Модуль «Прикладная космонавтика»
Т2.2. Орбитальные маневры

Габзетдинов Р.И.
Университетская гимназия

*Если в этой, или других методичках и материалах вы найдете ошибку или опечатку, просьба написать об этом*
*t.me/Samnfuter vk.com/gabzetdinoff crispuscrew71@gmail.com crispuscrew@outlook.com*

## 1 Параболическая орбита / Parabolic orbit

*Такая орбита, что ее эксцентриситет равен 1. Ее каноническое уравнение:*

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x \qquad \text{где} \quad p > 0 \text{ - параметр параболы} \quad (1)$$

Для расчета скорости в произвольной точке параболической траектории, можно применять следующую формулу

$$|\overrightarrow{V}| = \sqrt{\frac{2 \cdot \mu}{|\overrightarrow{r}|}} \qquad (2)$$

где $\overrightarrow{V}$ - скорость в этой точке
$\mu$ - грав. параметр центрального тела
$\overrightarrow{r}$ - радиус-вектор этой точки

Данная орбита характеризуется тем, что в точке ее перицентра скорость равна *второй космической* скорости для данной высоты.

## 2 Гиперболическая орбита / Hyperbolic orbit

*Геометрическое место точек на плоскости, для которых модуль разности расстояний до двух особых точек, называемых фокусами, постоянен.*

*Такая орбита, что ее эксцентриситет больше 1. Ее каноническое уравнение:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (3)$$

где y, x - оси
a - большая полуось
b - малая полуось

Для унификации формул с эллиптическими орбитами, большие полуоси ($a$) на гиперболических траекториях принимают отрицательными, тогда:

$$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \qquad (4)$$

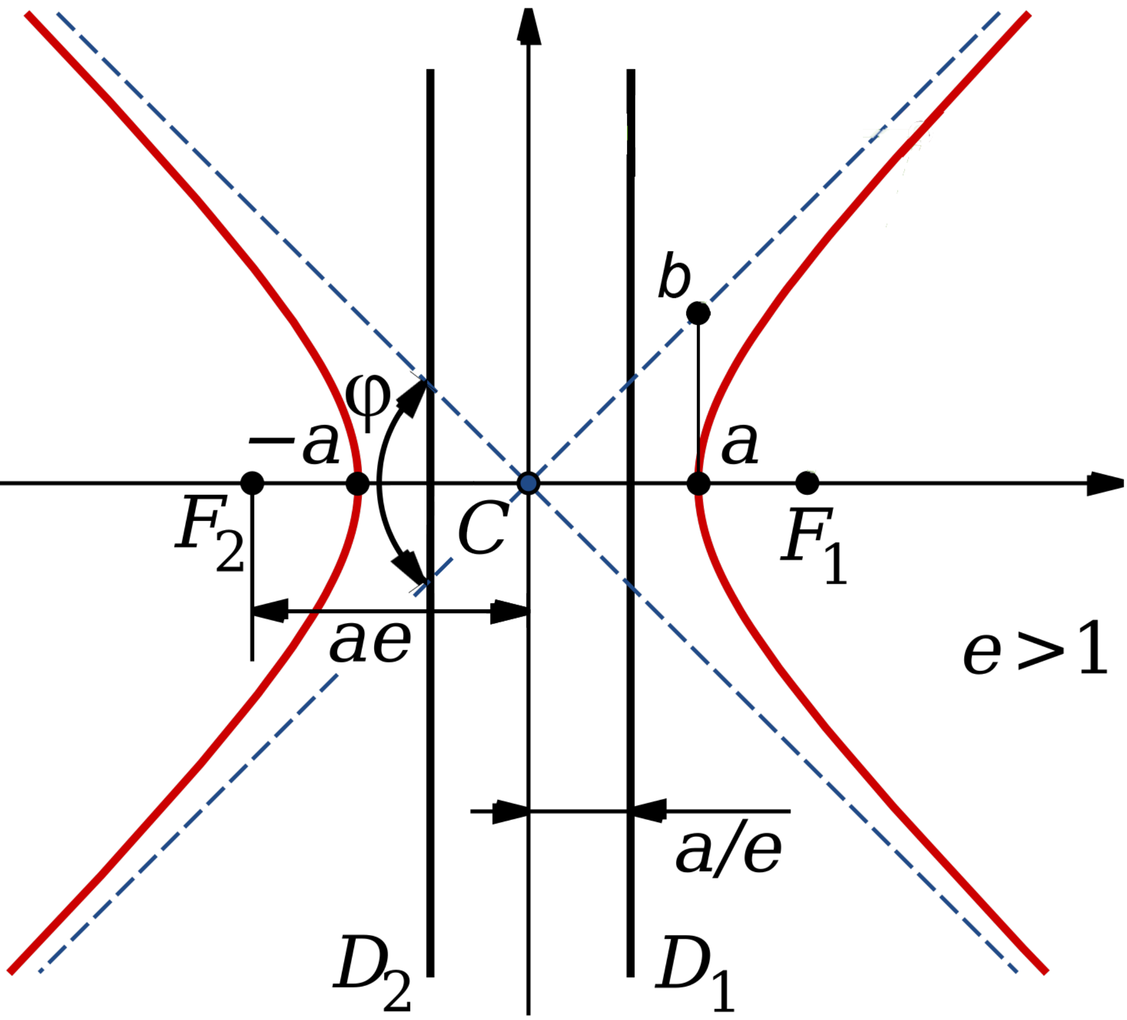
где e - эксцентриситет орбиты
a - большая полуось орбиты
b - малая полуось орбиты

$$q = p = r_p = a \cdot (1 - e) \qquad \text{где} \qquad \begin{array}{l} q, p, r_p \text{ - перицентрическое расстояние} \\ \text{a - большая полуось орбиты} \\ \text{e - эксцентриситет орбиты} \end{array} \tag{5}$$

Для гиперболической траектории вводится понятие *избытка скорости*, которое являет собой скорость тела на бесконечном удалении от центрального.

$$|\overrightarrow{V_\infty}| = \sqrt{\frac{-\mu}{a}} \qquad \text{где} \qquad \begin{array}{l} \overrightarrow{V_\infty} \text{ - избыток скорости} \\ \mu \text{ - гравитационный параметр центрального тела} \\ \text{a - большая полуось орбиты} \end{array} \tag{6}$$

$$\varphi = 2 \cdot \arccos\left(\frac{1}{e}\right) = 2 \cdot \mathrm{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) \qquad \text{где} \qquad \begin{array}{l} \varphi \text{ - угол между асимптотами} \\ \text{e - эксцентриситет орбиты} \\ \text{a - большая полуось орбиты} \\ \text{b - малая полуось орбиты} \end{array} \tag{7}$$



Формула расчета скорости в произвольной точке аналогична таковой для эллиптической орбиты, но помним что a < 0:

$$|\overrightarrow{V}| = \sqrt{\mu \cdot \left(\frac{2}{|\overrightarrow{r}|} - \frac{1}{a}\right)} \quad \text{где} \quad \begin{array}{ll} \overrightarrow{V} & \text{- скорость тела} \\ \mu & \text{- гравитационный параметр центрального тела} \\ \overrightarrow{r} & \text{- радиус-вектор тела} \\ a & \text{- большая полуось орбиты} \end{array} \tag{8}$$

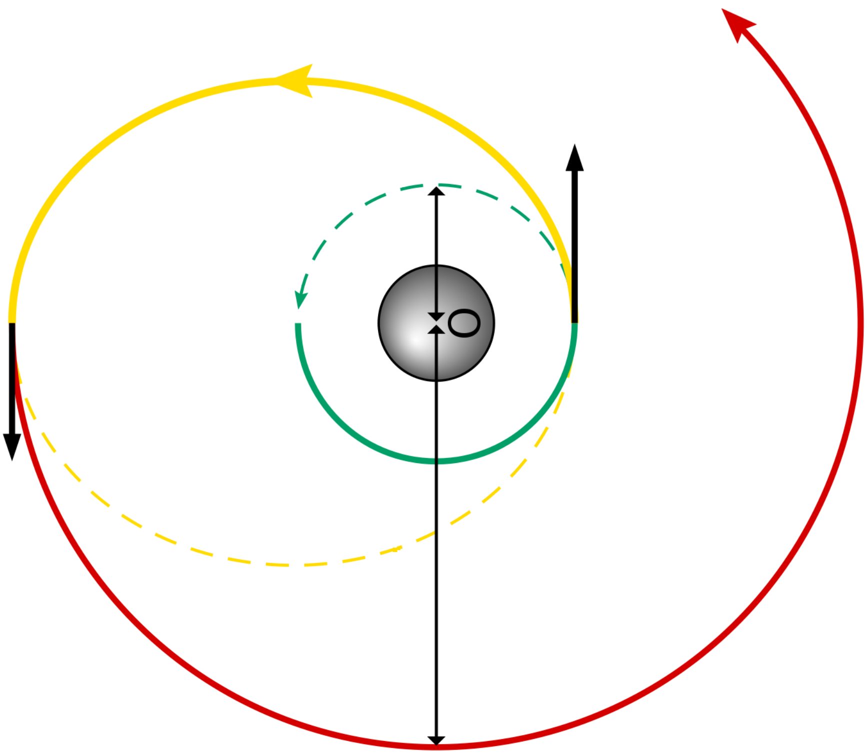
Данная орбита характеризуется тем, что в точке ее перицентра скорость *больше второй космической* скорости для данной высоты.

