数的理论有了密切联系，也就刺激了后者的进一步发展，例如辛空间、辛几何就是这样.

2. 第七章中研究矩阵在相似变换下的性质，可通过改变基来改变线性变换的矩阵这种思路来实现. 曾把这种思路叫做空间观点. 本章中将矩阵的合同与双线性函数在不同基下的度量矩阵的关系相联系. 这样，研究矩阵的合同变换下的性质，也可通过改变基来实现双线性函数的度量矩阵的改变. 这是本课程中的“空间观点”的另一个研究思路. 在代数中研究矩阵时有时采用矩阵本身的运算性质，有时采用空间观点. 哪一种方便就采用哪一种.

三、习题、提示与解答

1. V 是数域 P 上一个 3 维线性空间，$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 是它的一组基，f 是 V 上一个线性函数，已知

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_3)=1,\ f(\boldsymbol{\varepsilon}_2-2\boldsymbol{\varepsilon}_3)=-1,\ f(\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2)=-3,$$

求 $f(x_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+x_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+x_3\boldsymbol{\varepsilon}_3)$.

解 先计算出 $f(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=4$，$f(\boldsymbol{\varepsilon}_2)=-7$，$f(\boldsymbol{\varepsilon}_3)=-3$，就得到

$$f(x_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+x_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+x_3\boldsymbol{\varepsilon}_3)=4x_1-7x_2-3x_3.$$

2. V 及 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 同上题，试找出一个线性函数 f，使

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_3)=f(\boldsymbol{\varepsilon}_1-2\boldsymbol{\varepsilon}_3)=0,\ f(\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2)=1.$$

解 可算出 $f(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=f(\boldsymbol{\varepsilon}_3)=0$，$f(\boldsymbol{\varepsilon}_2)=1$，就得到

$$f(x_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+x_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+x_3\boldsymbol{\varepsilon}_3)=x_2.$$

3. 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 是线性空间 V 的一组基，f_1，f_2，f_3 是它的对偶基，

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3.$$

试证 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 V 的一组基并求它的对偶基(用 f_1，f_2，f_3 表出)。

解 可利用定理 3 计算

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}.$$

由于右端的矩阵的行列式 $\neq 0$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 V 的一组基. 设 g_1,g_2,g_3 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的对偶基，则

$$\begin{aligned}(g_1,g_2,g_3)&=(f_1,\ f_2,\ f_3)\left(\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}'\right)^{-1}\\&=(f_1,\ f_2,\ f_3)\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&-1&2\\-1&1&-1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

即 $\quad g_1=f_2-f_3,\ g_2=f_1-f_2+f_3,\ g_3=-f_1+2f_2-f_3.$

4. 设 V 是一个线性空间，f_1，f_2，$\cdots$，f_s 是 V^* 中非零向量，试证，存在 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，使

$$f_i(\boldsymbol{\alpha})\neq 0,\quad i=1,2,\cdots,s.$$

提示 $f_1(\boldsymbol{\alpha})=0$，$f_2(\boldsymbol{\alpha})=0$，$\cdots$，$f_s(\boldsymbol{\alpha})=0$ 是 V 上 s 个向

量方程，每方程的解向量都构成 V 的一个子空间，且都不等于 V. 再利用第六章补充题第 5 题的结论及其解答后面的注.

证明 每个 $f_i(\boldsymbol{\alpha})=0$ 作为 V 上向量的方程，其全体解向量构成 V 的一个子空间 V_i，且都不等于 V. 由第六章补充题第 5 题的结论及解答后面的注，必有 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，$\boldsymbol{\alpha}\overline{\in} V_i$，$i=1,2,\cdots,s$. 所以 $\boldsymbol{\alpha}$ 满足 $f_i(\boldsymbol{\alpha})\neq 0$，$i=1,2,\cdots,s$.

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是线性空间 V 中非零向量，证明有 $f\in V^*$ 使

$$f(\boldsymbol{\alpha}_i)\neq 0,\quad i=1,2,\cdots,s.$$

证明 由于 $\boldsymbol{\alpha}_i^{**}\in(V^*)^*$，$\boldsymbol{\alpha}_i^{**}(f)=f(\boldsymbol{\alpha}_i)$，$\forall f\in V^*$，$\boldsymbol{\alpha}_i^{**}$ 是 $(V^*)^*$ 上的非零向量. 由第四题必有 $f\in V^*$ 使 $f(\boldsymbol{\alpha}_i)=\boldsymbol{\alpha}_i^{**}(f)\neq 0$.

6. $V=P[x]_3$，对 $p(x)=c_0+c_1x+c_2x^2\in V$ 定义

$$f_1(p(x))=\int_0^1 p(x)\mathrm{d}x,$$

$$f_2(p(x))=\int_0^2 p(x)\mathrm{d}x,$$

$$f_3(p(x))=\int_0^{-1} p(x)\mathrm{d}x.$$

试证 f_1，f_2，f_3 都是 V 上线性函数，并找出 V 的一组基 $p_1(x)$，$p_2(x)$，$p_3(x)$ 使 f_1，f_2，f_3 是它的对偶基.

证明 易证 f_1，f_2，f_3 都是 $V=P[x]_3$ 上线性函数.

令 $p_1(x)=c_0+c_1x+c_2x^2$ 使得 $f_1(p_1(x))=1$，$f_2(p_1(x))=f_3(p_1(x))=0$，即有

$$f_1(p_1(x))=\int_0^1(c_0+c_1x+c_2x^2)\mathrm{d}x$$

$$=c_0+\frac{1}{2}c_1+\frac{1}{3}c_2=1,$$

$$f_2(p_1(x))=\int_0^2(c_0+c_1x+c_2x^2)\mathrm{d}x$$

$$= 2c_0 + 2c_1 + \frac{8}{3}c_2 = 0,$$

$$f_3(p_1(x)) = \int_0^1 (c_0 + c_1 x + c_2 x^2)\mathrm{d}x$$

$$= - c_0 + \frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{3}c_2 = 0,$$

解出得　$c_0 = c_1 = 1,\ c_2 = -\frac{3}{2},\ p_1(x) = 1 + x - \frac{3}{2}x^2.$

同样可算出　$p_2(x) = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}x^2,\ p_3(x) = -\frac{1}{3} + x - \frac{1}{2}x^2$,满足

$$f_i(p_j(x)) = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i, \end{cases} \quad j = 2,3,\ i = 1,2,3.$$

由于

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} \neq 0,$$

$p_1(x), p_2(x), p_3(x)$是 V 的一组基,而 f_1, f_2, f_3 是它的对偶基.

7. 设 V 是一个 n 维欧氏空间,它的内积为$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$,对 V 中确定的向量 $\boldsymbol{\alpha}$,定义 V 上一个函数 $\boldsymbol{\alpha}^*$:

$$\boldsymbol{\alpha}^*(\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}).$$

1) 证明 $\boldsymbol{\alpha}^*$ 是 V 上线性函数;

2) 证明 V 到 V^* 的映射:

$$\boldsymbol{\alpha} \to \boldsymbol{\alpha}^*$$

是 V 到 V^* 的一个同构映射.(在这个同构下,欧氏空间可看成自身的对偶空间.)

证明　1) 易证 $\boldsymbol{\alpha}^*$ 是 V 上线性函数,即 $\boldsymbol{\alpha}^* \in V^*$.

2）现在令映射 φ 为

$$V \xrightarrow{\varphi} V^*$$
$$\boldsymbol{\alpha} \mapsto \boldsymbol{\alpha}^*$$

下面逐步证明 φ 是线性空间的同构.

(i) φ 是单射. 即证明当 $\varphi(\boldsymbol{\alpha})=\varphi(\boldsymbol{\beta})$ 时有 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

$(\varphi(\boldsymbol{\alpha}))(\boldsymbol{\gamma})=\boldsymbol{\alpha}^*(\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})$ $\quad(\varphi(\boldsymbol{\beta}))(\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$, 对 $\forall\,\boldsymbol{\gamma}\in V$. 故 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$, $\forall\,\boldsymbol{\gamma}\in V$. 这样

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}),\quad (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}).$$

于是

$$(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})-(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})-(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})-(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})=0,$$

即有 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$, 因此 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

(ii) φ 是满射. 取 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 V 的一组标准正交基, 令 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是它们的对偶基, 对 $\forall\, f=l_1f_1+\cdots+l_nf_n\in V^*$, 令 $\boldsymbol{\alpha}=l_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+l_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+l_n\boldsymbol{\varepsilon}_n$, 则对所有 $\boldsymbol{\varepsilon}_i$,

$$\varphi(\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\varepsilon}_i)=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varepsilon}_i)=l_i,\quad 而\ f(\boldsymbol{\varepsilon}_i)=\sum_{j=1}^{n}l_jf_j(\boldsymbol{\varepsilon}_i)=l_i.$$

故对所有 $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ 有 $\varphi(\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\varepsilon}_i)=f(\boldsymbol{\varepsilon}_i)$, 即 $\varphi(\boldsymbol{\alpha})=f$.

(iii) φ 是线性映射. 对 $\forall\,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in V$, $k\in\mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\gamma})&=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})\\&=\varphi(\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\gamma})+\varphi(\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\gamma})=[\varphi(\boldsymbol{\alpha})+\varphi(\boldsymbol{\beta})](\boldsymbol{\gamma}).\end{aligned}$$

故 $$\varphi(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\varphi(\boldsymbol{\alpha})+\varphi(\boldsymbol{\beta}).$$

又 $$\begin{aligned}\varphi(k\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\gamma})&=(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})=k\varphi(\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\gamma})\\&=(k\varphi(\boldsymbol{\alpha}))(\boldsymbol{\gamma}),\end{aligned}$$

故 $$\varphi(k\boldsymbol{\alpha})=k\varphi(\boldsymbol{\alpha}).$$

以上证明了 φ 是线性空间 V 到 V^* 的同构.

8. 设 $\mathscr{A}$ 是 P 上 n 维线性空间 V 的一个线性变换.

1）证明：对 V 上的线性函数 f, $f\mathscr{A}$ 仍是 V 上线性函数；

2）定义 V^* 到自身的映射 $\mathscr{A}^*$ 为

$$f \to f\mathscr{A}$$

证明 $\mathscr{A}^*$ 是 V^* 上的线性变换.

3) 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 V 的一组基, $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是它的对偶基,并设 $\mathscr{A}$ 在 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的矩阵为 $\mathbf{A}$. 证明: $\mathscr{A}^*$ 在 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 下的矩阵为 $\mathbf{A}'$. (因此 $\mathscr{A}^*$ 称作 $\mathscr{A}$ 的转置映射.)

证明 1) $\forall \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$, $\forall k\in P$, 有

$$f\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=f(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}))=f(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}+\mathscr{A}\boldsymbol{\beta})=f\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}+f\mathscr{A}\boldsymbol{\beta},$$

$$f\mathscr{A}(k\boldsymbol{\alpha})=f(\mathscr{A}(k\boldsymbol{\alpha}))=f(k\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha})=kf\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}.$$

故 $f\mathscr{A}$ 是 V 上线性函数.

2) 由定义 $\mathscr{A}^* f=f\mathscr{A}$, 对 $f,g\in V^*$, $k\in P$, $\forall \boldsymbol{\alpha}\in V$ 有

$$\begin{aligned}\mathscr{A}^*(f+g)(\boldsymbol{\alpha})&=[(f+g)\mathscr{A}](\boldsymbol{\alpha})=(f+g)(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}))\\&=f\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})+g\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=(f\mathscr{A}+g\mathscr{A})(\boldsymbol{\alpha})\\&=(\mathscr{A}^* f+\mathscr{A}^* g)(\boldsymbol{\alpha}),\end{aligned}$$

故
$$\mathscr{A}^*(f+g)=\mathscr{A}^*(f)+\mathscr{A}^*(g).$$

又
$$\begin{aligned}(\mathscr{A}^*(kf))(\boldsymbol{\alpha})&=(kf)\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=kf(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}))\\&=k(\mathscr{A}^* f)(\boldsymbol{\alpha}),\end{aligned}$$

故 $\mathscr{A}^*(kf)=k(\mathscr{A}^* f)$.

以上证明了 $\mathscr{A}^*$ 是 V^* 上的线性变换.

3) 由
$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\mathbf{A},$$

$$f_i\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)=(f_i(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\cdots,f_i(\boldsymbol{\varepsilon}_n))\mathbf{A}=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}),$$

于是
$$(\mathscr{A}^* f_i)(\boldsymbol{\varepsilon}_j)=a_{ij}=a_{ij}f_j(\boldsymbol{\varepsilon}_j)=\sum_{l=1}^{n}a_{il}f_l(\boldsymbol{\varepsilon}_j).$$

即有

$$\mathscr{A}^* f_i=\sum_{l=1}^{n}a_{il}f_l=(f_1, f_2, \cdots, f_n)\begin{pmatrix}a_{i1}\\a_{i2}\\\vdots\\a_{in}\end{pmatrix},$$

故

$$(\mathscr{A}^* f_1, \mathscr{A}^* f_2, \cdots, \mathscr{A}^* f_n) = (f_1, f_2, \cdots, f_n)\boldsymbol{A}'.$$

这就证明了 $\mathscr{A}^*$ 在基 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 下的矩阵是 $\boldsymbol{A}'$.

9. 设 V 是数域 P 上一个线性空间, $f_1, \cdots, f_k$ 是 V 上 k 个线性函数.

1) 证明下列集合

$$W = \{\boldsymbol{\alpha} \in V \mid f_i(\boldsymbol{\alpha}) = 0, 1 \leqslant i \leqslant k\}$$

是 V 的一个子空间, W 称为线性函数 $f_1, \cdots, f_k$ 的零化子空间.

2) 证明: V 的任一个子空间皆为某些线性函数的零化子空间.

证明 1) 证明略.

2) 设 V_1 是 V 的一个子空间. 取 V_1 的一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_r$, 再扩大为 V 的一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_r, \boldsymbol{\varepsilon}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$. 定义

$$g_i \in V^*, \quad g_i(\boldsymbol{\varepsilon}_j) = \delta_{ij}, \quad i = r+1, \cdots, n.$$

则

$$g_i(l_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 + l_2\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + l_n\boldsymbol{\varepsilon}_n) = l_i, \quad i = r+1, \cdots, n.$$

显然任意 $\boldsymbol{\alpha} = l_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \cdots + l_r\boldsymbol{\varepsilon}_r \in V_1$, 有 $g_i(\boldsymbol{\alpha}) = 0$, $i = r+1, \cdots, n$. 若 $\boldsymbol{\alpha} \notin V_1$, 则 $\boldsymbol{\alpha} = l_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 + l_2\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + l_n\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 中 $l_{r+1}, \cdots, l_n$ 中至少有一个 $l_j \neq 0$. 于是对这个 j 有

$$g_j(\boldsymbol{\alpha}) = l_j \neq 0.$$

故

$$V_1 = \{\boldsymbol{\alpha} \in V \mid g_{r+1}(\boldsymbol{\alpha}) = \cdots = g_n(\boldsymbol{\alpha}) = 0\},$$

即 V_1 是 $g_{r+1}, \cdots, g_n$ 的零化子空间.

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 P 上一个 m 级矩阵. 定义 $P^{m \times n}$ 上一个二元函数

$$f(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}), \quad \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in P^{m \times n}.$$

其中 Tr 是矩阵的迹(见 297 页).

1) 证明 $f(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ 是 $P^{m \times n}$ 上的双线性函数;

2) 求 $f(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ 在基

$\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12}, \cdots, \boldsymbol{E}_{1n}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22}, \cdots, \boldsymbol{E}_{2n}, \cdots, \boldsymbol{E}_{m1}, \boldsymbol{E}_{m2}, \cdots, \boldsymbol{E}_{mn}$

下的度量矩阵.($\boldsymbol{E}_{ij}$表示i行j列的元素为1,而其余元素全为零的$m\times n$矩阵.)

证明 1) 易证有性质:$\mathrm{Tr}(k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{B})=k\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A})+l\mathrm{Tr}(\boldsymbol{B})$.由此得

$$\begin{aligned}f(k\boldsymbol{X}_1+l\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{Y})&=\mathrm{Tr}((k\boldsymbol{X}_1+l\boldsymbol{X}_2)'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y})\\&=\mathrm{Tr}(k(\boldsymbol{X}_1)'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}+l(\boldsymbol{X}_2)'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y})\\&=k\mathrm{Tr}(\boldsymbol{X}'_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y})+l\mathrm{Tr}(\boldsymbol{X}'_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y})\\&=kf(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{Y})+lf(\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{Y}).\end{aligned}$$

同样可得

$$f(\boldsymbol{X},k\boldsymbol{Y}_1+l\boldsymbol{Y}_2)=kf(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}_1)+lf(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}_2).$$

2) 计算$f(\boldsymbol{E}_{ij},\boldsymbol{E}_{ks})$.

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{E}_{ij},\boldsymbol{E}_{ks})&=\mathrm{Tr}(\boldsymbol{E}'_{ij}\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ks})=\mathrm{Tr}(\boldsymbol{E}_{ji}\sum_{l=1}^{m}\sum_{t=1}^{n}a_{lt}\boldsymbol{E}_{lt}\boldsymbol{E}_{ks})\\&=\mathrm{Tr}(a_{ik}\boldsymbol{E}_{js})=\begin{cases}0, & j\neq s,\\ a_{ik}, & j=s.\end{cases}\end{aligned}$$

故所求的度量矩阵为

$$\left(\begin{matrix}f(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{11}), & f(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12}), & \cdots, & f(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{1n}), & f(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{21}),\\ f(\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{11}), & f(\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{12}), & \cdots, & f(\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{1n}), & f(\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21}),\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ f(\boldsymbol{E}_{1n},\boldsymbol{E}_{11}), & f(\boldsymbol{E}_{1n},\boldsymbol{E}_{12}), & \cdots, & f(\boldsymbol{E}_{1n},\boldsymbol{E}_{1n}), & f(\boldsymbol{E}_{1n},\boldsymbol{E}_{21}),\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ f(\boldsymbol{E}_{m1},\boldsymbol{E}_{11}), & f(\boldsymbol{E}_{m1},\boldsymbol{E}_{12}), & \cdots, & f(\boldsymbol{E}_{m1},\boldsymbol{E}_{1n}), & f(\boldsymbol{E}_{m1},\boldsymbol{E}_{21}),\\ f(\boldsymbol{E}_{m2},\boldsymbol{E}_{11}), & f(\boldsymbol{E}_{m2},\boldsymbol{E}_{12}), & \cdots, & f(\boldsymbol{E}_{m2},\boldsymbol{E}_{1n}), & f(\boldsymbol{E}_{m2},\boldsymbol{E}_{21}),\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ f(\boldsymbol{E}_{mn},\boldsymbol{E}_{11}), & f(\boldsymbol{E}_{mn},\boldsymbol{E}_{12}), & \cdots, & f(\boldsymbol{E}_{mn},\boldsymbol{E}_{1n}), & f(\boldsymbol{E}_{mn},\boldsymbol{E}_{21}),\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}
\cdots, & f(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{2n}), & \cdots, & f(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{m1}), & \cdots, & f(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{mn}) \\
\cdots, & f(\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{2n}), & \cdots, & f(\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{m1}), & \cdots, & f(\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{mn}) \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\cdots, & f(\boldsymbol{E}_{1n},\boldsymbol{E}_{2n}), & \cdots, & f(\boldsymbol{E}_{1n},\boldsymbol{E}_{m1}), & \cdots, & f(\boldsymbol{E}_{1n},\boldsymbol{E}_{mn}) \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\cdots, & f(\boldsymbol{E}_{m1},\boldsymbol{E}_{2n}), & \cdots, & f(\boldsymbol{E}_{m1},\boldsymbol{E}_{m1}), & \cdots, & f(\boldsymbol{E}_{m1},\boldsymbol{E}_{mn}) \\
\cdots, & f(\boldsymbol{E}_{m2},\boldsymbol{E}_{2n}), & \cdots, & f(\boldsymbol{E}_{m2},\boldsymbol{E}_{m1}), & \cdots, & f(\boldsymbol{E}_{m2},\boldsymbol{E}_{mn}) \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\cdots, & f(\boldsymbol{E}_{mn},\boldsymbol{E}_{2n}), & \cdots, & f(\boldsymbol{E}_{mn},\boldsymbol{E}_{m1}), & \cdots, & f(\boldsymbol{E}_{mn},\boldsymbol{E}_{mn})
\end{matrix}\right)$$

$$=\begin{pmatrix}
a_{11}\boldsymbol{E}_{n\times n} & a_{12}\boldsymbol{E}_{n\times n} & \cdots & a_{1m}\boldsymbol{E}_{n\times n} \\
a_{21}\boldsymbol{E}_{n\times n} & a_{22}\boldsymbol{E}_{n\times n} & \cdots & a_{2m}\boldsymbol{E}_{n\times n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}\boldsymbol{E}_{n\times n} & a_{m2}\boldsymbol{E}_{n\times n} & \cdots & a_{mm}\boldsymbol{E}_{n\times n}
\end{pmatrix}.$$

11. 在 P^4 中定义一个双线性函数 $f(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$，对 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$，$\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,y_3,y_4)$，$f(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=3x_1y_2-5x_2y_1+x_3y_4-4x_4y_3$.

1) 给定 P^4 的一组基

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,-2,-1,0),\boldsymbol{\varepsilon}_2=(1,-1,1,0),$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}_3=(-1,2,1,1),\boldsymbol{\varepsilon}_4=(-1,-1,0,1).$$

求 $f(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$在这组基下的度量矩阵；

2) 另取一组基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$，

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\boldsymbol{T},$$

其中

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix},$$

求 $f(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$在 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 下的度量矩阵.

解 1)

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_1) & f(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2) & f(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_3) & f(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_4) \\ f(\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_1) & f(\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_2) & f(\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3) & f(\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_4) \\ f(\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_1) & f(\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_2) & f(\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_3) & f(\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4) \\ f(\boldsymbol{\varepsilon}_4,\boldsymbol{\varepsilon}_1) & f(\boldsymbol{\varepsilon}_4,\boldsymbol{\varepsilon}_2) & f(\boldsymbol{\varepsilon}_4,\boldsymbol{\varepsilon}_3) & f(\boldsymbol{\varepsilon}_4,\boldsymbol{\varepsilon}_4) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 & -14 \\ -1 & 2 & 2 & -7 \\ 0 & -11 & 1 & 14 \\ 15 & 4 & -15 & -2 \end{pmatrix}.$$

2) $f(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$在$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\boldsymbol{T}$ 下的度量矩阵是

$$\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 & -14 \\ -1 & 2 & 2 & -7 \\ 0 & -11 & 1 & 14 \\ 15 & 4 & -15 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -6 & 46 & 8 & 24 \\ -18 & 26 & 16 & -72 \\ -2 & -38 & 0 & 0 \\ -6 & 86 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

12. 设 V 是复数域上线性空间,其维数 $n\geqslant 2$, $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$是 V 上一个对称双线性函数.

1) 证明 V 中有非零向量 $\boldsymbol{\xi}$ 使

$$f(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi})=0;$$

2) 如果 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$是非退化的,则必有线性无关的向量 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$ 满足

$$f(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=1,$$
$$f(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi})=f(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta})=0.$$

证明 1) 用定理 5 的推论 1,存在 V 的一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$,对任意 $\boldsymbol{\alpha}=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\beta}=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\boldsymbol{\varepsilon}_i$,有

$$f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=x_1y_1+\cdots+x_ry_r\quad(0\leqslant r\leqslant n).$$

故

$$f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=x_1^2+\cdots+x_r^2.$$

若 $r=0$,则任意 $\boldsymbol{\alpha}\in V$ 有 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=0$.若 $r=1$,则 $f(\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_2)=0$.若 $r\geqslant2$,有 $f(\mathrm{i}\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2,\mathrm{i}\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2)=\mathrm{i}^2+1^2=0$.

2) 若 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$非退化,则 1)中的 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$表示式成为

$$f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n.$$

由 $n\geqslant2$,取

$$\boldsymbol{\xi}=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\boldsymbol{\varepsilon}_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{\varepsilon}_2,\quad \boldsymbol{\eta}=\frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\boldsymbol{\varepsilon}_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{\varepsilon}_2,$$

则

$$f(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi})=\frac{\mathrm{i}^2}{2}+\frac{1^2}{2}=0=f(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}),$$

$$f(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=\frac{-\mathrm{i}^2}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

13. 试证:线性空间 V 上双线性函数 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$为反对称的充要条件是:对任意 $\boldsymbol{\alpha}\in V$ 都有 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=0$.

证明 充分性.任取 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$,则有

$$\begin{aligned}0&=f(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})+f(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})+f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+f(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})\\&=f(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})+f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}).\end{aligned}$$

故 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=-f(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$,即 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$为反对称.

必要性.任取 $\boldsymbol{\alpha}\in V$,由

$$f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=-f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}),$$

故 $\quad f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=0.$

14. 设 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$是 V 上对称的或反对称的双线性函数. $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 V 中两个向量,如果 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$,则称 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 正交. 再设 K 是 V 的一个真子空间,证明:对 $\boldsymbol{\xi}\notin K$,必有 $\mathbf{0}\neq\boldsymbol{\eta}\in K+L(\boldsymbol{\xi})$使

$$f(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\alpha})=0$$

对所有 $\boldsymbol{\alpha}\in K$ 都成立.

提示 按照 f 限制在 K 上是退化或非退化两种情况分别处理. 在非退化的情形可利用定理 5 和定理 6 存在 K 上适当基底使 f 在该基下的度量矩阵有"标准形状". 利用这组基的性质,可找到所需要的 $\boldsymbol{\eta}$.

证明 1) 当 f 限制到 K 上是退化的,这时有 $\boldsymbol{\eta}\in K$ 与一切 $\boldsymbol{\alpha}\in K$ 正交,显然 $\boldsymbol{\eta}\in K+L(\boldsymbol{\xi})$,满足题目要求.

2) 当 f 限制到 K 上是非退化的,而 f 在 V 上是对称的. 于是 f 限制在 K 上是对称的,非退化的双线性函数. 由定理 5,存在 K 的一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 使 f 在此基下的度量矩阵为对角阵

$$\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_t \end{pmatrix}.$$

又由 f 在 K 上非退化知 $d_1,d_2,\cdots,d_t$ 皆不为零. 这时有

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j)=\begin{cases} d_i, & i=j, \\ 0, & i\neq j, \end{cases}\quad 1\leqslant i,j\leqslant t.$$

再设 $\quad f(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\varepsilon}_i)=c_i,\quad i=1,2,\cdots,t.$

令

$$\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\xi}-\frac{c_1}{d_1}\boldsymbol{\varepsilon}_1-\frac{c_2}{d_2}\boldsymbol{\varepsilon}_2-\cdots-\frac{c_t}{d_t}\boldsymbol{\varepsilon}_t\in L(\boldsymbol{\xi})+K,$$

则任意 $\boldsymbol{\alpha}=m_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+m_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+m_t\boldsymbol{\varepsilon}_t\in K$ 都有

$$f(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\alpha})=f(\boldsymbol{\xi},m_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+m_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+m_t\boldsymbol{\varepsilon}_t)-f\left(\frac{c_1}{d_1}\boldsymbol{\varepsilon}_1+\frac{c_2}{d_2}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+\frac{c_t}{d_t}\boldsymbol{\varepsilon}_t,m_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+m_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+m_t\boldsymbol{\varepsilon}_t\right)$$

$$=m_1c_1+m_2c_2+\cdots+m_tc_t-\left(\frac{c_1}{d_1}\cdot d_1m_1+\frac{c_2}{d_2}\cdot d_2m_2+\cdots+\frac{c_t}{d_t}\cdot d_tm_t\right)$$

$$=0.$$

3) 当 f 限制在 K 上是非退化的，且 f 是反对称的，由定理 6，K 中存在一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_{-1},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_r,\boldsymbol{\varepsilon}_{-r}$ 使得

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j)=\begin{cases}1, & i+j=0,\\ 0, & i+j\neq 0,\end{cases}\quad 1\leqslant i\leqslant r,\ -r\leqslant j\leqslant r.$$

设 $f(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\varepsilon}_i)=c_i,\quad i=\pm 1,\cdots,\pm r.$ 令

$$\boldsymbol{\alpha}=\sum_{i=1}^{r}c_i\boldsymbol{\varepsilon}_{-i}-\sum_{i=-1}^{-r}c_i\boldsymbol{\varepsilon}_{-i}\in K,\quad \boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\alpha}\in L(\boldsymbol{\xi})+K.$$

则对任何 $\sum\limits_{i=-r}^{r}l_i\boldsymbol{\varepsilon}_i\in K$ 有

$$f\left(\boldsymbol{\eta},\sum_{i=-r}^{r}l_i\boldsymbol{\varepsilon}_i\right)=\sum_{i=-r}^{r}c_il_i-\sum_{i=-r}^{r}c_il_i=0.$$

15. 设 V 与 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 同上题，K 是 V 的一个子空间. 令

$$K^{\perp}=\{\boldsymbol{\alpha}\in V\mid f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0,\ \forall\,\boldsymbol{\beta}\in K\}.$$

1) 试证 $K^{\perp}$ 是 V 的子空间（$K^{\perp}$ 称为 K 的正交补）；

2) 试证，如果 $K\cap K^{\perp}=\{\mathbf{0}\}$，则 $V=K+K^{\perp}$.

证明 1) 略证.

2) 只要证 $V\subset K+K^{\perp}$. 若 $K=V$，则已得到证明. 现设 $K\neq V$. 首先由 $K\cap K^{\perp}=\{\mathbf{0}\}$ 知 f 在 K 上是非退化的. 又 K 是真子空间，由上题证明中的 2) 及 3) 知，对任意 $\boldsymbol{\xi}\in V\setminus K$，有 $\boldsymbol{\alpha}\in K$ 使 $f(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$，对所有 $\boldsymbol{\beta}\in K$ 都成立. 即 $\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\alpha}\in K^{\perp}$，于是 $\boldsymbol{\xi}\in K+K^{\perp}$. 又若 $\boldsymbol{\xi}\in K$，则显然有 $\boldsymbol{\xi}\in K+K^{\perp}$. 从而有 $V\subset K+K^{\perp}$，

故 $V=K+K^{\perp}$.

16. 设 $V, f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}), K$ 同上题，并设 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$限制在 K 上是非退化的，试证 $V=K+K^{\perp}$. 并证明 f 在$K^{\perp}$上是非退化的充分必要条件为 f 在 V 上是非退化的.

注 原书中本题有错，有反例说明命题不成立. 原题中必须添上"并证明 f 在 $K^{\perp}$ 上是非退化的"这句话.

证明 f 在 K 上非退化，即 K 中没有非零向量与 K 中所有元素都正交，也即 $K\cap K^{\perp}=\{\mathbf{0}\}$. 由 15 题 2)，可知 $V=K\oplus K^{\perp}$.

分别取 K 和$K^{\perp}$的一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_r$ 及 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 合成V 的一组基. 设 f 在K 的基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_r$ 和 f 在 $K^{\perp}$ 的基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 下的度量矩阵分别为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$. 则 f 在 V 的基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_r,\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 下的度量矩阵是

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}.$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 是非退化的，于是 $\boldsymbol{C}$ 是非退化的充要条件是 $\boldsymbol{B}$ 为非退化的. 即 f 在 V 上是非退化的充要条件为 f 在 $K^{\perp}$ 上是非退化的.

17. 设 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$是 n 维线性空间 V 上的非退化对称双线性函数，对 V 中一个元素 $\boldsymbol{\alpha}$，定义 V^* 中一个元素 $\boldsymbol{\alpha}^*$：

$$\boldsymbol{\alpha}^*(\boldsymbol{\beta})=f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),\boldsymbol{\beta}\in V.$$

试证：1) V 到 V^* 的映射

$$\boldsymbol{\alpha}\to\boldsymbol{\alpha}^*$$

是一个同构映射；

2) 对 V 的每组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$，有 V 的唯一的一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}'_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}'_n$ 使

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}'_j)=\delta_{ij};$$

3) 如果 V 是复数域上 n 维线性空间，则有一组基 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$，使

$$\boldsymbol{\eta}_i=\boldsymbol{\eta}'_i,\quad i=1,\cdots,n.$$

证明 1) 由于 f 是双线性的，$\boldsymbol{\alpha}^*$ 是 V 上线性函数即 $\boldsymbol{\alpha}^* \in V^*$. 令

$$V \xrightarrow{\varphi} V^*,$$
$$\boldsymbol{\alpha} \mapsto \boldsymbol{\alpha}^*.$$

我们证 φ 是线性映射.

令 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in V$，则

$$\varphi(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})^*,$$
$$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})^*(\boldsymbol{\gamma}) = f(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = f(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}) + f(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$$
$$= \boldsymbol{\alpha}^*(\boldsymbol{\gamma}) + \boldsymbol{\beta}^*(\boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\alpha}^* + \boldsymbol{\beta}^*)(\boldsymbol{\gamma}),$$

故 $\quad \varphi(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})^* = \boldsymbol{\alpha}^* + \boldsymbol{\beta}^* = \varphi(\boldsymbol{\alpha}) + \varphi(\boldsymbol{\beta}).$

同样地

$$\varphi(k\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\gamma}) = f(k\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}) = kf(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}) = k\varphi(\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\gamma}),$$

即有 $\varphi(k\boldsymbol{\alpha}) = k\varphi(\boldsymbol{\alpha})$. 故 φ 是 V 到 V^* 的线性映射.

由于 V 及 V^* 都是 n 维线性空间，φ 又是线性映射，若再能证 φ 是双射，它就是同构.

取 V 的一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 使 f 的度量矩阵是对角阵

$$\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix},$$

再由 f 非退化，$d_1, d_2, \cdots, d_n$ 皆不为零. 这组基在 V^* 中的对应元为 $\boldsymbol{\varepsilon}_1^*, \boldsymbol{\varepsilon}_2^*, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n^*$，于是

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i^*(\boldsymbol{\varepsilon}_j) = f(\boldsymbol{\varepsilon}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_j) = d_i\delta_{ij} = \begin{cases} d_i, & i=j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

若有 $k_1\boldsymbol{\varepsilon}_1^* + k_2\boldsymbol{\varepsilon}_2^* + \cdots + k_n\boldsymbol{\varepsilon}_n^* = \mathbf{0}$，则 $\forall\, i$，有

$$0 = (k_1\boldsymbol{\varepsilon}_1^* + k_2\boldsymbol{\varepsilon}_2^* + \cdots + k_n\boldsymbol{\varepsilon}_n^*)(\boldsymbol{\varepsilon}_i) = k_i\boldsymbol{\varepsilon}_i^*(\boldsymbol{\varepsilon}_i) = k_i d_i,$$

由 $d_i \neq 0$，得 $k_i = 0$. 即 $\boldsymbol{\varepsilon}_1^*, \boldsymbol{\varepsilon}_2^*, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n^*$ 是线性无关的，因而是 V^* 的基.

由于 $V^* = \{k_1\boldsymbol{\varepsilon}_1^* + \cdots + k_n\boldsymbol{\varepsilon}_n^* \mid k_i \in P\}$
$$= \{\varphi(k_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{\varepsilon}_n) \mid k_i \in P\}.$$
故 φ 是满射.

又若 $\varphi(k_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{\varepsilon}_n) = \mathbf{0}$,即 $k_1\boldsymbol{\varepsilon}_1^* + \cdots + k_n\boldsymbol{\varepsilon}_n^* = \mathbf{0}$.于是 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$,当然有 $k_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{\varepsilon}_n = \mathbf{0}$.这说明 φ 是单射,因而是双射.

这就证明了 φ 是线性空间 $V \longrightarrow V^*$ 的同构.

