

### 高等数学A1 模3

#### 1. 单项选择题(每小题3分, 共15分)

- (1) 若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 一阶可微, 且当 $x \neq 0$ 时有 $f(x) = x^p \sin \frac{1}{x}$ , 则 ( )  
A.  $p > 1 + f(0)$  B.  $p > f(0)$  C.  $p < 1 + f(0)$  D.  $p < f(0)$
- (2) 函数 $f(x) = 1 + \arctan x$ 为 ( )  
A. 奇函数 B. 偶函数 C. 周期函数 D. 有界函数
- (3) 若函数 $f(x)$ 满足 $f'(x) = x^2 + f^2(x)$ , 则 $f(x)$ 必为 ( )  
A. 奇函数 B. 偶函数 C. 单调函数 D. 有界函数
- (4)  $\int_{-1}^1 (x^{2012} + \sin^{2013}(x))dx =$  ( )  
A.  $\frac{2}{2014}$  B.  $\frac{2}{2013}$  C.  $\frac{2}{2012}$  D. 0
- (5) 函数 $f(x) = \cos x$ 在 $x = 0$ 点的泰勒公式中,  $x^6$ 的系数是 ( )  
A.  $-\frac{1}{6!}$  B.  $\frac{1}{6!}$  C.  $-\frac{1}{6}$  D.  $\frac{1}{6}$

#### 2. (每小题3分, 共15分)填空题

- (1) 若  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+ax+b}{1-x} = 5$ , 则 $a + b =$ \_\_\_\_\_
- (2) 当 $x \rightarrow 0$ 时,  $1 - \cos x$ 是 $\alpha x^\beta$  的等价无穷小, 则 $\alpha\beta =$ \_\_\_\_\_.
- (3) 设函数 $y = x^e + e^x$ , 则 $\frac{dy}{dx} =$ \_\_\_\_\_
- (4)  $\int_0^3 \sqrt{9 - x^2} dx =$ \_\_\_\_\_
- (5) 微分方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的通解为 $y =$ \_\_\_\_\_

#### 3. 求极限(每小题5分, 共15分)

- (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} [\frac{1}{\sqrt{1+n^2}} + \frac{1}{\sqrt{2+n^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+n^2}}]$ ; (2)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$ ;  
(3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\frac{\pi}{2} - \arctan x)$

#### 4. 求导数或微分(每小题5分, 共15分)

- (1) 设函数 $y = y(x)$ 由 $x = 1 - \cos t$ ,  $y = t - \sin t$  所确定, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$ ;  
(2)  $y = x^2 e^{2x}$ , 求 $y^{(n)}$ ;  
(3) 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $\ln(x+y) - xy = 0$ 所确定, 求 $dy$ .

#### 5. 计算下列积分(每小题5分, 共15分)

- (1)  $\int \frac{1}{x(1+x^n)} dx$ ; (2)  $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$ ; (3)  $\int_0^\pi \sqrt{1 - \sin 2x} dx$

#### 6. 解下列方程(每小题5分, 共15分)

- (1)  $y' = \frac{x-y}{x+y}$ ; (2)  $y'' - 2y' + 2y = 0$  (3)  $y'' - \frac{y'}{x} = 1$

#### 7. 证明题(10分) 设函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 一阶可导且满足

$$0 \leq f(x) \leq -xf'(x), x \in [1, +\infty),$$

证明必有  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .