

Модуль "Прикладная космонавтика"

2.1. Небесная механика

Габзетдинов Р.И.
Университетская гимназия

Если в этой, или других методичках и материалах вы найдете ошибку или опечатку, просьба написать об этом t.me/Samnfuter vk.com/gabzetdinoff crispuscrew71@gmail.com crispuscrew@outlook.com.

1 Гелиоцентрическая система мира

Представление об устройстве мироздания, в котором **Солнце является центральным телом**, вокруг которого обращаются другие небесные тела, в частности Земля. Возникла еще в античности, но была оформлена и распространена *Николаем Коперником* в 1543 году. Была значительно дополнена и исправлена *Джордано Бруно*.

Несовершенство данной системы состоит в *круговых орбитах планет, неподвижности Солнца*, в т.ч. внутри солнечной системы, и неверном представлении о *планетах состоящих из невесомой легкой материи*.

Так же, вводятся понятия **сидерического** и **синодического** периодов.

Сидерический (T) - *период обращения тела вокруг барицентра центральных тел, относительно далёких звёзд, условно неподвижных*.

Синодический (S) - *период между двумя одинаковыми конфигурациями тела*.
Конфигурация небесного тела - особое взаимное расположение Солнца, Земли и небесного тела

Для тел обращающихся вокруг Солнца можно сказать что

$$\frac{1}{S} = \left| \frac{1}{T_{\oplus}} - \frac{1}{T} \right| \quad \text{где} \quad \begin{array}{l} S - \text{синодический период тела} \\ T - \text{сидерический период тела} \\ T_{\oplus} - \text{сидерический период} \end{array} \quad (1)$$

2 Законы Кеплера/Ньютона

Некоторые неточности в гелиоцентрической системе мира вызывали расхождения с наблюдениями, что заметил *Тихо Браге*. Вследствие этого **Иоганн Кеплер** вывел 3 закона, на которых, в немного модифицированном виде, строится небесная механика:

2.1 Первый закон Кеплера

Первый закон: все планеты движутся по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

Эллипс определяется как замкнутая кривая на плоскости, в любой точке которой *сумма расстояний до двух особых точек, лежащих внутри эллипса и называемых его фокусами (F_1, F_2), постоянна.*

Вместе с законами, Кеплер вводит понятие **орбиты**, которое более точно определяется как: *траектория движения тела относительно центрального тела (или барицентра системы центральных тел, если их несколько).*

2.2 Второй закон Кеплера

Второй закон: радиус-вектор планеты в равные промежутки времени описывает равновеликие площади.

Радиус-вектор планеты же отсчитывается относительно центрального тела (или барицентра системы центральных тел, если их несколько). Второй закон позволяет нам утверждать что *в точках орбиты, где тело летит ниже - оно движется быстрее, а где выше, наоборот, медленнее.*

2.3 Третий закон Кеплера

Третий закон: квадраты сидерических периодов планет пропорциональны кубам больших полуосей их эллиптических орбит.

$$\text{Т.е. : } \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}, \quad \text{где } a - \text{большая полуось орбиты} \\ T - \text{период обращения по орбите, т.е. сидерический} \quad (2)$$

Большая полуось орбиты - половина длины наибольшего диаметра эллипса, т.е. длина хорды, проходящей через два фокуса и центр.

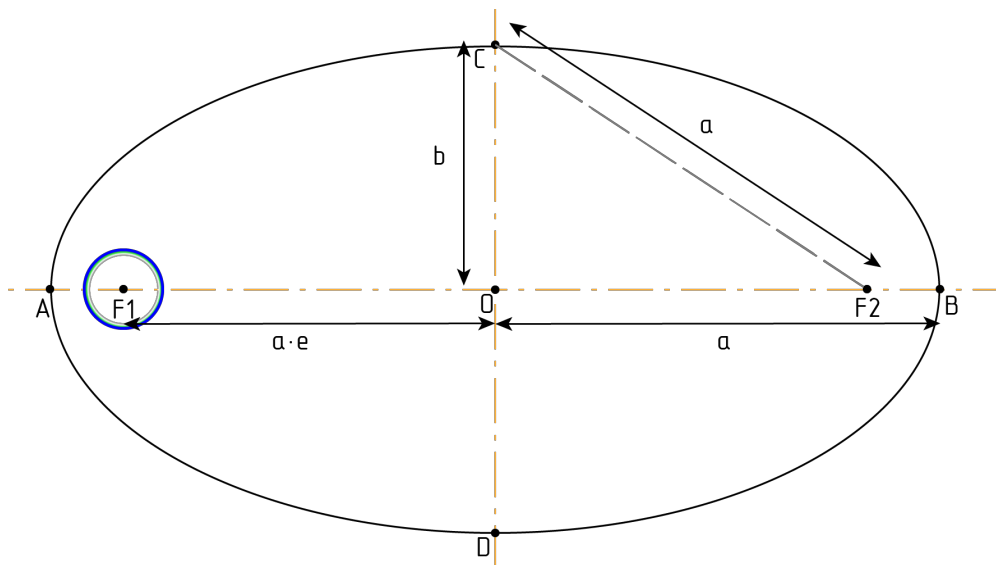
Для практических расчетов важно помнить **третий уточнённый закон Кеплера для ограниченной задачи двух тел** (зачастую просто 3-й уточненный закон Кеплера):