2) 对 V 的一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 令 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是它在 V^* 中的对偶基,$f_i(\boldsymbol{\varepsilon}_j) = \delta_{ij}$. 由 φ 是 V 到 V^* 的同构,令 $\boldsymbol{\varepsilon}'_1, \boldsymbol{\varepsilon}'_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}'_n \in V$ 使得 $\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}'_i) = f_i$.则
$$f(\boldsymbol{\varepsilon}_i, \boldsymbol{\varepsilon}'_j) = f(\boldsymbol{\varepsilon}'_j, \boldsymbol{\varepsilon}_i) = \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}'_j)(\boldsymbol{\varepsilon}_i) = f_j(\boldsymbol{\varepsilon}_i) = \delta_{ij}.$$
由于 φ 是同构及 $f_1, \cdots, f_n$ 是 V^* 的基,则 $\boldsymbol{\varepsilon}'_1, \boldsymbol{\varepsilon}'_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}'_n$,即 $\varphi^{-1}(f_1), \varphi^{-1}(f_2), \cdots, \varphi^{-1}(f_n)$也是 V 的基.

3) 取 V 的一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 使 f 的度量矩阵是对角矩阵
$$\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}.$$
又 f 在 V 上非退化,所有 $d_1, \cdots, d_n$ 皆不为零.由 $\forall\, i, j = 1, 2, \cdots, n$,
$$f(\boldsymbol{\varepsilon}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_j) = d_i\delta_{ij}.$$
令 $\boldsymbol{\eta}_i = \dfrac{1}{\sqrt{d_i}}\boldsymbol{\varepsilon}_i$,则
$$f(\boldsymbol{\eta}_i, \boldsymbol{\eta}_j) = \delta_{ij}.$$
这时恰好 $\boldsymbol{\eta}_i = \boldsymbol{\eta}'_i,\ i = 1, 2, \cdots, n$.

18. 设 V 是对于非退化对称双线性函数 $f(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$的 n 维准欧氏空间. V 的一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 如果满足
$$f(\boldsymbol{\varepsilon}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_i) = 1,\ i = 1, 2, \cdots, p;$$

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_i)=-1,\ i=p+1,\cdots,n;$$

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j)=0,\ i\neq j,$$

则称为 V 的一组正交基.如果 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 满足

$$f(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\beta})=f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),\quad \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V,$$

则称 $\mathscr{A}$ 为 V 的一个**准正交变换**.试证:

1) 准正交变换是可逆的,且逆变换也是准正交变换;

2) 准正交变换的乘积仍是准正交变换;

3) 准正交变换 $\mathscr{A}$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$,若满足 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\neq 0$,则其特征值等于 1 或 -1;

4) 准正交变换在正交基下的矩阵 $\boldsymbol{T}$ 满足

$$\boldsymbol{T}'\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&-1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&-1\end{pmatrix}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&-1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&-1\end{pmatrix}.$$

证明 由于实对称矩阵在实合同变换下可化成标准形:它是对角矩阵,且对角线上元素是 $1,-1,0$.现在 f 是非退化的,故它在某基下的度量矩阵有形状

$$\begin{pmatrix}1&&&&&&&\\&1&&&&&&\\&&\ddots&&&&&\\&&&1&&&&\\&&&&-1&&&\\&&&&&-1&&\\&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&-1\end{pmatrix}.$$

这时的基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_p,\boldsymbol{\varepsilon}_{p+1},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 就满足

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j)=0,\ i\neq j,$$

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_i)=1,\ i=1,2,\cdots,p,$$
$$f(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_i)=-1,\ i=p+1,\cdots,n.$$

即它是一组正交基.这证明了正交基是存在的.

1) 设 $\mathscr{A}$ 是准正交变换,则当 $i\neq j$.

$$f(\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_i,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_j)=f(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j)=0,\ f(\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_i,\ \mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_i)=1 \text{ 或 } -1.$$

设 $k_1\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1+k_2\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+k_n\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_n=\mathbf{0}$.则 $0=f(k_1\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1+\cdots+k_i\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_i+\cdots+k_n\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_n,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_i)=k_if(\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_i,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_i)=k_i$ 或 $-k_i$,故 $k_i=0,i=1,2,\cdots,n$.即 $\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性无关,因而也是 V 的一组基.线性变换 $\mathscr{A}$ 把 V 的一组基变成一组基,因此是可逆变换.

设 $\mathscr{A}$ 的逆变换为 $\mathscr{A}^{-1}$,它也是线性变换.又有

$$f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=f(\mathscr{A}(\mathscr{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}),\ \mathscr{A}(\mathscr{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}))=f(\mathscr{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}),$$

故 $\mathscr{A}^{-1}$ 也是准正交变换.

2) 设 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 皆为准正交变换,我们知道,$\mathscr{A}\mathscr{B}$ 是线性变换,又有

$$f(\mathscr{A}\mathscr{B}\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\mathscr{B}\boldsymbol{\beta})=f(\mathscr{B}\boldsymbol{\alpha},\mathscr{B}\boldsymbol{\beta})=f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}).$$

故 $\mathscr{A}\mathscr{B}$ 是准正交变换.

3) 原书的这个小题的题目有误,可见下列反例,设 V 是二维实空间,$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 为基,$f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 下的度量矩阵是

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

取 V 上线性变换 $\mathscr{A}$,它在基上的变化如下:

$$\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1=\frac{1}{k}\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2=k\boldsymbol{\varepsilon}_2,\ k\neq 0 \text{ 为任意实数}.$$

则易验证

$$f(\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_i,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_j)=f(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j),\ i,j=1,2.$$

即 $\mathscr{A}$ 是准正交变换.但这时 $\mathscr{A}$ 的特征值为$\frac{1}{k},k$,而 k 为任意实数,这小题的题目现在修改为

"准正交变换的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$,若有 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\neq 0$,则其所属的特征值必为 1 或 -1."

证明 设 $\mathscr{A}$ 为准正交变换,且设 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$ 及 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\neq 0$. 则

$$f(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha})=f(\lambda\boldsymbol{\alpha},\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda^2 f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}).$$

但还有 $f(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha})=f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})$. 故 $\lambda^2 f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})$. 又因 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\neq 0$,所以 $\lambda^2=1$,即 $\lambda=1$ 或 -1.

4) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 的正交基,即 f 在该基下的度量矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&&&&&&&\\&1&&&&&&\\&&\ddots&&&&&\\&&&1&&&&\\&&&&-1&&&\\&&&&&-1&&\\&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&-1\end{pmatrix}.$$

又设准正交变换 $\mathscr{A}$ 在该基下的矩阵为 $\boldsymbol{T}$,即

$$(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{T}.$$

于是 f 在基 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的度量矩阵为

$$\boldsymbol{T}'\begin{pmatrix}1&&&&&&&\\&1&&&&&&\\&&\ddots&&&&&\\&&&1&&&&\\&&&&-1&&&\\&&&&&-1&&\\&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&-1\end{pmatrix}\boldsymbol{T}.$$

又 $\mathscr{A}$ 是准正交变换,它在 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的度量矩阵也是

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & -1 & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & -1 \end{pmatrix},$$

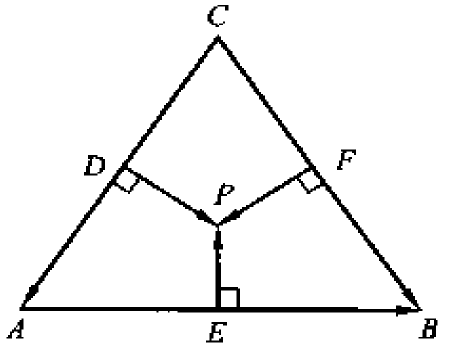
故这两个矩阵相等，即

$$\boldsymbol{T}'\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & -1 & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{T}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & -1 & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & -1 \end{pmatrix}.$$

综 合 题

1. 用向量运算证明三角形三条边的垂直平分线相交于一点.



证明 设 P 是 $\triangle ABC$ 两条边 AB 及 AC 的两条垂直平分线的交点. F 是 BC 的中点. 我们要证明 PF 垂直于 BC.

如图,已知

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{CA}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{CP})=\mathbf{0},$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EP}=\overrightarrow{AB}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP})=\mathbf{0},$$

$$\begin{aligned}2\,\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{FP}&=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{BP})\\&=\overrightarrow{CA}\cdot(\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{BP})+\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{BP})\\&=\overrightarrow{CA}\cdot(\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BA})+\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP})\\&=\overrightarrow{CA}\cdot 2\,\overrightarrow{DP}-\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\cdot 2\,\overrightarrow{EP}=0.\end{aligned}$$

故 BC 垂直于 FP.

2. 平面上圆锥曲线(椭圆、双曲线、抛物线)的一般方程为

$$a_1x^2+a_2xy+a_3y^2+a_4x+a_5y+a_6=0.$$

这方程含有 6 个待定系数. 用它们之中不为零的任意一个系数去

除其他的系数，实际上此方程只有5个独立的待定系数. 设一个圆锥曲线通过五个不同的点(x_i, y_i)，$i=1,2,\cdots,5$. 代入上式并与它合并为下列方程组

$$\begin{cases} a_1x^2+a_2xy+a_3y^2+a_4x+a_5y+a_6=0, \\ a_1x_1^2+a_2x_1y_1+a_3y_1^2+a_4x_1+a_5y_1+a_6=0, \\ a_1x_2^2+a_2x_2y_2+a_3y_2^2+a_4x_2+a_5y_2+a_6=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1x_5^2+a_2x_5y_5+a_3y_5^2+a_4x_5+a_5y_5+a_6=0. \end{cases} \quad (1)$$

任意点(x, y)在过(x_i, y_i)，$i=1,2,\cdots,5$的圆锥曲线上当且仅当方程组(1)中$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$有非零解，也当且仅当下列行列式

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

这就是所求的圆锥曲线的方程(实际上要求给定的五个点不共线).

例 求过点$(2,0)$，$(0,-1)$，$(0,0)$，$(4,-1)$与$(2,-5)$的圆锥曲线的方程.

此方程为

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ 2^2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 16 & -4 & 1 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & -10 & 25 & 2 & -5 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

$$
\text{左端}=\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 16 & -4 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & -10 & 25 & 2 & -5 \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2+y & x & y \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 16 & -4 & 0 & 4 & -1 \\ 4 & -10 & 20 & 2 & -5 \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2+y & x \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ 16 & -4 & 0 & 4 \\ 4 & -10 & 20 & 2 \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} x^2-2x & xy & y^2+y & x \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 8 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & -10 & 20 & 2 \end{vmatrix}
$$

$$
=2\begin{vmatrix} x^2-2x & xy & y^2+y \\ 8 & -4 & 0 \\ 0 & -10 & 20 \end{vmatrix}
$$

$$
=2\begin{vmatrix} x^2-2x & xy & y^2+y+2xy \\ 8 & -4 & -8 \\ 0 & -10 & 0 \end{vmatrix}
$$

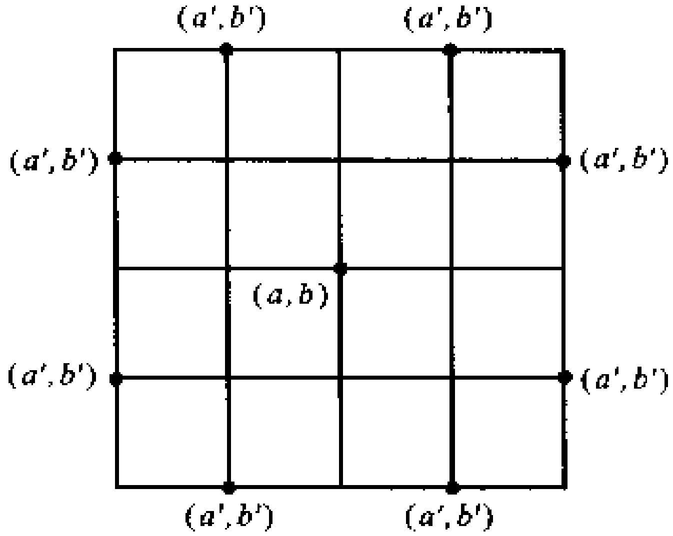
$$
=20\begin{vmatrix} x^2-2x & y^2+y+2xy \\ 8 & -8 \end{vmatrix}
$$

$$
=-160(x^2-2x+y^2+2xy+y)=0,
$$

故方程为

$$(x+y)^2-2x+y=0.$$

3. 中国象棋中的马从某一点起跳，经过若干步跳回起跳点．试证它共跳了偶数步．



证明 在棋盘上取直角坐标系，以起跳点为原点，棋盘的横向为 x 轴方向，纵向为 y 轴方向，棋盘格子的长度为单位长．马从任一点 (a,b) 起跳，若跳到 (a',b') 点，最多有图上的八个可能的位置．在八个可能的位置上都有性质 $(a'-a)+(b'-b)=$ 奇数．因此若从原点 (a_0,b_0) 出发，跳了 r 步，经 $(a_1,b_1),(a_2,b_2),\cdots,(a_r,b_r)$ 跳回了原处，即 $(a_r,b_r)=(a_0,b_0)=(0,0)$．每一个值 $(a_i-a_{i-1})+(b_i-b_{i-1})$ 都是奇数，并且

$$0=(a_r-a_0)+(b_r-b_0)=\sum_{i=1}^{r}[(a_i-a_{i-1})+(b_i-b_{i-1})].$$

由于奇数个奇数的和不能为零，故 r 为偶数．

4. 设 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 为 n 维线性空间 V 中的线性相关的向量组，但其中任意 $m-1$ 个向量皆线性无关．设有 m 个数 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 使 $\sum_{j=1}^{m}b_j\boldsymbol{\beta}_j=\mathbf{0}$，则或者 $b_1=b_2=\cdots=b_m=0$，或者 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 皆不为零．在后者的情形，若另有一组数 $c_1,c_2,\cdots,c_m$ 使

$\sum_{j=1}^{m} c_j\boldsymbol{\beta}_j=\mathbf{0}$,则 $c_1:b_1=c_2:b_2=\cdots=c_m:b_m$.

证明 对 $\sum_{j=1}^{m} b_j\boldsymbol{\beta}_j=\mathbf{0}$,若有某 $b_j\neq 0$,不妨设 $b_1\neq 0$.则

$$\boldsymbol{\beta}_1=\sum_{j=2}^{m}\left(-\frac{b_j}{b_1}\right)\boldsymbol{\beta}_j.$$

由于 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 中任意 $m-1$ 个向量线性无关,$\boldsymbol{\beta}_1$ 不能被 $\boldsymbol{\beta}_2$,$\boldsymbol{\beta}_3,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 中任意 $m-2$ 个向量线性表出,故 $b_2,b_3,\cdots,b_m$ 皆不为零.

若又有 $\sum_{j=1}^{m} c_j\boldsymbol{\beta}_j=\mathbf{0}$.因 $b_1\neq 0$,设 $c_1=kb_1$,则

$$\sum_{j=1}^{m} c_j\boldsymbol{\beta}_j-k\sum_{j=1}^{m} b_j\boldsymbol{\beta}_j=\sum_{j=1}^{m}(c_j-kb_j)\boldsymbol{\beta}_j=\mathbf{0}.$$

由于 $\boldsymbol{\beta}_1$ 的系数 $c_1-kb_1=0$.由第一段的论证得所有 $c_j-kb_j=0$,$j=1,2,\cdots,m$.即

$$c_1:b_1=c_2:b_2=\cdots=c_m:b_m=k.$$

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为欧氏空间 V 中的一个非零向量,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p$ 是 V 中 p 个向量满足

$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)\leqslant 0$,且$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha})>0$, $i,j=1,2,\cdots,p$; $i\neq j$.

证明:1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p$ 线性无关;

2) n 维欧氏空间中最多有 $n+1$ 个向量,使其两两夹角都大于$\frac{\pi}{2}$.

证明 1) 反证法.设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p$ 线性相关.不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_p$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{p-1}$ 的线性组合,即有实数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{p-1}$ 使 $\boldsymbol{\alpha}_p=\sum_{i=1}^{p-1}\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i$.将这关系式改写成

$$\boldsymbol{\alpha}_p=\sum{}'\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i+\sum{}''\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i,$$

将其中具有正系数 λ_i 的项归入$\sum'$中,具有负系数 λ_i 的项归在$\sum''$

下. 且令

$$\boldsymbol{\beta}=\sum{}'\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i,\quad \boldsymbol{\gamma}=\sum{}''\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i.$$

于是 $\boldsymbol{\alpha}_p=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}$. 因 $(\boldsymbol{\alpha}_p,\boldsymbol{\alpha})>0$ 及 $(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha})=\sum{}''\lambda_i(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha})\leqslant 0$, 故 $\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$. 但 $(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=\sum\limits_i{}'\sum\limits_j{}''\lambda_i\lambda_j(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)\geqslant 0$. 因此

$$(\boldsymbol{\alpha}_p,\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})>0.$$

另一方面

$$(\boldsymbol{\alpha}_p,\boldsymbol{\beta})=\sum_i{}'\lambda_i(\boldsymbol{\alpha}_p,\boldsymbol{\alpha}_i)\leqslant 0.$$

这个矛盾证明了所要的结论.

2) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\in V$, 它们两两成钝角, 于是有

$$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)<0,\quad i,j=1,2,\cdots,m;\ i\neq j.$$

取 $\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}_m$, 则 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 符合第 1) 小题的假设条件, 故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性无关. 又 V 是 n 维的, 有 $m-1\leqslant n$. 于是 $m\leqslant n+1$.

6. (替换定理). 设向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$ 线性无关, 且可经向量组 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$ 线性表出, 则 $r\leqslant s$. 且在 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$ 中存在 r 个向量, 不妨设就是 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$, 在用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 替代它们后所得的向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$ 与 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$ 等价.

证明 我们对 r 作归纳法, $r=1$ 时 $\{\boldsymbol{\alpha}_1\}$ 线性无关. 这时 $r=1\leqslant s$. $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出, 设为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=b_1\boldsymbol{\beta}_1+b_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+b_s\boldsymbol{\beta}_s.$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\mathbf{0}$, 至少一个 $b_j\neq 0$. 不妨设为 $b_1\neq 0$, 则

$$\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{b_1}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{b_2}{b_1}\boldsymbol{\beta}_2-\cdots-\frac{b_s}{b_1}\boldsymbol{\beta}_s.$$

由此易知 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$ 与 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$ 等价.

