Модуль «Прикладная космонавтика»
Т1.1. Небесная механика

Габзетдинов Р.И.
Университетская гимназия

Если в этой, или других методичках и материалах вы найдете ошибку или опечатку, просьба написать об этом t.me/Samnfuter vk.com/gabzetdinoff crispuscrew71@gmail.com crispuscrew@outlook.com .

1 Гелиоцентрическая система мира

Гелиоцентрическая система мира: представление об устройстве мироздания, в котором **Солнце является центральным телом**, вокруг которого обращаются другие небесные тела, в частности Земля. Возникла еще в античности, но была оформлена и распросранена *Николаем Коперником* в 1543 году. Была значительно дополнена и исправлена *Джордано Бруно*.

Несовершенность данной системы состоит в *круговых* орбитах планет, *неподвижности Солнца*, в т.ч. внутри солнечной системы, и неверном представлении о *планетах состоящих из невесомой легкой материи*.

Так же, вводятся понятия **сидерического** и **синодического** периодов.

Сидерический (T**)** - *период обращения тела вокруг барицентра центральных тел, относительно далёких звёзд, условно неподвижных.*

Синодический (S**)** - *период между двумя одинаковыми конфигурациями тела.*
Конфигурация небесного тела - особое взаимное расположение Солнца, Земли и небесного тела

Для тел обращающихся вокруг Солнца можно сказать что

$$\frac{1}{S} = \left|\frac{1}{T_\oplus} - \frac{1}{T}\right| \quad \text{где} \quad \begin{array}{l} S \text{ - синодический период тела} \\ T \text{ - сидерический период тела} \\ T_\oplus \text{ - сидерический период} \end{array} \qquad (1)$$

2 Законы Кеплера/Ньютона

Некоторые неточности в гелиоцентрической системе мира вызывали расхождения с наблюдениями, что заметил *Тихо Браге*. Вследствие этого **Иоганн Кеплер** вывел 3 закона, на которых, в немного модифицированном виде, строится небесная механика:

2.1 Первый закон Кеплера

Первый закон: все планеты движутся по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

Эллипс определяется как *замкнутая кривая на плоскости, в любой точке которой **сумма расстояний** до двух особых точек, лежащих внутри эллипса и называемых его **фокусами (F1, F2), постоянна***.

Вместе с законами, Кеплер вводит понятие **орбиты**, которое более точно определяется как: *траектория движения тела относительно центрального тела (или барицентра системы центральных тел, если их несколько).*

2.2 Второй закон Кеплера

Второй закон: радиус-вектор планеты в равные промежутки времени описывает равновеликие площади.

Радиус-вектор планеты же отсчитывается относительно центрального тела (или барицентра системы центральных тел, если их несколько). Второй закон позволяет нам утверждать что *в точках орбиты, где тело летит ниже - оно движется быстрее, а где выше, наооборот, медленее*.

2.3 Третий закон Кеплера

Третий закон: квадраты сидерических периодов планет пропорциональны кубам больших полуосей их эллиптических орбит.

Т.е. : $$\frac{{T_1}^2}{{T_2}^2} = \frac{{a_1}^3}{{a_2}^3}, \quad \text{где} \quad \begin{array}{l} a \text{ - большая полуось орбиты} \\ T \text{ - период обращения по орбите, т.е. сидерический} \end{array} \tag{2}$$

Большая полуось орбиты - *половина длины наибольшего диаметра эллипса, т.е. длина хорды, проходящей через два фокуса и центр*.

