一. 实对称阵的特征值都是实数.

二. 实对称阵属于不同特征值的特征向量不仅线性无关.

而且正交.

三. 实对称阵一定可对角化.

实对称阵A可与对角阵Λ正交相似.

即存在正交阵P. 使得 $P^{-1}AP=P^TAP=\Lambda$.

四. 用正交变换法化实二次型为标准形.

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i,j}^{n}a_{ij}x_ix_j=X^TAX \quad a_{ij}=a_{ji}, \ \forall i,j.$$

它的矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & \cdots & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 实对称阵.

$\exists$正交阵 P, 使 $P^{-1}AP=P^TAP=\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

其中 λ_i 刚好是 A 的 n 个特征值. 它的标准形为

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2.$$

习题. 1. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 R^n 中的一个极大无关组.(基)

证明: (1). 若对 $\gamma\in R^n$. 满足 $(\gamma,\alpha_i)=0$. $i=1,2,\cdots,n$.

则 $\gamma=0$.

(2) 若 $\gamma_1,\gamma_2\in R^n$. 且对任一 $\alpha\in R^n$. 有 $(\gamma_1,\alpha)=(\gamma_2,\alpha)$, 则 $\gamma_1=\gamma_2$.

证明：(1). 设 $\gamma=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$　$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$.　$(\gamma,\varepsilon_1)=x_1=0$ ②

$\because$ $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 也是 R^n 的一个极大无关组.

$\therefore$ $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 等价.

$\exists$ $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$，使得

$\varepsilon_i=a_{i1}\alpha_1+a_{i2}\alpha_2+\cdots+a_{in}\alpha_n$.　$i=1,\cdots,n$.

$(\gamma,\varepsilon_i)=(\gamma,\ a_{i1}\alpha_1+a_{i2}\alpha_2+\cdots+a_{in}\alpha_n)$

$=a_{i1}(\gamma,\alpha_1)+a_{i2}(\gamma,\alpha_2)+\cdots+a_{in}(\gamma,\alpha_n)=0$.

$\Longrightarrow$ $x_i=0$　$i=1,\cdots,n$. $\Rightarrow$ $\gamma=0$.

(2). 设 $\gamma_1=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$.　$\gamma_2=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$.　(要证 $\gamma_1=\gamma_2$ 只需证 $a_i=b_i$).

由题设 对 $\forall\alpha\in R^n$. 有 $(\gamma_1,\alpha)=(\gamma_2,\alpha)$.

取 α 分别为 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$：

ε_1　ε_1

ε_2　ε_2

$\vdots$

ε_n　ε_n

$\Longrightarrow$ $a_i=b_i$.　$i=1,\cdots,n$.　$\Longrightarrow$ $\gamma_1=\gamma_2$. ∎

方法二. 由题设 $(\gamma_1-\gamma_2,\ \alpha)=0$.

取 α 分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$. 则 $(\gamma_1-\gamma_2,\ \alpha_i)=0$　$i=1,\cdots,n$.

由(1). $\Longrightarrow$ $\gamma_1-\gamma_2=0$ $\Longrightarrow$ $\gamma_1=\gamma_2$. ∎

2. 设 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ 是 R^n 中的一组标准正交向量组. A是n阶正交 ③

阵. 证明: $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_n$ 也是 R^n 中的一组标准正交向量组.

证明: (正交变换保持向量内积及长度不变).

$(A\alpha_i, A\alpha_j) = (\alpha_i, \alpha_j) = 0$ ✓ $\forall i \neq j$,

$\therefore A\alpha_1, \dots, A\alpha_n$ 是 R^n 中的正交向量组.

$\|A\alpha_i\| = \|\alpha_i\| = 1$ ✓

$\therefore A\alpha_1, \dots, A\alpha_n$ 均为单位向量.

$\therefore A\alpha_1, \dots, A\alpha_n$ 是单位正交向量组. ∎

3. 设n阶方阵 A, B 满足 $r(A)+r(B)<n$. 证明:

A, B 有公共的特征值, 有公共的特征向量.

(分析: $\begin{cases} AX_0 = \lambda_0 X_0 \\ BX_0 = \lambda_0 X_0 \end{cases}$). $\begin{cases} (A-\lambda_0 E)X_0 = 0 \\ (B-\lambda E)X_0 = 0 \end{cases}$

证明: $\because r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \leq r(A) + r(B) < n$

$\therefore$ 齐次线性方程组 $\begin{cases} AX = 0\cdot X \\ BX = 0\cdot X \end{cases}$ 有非零解 X_0.

即 0是A, B的公共特征值.

而非零解 X_0 就是A, B的公共特征向量.

① 若 $AX = \lambda X$, $X \neq 0$ 则 λ 是A的特征值.

② $|\lambda E - A| = 0$. λ 是A的特征值.

例 $AX_i = iX_i$, $X_i \neq 0$, $i=1,2,3$

$AX_1 = X_1$,

$AX_2 = 2X_2$

$AX_3 = 3X_3$

则 $|2E - A| = 0$.

$|2E + A| = 0$.

$|2E + 3A| = 0$.

4. 设 $\lambda \neq 0$ 是 m 阶矩阵 $A_{m\times n}B_{n\times m}$ 的特征值，则 λ 也是 n 阶矩阵 BA 的特征值.

证明：由题设 $ABX=\lambda X$. ① 其中 $X\neq 0$ 为列向量

即 X 是 AB 对应于特征值 λ 的特征向量.

①式两边左乘 B, $BA(BX)=\lambda(BX)$

若 $BX=0$. 由①式 $\Rightarrow \lambda X=0$ 而 $\lambda\neq 0$ $X=0$ 矛盾!

$\therefore BX\neq 0$ 即 λ 也是 BA 的特征值. ∎

5. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$

(2017). $=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$

在正交变换 $X=QY$ 下的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$. 求 a 的值及

正交矩阵 Q.

解：f 的矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&a\end{pmatrix}$.

$\because f$ 的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+0\cdot y_3^2$

$\therefore 0$ 是 A 的一个特征值 $\Rightarrow |0\cdot E-A|=0$.

$\Rightarrow |A|=0$. $\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&1&-3\\0&-1&0\\-3&1&a+1\end{vmatrix}$

$=-(3a+3-9)=-3(a-2)$

$\Rightarrow a=2$.

$|\lambda E-A|=\lambda(\lambda+3)(\lambda-6)$ $\lambda_1=-3$. $\lambda_2=6$. $\lambda_3=0$.

$\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$. $\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$. $\beta_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

$$Q = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}.$$

6. 设 $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3\\ -1 & 3 & -3\\ 1 & -2 & a\end{pmatrix}$. 与 $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$. 相似.
(2015年)

(1). 求 a, b.

(2). 求可逆阵 P. 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

解: (1) 由于 A 与 B 相似.

$\therefore$ $trA = trB$. $|A|=|B|$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 3+a=2+b \\ 2a-3=b \end{cases} \Rightarrow a=4.\ b=5.$$

(2). $|\lambda E-A|=\underline{|\lambda E-B|}=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 0\\ 0 & \lambda-5 & 0\\ 0 & -3 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-5)$.

$\therefore$ A 的特征值为 $\lambda_1=1$ (二重) $\lambda_2=5$.

$P=\begin{pmatrix}2 & -3 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ $\Lambda=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 5\end{pmatrix}$. $(\lambda E-A)X=0$.

7. 证明: (1) 正交阵 A 的特征值的绝对值等于1.

(2). 正交阵 A 的行列式 $|A|=-1$. 则 $\lambda=-1$ 是 A 的特征值.

证明.. ~~(1) A 为正交阵 $\Rightarrow AA^T=E$.~~

~~$\Rightarrow |A|^2=|A||A^T|=|AA^T|=|E|=1$ $\Rightarrow$ $|A|=\pm1$.~~ ✓.

(2). $|A|=\pm1=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

证明：(1). A是正交阵. $A^T=A^{-1}$.

∴ $\lambda=\frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda^2=1 \Rightarrow |\lambda|=1$.

即 λ 为 1 或 -1.

(2). $-1=|A|=\lambda_1\cdots\lambda_n$. $\Rightarrow$ $\lambda=-1$ 是A的特征值.

8. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}$ $\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ 已知 $Ax=\beta$ 有解不唯一.

求 (1) a 的值.

(2) 正交阵 Q. 使 Q^TAQ 为对角形.

解: (1) $Ax=\beta$ 不唯一，则 $|A|=0$.

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}=(a+2)\begin{vmatrix}1&1&a\\1&a&1\\1&1&1\end{vmatrix}=(a+2)\begin{vmatrix}1&1&a\\0&a-1&1-a\\0&0&a-1\end{vmatrix}$$

$=(a+2)(a-1)^2$. $\Rightarrow$ $a=-2$ 或 $a=1$.

当 $a=1$ 时. $\bar{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&-2\end{pmatrix}$ 无解. $r(\bar{A})=2\neq r(A)=1$.

当 $a=-2$ 时 $\bar{A}=\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\1&-2&1&1\\-2&1&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&-3&3&0\\0&3&-3&0\end{pmatrix}$ $r(\bar{A})=r(A)=2$ 有无穷多解

$a=-2$ 满足条件.

(2). 求A的特征值.特征向量.

施密特正交化.单位化. $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\0&-\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&5\\2&2&4\\3&0&5\end{pmatrix} \qquad \lambda=8 \text{ 是 } A \text{ 的一个特征值.}$$

A 的每一行之元素和均为 a. 则 $\lambda=a$ 是 A 的一个特征值.

9. 设 α 是 A 的对应于特征值 λ_0 的特征向量. 证明:

(1). α 是 A^m 的对应于特征值 λ_0^m 的特征向量.

(2). 对多项式 $f(x)$. α 是 $f(A)$ 的对应于 $f(\lambda_0)$ 的特征向量

证明:(2) 设 $f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\cdots+a_{m-1}x+a_m$.

$$B=f(A)=a_0A^m+a_1A^{m-1}+a_2A^{m-2}+\cdots+a_{m-1}A+a_mE.$$

已知 $A\alpha=\lambda_0\alpha$.

$$\begin{aligned}B\alpha=f(A)\alpha&=[a_0A^m+a_1A^{m-1}+a_2A^{m-2}+\cdots+a_{m-1}A+a_mE]\alpha\\&=a_0A^m\alpha+a_1A^{m-1}\alpha+a_2A^{m-2}\alpha+\cdots+a_{m-1}A\alpha+a_m\alpha\\ \text{由(1)}&=a_0\lambda_0^m\alpha+a_1\lambda_0^{m-1}\alpha+a_2\lambda_0^{m-2}\alpha+\cdots+a_{m-1}\lambda_0\alpha+a_m\alpha\\&=[a_0\lambda_0^m+a_1\lambda_0^{m-1}+a_2\lambda_0^{m-2}+\cdots+a_{m-1}\lambda_0+a_m]\alpha\\&=\underline{f(\lambda)}\alpha.\end{aligned}$$

即 $f(\lambda)$ 是 A 的特征值. ∎

λ 是 A 的特征值. 则 $A^5+4A^3-5A^2+E$ 的特征值 $\lambda^5+4\lambda^3-5\lambda^2+1$.