现设 $r>1$, 且定理对 $r-1$ 的情形已成立. 我们来讨论 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 为 r 个无关的向量的情形. 这时 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1}$ 无关, 且能

由 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出.由归纳假设 $r-1\leqslant s$,且存在 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 中的 $r-1$ 个向量,不妨设为 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r-1}$,在用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1}$ 替代后所得的向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1},\boldsymbol{\beta}_r,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$,与 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$ 等价.

又 $\boldsymbol{\alpha}_r$ 能由 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$ 线性表出,就能由 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1},\boldsymbol{\beta}_r,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$ 线性表出,设

$$\boldsymbol{\alpha}_r=\sum_{i=1}^{r-1}a_i\boldsymbol{\alpha}_i+\sum_{j=r}^{s}b_j\boldsymbol{\beta}_j.$$

这时若所有 $b_j=0$,则 $\boldsymbol{\alpha}_r$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1}$ 的线性组合,与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关矛盾.故 $b_r,\cdots,b_s$ 不全为零,不妨设 $b_r\neq 0$,则 $r\leqslant s$ 且

$$\boldsymbol{\beta}_r=\frac{1}{b_r}\boldsymbol{\alpha}_r-\sum_{i=1}^{r-1}\frac{a_i}{b_r}\boldsymbol{\alpha}_i-\sum_{j=r+1}^{s}b_j\boldsymbol{\beta}_j.$$

由此易知 $\{\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1},\boldsymbol{\beta}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$ 与 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1},\boldsymbol{\beta}_r,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$ 等价也就与 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$ 等价.这就完成了归纳法.

7. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个互不相同的整数,证明

$$f(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)^2+1$$

在 $\mathbf{Q}[x]$ 内不可约.

证明 $f(x)\in\mathbf{Z}[x]$,它在 $\mathbf{Q}[x]$ 中不可约等价于它在 $\mathbf{Z}[x]$ 中不能分解为两个较低次数的多项式的乘积.用反证法.设 $f(x)=g(x)h(x)$, $g(x),h(x)\in\mathbf{Z}[x]$, $0<\deg g(x)<\deg f(x)$,此时 $g(a_i)h(a_i)=1$.故 $g(a_i),h(a_i)$ 同为 1 或 -1.

$f(x)$ 显然没有实根,故 $g(x),h(x)$ 也没有实根.由数学分析知道函数 $g(x)$ 与 $h(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内不变号.于是对一切 i, $g(a_i)$ 与 $h(a_i)$ 都等于 1 或都等于 -1.

若 $g(a_i)=h(a_i)=1\quad(i=1,2,\cdots,n)$.则 $g(x)-1$ 与 $h(x)-1$ 都有 n 个不同的根 $a_1,a_2,\cdots,a_n$.因而它们的次数都 $\geqslant n$.但 $\deg g(x)+\deg h(x)=2n$.故 $\deg g(x)=\deg h(x)=n$.又 $f(x)$ 的首项系数为 1, $g(x),h(x)$ 皆为整系数及 $f(x)=$

$g(x)h(x)$,故 $g(x)$及 $h(x)$的首项皆为 1.于是

$$g(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)+1=h(x),$$

而有

$$f(x)=g(x)h(x)=\left(\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)+1\right)^2 \neq \prod_{i=1}^{n}(x-a_i)^2+1$$
$$=f(x).$$

得到矛盾.

若 $g(a_i)=h(a_i)=-1,\ i=1,2,\cdots,n$,同样能导出矛盾.

故 $f(x)$不能有如上的分解,因此在 $\mathbf{Q}[x]$中也不可约.

8. 设 3 次多项式

$$f(x)=\begin{vmatrix} x^3 & x^2 & x & 1 \\ a & b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \end{vmatrix}$$

能被 $x-1$ 整除.

1) 求 a,b;

2) 问 $x-1$ 是 $f(x)$的几重因式.

解 1) 因为$(x-1)\mid f(x)$,所以 $f(1)=0$,即

$$f(1)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \end{vmatrix}=0,$$

计算行列式得

$$f(1)=(b-1)^2(b-a)$$

因此 $b=a$ 或$b=1$.

另一方面,因为 $f(x)$是一个 3 次多项式,所以其 3 次项系数不为 0.即

$$\begin{vmatrix} b & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} = (b-1)^2(b+2) \neq 0,$$

所以 $b \neq 1, -2$.

综上,得 $a = b \neq 1, -2$.

2)

$$f'(x) = \begin{vmatrix} 3x^2 & 2x & 1 & 0 \\ a & b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \end{vmatrix},$$

其中 $a = b$,所以

$$f'(1) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ b & b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \end{vmatrix}$$

$$= (b-1)^2(b+2) \neq 0,$$

所以 $x-1$ 是 $f(x)$ 的单因式.

9. 计算 n 级行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}.$$

解 记

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{vmatrix} = D.$$

用 $1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{n-1}$ 表示 n 个不同的 n 次单位根,令

$$D_1=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&\varepsilon_1&\varepsilon_2&\cdots&\varepsilon_{n-1}\\1&\varepsilon_1^2&\varepsilon_2^2&\cdots&\varepsilon_{n-1}^2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&\varepsilon_1^{n-1}&\varepsilon_2^{n-1}&\cdots&\varepsilon_{n-1}^{n-1}\end{vmatrix},$$

则应用乘法规则

$$D\cdot D_1=\begin{vmatrix}a_1+a_2+\cdots+a_n & a_1+a_2\varepsilon_1+\cdots+a_n\varepsilon_1^{n-1} & \cdots & a_1+a_2\varepsilon_{n-1}+\cdots+a_n\varepsilon_{n-1}^{n-1}\\ a_1+a_2+\cdots+a_n & a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_1^2+\cdots+a_n & \cdots & a_1\varepsilon_{n-1}+a_2\varepsilon_{n-1}^2+\cdots+a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1+a_2+\cdots+a_n & a_1\varepsilon_1^{n-1}+a_2+a_3\varepsilon_1+\cdots+a_n\varepsilon_1^{n-2} & \cdots & a_1\varepsilon_{n-1}^{n-1}+a_2+\cdots+a_n\varepsilon_{n-1}^{n-2}\end{vmatrix}.$$

因为 $\varepsilon_i^n=1\quad i=1,2,\cdots,n-1$. 所以上式可改写为

$$D\cdot D_1=\begin{vmatrix}a_1+a_2+\cdots+a_n & a_1+a_2\varepsilon_1+\cdots+a_n\varepsilon_1^{n-1} & \cdots & a_1+a_2\varepsilon_{n-1}+\cdots+a_n\varepsilon_{n-1}^{n-1}\\ a_1+a_2+\cdots+a_n & \varepsilon_1(a_1+a_2\varepsilon_1+\cdots+a_n\varepsilon_1^{n-1}) & \cdots & \varepsilon_{n-1}(a_1+a_2\varepsilon_{n-1}+\cdots+a_n\varepsilon_{n-1}^{n-1})\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1+a_2+\cdots+a_n & \varepsilon_1^{n-1}(a_1+a_2\varepsilon_1+\cdots+a_n\varepsilon_1^{n-1}) & \cdots & \varepsilon_{n-1}^{n-1}(a_1+a_2\varepsilon_{n-1}+\cdots+a_n\varepsilon_{n-1}^{n-1})\end{vmatrix}.$$

$$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)(a_1+a_2\varepsilon_1+\cdots+a_n\varepsilon_1^{n-1})\cdots(a_1+a_2\varepsilon_{n-1}+\cdots+a_n\varepsilon_{n-1}^{n-1})D_1.$$

D_1 是一个范德蒙德行列式. 由于 $1,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1}$ 各不相同，所以 $D_1\neq0$，于是得

$$D=\prod_{i=0}^{n-1}(a_1+a_2\varepsilon_i+\cdots+a_n\varepsilon_i^{n-1})\quad（其中\ \varepsilon_0=1）.$$

注　这个题目说明行列式乘法规则的一个应用.

10. 解线性方程组

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_i-c_k}\cdot x_k=1,\quad i=1,2,\cdots,n,$$

其中 $b_1,\cdots,b_n,\ c_1,\cdots,c_n$ 为各不相同之数.

提示　这个题目可以用很多种方法来做,例如:克拉默法则,消元法,甚至把解"看"出来以后,可以用直接代入法或数学归纳法来证明它确实是解,每种方法都是一种很好的训练,下面只给出一种解法,希望读者能找出更为简单的解法.

解　用初等变换将增广矩阵化简:

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}\frac{1}{b_1-c_1}&\frac{1}{b_1-c_2}&\cdots&\frac{1}{b_1-c_n}&1\\\frac{1}{b_2-c_1}&\frac{1}{b_2-c_2}&\cdots&\frac{1}{b_2-c_n}&1\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\\frac{1}{b_n-c_1}&\frac{1}{b_n-c_2}&\cdots&\frac{1}{b_n-c_n}&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&\frac{b_1-c_1}{b_1-c_2}&\cdots&\frac{b_1-c_1}{b_1-c_n}&b_1-c_1\\1&\frac{b_2-c_1}{b_2-c_2}&\cdots&\frac{b_2-c_1}{b_2-c_n}&b_2-c_1\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&\frac{b_n-c_1}{b_n-c_2}&\cdots&\frac{b_n-c_1}{b_n-c_n}&b_n-c_1\end{pmatrix}$$

$$
\rightarrow \begin{pmatrix}
1 & \dfrac{b_1 - c_1}{b_1 - c_2} & \dfrac{b_1 - c_1}{b_1 - c_3} & \cdots & \dfrac{b_1 - c_1}{b_1 - c_n} & b_1 - c_1 \\
0 & \dfrac{(b_2 - b_1)(c_1 - c_2)}{(b_1 - c_2)(b_2 - c_2)} & \dfrac{(b_2 - b_1)(c_1 - c_3)}{(b_1 - c_3)(b_2 - c_3)} & \cdots & \dfrac{(b_2 - b_1)(c_1 - c_n)}{(b_1 - c_n)(b_2 - c_n)} & b_2 - b_1 \\
0 & \dfrac{(b_3 - b_1)(c_1 - c_2)}{(b_1 - c_2)(b_3 - c_2)} & \dfrac{(b_3 - b_1)(c_1 - c_3)}{(b_1 - c_3)(b_3 - c_3)} & \cdots & \dfrac{(b_3 - b_1)(c_1 - c_n)}{(b_1 - c_n)(b_3 - c_n)} & b_3 - b_1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \dfrac{(b_n - b_1)(c_1 - c_2)}{(b_1 - c_2)(b_n - c_2)} & \dfrac{(b_n - b_1)(c_1 - c_n)}{(b_1 - c_3)(b_n - c_3)} & \cdots & \dfrac{(b_n - b_1)(c_1 - c_n)}{(b_1 - c_n)(b_n - c_n)} & b_n - b_1
\end{pmatrix}
$$

$$
\rightarrow \left(\begin{array}{ccc}
1 & \dfrac{1}{b_1 - c_2} & \dfrac{1}{b_1 - c_3} \\
0 & \dfrac{c_1 - c_2}{(b_1 - c_2)(b_2 - c_2)} & \dfrac{c_1 - c_3}{(b_1 - c_3)(b_2 - c_3)} \\
0 & \dfrac{c_1 - c_2}{(b_1 - c_2)(b_3 - c_2)} & \dfrac{c_1 - c_3}{(b_1 - c_3)(b_3 - c_3)} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \dfrac{c_1 - c_2}{(b_1 - c_2)(b_n - c_2)} & \dfrac{c_1 - c_3}{(b_1 - c_3)(b_n - c_3)}
\end{array}\right.
$$

$$
\begin{matrix}
\cdots & \dfrac{1}{b_1 - c_n} & 1 \\
\cdots & \dfrac{c_1 - c_n}{(b_1 - c_n)(b_2 - c_n)} & 1 \\
\cdots & \dfrac{c_1 - c_n}{(b_1 - c_n)(b_3 - c_n)} & 1 \\
 & \vdots & \vdots \\
\cdots & \dfrac{c_1 - c_n}{(b_1 - c_n)(b_n - c_n)} & 1
\end{matrix}\right)
$$

写出同解方程组后,作变换

$$
\begin{cases}
x_1 = y_1, \\
\dfrac{c_1 - c_2}{b_1 - c_2} x_2 = y_2, \\
\dfrac{c_1 - c_3}{b_1 - c_3} x_3 = y_3, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dfrac{c_1 - c_n}{b_1 - c_n} x_n = y_n,
\end{cases}
$$

代人后,其中第 2—n 个方程成为

$$
\boldsymbol{A}_1 \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},
$$

系数矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 为

$$A_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{b_2-c_2} & \frac{1}{b_2-c_3} & \cdots & \frac{1}{b_2-c_n}\\ \frac{1}{b_3-c_2} & \frac{1}{b_3-c_3} & \cdots & \frac{1}{b_3-c_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{1}{b_n-c_2} & \frac{1}{b_n-c_3} & \cdots & \frac{1}{b_n-c_n}\end{pmatrix},$$

对 $\boldsymbol{A}_1$ 作与 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 类似的初等变换，并作类似的未知量变换，如此继续，最后得

$$\begin{aligned}x_n&=\frac{b_1-c_n}{c_1-c_n}y_n=\frac{(b_1-c_n)(b_2-c_n)}{(c_1-c_n)(c_2-c_n)}z_n=\cdots\\&=\frac{(b_1-c_n)(b_2-c_n)\cdots(b_n-c_n)}{(c_1-c_n)(c_2-c_n)\cdots(c_{n-1}-c_n)}\\&=\prod_{i=1,2,\cdots,n}(b_i-c_n)\Big/\prod_{i=1,2,\cdots,n-1}(c_i-c_n).\end{aligned}$$

根据未知量之间的对称性，可得解为

$$x_k=\prod_{i=1,2,\cdots,n}(b_i-c_k)\Big/\prod_{\substack{i=1,2,\cdots,n\\ i\neq k}}(c_i-c_k),\ k=1,2,\cdots,n.$$

11. 设 $f(x)=a_n+a_{n-1}x+\cdots+a_0x^n$ 是复系数多项式，其中 $a_0\neq0$ 及 $n\geqslant1$. 令

$$A=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_n|\},$$

则对于 $f(x)$ 的任一复根 α 有 $|\alpha|<1+A/|a_0|$.

证明 如 $A=0$，则 $f(x)=a_0x^n$，故 $\alpha=0$. 命题成立. 下面设 $A>0$. 由 $f(\alpha)=0$，得

$$\begin{aligned}|a_0\alpha^n|&=|a_1\alpha^{n-1}+\cdots+a_n|\leqslant|a_1||\alpha|^{n-1}+\cdots+|a_n|\\&\leqslant A(|\alpha|^{n-1}+|\alpha|^{n-2}+\cdots+1).\end{aligned}$$

对 $|\alpha|=1$，命题已经成立，若 $|\alpha|\neq1$，则

$$|a_0\alpha^n|\leqslant A(|\alpha|^{n-1}+|\alpha|^{n-2}+\cdots+1)=A(|\alpha|^n-1)/|\alpha|-1,$$

故有

$$|a|-1\leqslant\frac{A}{|a_0|}\left(1-\frac{1}{|a|^n}\right)<\frac{A}{|a_0|},$$

也得到

$$|a|<1+\frac{A}{|a_0|}.$$

至此命题得证.

12. $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times m$ 矩阵. 对 $p\leqslant\min(n,m)$记

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}i_1\,i_2\cdots i_p\\ j_1\,j_2\cdots j_p\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_p}\\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_p}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i_pj_1} & a_{i_pj_2} & \cdots & a_{i_pj_p}\end{vmatrix},$$

其中 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n$, $1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_p\leqslant m$.

试证下述 Binet - Cauchy 公式:设 $\boldsymbol{A}$ 为 $p\times q$ 阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $q\times p$ 阵,则

$$|\boldsymbol{AB}|=\begin{cases}0, & p>q,\\ \displaystyle\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant q}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\ 2\ \cdots\ p\\ i_1\,i_2\cdots i_p\end{pmatrix}\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}i_1\,i_2\cdots i_p\\ 1\ 2\ \cdots\ p\end{pmatrix}, & q\geqslant p\end{cases}$$

证明 易知

$$|\boldsymbol{AB}|=\begin{vmatrix}\boldsymbol{E}_{q\times q} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{AB}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{E}_{q\times q} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}_{pp}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\boldsymbol{E}_{q\times q} & \boldsymbol{B}\\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{E}_{q\times q} & \boldsymbol{B}\\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\end{vmatrix}\tag{1}$$

当 $p>q$ 时,把(1)的右端按最后 p 列展开,则在它的 $q+p$ 行中任取 p 行所组成的 p 阶子式中至少有 $p-q$ 个行是零向量. 由 Laplace 定理知这个行列式为零. 这就证明了第一种情形.

当 $q\geqslant p$ 时,仍将(1)的右端按最后 p 列展开. 则 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 中不为零的 p 阶子式最多有 C_q^p 个. 而其中任意一个都是某个子式

$\boldsymbol{B}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_p \\ 1 & 2 & \cdots & p \end{pmatrix}$，$1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_p\leqslant q$. 若能证明它在这个 $p+q$ 阶行列式中的代数余子式恰好是 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_p \end{pmatrix}$，则由 Laplace 定理就可证明第二种情形.