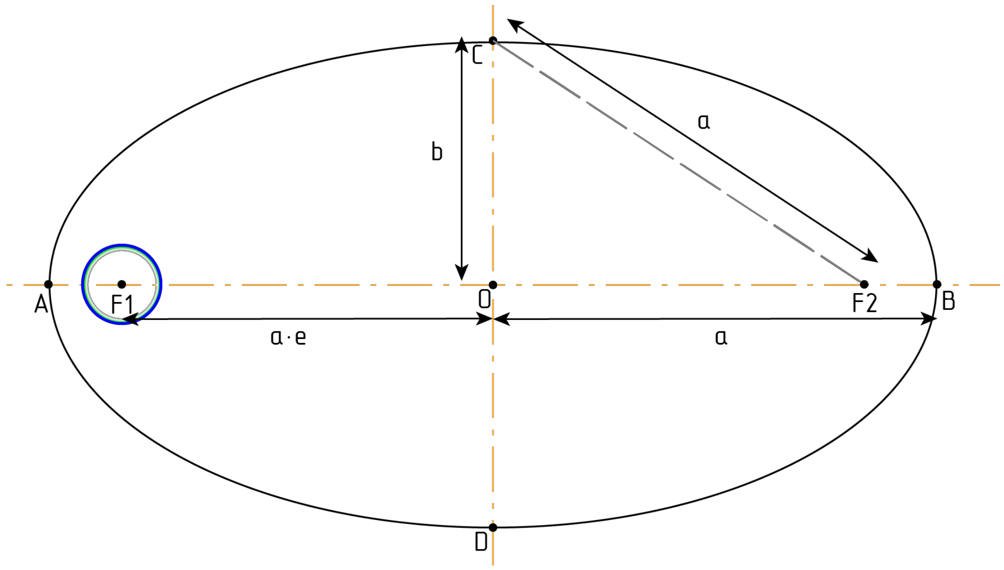
Для практических расчетов важно помнить **третий уточнённый закон Кеплера для ограниченной задачи двух тел** (зачастую просто 3-й уточненный закон Кеплера):

$$4\pi^2 \cdot a^3 = \mu \cdot T^2, \quad \text{где} \quad \begin{array}{l} a \text{ - большая полуось орбиты} \\ \mu \text{ - гравитационный параметр центрального тела} \\ T \text{ - период обращения по орбите} \end{array} \tag{3}$$

$$\mu = GM, \quad \text{где} \quad \begin{array}{l} \mu \text{ - гравитационный параметр тела} \\ G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ в системе СИ} \\ M \text{ - масса тела} \end{array} \tag{4}$$

3 Кеплеровы и иные элементы орбит

3.1 Большая и малая полуоси, эксцентриситет



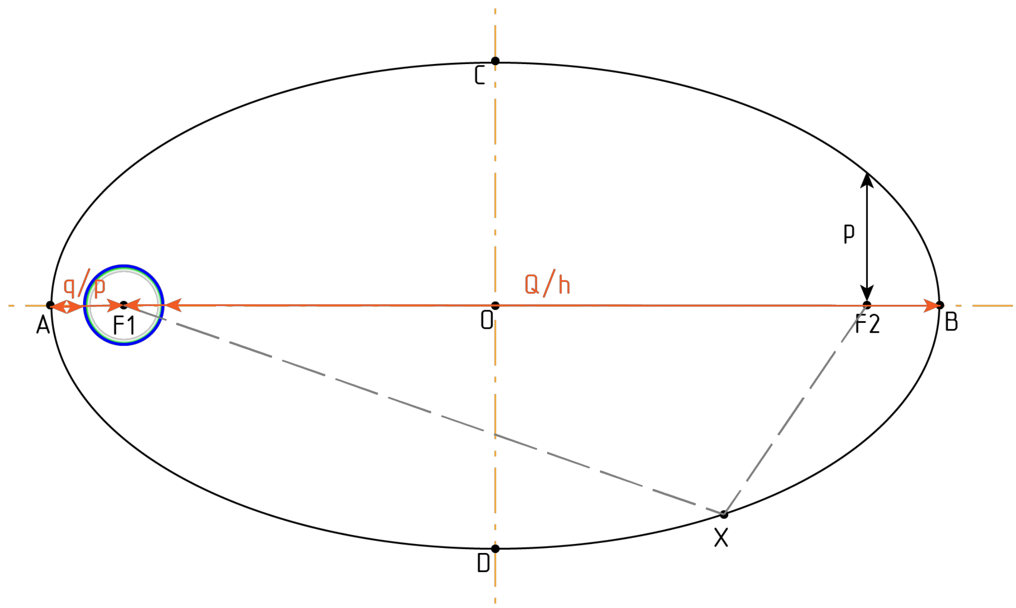
A, B, C, D, O - точки эллипса **F1, F2 - фокусы / focus**