## 3 Орбита Гомана - Цандера / Hohmann transfer

Данный маневр, как и большинство "классических"переходных траекторий определяется между двумя круговыми орбитами, но, с небольшими изменениями, может быть использована и для произвольных *эллиптических* орбит.

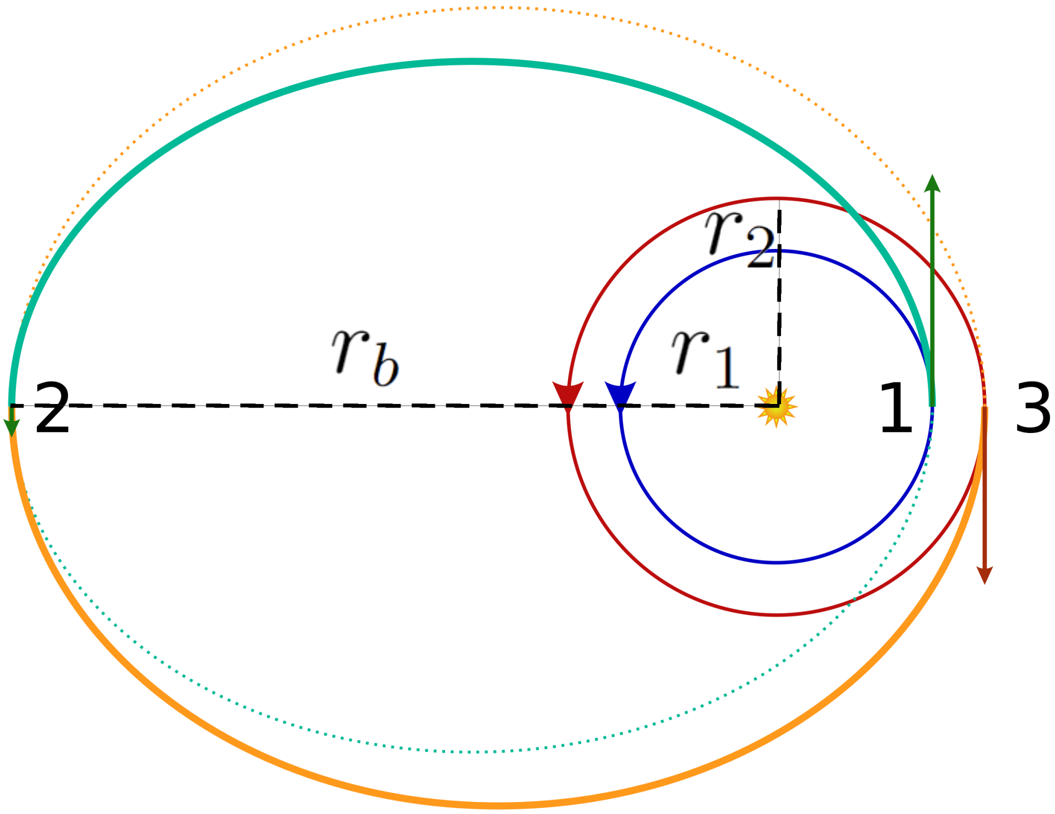
По сути представляет собой 2 последовательных маневра:

1. Зажигание в произвольной точке начальной орбиты, создание переходной орбиты с апоцентром на высоте конечной орбиты
2. Зажигание в апоцентре переходной траектории - округление и выход на конечную орбиту




Маневр является достаточно экономичным и быстрым, а главное - универсальным. Расчет времени осуществляется как половина периода переходной орбиты.