$$4\pi^2 \cdot a^3 = \mu \cdot T^2, \quad \text{где } a - \text{большая полуось орбиты} \\ \mu - \text{гравитационный параметр центрального тела} \quad (3) \\ T - \text{период обращения по орбите}$$

$$\mu = GM, \quad \text{где } \mu - \text{гравитационный параметр тела} \\ G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ в системе СИ} \quad (4) \\ M - \text{масса тела}$$

3 Кеплеровы и иные элементы орбит

3.1 Большая и малая полуоси, эксцентриситет



A, B, C, D, O - точки эллипса F1, F2 - фокусы / focus

Эллипс / **Ellipse** - множество точек на плоскости, для которых сумма расстояний до двух особых точек, называемых фокусами, больше расстояния между ними и постоянна.

a - большая полуось / semimajor axis

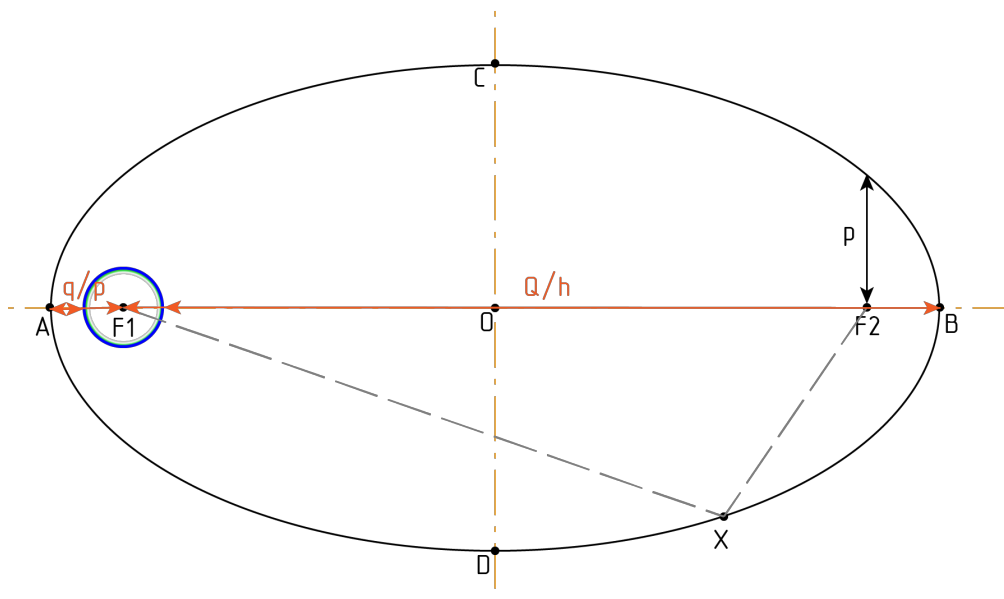
b - малая полуось / semi-minor axes

c - линейный эксцентриситет /
фокальный параметр / linear eccentricity

e - эксцентриситет / eccentricity

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

3.2 Фокальный параметр, апоцентр и перигетир



Q / h - апоцентр / apoapsis - наиболее *удаленная* от центрального тела точка на орбите, так же расстояние от центрального тела / его поверхности до этой точки.

$$Q = a \cdot (1 + e), \quad \text{где } a - \text{большая полуось}$$

Q - апоцентр
 e - эксцентриситет

q / p - перицентр / periapsis - *ближайшая* к центральному телу точка на орбите, так же расстояние от центрального тела / его поверхности до этой точки.

$$q = a \cdot (1 - e), \quad \text{где } a - \text{большая полуось}$$

q - перицентр
 e - эксцентриситет

p - фокальный параметр / semi-latus rectum - половина длины хорды, проходящей через один из фокусов и перпендикулярная большой оси эллипса.

$$p = \frac{b^2}{a} = a \cdot (1 - e^2), \quad \text{где } a - \text{большая полуось}$$

p - фокальный параметр
 b - малая полуось
 e - эксцентриситет

3.3 Наклонение, аргумент перигея, долгота восходящего узла



Примечание: все направления и радиус-вектора отсчитываются от фокуса, в котором находится центральное тело

i / φ - наклонение / inclination - угол между плоскостью его орбиты и плоскостью отсчёта (базовой плоскостью), чаще всего это плоскость экватора центрального тела.