Эллипс / Ellipse - множество точек на плоскости, для которых сумма расстояний до двух особых точек, называемых фокусами, больше расстояния между ними и постоянна.

a - большая полуось / semi-major axis
b - малая полуось / semi-minor axis
c - линейный эксцентриситет / фокальный параметр / linear eccentricity
e - эксцентриситет / eccentricity

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \qquad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

3.2 Фокальный параметр, апоцентр и перицетнр



Q / h - апоцентр / apoapsis - наиболее *удаленная* от центрального тела точка на орбите, так же расстояние от центрального тела / его поверхности до этой точки.

$$Q = a \cdot (1 + e), \quad \text{где} \quad \begin{array}{l} Q \text{ - апоцентр} \\ a \text{ - большая полуось} \\ e \text{ - эксцентриситет} \end{array}$$

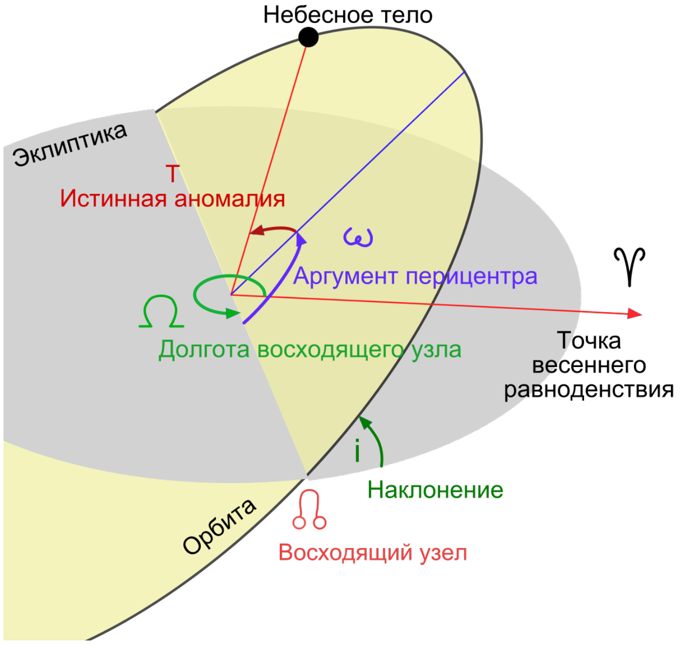
q / p - перицентр / periapsis - *ближайшая* к центральному телу точка на орбите, так же расстояние от центрального тела / его поверхности до этой точки.

$$q = a \cdot (1 - e), \quad \text{где} \quad \begin{array}{l} q \text{ - перицентр} \\ a \text{ - большая полуось} \\ e \text{ - эксцентриситет} \end{array}$$

p - фокальный параметр / semi-latus rectum - половина длины хорды, проходящей через один из фокусов и пенпердикулярная большой оси эллипса.

$$p = \frac{b^2}{a} = a \cdot (1 - e^2), \quad \text{где} \quad \begin{array}{l} p \text{ - фокальный параметр} \\ a \text{ - большая полуось} \\ b \text{ - малая полуось} \\ e \text{ - эксцентриситет} \end{array}$$

3.3 Наклонение, аргумент перицентра, долгота восходящего узла



Примечание: все направления и радиус-вектора отсчитываются от фокуса, в котором находится центральное тело

i / φ **- наклонение / inclination** - угол между плоскостью его орбиты и плоскостью отсчёта (базовой плоскостью), чаще всего это плоскость экватора центрального тела.

Восходящий узел орбиты / ascending node - *точка* орбиты, в которой она пересекает плоскость отсчета и переходит в условное *северное* полушарие.

Нисходящий узел орбиты / descending node - *точка* орбиты, в которой она пересекает плоскость отсчета и переходит в условное *южное* полушарие.

Линия узлов / line of nodes - *прямая*, соединяющая *восходящий* и *нисходящий* узлы орбиты.

ω **- аргумент перицентра / argument of periapsis** - *угол* между *восходящим узлом орбиты* и *перицентром*.