# 4 Биэллиптический переход / Bi-elliptic transfer




Как и Гомановская траектория определяется между двумя круговыми орбитами, и аналогично Гоману, может быть применена и для более широкого круга орбит.

Представляет из себя последовательный переход между 4 траекториями

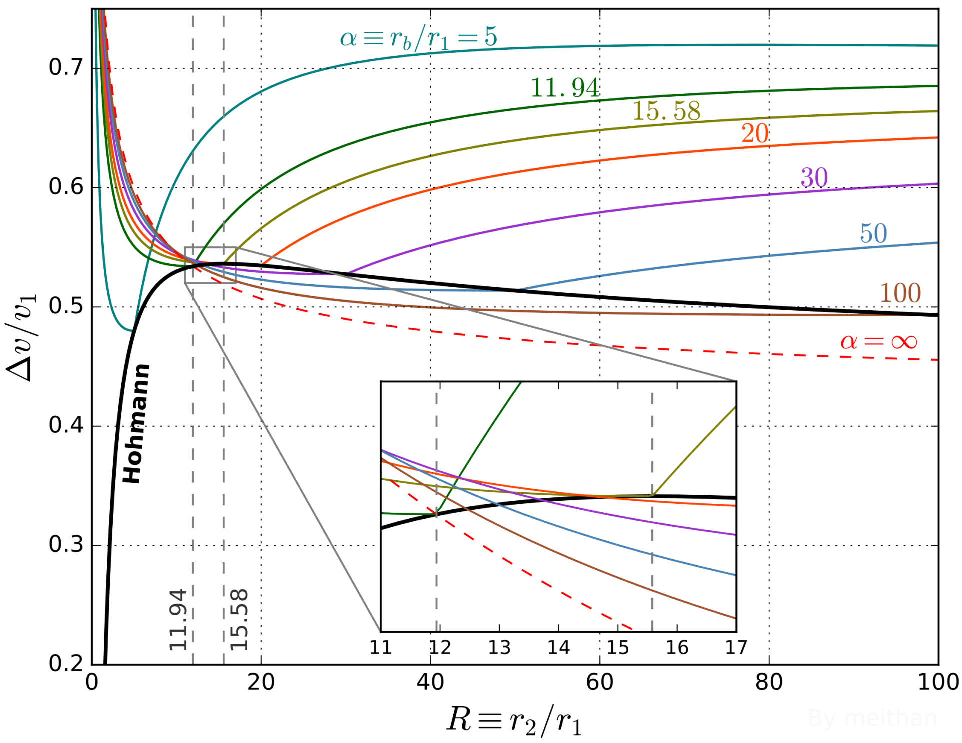
1. Стартовая орбита, высотой $r_1$, зажигание в произвольной точке переход на
2. Первую переходную орбиту с апоцентром равным $r_b$, где $r_b >$ или $>> a_{start}$
3. В точке апоцентра происходит зажигание для изменения перицентра на высоту
4. Конечной орбиты, высотой $r_2$ или $r_3$, в зависимости от обозначений

При некоторых условиях (чаще всего при большой разнице между конечной и начальной орбитой) дает ощутимый выигрыш в $\vartriangle V$ относительно, например, Гомановской, но проигрывает последней во времени.

# 5 Прочие переходы

Существует множество других переходов, но они меньше используются на практике, т.к. либо крайне затратны, хоть и выигрывают по времени, либо слишком продолжительны (порою в десятки лет), хоть и обеспечивают выигрыш в $\vartriangle V$.

На практике нужно помнить про возможность Гомановской траектории с конечной орбитой выше целевой и преждевременного выхода из нее, что может быть полезно для перелетов требующих минимизации времени (например пилотируемые запуски).