先求出特殊的子式 $\boldsymbol{B}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ 1 & 2 & \cdots & p \end{pmatrix}$ 的代数余子式. 把(1)的右端行列式作如下分块

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{E}_{q\times q} & \boldsymbol{B} \\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = \begin{array}{c|ccc|} & p & q-p & p \\ p & \boldsymbol{E}_{p\times p} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_1 \\ q-p & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_{(q-p)\times(q-p)} & \boldsymbol{B}_2 \\ p & -\boldsymbol{A}_1 & -\boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{O} \end{array},$$

其中

$$|\boldsymbol{B}_1| = \boldsymbol{B}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ 1 & 2 & \cdots & p \end{pmatrix}, \quad |\boldsymbol{A}_1| = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ 1 & 2 & \cdots & p \end{pmatrix}.$$

可看出 $|\boldsymbol{B}_1|$ 的代数余子式是

$$(-1)^{\sum\limits_{k=1}^{p}(k+(q+k))}\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_{q-p} \\ -\boldsymbol{A}_1 & -\boldsymbol{A}_2 \end{vmatrix} = (-1)^{pq+p(p+1)}\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_{q-p} \\ -\boldsymbol{A}_1 & -\boldsymbol{A}_2 \end{vmatrix}.$$

由于 $p(p+1)$ 是偶数，$(-1)^{p(p+1)}=1$. 把上面行列式按最前面 p 个列展开，得

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_{q-p} \\ -\boldsymbol{A}_1 & -\boldsymbol{A}_2 \end{vmatrix} = (-1)^{\sum\limits_{k=1}^{q-p}(k+p+k)}\,|-\boldsymbol{A}_1|\,|\boldsymbol{E}_{q-p}| = (-1)^{pq}\,|\boldsymbol{A}_1|.$$

结果 $|\boldsymbol{B}_1| = \boldsymbol{B}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ 1 & 2 & \cdots & p \end{pmatrix}$ 的代数余子式是

$$(-1)^{pq}(-1)^{pq}|\boldsymbol{A}_1| = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ 1 & 2 & \cdots & p \end{pmatrix}.$$

再来求任一 p 阶子式 $B\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_p \\ 1 & 2 & \cdots & p \end{pmatrix}$ 的代数余子式. 把(1)的右端行列式

$$\begin{vmatrix} E_q & B \\ -A & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_p & O & B_1 \\ O & E_{q-p} & B_2 \\ -A_1 & -A_2 & O \end{vmatrix}$$

中的前 q 行的子矩阵中第 $j_1, j_2, \cdots, j_p$ 行依次与第 1 行,第 2 行,…,第 p 行对换. 这样变换后上面行列式中的子式 $|B_1|$ 就变成了 $B\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_p \\ 1 & 2 & \cdots & p \end{pmatrix}$. 将变换后的行列式的前 q 列的子矩阵中的第 $j_1, j_2, \cdots, j_p$ 列对换到第 1 列,第 2 列,…,第 p 列. 变换后,子式 $|-A_1|$ 变成了 $(-A)\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_p \end{pmatrix}$,原行列式变成如下的分块形状,

$$\begin{vmatrix} E_p & O & B_3 \\ O & E_{q-p} & B_4 \\ -A_3 & -A_4 & O \end{vmatrix},$$

它的值与原行列式保持相等. 且其中

$$|B_3| = B\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_p \\ 1 & 2 & \cdots & p \end{pmatrix}, \quad |A_3| = A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_p \end{pmatrix}.$$

这就化到了前面的特殊情形. 这个行列式也等于原来行列式,它的子式 $|B_3| = B\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_p \\ 1 & 2 & \cdots & p \end{pmatrix}$ 的代数余子式正是 $|A_3| = A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_p \end{pmatrix}$.

以上就完成了第 2 种情形的证明.

13. 设 A, B, C 是 $n\times n$ 方阵, $D = E_n + BCA$. 试证

$C(E-AB) = (E-AB)C = E \Rightarrow (E-BA)D = D(E-BA) = E$.

并计算 $E + ADB = ?$

证明 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA})\boldsymbol{D}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{BCA})=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{BCA}-\boldsymbol{BABCA}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，又 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA})=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{BCA})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA})=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{BCA}-\boldsymbol{BCABA}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{BC}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$.

又由 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}$，得 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{CAB}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{C}$. 则 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{ADB}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{BCA})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{ABCAB}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{CAB})=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{C}$，故 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{ADB}=\boldsymbol{C}$.

14. 设数域 P 上 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{F}$ 的特征多项式为 $f(x)$ 及 $g(x)=\prod\limits_{i=1}^{m}(x-a_i)$，则 $|g(\boldsymbol{F})|=(-1)^{mn}\prod\limits_{i=1}^{m}f(a_i)$. 从而对数域 P 上多项式 $G(x)$，$\deg G(x)\geqslant 1$ 有 $(G(x),f(x))=1$ 当且仅当 $|G(\boldsymbol{F})|\neq 0$.

证明 $\boldsymbol{F}$ 的特征多项式为 $f(x)=|x\boldsymbol{E}-\boldsymbol{F}|$. 于是 $f(a_i)=|a_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{F}|$，$i=1,2,\cdots,m$，

由 $g(\boldsymbol{F})=\prod\limits_{i=1}^{m}(\boldsymbol{F}-a_i\boldsymbol{E})$，$|g(\boldsymbol{F})|=\prod\limits_{i=1}^{m}|\boldsymbol{F}-a_i\boldsymbol{E}|=\prod\limits_{i=1}^{m}(-1)^n|a_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{F}|$，故 $|g(\boldsymbol{F})|=(-1)^{mn}\prod\limits_{i=1}^{m}f(a_i)$.

对数域 P 上非常数多项式 $G(x)$. $(G(x),f(x))=1$ 当且仅当它们在复数域上没有公共根.

设在复数域上 $G(x)=k(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_m)$，$k\in P$，则 $G(x)$ 与 $f(x)$ 有公共根当且仅当有某 a_i 使 $f(a_i)\neq 0$. 故

$$(G(x),f(x))=1\ \text{当且仅当}\ |g(\boldsymbol{F})|\neq 0.$$

15. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 非零方阵，则有正整数 $k\leqslant n$，秩$(\boldsymbol{A}^k)=$秩$(\boldsymbol{A}^{k+1})=$秩$(\boldsymbol{A}^{k+2})$.

证明 由于 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A},\cdots,\boldsymbol{A}^{l+1}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^l,\cdots$，故有

$$\text{秩}(\boldsymbol{A})\geqslant\text{秩}(\boldsymbol{A}^2)\geqslant\cdots\geqslant\text{秩}(\boldsymbol{A}^l)\geqslant\text{秩}(\boldsymbol{A}^{l+1})\geqslant\cdots.$$

如果秩$(\boldsymbol{A})=n$，即 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则秩$(\boldsymbol{A})=$秩$(\boldsymbol{A}^2)=\cdots=$秩$(\boldsymbol{A}^l)=\cdots$，这时 $k=1\leqslant n$，如果秩$(\boldsymbol{A})<n$，由 $n-1\geqslant$秩$(\boldsymbol{A})\geqslant$秩$(\boldsymbol{A}^2)$

$\geqslant\cdots\geqslant$秩$(\boldsymbol{A}^n)\geqslant$秩$(\boldsymbol{A}^{n+1})\geqslant 0$，则{秩$(\boldsymbol{A}^i)-$秩$(\boldsymbol{A}^{i+1})$，$i=1,2,\cdots,n$}中不能全不为零，否则每个秩$(\boldsymbol{A}^i)-$秩$(\boldsymbol{A}^{i+1})\geqslant 1$，就有$\sum_{i=1}^{n}$(秩$(\boldsymbol{A}^i)-$秩$(\boldsymbol{A}^{i+1})$)$=$秩$(\boldsymbol{A})-$秩$(\boldsymbol{A}^{n+1})\geqslant n$. 因而秩$(\boldsymbol{A})\geqslant n$，与所设秩$(\boldsymbol{A})<n$矛盾. 于是有$k\leqslant n$使秩$(\boldsymbol{A}^k)=$秩$(\boldsymbol{A}^{k+1})$.

下面证明对任何l若秩$(\boldsymbol{A}^l)=$秩$(\boldsymbol{A}^{l+1})$，则秩$(\boldsymbol{A}^{l+1})=$秩$(\boldsymbol{A}^{l+2})$. 于是依次取$l=k,k+1,k+2$，就得到秩$(\boldsymbol{A}^k)=$秩$(\boldsymbol{A}^{k+1})=$秩$(\boldsymbol{A}^{k+2})=\cdots$.

现设秩$(\boldsymbol{A}^l)=$秩$(\boldsymbol{A}^{l+1})$. 考虑齐次方程组

$$\boldsymbol{A}^l\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0} \tag{1}$$

和

$$\boldsymbol{A}^{l+1}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}, \tag{2}$$

显然(1)的解是(2)的解. 又秩$(\boldsymbol{A}^l)=$秩$(\boldsymbol{A}^{l+1})$，(1)(2)的基础解系中有相同数目的解，于是(1)的基础解系也是(2)的基础解系，于是(1)与(2)同解.

再考虑齐次方程组

$$\boldsymbol{A}^{l+2}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}, \tag{3}$$

显然(2)的解是(3)的解. 对(3)的任一解$\boldsymbol{X}_0$，有

$$\boldsymbol{A}^{l+1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0)=\boldsymbol{0},$$

即$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0$是(2)的解，因此是(1)的解，于是$\boldsymbol{A}^l(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0)=\boldsymbol{0}$，因而$\boldsymbol{X}_0$是(2)的解，这证明了齐次方程组(2)与(3)是同解的，它们的系数矩阵必有相同的秩，即秩$(\boldsymbol{A}^{l+1})=$秩$(\boldsymbol{A}^{l+2})$，完成了证明.

16. 设$n\times n$矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$的下面$n-1$个顺序主子式$|\boldsymbol{A}_1|=|a_{11}|$，$|\boldsymbol{A}_2|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，$\cdots$，$|\boldsymbol{A}_{n-1}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$

皆不为零，则有下列分解

$$A = LDM,$$

其中 M, L 是适当的上、下三角可逆矩阵，而 D 是对角阵.

证明 对 n 作归纳法. $n=1$ 时结论是显然的，设 $n-1$ 时结论已经成立，来证 n 时结论成立.

写 A 为如下的分块形式

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \beta \\ \alpha & a_{nn} \end{pmatrix},$$

其中 α 为 $1\times(n-1)$阵，β 为$(n-1)\times 1$ 阵. 回忆分块矩阵的初等变换的性质，可作出下述第一步化简

$$\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ -\alpha A_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} & \beta \\ \alpha & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{n-1} & \beta \\ 0 & a_{nn} - \alpha A_{n-1}^{-1}\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & a_{nn} - \alpha A_{n-1}^{-1}\beta \end{pmatrix}.$$

由归纳假设，有 M_1, L_1 分别是上，下三角可逆阵使 $L_1 D_1 M_1 = A_{n-1}$，其中 D_1 为对角阵. 令 $P_1 = L_1^{-1}, Q_1 = M_1^{-1}$，它们仍是下，上三角可逆阵，满足 $P_1 A_{n-1} Q_1 = D_1$. 于是有

$$\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & Q_{nn} - \alpha A_{n-1}^{-1}\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & a_{nn} - \alpha A_{n-1}^{-1}\beta \end{pmatrix} = D$$

已是对角形. 这时

$$\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ -\alpha A_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

仍是下，上三角可逆阵. 令它们的逆分别是 L, M，也分别是下，上三角可逆阵. 这时有

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LDM},$$

是所要的分解.

17. 设 $n\times n$ 方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 皆为实对称阵,且 $\boldsymbol{A}$ 为正定阵,则有实可逆阵 $\boldsymbol{C}$ 使 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{AC}$ 及 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{BC}$ 同时为对角阵.

证明 由于 $\boldsymbol{A}$ 正定,有实可逆阵 $\boldsymbol{C}_1$ 使 $\boldsymbol{C}_1'\boldsymbol{AC}_1=\boldsymbol{E}$.这时 $\boldsymbol{C}_1'\boldsymbol{BC}_1$ 仍为实对称,则有正交阵 $\boldsymbol{C}_2$ 使 $\boldsymbol{C}_2'\boldsymbol{C}_1'\boldsymbol{BC}_1\boldsymbol{C}_2$ 为对角阵. $\boldsymbol{C}_2$ 正交,于是 $\boldsymbol{C}_2'\boldsymbol{C}_1'\boldsymbol{AC}_1\boldsymbol{C}_2=\boldsymbol{C}_2'\boldsymbol{EC}_2=\boldsymbol{C}_2'\boldsymbol{C}_2=\boldsymbol{E}$.令 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2$,则 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{AC}$ 及 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{BC}$ 同时为对角阵.

18. 证明实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 为半正定的充要条件是它的所有主子式皆非负.主子式即一切子式 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}i_1\,i_2\cdots i_k\\ i_1\,i_2\cdots i_k\end{pmatrix}$,$1\leqslant k\leqslant n$,$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$.

证明 这是第五章补充题第9题的另一种证法.

必要性.考察 $\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{E}$.当 $t>0$ 时,$\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{AX}+t\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}>0$,对一切非零实向量 $\boldsymbol{X}$ 成立.故 $\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{E}$ 是正定的,于是一切主子式$(\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}i_1\,i_2\cdots i_r\\ i_1\,i_2\cdots i_r\end{pmatrix}>0$,对一切 $t>0$ 成立.当 $t\to0$ 时,

$$(\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}i_1\,i_2\cdots i_r\\ i_1\,i_2\cdots i_r\end{pmatrix}\to\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}i_1\,i_2\cdots i_r\\ i_1\,i_2\cdots i_r\end{pmatrix}\geqslant0.$$

充分性.设一切主子式 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}i_1\,i_2\cdots i_r\\ i_1\,i_2\cdots i_r\end{pmatrix}\geqslant0$.来证明 $\boldsymbol{A}$ 合同于一个对角阵,其对角线上元素皆大于等于零.这即是说二次型 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{AX}$ 可经非退化实线性替换变成一个半正定二次型,因而 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{AX}$ 也是半正定的.

对 $\boldsymbol{A}$ 的级数 n 作归纳法.当 $n=1$ 时,$|\boldsymbol{A}|\geqslant0$,即 $a_{11}\geqslant0$.显然 $\boldsymbol{A}=(a_{11})$半正定.设 $n-1$ 时结论已成立,考察 $n\times n$ 实对称阵 $\boldsymbol{A}$,它的一切主子式$\geqslant0$.

若 $a_{11}=0$.则它的二级主子式

$$A\begin{pmatrix}1 & j\\ 1 & j\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}0 & a_{1j}\\ a_{j1} & a_{jj}\end{vmatrix}=-a_{1j}a_{j1}=-a_{1j}^2\geqslant 0.$$

于是所有 j，$a_{1j}=0$，以及 $a_{j1}=0$. 这时

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & B\end{pmatrix}.$$

其中 B 是 $n-1$ 级实对称阵，它的主子式都是 A 的主子式，仍大于等于零. 由归纳假设，它是半正定的. 令

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ X_1\end{pmatrix}$$

为任意 n 维实向量

$$X'AX=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=\sum_{i,j=2}^{n}a_{ij}x_ix_j=X_1'BX_1\geqslant 0.$$

故 A 半正定.

若 $a_{11}\neq 0$. 将 A 作如下分块

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & \alpha\\ \alpha' & A_{n-1}\end{pmatrix}.$$

再对它作如下合同变换得

$$B=\begin{pmatrix}1 & \mathbf{0}\\ -a_{11}\alpha' & E_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & \alpha\\ \alpha' & A_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -a_{11}^{-1}\alpha\\ \mathbf{0} & E_{n-1}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a_{11} & \alpha\\ \mathbf{0} & A_{n-1}-a_{11}^{-1}\alpha'\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -a_{11}^{-1}\alpha\\ \mathbf{0} & E_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & A_{n-1}-a_{11}^{-1}\alpha'\alpha\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}-a_{11}^{-1}a_{21}a_{12} & a_{23}-a_{11}^{-1}a_{21}a_{13} & \cdots & a_{2n}-a_{11}^{-1}a_{21}a_{1n} \\ 0 & a_{32}-a_{11}^{-1}a_{31}a_{12} & a_{33}-a_{11}^{-1}a_{31}a_{13} & \cdots & a_{3n}-a_{11}^{-1}a_{31}a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}-a_{11}^{-1}a_{n1}a_{12} & a_{n3}-a_{11}^{-1}a_{n1}a_{13} & \cdots & a_{nn}-a_{11}^{-1}a_{n1}a_{1n} \end{pmatrix},$$

记 $\boldsymbol{A}_{n-1}-a_{11}^{-1}\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{B}_{n-1}$. 对 $\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}1 & i_2\cdots i_k\\ 1 & i_2\cdots i_k\end{pmatrix}$. 令 $\boldsymbol{\alpha}_{k-1}=(a_{1i_2},$ $a_{1i_3},\cdots,a_{1i_k})$, $\boldsymbol{A}_{k-1}=\begin{pmatrix} a_{i_2i_2} & a_{i_2i_3} & \cdots & a_{i_2i_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \cdots & a_{i_ki_k}\end{pmatrix}$,

则

$$\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}1 & i_2\cdots i_k\\ 1 & i_2\cdots i_k\end{pmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{k-1}-a_{11}\boldsymbol{\alpha}_{k-1}^{1}\boldsymbol{\alpha}_{k-1}\end{vmatrix}$$

$$=\left|\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{0}\\ a_{11}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_{k-1}' & \boldsymbol{E}_{k-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{k-1}-a_{11}^{-1}\boldsymbol{\alpha}'_{k-1}\boldsymbol{\alpha}_{k-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a_{11}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_{k-1}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_{k-1}\end{pmatrix}\right|$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \boldsymbol{\alpha}_{k-1} \\ \boldsymbol{\alpha}_{k-1}' & \boldsymbol{A}_{k-1}\end{vmatrix}$$

$$=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1 & i_2\cdots i_k\\ 1 & i_2\cdots i_k\end{pmatrix}\geqslant 0$$

对 $1<i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$,则有

$$\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}i_1\, i_2\cdots i_k\\ i_1\, i_2\cdots i_k\end{pmatrix}=|\boldsymbol{A}_k-a_{11}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_k'\boldsymbol{\alpha}_k|$$

$$=a_{11}^{-1}\begin{vmatrix} a_{11} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_k-a_{11}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_k'\boldsymbol{\alpha}_k\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}^{-1}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1 & i_1\, i_2\cdots i_k\\ 1 & i_1\, i_2\cdots i_k\end{pmatrix}\geqslant 0.$$

其中 $\boldsymbol{A}_k=\begin{pmatrix}a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_k}\\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \cdots & a_{i_ki_k}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_k=(a_{1i_1},a_{1i_2},\cdots,a_{1i_k})$.