Ω **- долгота восходящего узла / longitude of the ascending node** - *угол* между *точкой весеннего равноденствия* и *восходящим узлом орбиты*

3.4 Истинная и средняя аномалия, расчет скорости тела на эллиптической орбите

ν / θ / f **- истинная аномалия / true anomaly** - *угол* между направлением на *перицентр*, и *радиус-вектором тела*, т.е. его текущим положением.

M **- средняя аномалия / mean anomaly** - *угол* между направлением на *перицентр* и *воображаемым* телом, движущимся по орбите с той же угловой скоростью что и исходное тело, и одновременно с ним проходящее перицентр.

$$|\overrightarrow{V_p}| = \sqrt{\frac{\mu}{a} \cdot \frac{(1+e)}{(1-e)}}, \quad \text{где} \tag{5}$$

$\overrightarrow{V_p}$ - скорость тела в перицентре
μ - гравитационный параметр центрального тела
a - большая полуось орбиты
e - эксцентриситет орбиты

$$|\overrightarrow{V_h}| = \sqrt{\frac{\mu}{a} \cdot \frac{(1-e)}{(1+e)}}, \quad \text{где} \tag{6}$$

$\overrightarrow{V_h}$ - скорость тела в апоцентре
μ - гравитационный параметр центрального тела
a - большая полуось орбиты
e - эксцентриситет орбиты

$$|\overrightarrow{V}| = \sqrt{\mu \cdot \left(\frac{2}{|\overrightarrow{R}|} - \frac{1}{a}\right)}, \quad \text{где} \tag{7}$$

$\overrightarrow{V}$ - скорость тела
μ - грав. параметр центрального тела
$\overrightarrow{R}$ - радиус-вектор тела
a - большая полуось орбиты

4 Космические скорости

I космическая скорость / first cosmic velocity

скорость обращения по круговой орбите, для заданной высоты / *минимальная горизонтальная* скорость, необходимая для обращения тела по заданной высоте.

$$|\overrightarrow{V_I}| = \sqrt{\frac{\mu}{R}}, \quad \text{где} \quad \begin{array}{l} \overrightarrow{V_I} \text{ - первая космическая скорость} \\ \mu \text{ - гравитационный параметр центрального тела} \\ R \text{ - расстояние до центра центрального тела} \end{array} \quad (8)$$

II космическая скорость / second cosmic velocity / escape velocity

минимальная горизонтальная скорость, необходимая для преодоления гравитационного притяжения центрального тела.

$$|\overrightarrow{V_{II}}| = \sqrt{\frac{2 \cdot \mu}{R}} = \sqrt{2}|\overrightarrow{V_I}|, \quad \text{где} \quad \begin{array}{l} \overrightarrow{V_{II}} \text{ - вторая космическая скорость} \\ \overrightarrow{V_I} \text{ - первая космическая скорость} \\ \mu \text{ - см. выше} \\ R \text{ - см. выше} \end{array} \quad (9)$$

III космическая скорость / second cosmic velocity / escape velocity

минимальная горизонтальная скорость, необходимая для преодоления гравитационного центрального и родительского центральному тел.

$$|\overrightarrow{V_{III}}| = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2 \cdot |\overrightarrow{V_p}|^2 + |\overrightarrow{V_{II}}|^2}, \text{где} \quad \begin{array}{l} \overrightarrow{V_{III}} \text{ - III космическая скорость} \\ |\overrightarrow{V_p}| - \overrightarrow{V_I} \text{ планеты} \\ |\overrightarrow{V_{II}}| \text{ - см выше} \end{array} \quad (10)$$

Примечание: по определению I и II космические скорости задаются для ***нулевой*** *высоты, т.е. от поверхности тела, а для высот они соотвественно определяются как* ***круговая*** *и* ***параболическая*** *скорости. Но т.к. как на практике чаще используются именно такие обозначения в методическом материале применены соотвествующие опредления*

5 Аналитическая геометрия. Определение эллипса.

Геометрическое место точек на плоскости, для которых сумма расстояний до двух особых точек, называемых фокусами, постоянна. Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{где} \quad \begin{array}{l} \text{y, x - оси} \\ \text{a - большая полуось} \\ \text{b - малая полуось} \end{array} \quad (11)$$