Сравнение Гомановской и би-эллиптической траектории

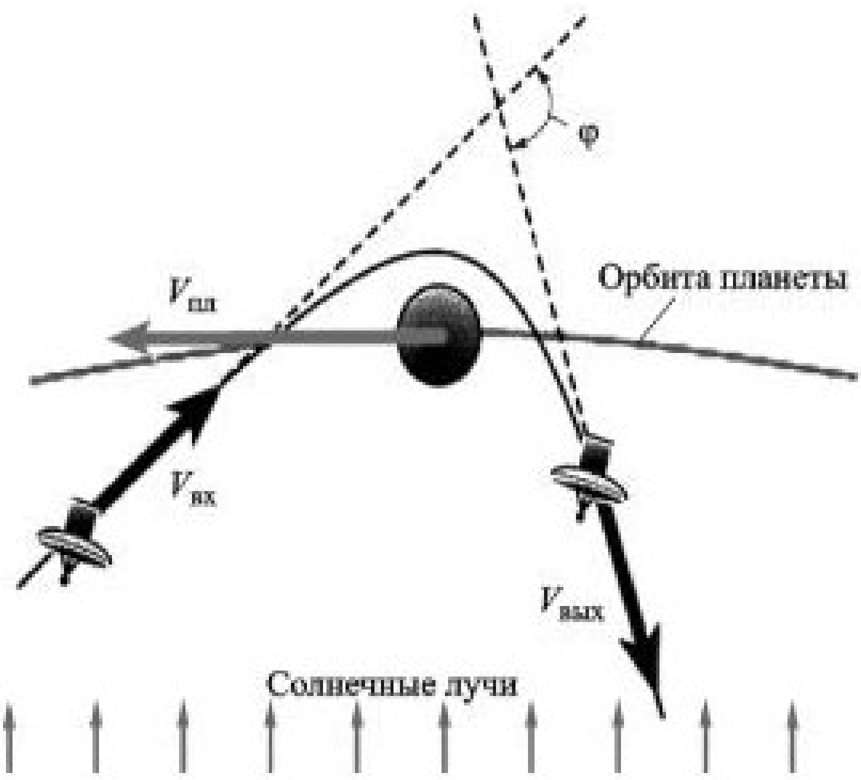



Схема гравитационного маневра

# 6 Гравитационный маневр / Gravity assist

Гравитационный маневр, или гравитационная праща, представляет собой использование взаимного гравитационного влияния аппарата и планеты (небесного тела), из-за несравненно большей массы последнего, позволяющее очень сильно изменять скорость аппарата без использования двигательной установки.

При движении *за планетой* (по траектории ее движения), позволяет ускорять аппарат в СК центрального тела, за счет замедления в ней планеты.

При движении *перед планетой* (по траектории ее движения), позволяет замедлять аппарат в СК центрального тела, за счет ускорения в ней планеты.

В СК планеты представляет собой гиперболическую траекторию. В СК центрального тела позволяет набрать скорость $_\Delta V$, направленную по векторной разности начальной и конечной скоростей.

$$_\Delta V = 2V_\infty \cdot \sin(\varphi/2) = \frac{2V_\infty \cdot \mu}{\mu + q \cdot V_\infty^2} \tag{9}$$

где

| | |
|---|---|
| $_\Delta V$ | - изменение скорости |
| $\varphi$ | - угол между начальной и конечной скоростью тела (больший) |
| $\mu$ | - гравитационный параметр центрального тела |
| $q$ | - перицентр орбиты |
| $V_\infty$ | - избыток скорости |

$$e = 1 + \frac{q \cdot V_\infty^2}{\mu} \tag{10}$$

где

| | |
|---|---|
| $\mu$ | - гравитационный параметр центрального тела |
| $q$ | - перицентр орбиты |
| $V_\infty$ | - избыток скорости |

Расчет пролетной траектории производиться либо приближенно - при попадании в *Сферу Хилла* пролетного тела оно считается центральным, либо итеративно, что требует больших вычислительных мощностей.

*Сфера Хилла* - область вокруг небесного тела, обращающегося вокруг другого тела, где гравитация первого способна поддерживать стабильную или квазистабильную орбиту спутника. Располагается между точками Лагранжа *L1* и *L2*.

$$r \approx a(1-e) \cdot \sqrt[3]{\frac{m}{3(M+m)}} \tag{11}$$

где

| | |
|---|---|
| $r$ | - радиус Сферы Хилла |
| $a$ | - большая полуось небесного тела |
| $M$ | - масса центрального тела |
| $m$ | - масса небесного тела |
| $e$ | - эксцентриситет небесного тела |

Так же хочется упомянуть *эффект Оберта*: эффект, проявляющийся в том, что ракетный двигатель, движущийся с высокой скоростью, совершает больше полезной работы, чем такой же двигатель, движущийся медленно.

На практике используется во время гравитационных маневров при маневрах в перицентре, по известным формулам можно доказать что $_\Delta V \sim \frac{1}{(V_p)^2}$ при постоянном перицентре.