于是 $\boldsymbol{B}_{n-1}=\boldsymbol{A}_{n-1}-a_{11}^{-1}\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha}$ 的所有主子式都是 $\boldsymbol{B}$ 的主子式，皆大于等于零. 由归纳假设 $\boldsymbol{B}_{n-1}$ 是半正定的. 对任意实向量

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ \boldsymbol{X}_1\end{pmatrix},$$

有

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}=a_{11}x_1^2+\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{B}_{n-1}\boldsymbol{X}_1\geqslant 0,$$

故 $\boldsymbol{B}$ 半正定，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是合同的，也是半正定的，完成了归纳法.

19. $n\times n$ 复方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为幂零的，若有正整数 k 使 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$. 证明：$\boldsymbol{A}$ 是幂零阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值皆为零.

证明 必要性. 设 λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，$\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{0}$ 是属于 λ_0 的特征向量. 于是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=\lambda_0\boldsymbol{\xi}$. 则

$$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\xi}=\lambda_0^k\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}.$$

由于 $\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{0}$，故 $\lambda_0^k=0$，即 $\lambda_0=0$.

充分性. $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为零，故 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $f(x)$ 等于 x^n（因 $f(x)$ 的根全为零）. 由哈密顿－凯莱定理有 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{A}$ 是幂零的.

20. $n\times n$ 复方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为半单的，如果 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角形. 证明对 $n\times n$ 复方阵 A 存在 $n\times n$ 复方阵 $\boldsymbol{B}$ 及 $\boldsymbol{C}$ 使得

1）$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$；

2）$\boldsymbol{B}$ 是半单的，$\boldsymbol{C}$ 是幂零的；

3）$\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{CB}$.

证明 $\boldsymbol{A}$ 可相似于若尔当形矩阵,即有可逆阵 $\boldsymbol{T}$ 使

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{J}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{A},$$

其中

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}_1 & & & \\ & \boldsymbol{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_s\end{pmatrix},$$

而

$$\boldsymbol{J}_i=\lambda_i\boldsymbol{E}_{k_i}+\boldsymbol{N}_i,\ \boldsymbol{N}_i=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{pmatrix}_{k_i\times k_i},$$

$$i=1,2,\cdots,s.$$

令

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1\boldsymbol{E}_{k_1} & & & \boldsymbol{O}\\ & \lambda_2\boldsymbol{E}_{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{O} & & & \lambda_s\boldsymbol{E}_{k_s}\end{pmatrix}\boldsymbol{T},$$

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{T}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{N}_1 & & & \\ & \boldsymbol{N}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{N}_s\end{pmatrix}\boldsymbol{T},$$

它们满足

1) $\boldsymbol{B}$ 相似对角阵,故是半单的.

2) $\boldsymbol{N}_i$ 皆幂零,故 $\boldsymbol{C}$ 为幂零的.

3) $\lambda_i\boldsymbol{E}_i$ 与 $\boldsymbol{N}_i$ 都交换,故 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 是交换的.

4) $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{J}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{A}$.

完成了证明.

21. 证明与下述若尔当块

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0&0\\1&0&0&\cdots&0&0\\0&1&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0\end{pmatrix}_{n\times n}$$

交换的矩阵一定是 $\boldsymbol{A}$ 的多项式.

证明 方法 1 设 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.计算

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}b_{12}&b_{13}&b_{14}&\cdots&b_{1n}&0\\b_{22}&b_{23}&b_{24}&\cdots&b_{2n}&0\\b_{32}&b_{33}&b_{34}&\cdots&b_{3n}&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\b_{n-1,2}&b_{n-1,3}&b_{n-1,4}&\cdots&b_{n-1,n}&0\\b_{n2}&b_{n3}&b_{n4}&\cdots&b_{nn}&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{AB}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0&0\\b_{11}&b_{12}&b_{13}&\cdots&b_{1,n-1}&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}&\cdots&b_{2,n-1}&b_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\b_{n-2,1}&b_{n-2,2}&b_{n-2,3}&\cdots&b_{n-2,n-1}&b_{n-2,n}\\b_{n-1,1}&b_{n-1,2}&b_{n-1,3}&\cdots&b_{n-1,n-1}&b_{n-1,n}\end{pmatrix}.$$

$$b_{12}=b_{23}=\cdots=b_{n-1,n}=0,$$

$$b_{13}=b_{24}=\cdots=b_{n-2,n}=0,$$

……

$$b_{1,n-1}=b_{2n}=0,$$

$$b_{1n}=0,$$

$$b_{11}=b_{22}=\cdots=b_{nn},$$

$$b_{21}=b_{32}=\cdots=b_{n,n-1},$$

$$b_{31}=b_{42}=\cdots=b_{n,n-2},$$

$$\cdots\cdots$$

$$b_{n-1,1}=b_{n2},$$

$$b_{n1}\text{自由}.$$

故

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{21} & b_{11} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-2,1} & b_{n-3,1} & \cdots & b_{11} & 0 \\ b_{n1} & b_{n-1,1} & b_{n-2,1} & \cdots & b_{21} & b_{11} \end{pmatrix}.$$

又可计算得

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}^2$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\cdots,$$

$$\boldsymbol{A}^{n-1}=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0&0\\0&0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&0\\1&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{A}^{n}=\boldsymbol{0}.$$

故 $\boldsymbol{B}=b_{11}\boldsymbol{E}+b_{21}\boldsymbol{A}+b_{31}\boldsymbol{A}^{2}+\cdots+b_{n1}\boldsymbol{A}^{n-1}$是 $\boldsymbol{A}$ 的多项式.

方法 2 运用空间观点.取 n 维线性空间 V,给定一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$,$\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots\boldsymbol{\varepsilon}_n$.作线性变换 $\mathscr{A}$ 使它在上述基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$,于是有

$$\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_2,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2=\boldsymbol{\varepsilon}_3,\cdots,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}=\boldsymbol{\varepsilon}_n,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_n=\boldsymbol{0}.$$

或

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2=\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_3=\mathscr{A}^2\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n=\mathscr{A}^{n-1}\boldsymbol{\varepsilon}_1.$$

这样 基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 可写成$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1,\mathscr{A}^2\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\mathscr{A}^{n-1}\boldsymbol{\varepsilon}_1$.而 V 中任一向量都是基的线性组合.设 $\xi\in V$,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}&=a_0\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_1\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1+\cdots+a_{n-1}\mathscr{A}^{n-1}\boldsymbol{\varepsilon}_1\\&=(a_0\mathscr{E}+a_1\mathscr{A}+\cdots+a_{n-1}\mathscr{A}^{n-1})\boldsymbol{\varepsilon}_1=f(\mathscr{A})\boldsymbol{\varepsilon}_1,\end{aligned}$$

其中 $f(\mathscr{A})$是 $\mathscr{A}$ 的多项式.这证明了 V 中任一向量 ξ 都是 $\mathscr{A}$ 的某个多项式这种线性变换作用在 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ 上的像.

现设 $\mathscr{B}$ 是 V 上的线性变换,$\mathscr{B}$ 与 $\mathscr{A}$ 交换.来证明 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{A}$ 的某个多项式.

$\mathscr{B}\boldsymbol{\varepsilon}_1\in V$,它必是 $f(\mathscr{A})\boldsymbol{\varepsilon}_1$,其中 $f(\mathscr{A})$是 $\mathscr{A}$ 的某个多项式,又对 V 的任一向量 $\varphi(\mathscr{A})\boldsymbol{\varepsilon}_1$,

$$\mathscr{B}(\varphi(\mathscr{A})\boldsymbol{\varepsilon}_1)=\varphi(\mathscr{A})\mathscr{B}\boldsymbol{\varepsilon}_1=\varphi(\mathscr{A})f(\mathscr{A})\boldsymbol{\varepsilon}_1=f(\mathscr{A})(\varphi(\mathscr{A})\boldsymbol{\varepsilon}_1)$$

故 $\mathscr{B}$ 与 $f(\mathscr{A})$在 V 的任一向量上的作用都相同.因此 $\mathscr{B}=f(\mathscr{A})$.

又设矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}$.作线性变换 $\mathscr{B}$,它在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下矩阵为$\boldsymbol{B}$,且有 $\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{A}\mathscr{B}$.于是 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个多项式 $f(\mathscr{A})$.由线性变换的等式 $\mathscr{B}=f(\mathscr{A})$ 就得到对应的矩阵的等式 $\boldsymbol{B}=f(\boldsymbol{A})$.

22. 求下列 n 阶循环矩阵$\boldsymbol{C}$ 的特征值以及属于这些特征值

的特征向量：

$$C=\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_0 \end{pmatrix}.$$

解 我们有

$$\begin{aligned} C &= c_0E_n + c_1\begin{pmatrix} 0 & E_{n-1} \\ E_1 & 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 & E_{n-2} \\ E_2 & 0 \end{pmatrix} + \cdots + c_{n-1}\begin{pmatrix} 0 & E_1 \\ E_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \\ &= c_0E_n + c_1\begin{pmatrix} 0 & E_{n-1} \\ E_1 & 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 & E_{n-1} \\ E_1 & 0 \end{pmatrix}^2 + \cdots + c_{n-1}\begin{pmatrix} 0 & E_{n-1} \\ E_1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k\begin{pmatrix} 0 & E_{n-1} \\ E_1 & 0 \end{pmatrix}^k, \end{aligned}$$

其中要证明

$$\begin{pmatrix} O & E_{n-k} \\ E_k & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E_{n-1} \\ E_1 & 0 \end{pmatrix}^k$$

为此可对 k 作归纳法，$k=1$ 显然. 设 $k-1$ 时等式已成立，对于 k 时的情形，只要证

$$\begin{pmatrix} 0 & E_{n-1} \\ E_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & E_{n-k+1} \\ E_{k-1} & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & E_{n-k} \\ E_k & O \end{pmatrix}$$

就行了，将上式左边进行如下详细标记和分块

左边

$$= \begin{array}{r} n-1 \\ 1 \end{array}\left(\begin{array}{c:c} 0_{(n-1)\times 1} & E_{n-1} \\ \hdashline E_1 & 0_{1\times(n-1)} \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc:c} 0_{1\times(k-1)} & E_1 & 0_{1\times(n-k)} \\ \hdashline O_{(n-k)\times(k-1)} & 0_{(n-k)\times 1} & E_{n-k} \\ E_{k-1} & 0_{(k-1)\times 1} & O_{(k-1)\times(n-k)} \end{array}\right)\begin{array}{l} 1 \\ \\ n-1 \end{array}$$

$$
= \begin{array}{c} n-1 \\ \\ 1 \end{array}
\left(\begin{array}{cc:c}
\boldsymbol{O}_{k}\ (n-k)\times(k-1) & \boldsymbol{0}_{(n-k)\times 1} & \boldsymbol{E}_{n-k} \\
\boldsymbol{E}_{k-1} & \boldsymbol{0}_{(k-1)\times 1} & \boldsymbol{O}_{(k-1)\times(n-k)} \\
\hdashline
\boldsymbol{0}_{1\times(k-1)} & \boldsymbol{E}_{1} & \boldsymbol{0}_{1\times(n-k)}
\end{array}\right)
$$

$$
= \begin{pmatrix} \boldsymbol{O}_{(n-k)\times k} & \boldsymbol{E}_{n-k} \\ \boldsymbol{E}_{k} & \boldsymbol{O}_{k\times(n-k)} \end{pmatrix}.
$$

这就完成了上面等式的证明.

现来计算

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_{n-1} \\ \boldsymbol{E}_{1} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

的特征多项式和特征值.易计算 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$
|x\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = x^{n} - 1
$$

$$
= (x-1)(x-\omega)\cdots(x-\omega^{n-1}),
$$

其中 $\omega = \cos\dfrac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{n}$.于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $1, \omega, \omega^{2}, \cdots, \omega^{n-1}$.

令多项式 $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1} x^{n-1}$,则 $\boldsymbol{C} = f(\boldsymbol{A})$.于是 $\boldsymbol{C}$ 的特征值是 $f(\omega^{i})$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

对于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 ω^{i},设属于它的特征向量是 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)'$,则它满足下述齐次方程组

$$
\begin{cases} \omega^{i} x_i - x_{i+1} = 0, i = 1, 2, \cdots, n-1, \\ \omega^{i} x_n - x_1 = 0. \end{cases}
$$

易知这方程组的系数矩阵的秩为 $n-1$，基础解系中仅有一个解．即 $\boldsymbol{A}$ 的属于 ω^i 的线性无关的特征向量只有一个，可取为 $\boldsymbol{\xi}_i=(1,\omega^i,\omega^{2i},\cdots,\omega^{(n-1)i})'$．

由于 $1=\omega^n,\omega^1,\cdots,\omega^{n-1}$ 互不相同，$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n$ 是 A 的 n 个线性无关的特征向量，也是 P^n（P 为复数域）的一组基．

$\boldsymbol{\xi}_i$ 也是 $\boldsymbol{C}=f(\boldsymbol{A})$ 的特征向量，属于特征值 $f(\omega^i)$．设与 $f(\omega^i)$ 相等的全部 $f(\omega^j)$ 有 $f(\omega^{i_1}),f(\omega^{i_2}),\cdots,f(\omega^{i_s})$，其中 $i_1=i$．则 $\boldsymbol{C}$ 的属于 $f(\omega^i)$ 的全部特征向量为 $l_1\boldsymbol{\xi}_{i_1}+l_2\boldsymbol{\xi}_{i_2}+\cdots+l_s\boldsymbol{\xi}_{i_s}$，其中 $l_1,l_2,\cdots,l_s$ 取遍 P 中的数．

23．设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 皆为 $n\times n$ 实对称矩阵，且互相交换，则它们有公共的特征向量作为欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 的标准正交基．

证明 设 $\boldsymbol{A}$ 的全部不同的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$，$\mathbf{R}^n$ 中相应的特征子空间是 $V_{\lambda_1},V_{\lambda_2},\cdots,V_{\lambda_s}$．由于 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角形，故有

$$维(V_{\lambda_1})+维(V_{\lambda_2})+\cdots+维(V_{\lambda_s})=n.$$

由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 及原书第七章习题 25，$V_{\lambda_1},V_{\lambda_2},\cdots,V_{\lambda_s}$ 都是 $\boldsymbol{B}$ 的不变子空间．$\boldsymbol{B}$ 是实对称的，在 $\mathbf{R}^n$ 中对应了线性变换 $\mathscr{B}:\begin{array}{l}\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n\\ \boldsymbol{Z}\mapsto\boldsymbol{BZ}\end{array}$．这变换 $\mathscr{B}$ 在 $\mathbf{R}^n$ 的自然内积（$\boldsymbol{Z},\boldsymbol{Y}$ 的内积为 $\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Y}$）下是对称变换，于是在子空间 V_{λ_i} 上仍是对称变换．因此 $\mathscr{B}$ 限制在 V_{λ_i} 上有一组特征向量 $\boldsymbol{\xi}_{i_1},\boldsymbol{\xi}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{i,n_i}$ 为 V_{λ_i} 的标准正交基，其中 $n_i=$ 维(V_{λ_i})．它们属于 $\boldsymbol{A}$ 的特征子空间 V_{λ_i}，当然也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量．即每个 $\boldsymbol{\xi}_{ij}$ 都是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的公共特征向量．

又 V_{λ_i} 与 V_{λ_j} 是属于 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值，故 V_{λ_i} 与 V_{λ_j} 是相互正交的．于是 $\boldsymbol{\xi}_{ij}$ 与 $\boldsymbol{\xi}_{lk}$ 当 $l\neq i$ 时互相正交．又 $\boldsymbol{\xi}_{i_1},\boldsymbol{\xi}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{i,n_i}$ 是 V_{λ_i} 的标准正交基，当 $i=l$ 时，若 $k\neq j$，$\boldsymbol{\xi}_{ij}$ 与 $\boldsymbol{\xi}_{ik}$ 也正交．这样 $\{\boldsymbol{\xi}_{ij},i=1,2,\cdots,s;j=1,2,\cdots,n_i\}$ 是相互正交的，且长度为 1，是标准正交

向量组. 又这组元素的数目为

$$n_1+n_2+\cdots+n_s=\text{维}(V_{\lambda_1})+\text{维}(V_{\lambda_2})+\cdots+\text{维}(V_{\lambda_s})=n.$$

故它们组成 $\mathbf{R}^n$ 的标准正交基. 这就完成了证明.

24. 证明反对称实矩阵正交相似于准对角阵

$$\begin{pmatrix}0&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&\\&&0&&&&&&\\&&&0&b_1&&&&\\&&&-b_1&0&&&&\\&&&&&\ddots&&&\\&&&&&&0&b_s\\&&&&&&-b_s&0\end{pmatrix},$$

其中 b_i 是实数.

证明 设 $n\times n$ 反对称实矩阵 $\mathbf{A}$, 它自然地对应于 $\mathbf{R}^n$ 中线性变换 $\mathscr{A}$:

$$\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n,$$
$$\mathbf{Z}\mapsto\mathbf{AZ}.$$

它在 $\mathbf{R}^n$ 的自然内积($(\mathbf{Z},\mathbf{Y})=\mathbf{Z}'\mathbf{AY}$)下是反对称变换. 第九章习题 16 证明了 $\mathbf{A}$ 的特征值为零或纯虚数. 我们想证明能找到一组标准正交基使 $\mathscr{A}$ 在该基下矩阵有题目中所述的形状.