Восходящий узел орбиты / ascending node - точка орбиты, в которой она пересекает плоскость отсчета и переходит в условное *северное* полушарие.

Нисходящий узел орбиты / descending node - точка орбиты, в которой она пересекает плоскость отсчета и переходит в условное *южное* полушарие.

Линия узлов / line of nodes - *прямая, соединяющая восходящий и нисходящий узлы орбиты.*

ω - **аргумент перигея / argument of periapsis** - *угол между восходящим узлом орбиты и перигеем.*

Ω - **долгота восходящего узла / longitude of the ascending node** - *угол между точкой весеннего равноденствия и восходящим узлом орбиты*

3.4 Истинная и средняя аномалия, расчет скорости тела на эллиптической орбите

ν / θ / f - **истинная аномалия / true anomaly** - *угол между направлением на перигей, и радиус-вектором тела, т.е. его текущим положением.*

M - **средняя аномалия / mean anomaly** - *угол между направлением на перигей и воображаемым телом, движущимся по орбите с той же угловой скоростью что и исходное тело, и одновременно с ним проходящее перигей.*

$$|\vec{V}_p| = \sqrt{\frac{\mu}{a} \cdot \frac{(1+e)}{(1-e)}}, \quad \text{где} \quad \begin{array}{l} \vec{V}_p - \text{скорость тела в перигее} \\ \mu - \text{гравитационный параметр центрального тела} \\ a - \text{большая полуось орбиты} \\ e - \text{эксцентриситет орбиты} \end{array} \quad (5)$$

$$|\vec{V}_h| = \sqrt{\frac{\mu}{a} \cdot \frac{(1-e)}{(1+e)}}, \quad \text{где} \quad \begin{array}{l} \vec{V}_h - \text{скорость тела в апогее} \\ \mu - \text{гравитационный параметр центрального тела} \\ a - \text{большая полуось орбиты} \\ e - \text{эксцентриситет орбиты} \end{array} \quad (6)$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{\mu \cdot \left(\frac{2}{|\vec{R}|} - \frac{1}{a} \right)}, \quad \text{где} \quad \begin{array}{l} \vec{V} - \text{скорость тела} \\ \mu - \text{гравитационный параметр центрального тела} \\ \vec{R} - \text{радиус-вектор тела} \\ a - \text{большая полуось орбиты} \end{array} \quad (7)$$

4 Космические скорости

I космическая скорость / first cosmic velocity - скорость обращения по круговой орбите, для заданной высоты / *минимальная горизонтальная* скорость, необходимая для обращения тела по заданной высоте.

$$|\vec{V}_I| = \sqrt{\frac{\mu}{R}}, \quad \text{где} \quad \begin{array}{l} \vec{V}_I - \text{первая космическая скорость} \\ \mu - \text{гравитационный параметр центрального тела} \\ R - \text{расстояние до центра центрального тела} \end{array} \quad (8)$$

II космическая скорость / second cosmic velocity / escape velocity - *минимальная горизонтальная* скорость, необходимая для преодоления гравитационного притяжения центрального тела.

$$|\vec{V}_{II}| = \sqrt{\frac{2 \cdot \mu}{R}} = \sqrt{2} |\vec{V}_I|, \quad \text{где} \quad \begin{array}{l} \vec{V}_{II} - \text{вторая космическая скорость} \\ \vec{V}_I - \text{первая космическая скорость} \\ \mu - \text{гравитационный параметр центрального тела} \\ R - \text{расстояние до центра центрального тела} \end{array} \quad (9)$$

III космическая скорость / second cosmic velocity / escape velocity - *минимальная горизонтальная* скорость, необходимая для преодоления гравитационного центрального и родительского центральному тел.

$$|\vec{V}_{III}| = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2 \cdot |\vec{V}_p|^2 + |\vec{V}_{II}|^2}, \quad \text{где} \quad \begin{array}{l} \vec{V}_{III} - \text{третья космическая скорость} \\ |\vec{V}_p| - \text{орбитальная скорость планеты} \\ |\vec{V}_{II}| - \text{вторая космическая планеты} \end{array} \quad (10)$$

*Примечание: по определению I и II космические скорости задаются для **нулевой** высоты, т.е. от поверхности тела, а для высот они соответственно определяются как **круговая** и **параболическая** скорости. Но т.к. как на практике чаще используются именно такие обозначения в методическом материале применены соответствующие определения*