首先, 若 $\mathscr{A}$ 有特征值为零, 取特征子空间 V_0, 并在 V_0 中取一组标准正交基 $\boldsymbol{\xi}_{01},\boldsymbol{\xi}_{02},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{0n_0}$. 再取 $V_1=V_0^\perp$. 类似于欧氏空间中的对称变换, 下面证 V_1 也是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间. 对 $\boldsymbol{\xi}\in V_0^\perp$, 及 $\forall\,\boldsymbol{\eta}\in V_0$, $(\mathscr{A}\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=-(\boldsymbol{\xi},\mathscr{A}\boldsymbol{\eta})$. 因 V_0 是不变子空间, $\mathscr{A}\boldsymbol{\eta}\in V_0$. 故 $(\mathscr{A}\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=-(\boldsymbol{\xi},\mathscr{A}\boldsymbol{\eta})=0$. 即 $\mathscr{A}\boldsymbol{\xi}\in V_0^\perp$. 已证过有 $V=V_0\oplus V_0^\perp$. 若 $V_0^\perp\neq\{0\}$, 则 $\mathscr{A}$ 在 $V_0^\perp$ 上有特征值 $\neq0$, 必为某纯虚数 $\mathrm{i}b_1$. 设属于它的复特征向量为 $\mathbf{Z}_1+\mathrm{i}\mathbf{Y}_1$, $\mathbf{Z}_1\mathbf{Y}_1\in\mathbf{R}^n$. 则 $\mathbf{A}(\mathbf{Z}_1+$

$\mathrm{i}\boldsymbol{Y}_1)=\mathrm{i}b_1(\boldsymbol{Z}_1+\mathrm{i}\boldsymbol{Y}_1)$,即有 $\boldsymbol{AZ}_1=-b_1\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{AY}_1=b\boldsymbol{Z}_1$.

我们来证明 $(\boldsymbol{Z}_1,\boldsymbol{Y}_1)=0$,实际上 $(\boldsymbol{Z}_1,\boldsymbol{Y}_1)=\left(\boldsymbol{Z}_1,\frac{-1}{b_1}\boldsymbol{AZ}_1\right)=-\frac{1}{b_1}(\boldsymbol{Z}_1,\boldsymbol{AZ}_1)$. 由于内积有 $(\boldsymbol{Z}_1,\boldsymbol{AZ}_1)=(\boldsymbol{AZ}_1,\boldsymbol{Z}_1)$. 又由于 $\boldsymbol{A}$ 为反对称 $(\boldsymbol{Z}_1,\boldsymbol{AZ}_1)=-(\boldsymbol{AZ}_1,\boldsymbol{Z}_1)$,故 $(\boldsymbol{Z}_1,\boldsymbol{Y}_1)=\frac{1}{b_1}(\boldsymbol{Z}_1,\boldsymbol{AZ}_1)=0$

令 $W_1=L\left(\frac{\boldsymbol{Z}_1}{|\boldsymbol{Z}_1|},\frac{\boldsymbol{Y}_1}{|\boldsymbol{Y}_1|}\right)=L(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\eta}_1)$. 则 $\mathscr{A}$ 限制在 W_1 上,对于基 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\eta}_1$ 有矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ -b_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

再看 V_0+W_1 的正交子空间 W_2,它也是不变子空间. 若它为零,$\mathscr{A}$ 限制在 W_2 上,其特征值必为纯虚数. 可继续上述过程. 由于 V 是有限维的,有限步后停止. 于是有

$$V=V_0+W_1+W_2+\cdots+W_s,$$

是正交和. 其中 $W_i=L(\boldsymbol{\xi}_i,\boldsymbol{\eta}_i)$,$\boldsymbol{\xi}_i,\boldsymbol{\eta}_i$ 是 W_i 的标准正交基. 将 V_0 的基及 VC 各 W_i 的基合起来得 $\boldsymbol{\xi}_{01},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{0n_0},\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s,\boldsymbol{\eta}_s$ 就是 V 的标准正交基. $\mathscr{A}$ 限制在 V_0 上,在基 $\xi_{01},\cdots,\xi_{0n_0}$ 下的矩阵是零矩阵. $\mathscr{A}$ 限制在各 W_i 上,在其基 $\boldsymbol{\xi}_i,\boldsymbol{\eta}_i$ 下的矩阵是 $\begin{pmatrix} 0 & b_i \\ -b_i & 0 \end{pmatrix}$. 故 $\mathscr{A}$ 在 V 的上述标准正交基下有所要形式的矩阵.

25. 设 $\boldsymbol{S}$ 是非零的反对称实矩阵,则

1) $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{S}|>1$,

2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵,则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{S}|>|\boldsymbol{A}|$.

证明 1) 由 19 题,有正交阵 $\boldsymbol{T}$ 使

$$S=T^{-1}\begin{pmatrix}0&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&\\&&0&&&&&&\\&&&0&b_1&&&&\\&&&-b_1&0&&&&\\&&&&&\ddots&&&\\&&&&&&0&b_s\\&&&&&&-b_s&0\end{pmatrix}T, b_i \text{ 为实数}.$$

于是

$$|E+S|=|T^{-1}||E+S||T|=|T^{-1}(E+S)T|$$

$$=\begin{vmatrix}1&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&\\&&1&&&&&\\&&&1&b_1&&&\\&&&-b_1&1&&&\\&&&&&\ddots&&\\&&&&&&1&b_s\\&&&&&&-b_s&1\end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{s}(1+b_i^2)>1.$$

最后的不等号是由于 $S\neq O$,至少有一个 $b_i\neq 0$.

2) A 正定,于是有可逆实矩阵 C 使 $A=C'C$. S 是反对称,则 $S_1=(C^{-1})'SC^{-1}$ 仍反对称,且非零. 于是 $|E+S_1|>1$.

$$|A+S|=|C'(E+S_1)C|=|C'||C||E+S_1|$$

$$=|A||E+S_1|>|A|.$$

26. 设 $f(x)$,$g(x)$是数域 P 上两个不全为零的多项式. 令

$$S=\{u(x)f(x)+v(x)g(x)\mid u(x),v(x)\in P[x]\}.$$

证明存在 $m(x)\in P[x]$,使

$$S=\{h(x)m(x)\mid h(x)\in P[x]\}.$$

提示　利用最大公因式$(f(x),g(x))$.

证明　方法1　$f(x),g(x)$不全为零,则$(f(x),g(x))$存在.且存在$u_1(x),v_1(x)\in P[x]$使$(f(x),g(x))=u_1(x)f(x)+v_1(x)g(x)$.

任意$u(x)f(x)+v(x)g(x)=\left[u(x)\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}+v(x)\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right](f(x),g(x))$.

故
$$S\subseteq\{h(x)(f(x),g(x))\mid h(x)\in P[x]\}.$$

又任意$h(x)(f(x),g(x))=h(x)u_1(x)f(x)+h(x)v_1(x)g(x)$.故$\{h(x)(f(x),g(x))\mid h(x)\in P[x]\}\subseteq S$.

现在令$m(x)=(f(x),g(x))$,就有
$$S=\{h(x)m(x)\mid h(x)\in P[x]\}.$$

提示　在S中取一个最低次数的多项式$m(x)$.证明$m(x)$去除S中任一多项式,其余式必为零.

证明　方法2　在S中取一个最低次数的多项式$m(x)$(因$f(x)$,$g(x)$不全为零,S中有非零的多项式).对S中任一多项式$M(x)$,用$m(x)$去除$M(x)$.设其商式和余式分别为$q(x),r(x)$,则
$$M(x)=q(x)m(x)+r(x).$$
若$r(x)\neq0$,则$\partial(r(x))<\partial(m(x))$.但$M(x),m(x)\in S$,有$u_i(x),v_i(x),i=1,2$使
$$M(x)=u_1(x)f(x)+v_1(x)g(x),$$
$$m(x)=u_2(x)f(x)+v_2(x)g(x).$$
于是
$$\begin{aligned}r(x)&=M(x)-q(x)m(x)\\&=(u_1(x)-q(x)u_2(x))f(x)+(v_1(x)-q(x)v_2(x))g(x)\in S.\end{aligned}$$
它的次数$<\partial(m(x))$,与$m(x)$是S中次数最低的多项式矛盾.故只能$r(x)=0$.即$M(x)=q(x)m(x)$.这就证明了

$$S=\{h(x)m(x)\mid h(x)\in P[x]\}.$$

27. P 是数域，α 是一个复数，它满足 P 上的一个 k 次多项式方程 $f(x)=0$. 则

1) 令 $F(\alpha)=\left\{\sum_{i=0}^{k-1}a_i\alpha^i \mid a_i\in P\right\}$，则它是 P 上线性空间，且可由 $1,\alpha,\cdots,\alpha^{k-1}$ 生成此空间.

2) 若 $f(x)=0$ 是 α 满足的 P 上多项式方程中次数最低的，则任意 $g(x)\in P[x]$ 若满足 $g(\alpha)=0$，就有 $f(x)\mid g(x)$. 且 $f(x)$ 在 $P[x]$ 中不可约.

3) $f(x)$ 是具有 2) 中所说性质的 k 次多项式，则 $1,\alpha,\cdots,\alpha^{k-1}$ 是 $F(\alpha)$ 的一组基，于是 $F(\alpha)$ 是 k 维的.

4) $F(\alpha)$ 是一个数域.

证明 1) 易知 $F(\alpha)$ 对数的加法及对 P 中数的数量乘法是封闭的. 又是非空集合，故它是 P 上线性空间. 要证它能由 $1,\alpha,\cdots,\alpha^{k-1}$ 生成，只要对任何 $g(x)\in P[x]$ 都有 $r(x)\in P[x]$ 是零或次数 $\leqslant k-1$ 使得 $g(\alpha)=r(\alpha)$. 即 $g(\alpha)$ 是 $1,\alpha,\cdots,\alpha^{k-1}$ 的线性组合，$F(\alpha)$ 由 $1,\alpha,\cdots,\alpha^{k-1}$ 生成.

现设 $g(x)\in P[x]$. 用 $f(x)$ 去除 $g(x)$，设商式和余式分别是 $q(x),r(x)$，则

$$g(x)=q(x)f(x)+r(x).$$

此中 $r(x)$ 或者为零或次数 $\leqslant k-1$. 把 α 代入上式，则

$$g(\alpha)=q(\alpha)f(\alpha)+r(\alpha)=q(\alpha)\cdot 0+r(\alpha)=r(\alpha).$$

即 $g(\alpha)$ 是 $1,\alpha,\cdots,\alpha^{k-1}$ 的线性组合.

2) 设 $f(x)$ 是使 $f(\alpha)=0$ 的多项式中次数最低的. 而 $g(x)\in P[x]$ 使 $g(\alpha)=0$. 用 $f(x)$ 去除 $g(x)$，得

$$g(x)=q(x)f(x)+r(x),$$

其中 $r(x)$ 或为零或次数 $<\partial(f(x))$. 若 $\partial(r(x))<\partial(f(x))$，则

$$0=g(\alpha)=q(\alpha)f(\alpha)+r(\alpha)=r(\alpha).$$

于是与 $f(x)$ 是使 $f(\alpha)=0$ 的最低次多项式矛盾. 故 $r(x)=0$，即

有 $f(x)\mid g(x)$.

又若 $f(x)$ 可约，则 $f(x)=f_1(x)f_2(x)$，$\partial(f_i(x))<\partial(f(x))$，$i=1,2$. 由 $f(\alpha)=f_1(\alpha)f_2(\alpha)=0$ 及复数域中无零因子，必有 $f_1(\alpha)=0$ 或 $f_2(\alpha)=0$. $\partial(f_i(x))<\partial(f(x))$. $i=1,2$. 与 $f(x)$是使 $f(\alpha)=0$ 的最低次多项式矛盾. 故 $f(x)$不可约.

3) k 次多项式 $f(x)$是使 $f(\alpha)=0$ 的最低次多项式. 若 1，$\alpha,\cdots,\alpha^{k-1}$线性相关，则 P 中有不全为零的数 $a_0,a_1,\cdots,a_{k-1}$使

$$a_0+a_1\alpha+\cdots+a_{k-1}\alpha^{k-1}=0.$$

令 $r(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{k-1}x^{k-1}$，它的次数$\leqslant k-1$，且 $r(\alpha)=0$. 这与 $f(x)$是使 $f(\alpha)=0$ 的最低次(k 次)多项式矛盾. 故 1，$\alpha,\cdots,\alpha^{k-1}$线性无关，即它是 $F(\alpha)$的作为 P 上线性空间的一组基. 于是 $F(\alpha)$的维数$=f(x)$的次数.

4) $F(\alpha)$具有 0,1 元素，显然有对数的加法，减法和乘法封闭. 现对 $g(\alpha)\neq 0$，$g(x)\in P[x]$，来证明 $g(\alpha)$在 $F(\alpha)$中有逆. 这只要找到 $h(x)\in P[x]$，使 $h(\alpha)=\dfrac{1}{g(\alpha)}$.

2) 中已证 $f(x)$ 是不可约的，且由于 $g(\alpha)\neq 0$，有 $f(x)\nmid g(x)$. 于是$(f(x),g(x))=1$. 有 $k(x),h(x)\in P[x]$使

$$k(x)f(x)+h(x)g(x)=1.$$

将 α 代入上式，$k(\alpha)f(\alpha)+h(\alpha)g(\alpha)=k(\alpha)\cdot 0+h(\alpha)g(\alpha)=h(\alpha)g(\alpha)=1$，故 $h(\alpha)=\dfrac{1}{g(\alpha)}$.

这就证明了 $F(\alpha)$是一个数域.

28. $\mathbf{R}$ 是实数域，$\mathbf{R}\subsetneq K$，K 是 $\mathbf{R}$ 的扩域，且是 $\mathbf{R}$ 上有限维(大于 1)空间，则 $K=\mathbf{C}$. (这说明二维以上的超复数域是不存在的).

证明 取任一元 $\alpha\in K$，但 $\alpha\notin\mathbf{R}$. 由于 K 是 $\mathbf{R}$ 上有限维的，有充分大的 n，使 $1,\alpha,\cdots,\alpha^n$ 在 $\mathbf{R}$ 上线性相关. 于是有 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 不全为零使 $a_0+a_1\alpha+\cdots+a_n\alpha^n=0$. 令 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots$

$+a_nx^n$，则 $f(x)\neq 0, f(\alpha)=0$．将 $f(x)$ 分解成 $\mathbf{R}[x]$ 上不可约多项式的乘积

$$f(x)=p_1(x)\cdots p_r(x)q_1(x)\cdots q_s(x).$$

其中 $p_1(x),\cdots,p_r(x)$ 为一次多项式，$q_1(x),\cdots,q_s(x)$ 是二次不可约多项式．由 $f(\alpha)=p_1(\alpha)\cdots p_r(\alpha)q_1(\alpha)\cdots q_s(\alpha)=0$．必有某 $p_i(\alpha)=0$ 或 $q_j(\alpha)=0$．但 $p_1(x)$ 是一次的，$\alpha\overline{\in}\mathbf{R}$，故不可能有 $p_i(\alpha)=0$．必有某 $q_i(\alpha)=0$．即有 $a,b,c\in\mathbf{R}$，使

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0.$$

于是

$$\alpha=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}，且\ b^2-4ac<0（否则\ \alpha\in\mathbf{R}）$$

进而

$$\alpha=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\cdot\sqrt{-1}\qquad (*)$$

由 $\alpha\in K$，易知 $\sqrt{-1}\in K$．因此 $\mathbf{C}$（复数域）$\subseteq K$．又对任一 $\alpha\in K$，由（$*$）知 $\alpha\in\mathbf{C}$．故 $K=\mathbf{C}$．

29．找出和式

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$$

的一般公式．

解：已知和 $1^0+2^0+3^0+\cdots+n^0=n$ 是 n 的一次多项式，$1^1+2^1+3^1+\cdots+n^1=\frac{1}{2}n(n+1)$ 是 n 的二次多项式．猜测和式 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ 是 n 的三次多项式，设为 $f(n)=an^3+bn^2+cn+d$．于是 $f(n+1)-f(n)=(n+1)^2$ 对所有的正整数 n 都成立．而 $f(x)$ 是三次多项式，$f(x+1)-f(x)$ 及 $(x+1)^2$ 都是二次多项式，且在无穷个 x 值上相等，故这两个多项式是相等的．于是

$$\begin{aligned}&a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d-ax^3-bx^2-cx-d\\=&x^2+2x+1.\end{aligned}$$

可计算出

$$a=\frac{1}{3},b=\frac{1}{2},c=\frac{1}{6}.$$

又 $f(1)=a+b+c+d=1^2$,故 $d=0$.因此

$$f(n)=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1).$$

验证:

$$\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)=f(n)=(f(n)-f(n-1))+\cdots+(f(2)-f(1))+f(1)=n^2+(n-1)^2+\cdots+2^2+1^2.$$

这里用了多项式的性质,而不是用归纳法进行求证的.

30. $x^n-1=0$ 的根 ω 称为它的本原根(或称 n 次本原单位根,如果这方程的任何一个根都是 ω 的方幂.例如 $\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$就是一个本原根.证明

1) 设 ω 是本原根,则 ω^m 是本原根当且仅当$(m,n)=1$.由此可知 $x^n-1=0$ 的本原根的数目 $=1,2,\cdots,n$ 中与 n 互素的数的数目.记为 $\varphi(n)$,称为欧拉函数.

2) 设$x^n-1=0$的全部本原根记为 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{\varphi(n)}$.作 $\varphi_n(x)=(x-\omega_1)(x-\omega_2)\cdots(x-\omega_{\varphi(n)})$,它被称为分圆多项式,则 $\varphi_n(x)$是整系数多项式.

证明 1) 先证$(m,n)=1$ 时 ω^m 是本原根.

因$(m,n)=1$,有 l,k 整数使 $lm+kn=1$.于是 $\omega=\omega^{lm+kn}=(\omega^m)^l(\omega^n)^k=(\omega^m)^l$.故 ω 是ω^m 的方幂.又 $x^n-1=0$ 的任一根是 ω 的方幂,当然是 ω^m 的方幂,即 ω^m 是本原根.

反之设 ω^m 是本原根,于是 $\omega=(\omega^m)^l=\omega^{lm}$.作带余除法,设 $lm=kn+r$.这里 $r\neq0$,否则 $\omega^{lm}=1\neq\omega$.故 $r<n$.$\omega=\omega^{lm}=\omega^{kn}\cdot\omega^r=\omega^r$.因 $\omega^n=1$,于是 $1,\omega,\omega^2,\cdots,\omega^{n-1}$就是$x^n-1=0$的全部 n 个根.由 $r<n$ 及 $\omega=\omega^r$ 只能 $r=1$.故有

$$lm-kn=1,即(m,n)=1.$$

2）对 n 作归纳法. 当 $n=1$, $\varphi_1(x)=x-1$ 是整系数. 结论成立. 设 $n<k$ 时 $\varphi_m(x)$ 为整系数多项式. 现来证明 $n=k$ 时 $\varphi_k(x)$ 是整系数的.

设 $d_1, d_2, \cdots, d_s$ 是 k 的全部因子, 且 $1=d_1<d_2<\cdots<d_s<k$. 令 ω 是 $x^k-1=0$ 的一个本原根. 由 $\omega^k=1$, 于是 $1, \omega, \cdots, \omega^{k-1}$ 是 $x^k-1=0$ 的全部 k 个不同的根.

令 $n_l=\dfrac{k}{d_l}$. 则 $\omega^{n_l}, (\omega^{n_l})^2, \cdots, (\omega^{n_l})^{d_l-1}, (\omega^{n_l})^{d_l}=1$ 是不同的元, 又是 $x^{d_l}-1=0$ 的全部 d_l 个根. 故 ω^{n_l} 是 $x^{d_l}-1=0$ 的本原根. 故

$$\varphi_{d_l}(x)=(x-\omega^{n_l})(x-\omega^{n_l j_1})\cdots(x-\omega^{n_l j_t}),$$

其中 $1, j_1, \cdots, j_t$ 是 $1, 2, \cdots, d_l$ 中与 d_l 互素的全部的数. 由 $d_l<k$, 由归纳假设 $\varphi_{d_l}(x)$ 是整系数的. 又 $n_l j_i$ 及 n_l 皆小于 k. 故 ω^{n_l}, $\omega^{n_l j_1}, \cdots, \omega^{n_l j_t}$ 在 $\omega, \omega^2, \cdots, \omega^{k-1}$ 之中即 $\varphi_{d_l}(x)=(x-\omega^{n_l})(x-\omega^{n_l j_1})\cdots(x-\omega^{n_l j_t})$ 的每个因式都在 $x^k-1=(x-\omega)(x-\omega^2)\cdots(x-\omega^k)$ 的因式中出现. 当 $d_l\neq d_{l'}$ 时 $d_{l'}$ 次本原单位根与 d_l 次本原单位根是互不相等的(前者有 $d_{l'}$ 个不同的方幂, 后者有 d_l 个不同的方幂). 因此 $\varphi_{d_l}(x)=(x-\omega^{n_l})(x-\omega^{n_l j_1})\cdots(x-\omega^{n_l j_t})$ 中的因式与 $\varphi_{d_{l'}}(x)=(x-\omega^{n_{l'}})(x-\omega^{n_{l'} j_1'})\cdots(x-\omega^{n_{l'} j_{t'}'})$ 中的因式是 $x^k-1=(x-1)(x-\omega)\cdots(x-\omega^{k-1})$ 中互不相同的因式. 因此 $\varphi_1(x)\varphi_{d_2}(x)\cdots\varphi_{d_s}(x)$ 在复数域中整除 x^k-1. 又 x^k-1 的任一根 ω^l, 若 $(l, n)=1$, 则它是 n 次本原根. 则 $(x-\omega^l)$ 这因子在 $\varphi_n(x)$ 中. 若 $(l, n)=m\neq1$. 则 $l=ml_0$, $(l_0, n)=1$, 而 $m\mid n$, $\dfrac{n}{m}\neq n$. 故 $\dfrac{n}{m}$ 必为某 d_i. 于是 ω^{l_0} 是 n 次本原根, 而 $\omega^l=(\omega^{l_0})^m$ 是 $\dfrac{n}{m}=d_i$ 次本原根, 即因子 $x-\omega^l$ 在 $\varphi_{d_i}(x)$ 中. 于是 $x^n-1=(x-\omega)(x-\omega^2)(x-\omega^3)\cdots(x-\omega^{n-1})(x-\omega^n)$ 与 $\varphi_{d_1}(x)\varphi_{d_2}(x)\cdots$

$\varphi_{d_s}(x)\varphi_n(x)$含有同样多的因子.即 $x^n-1=\varphi_{d_1}(x)\varphi_{d_2}(x)\cdots\varphi_{d_s}(x)\varphi_n(x)$.由归纳假设 $\varphi_{d_1}(x),\varphi_{d_2}(x)\cdots,\varphi_{d_s}(x)$皆为整系数多项式,它们的乘积也是整系数多项式.由带余除法知道 $\varphi_n(x)$是有理系数多项式.再由第一章§9定理11的推论知 $\varphi_n(x)$也是整系数多项式.这就完成了归纳法.

31. 设 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 分别是 $n\times k,n\times(n-k)$实矩阵.证明

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B} & \boldsymbol{B}'\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}'\boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}\end{vmatrix}\leqslant|\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B}||\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}|.$$

证明 作

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})_{n\times n}.$$

则

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}'\\ \boldsymbol{C}'\end{pmatrix}(\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B} & \boldsymbol{B}'\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}'\boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}\end{pmatrix}.$$

由于 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ 是半正定,因此$|\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}|\geqslant0$.同样 $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B}$ 与$\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$ 也半正定,$|\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B}|\geqslant0$ 及$|\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}|\geqslant0$.

若$|\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}|=0$,结论已成立.若$|\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}|\neq0$,则 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ 是正定的.于是$|\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B}|>0$,$|\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}|>0$,$\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B}$ 及$\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$ 也是正定的.对 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ 进行分块初等变换:

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}\\ -(\boldsymbol{C}'\boldsymbol{B})(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B})^{-1} & \boldsymbol{E}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B} & \boldsymbol{B}'\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}'\boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & -(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{C})\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}-(\boldsymbol{C}'\boldsymbol{B})(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{C})\end{pmatrix}$$

这是合同变换,故 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}-(\boldsymbol{C}'\boldsymbol{B})(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{C})$也为正定的.由$\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$ 正定,有正交阵 $\boldsymbol{T}$ 使

$$\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C})\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

可设

$$\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}-(\boldsymbol{C}'\boldsymbol{B})(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{C}))\boldsymbol{T}$$
$$=\begin{pmatrix}\lambda_1-d_{11} & -d_{12} & \cdots & -d_{1n}\\ -d_{21} & \lambda_2-d_{22} & \cdots & -d_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -d_{n1} & -d_{n2} & \cdots & \lambda_n-d_{nn}\end{pmatrix},$$

后者仍正定，由第五章补充题8,3)有

$$\begin{aligned}&|\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}-(\boldsymbol{C}'\boldsymbol{B})(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{C})|\\ &=|\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}-(\boldsymbol{C}'\boldsymbol{B})(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{C}))\boldsymbol{T}|\\ &\leqslant(\lambda_1-d_{11})(\lambda_2-d_{22})\cdots(\lambda_n-d_{nn}).\end{aligned}$$

但 $\boldsymbol{T}'((\boldsymbol{C}'\boldsymbol{B})(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{C}))\boldsymbol{T}=(d_{ij})$ 也是半正定的，故所有 $d_{ii}\geqslant 0$, $i=1,2,\cdots,n$. 于是

$$\begin{aligned}&|\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}-(\boldsymbol{C}'\boldsymbol{B})(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{C})|\\ &\leqslant(\lambda_1-d_{11})(\lambda_2-d_{22})\cdots(\lambda_n-d_{nn})\\ &\leqslant\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C})\boldsymbol{T}|=|\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}|.\end{aligned}$$

结果，

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}|&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}-(\boldsymbol{C}'\boldsymbol{B})(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{C})\end{vmatrix}\\ &=|\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B}||\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}-(\boldsymbol{C}'\boldsymbol{B})(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{C})|\\ &\leqslant|\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B}||\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}|.\end{aligned}$$

32. 已知 n 维欧氏空间 V 中 $n+1$ 个向量 $\boldsymbol{x}_i(i=0,1,\cdots,n)$ 两两距离均为 $\delta>0$. 令 $\boldsymbol{u}_i=\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_0$, $i=1,2,\cdots,n$. 则

1) $(\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{u}_j)=\dfrac{\delta^2}{2}$, $i\neq j$;

2) $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n$ 线性无关.

证明 1)

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u}_j,\boldsymbol{u}_i)&=(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_0)\\ &=-\frac{1}{2}\{((\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{x}_0)-(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_0),(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{x}_0)-(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_0))-\end{aligned}$$

$$(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{x}_0)-(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_0)\}$$

$$=-\frac{1}{2}\{(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{x}_i)-(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{x}_0)-$$

$$(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_0)\}=-\frac{1}{2}(\delta^2-\delta^2-\delta^2)=\frac{\delta^2}{2}.$$

2）设有 $k_1\boldsymbol{u}_1+k_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{u}_n=\boldsymbol{0}$. 用 $\boldsymbol{u}_1$ 与两端作内积，得 $k_1(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_1)+k_2(\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_1)+\cdots+k_n(\boldsymbol{u}_n,\boldsymbol{u}_1)=0$，即为

$k_1\delta^2+\frac{1}{2}k_2\delta^2+\cdots+\frac{1}{2}k_n\delta^2=0$，或 $k_1+\frac{1}{2}k_2+\cdots+\frac{1}{2}k_n=0$. 若逐次用 $\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n$ 与上式两端作内积，还可得

$$\frac{1}{2}k_1+k_2+\frac{1}{2}k_3+\cdots+\frac{1}{2}k_n=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2}k_1+\frac{1}{2}k_2+\cdots+\frac{1}{2}k_{n-1}+k_n=0.$$

以上方程组只有唯一解 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$. 故 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n$ 线性无关.

33. 1）$\boldsymbol{A}$ 是一个 n 级可逆矩阵，求下列二次型的矩阵.

$$f=\begin{vmatrix}0 & -\boldsymbol{x}'\\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{A}\end{vmatrix}，其中\ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix};$$

2）证明：当 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵时，f 是正定二次型；

3）当 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵时，讨论 $\boldsymbol{A}$ 的正、负惯性指数与 f 的正、负惯性指数之间的关系.

提示　可以将 f 用行列式按第一行展开，再按第一列展开，也可以应用行列式乘积公式.

解　1）方法 1　因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆，故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在.

$$\begin{vmatrix}1 & \boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}^{-1}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0 & -\boldsymbol{x}'\\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{A}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x'A^{-1}x & 0 \\ x & A \end{vmatrix} = |A||x'A^{-1}x|,$$

$$f=\begin{vmatrix} 0 & -x' \\ x & A \end{vmatrix} = |A||x'A^{-1}x|.$$

因为 A^{-1}不一定是对称矩阵,所以 f 的矩阵是

$$|A|\cdot\frac{1}{2}(A^{-1}+(A^{-1})')=\frac{|A|}{2}(A^{-1}+(A^{-1})')=\frac{1}{2}(A^{*}+(A^{*})')$$

这里 A^{*}是 A 的伴随矩阵.

方法2　把 A 表成

$$A=[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n]$$

其中 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$是 A 的第 i 个列向量.

将 f 按第一行展开

$$f=\begin{vmatrix} 0 & -x_1 & -x_2 & \cdots & -x_n \\ x_1 & & & & \\ \vdots & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ x_n & & & & \end{vmatrix}$$

$$=x_1|x\ \alpha_2\cdots\alpha_n|-x_2|\alpha_1\quad x\quad \alpha_3\cdots\alpha_n|+\cdots+$$
$$(-1)^{n-1}x_n|\alpha_1\quad\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}\quad x|,$$

再将上式中第 $i(i=1,2,\cdots,n)$个行列式按第 i 列展开,并用 A_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,n)$表示 A 的代数余子式.得

$$\begin{aligned} f&=x_1(x_1A_{11}+x_2A_{21}+\cdots+x_nA_{n1})+\\ &\quad x_2(x_1A_{12}+x_2A_{22}+\cdots+x_nA_{n2})+\cdots+\\ &\quad x_n(x_1A_{1n}+x_2A_{2n}+\cdots+x_nA_{nn})\\ &=x'A^{*}x. \end{aligned}$$

因为 A^{*}不一定是对称矩阵,所以 f 的矩阵是

$$\frac{1}{2}(A^{*}+A^{*\prime}).$$

注　第2种证明可以应用于 A 不可逆的情形.但是 A 不可

逆时，A^* 的秩最多是 1，因而 $A^*+A^{*\prime}$ 的秩最多是 2. 当 A 的秩小于 $n-1$ 时，$A^*=O$，$f=0$.

2）当 A 是正定矩阵时，f 是实二次型，且此时 A^{-1} 也是正定矩阵，$|A|>0$. 所以 f 也是正定二次型.

3）设 A 的正惯性指数为 p. 故 A^{-1} 的正惯性指数也等于 p. 但是 $|A|$ 与 $(-1)^{n-p}$ 同号. 因此，当

(i) $n-p$ 即 A 的负惯性指数为偶数时，f 的正负惯性指数与 A 的正、负惯性指数相同.

(ii) $n-p$ 即 A 的负惯性指数为奇数时. f 的正、负惯性指数分别等于 A 的负、正惯性指数.

34. 设 $P[x]$ 中多项式 $p_1(x),p_2(x),\cdots,p_s(x)(s\geqslant 2)$ 的次数分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_s$. 证明：如果 $n_1+n_2+\cdots+n_s<\frac{s(s-1)}{2}$. 则 $p_1(x),p_2(x),\cdots,p_s(x)$ 在线性空间，$P[x]$ 中线性相关.

提示 对 s 作数学归纳法.

证明 当 $s=2$ 时，$n_1+n_2<1$. 因此 $n_1=n_2=0$. $p_1(x)$，$p_2(x)$ 都是非零常数，线性相关.

设 $s>2$，并设结论对 $s-1$ 个多项式成立. 来证对 s 个多项式也成立. 可调动 $p_i(x)\quad(i=1,2,\cdots,s)$ 的次序使得

$$n_1\leqslant n_2\leqslant\cdots\leqslant n_s.$$

现在

$$n_1+n_2+\cdots+n_s<\frac{s(s-1)}{2}.$$

如果

$$n_1+n_2+\cdots+n_{s-1}<\frac{(s-1)(s-2)}{2},$$

则由归纳法假设 $p_1(x),p_2(x),\cdots,p_{s-1}(x)$ 线性相关，因此 $p_1(x),p_2(x),\cdots,p_{s-1}(x),p_s(x)$ 也线性相关. 命题得证.

如果

$$n_1+n_2+\cdots+n_{s-1}\geqslant\frac{(s-1)(s-2)}{2},$$

则

$$n_s<s-1,$$

从而

$$n_1\leqslant n_2\leqslant\cdots\leqslant n_s<s-1.$$

$p_1(x),p_2(x),\cdots,p_s(x)$都可由

$$1,x,x^2,\cdots,x^{s-2}$$

线性表出.即 s 个向量 $p_1(x),p_2(x),\cdots,p_s(x)$可由 $s-1$ 个向量 $1,x,\cdots,x^{s-2}$线性表出.这 s 个向量一定线性相关.命题得证.

35. 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 级实对称矩阵.证明:存在实对称矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得$\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{A}$ 的充分必要条件是:$\boldsymbol{A}$ 是一个半正定矩阵.

证明 条件的必要性,如果 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{A}$,并设 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为$\lambda_1^2,\lambda_2^2,\cdots,\lambda_n^2$.因为 $\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵,所以 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$都是实数,$\lambda_i^2\geqslant0,i=1,2,\cdots,n$.即 $\boldsymbol{A}$ 是半正定矩阵.

条件的充分性.如果 $\boldsymbol{A}$ 是半正定矩阵.则有正交矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使

$$\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_i\geqslant0(i=1,2,\cdots,n)$.令

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1}&&&\\&\sqrt{\lambda_2}&&\\&&\ddots&\\&&&\sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}\boldsymbol{T}^{-1},$$

即有

$$B^2 = A.$$

36. 设 A 是非退化实矩阵，则它是一个正交阵和一个正定阵的乘积.

证明 A 是非退化实矩阵，则 $A'A$ 是正定阵. 由前一题知有正定阵 C 使得 $A'A = C^2 = C'C$. 于是 $(C^{-1})'A'AC^{-1} = (AC^{-1})'(AC^{-1})$ 即 $B = AC^{-1}$ 是正交阵. 因此 $A = BC$ 是正交阵与正定阵的乘积.

37. 设 A 是反对称矩阵，则 $(E-A)(E+A)^{-1}$ 是正交阵.

证明
$$\begin{aligned}&((E-A)(E+A)^{-1})'(E-A)(E+A)^{-1}\\ =&(E+A')^{-1}(E-A')(E-A)(E+A)^{-1}\\ =&(E-A)^{-1}(E+A)(E-A)(E+A)^{-1}\\ =&(E-A)^{-1}(E-A)(E+A)(E+A)^{-1}\\ =&E.\end{aligned}$$

同样可证 $(E-A)(E+A)^{-1}((E-A)(E+A)^{-1})' = E$. 故 $(E-A)(E+A)^{-1}$ 是正交矩阵.

38. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 n 个彼此不等的实数，$f_1(x)$，$f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 是 n 个次数不大于 $(n-2)$ 的实系数多项式. 证明

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \cdots & f_2(a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix} = 0.$$

证明 令

$$g(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_n) \\ f_2(x) & f_2(a_2) & \cdots & f_2(a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(x) & f_n(a_2) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix}.$$

这是 x 的多项式，或者 $g(x)=0$ 或者 $\partial(g(x))\leqslant n-2$. 若为前者，结论已成立. 若为后者. $g(x)$ 在 $x=a_2,a_3,\cdots,a_n$ 时皆为零. 它有至少 $n-1$ 个根，而次数 $\leqslant n-2$，这是不可能的，故 $g(x)=0$，当然有 $g(a_1)=0$.