

Logică computațională

Curs 3

Lector dr. Mihiș Andreea-Diana



Logica propozițiilor

Propozițiile logice sunt modele ale afirmațiilor
propoziționale care sunt fie *adevărate*, fie *false*.

Sintaxa logicii propozițiilor

- alfabetul

- $\Sigma_p = Var_propoz \cup Conective \cup \{ (,) \}$
- $Var_propoz = \{ p, q, r, p_1, p_2, \dots \}$
- $Conective = \{ \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \}$

- regulile de formare a Formulelor propoziționale

- F_p = mulțimea formulelor propoziționale corect construite

= cea mai mică mulțime de formule ce se poate construi cu regulile:

- baza*: $p_i \in F_p, i=1,2,\dots$
- inducția*: dacă $U, V \in F_p$ atunci:

$$\neg U \in F_p, U \wedge V \in F_p, U \vee V \in F_p, U \rightarrow V \in F_p, U \leftrightarrow V \in F_p$$

- închiderea*: toate formulele din F_p se obțin doar prin aplicarea regulilor precedente de un număr finit de ori.





Exercițiu de modelare

Clientul i-a spus dezvoltatorului:

Dacă furnizorul aduce marfă, atunci dacă este loc în magazin întreaga marfă se va pune pe raft, altfel întreaga marfă va ajunge în depozit.

$$p \rightarrow ((q \rightarrow r) \vee (\neg q \rightarrow d))$$



Semantica logicii propoziționale

- Propozițiile logice sunt modele ale afirmațiilor propoziționale care sunt fie *adevărate*, fie *false*.
- **Scopul** definirii semanticii logicii propoziționale este de a **atribui** un înțeles, o **valoare de adevăr**, formulelor propoziționale.
- Domeniul semantic:
 $\{F(\text{fals}), T(\text{true, adevărat})\}$ a.î. $\neg F = T, \neg T = F$

Semantica conectivelor

| p | $\neg p$ |
|-----|----------|
| T | F |
| F | T |

\uparrow - nand $p \uparrow q := \neg (p \wedge q)$

\downarrow - nor $p \downarrow q := \neg (p \vee q)$

\oplus - xor $p \oplus q := \neg (p \leftrightarrow q)$

| p | q | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $p \rightarrow q$ | $p \leftrightarrow q$ | $p \uparrow q$ | $p \downarrow q$ | $p \oplus q$ |
|-----|-----|--------------|------------|-------------------|-----------------------|----------------|------------------|--------------|
| T | T | T | T | T | T | F | F | F |
| T | F | F | T | F | F | T | F | T |
| F | T | F | T | T | F | T | F | T |
| F | F | F | F | T | T | T | T | F |

Interpretarea (Def.)

- O *interpretare* a formulei $U(p_1, p_2, \dots, p_n) \in F_P$ este o funcție $i: \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \rightarrow \{T, F\}$ care asignează valori de adevăr variabilelor propoziționale și poate fi extinsă la o funcție $i: F_P \rightarrow \{T, F\}$ folosind relațiile:
$$i(\neg p) = \neg i(p) \quad i(p \wedge q) = i(p) \wedge i(q)$$
$$i(p \vee q) = i(p) \vee i(q) \quad i(p \rightarrow q) = i(p) \rightarrow i(q) \quad i(p \leftrightarrow q) = i(p) \leftrightarrow i(q)$$
- Interpretările evaluează formulele propoziționale conform semanticii conectivelor componente, atribuindu-le valori de adevăr.
- Tabela de adevăr a unei formule propoziționale $U(p_1, p_2, \dots, p_n) \in F_P$ corespunde evaluărilor formulei în toate cele 2^n interpretări.

Concepte semantice (Def.)

Fie formula propozițională $U(p_1, p_2, \dots, p_n) \in F_P$.

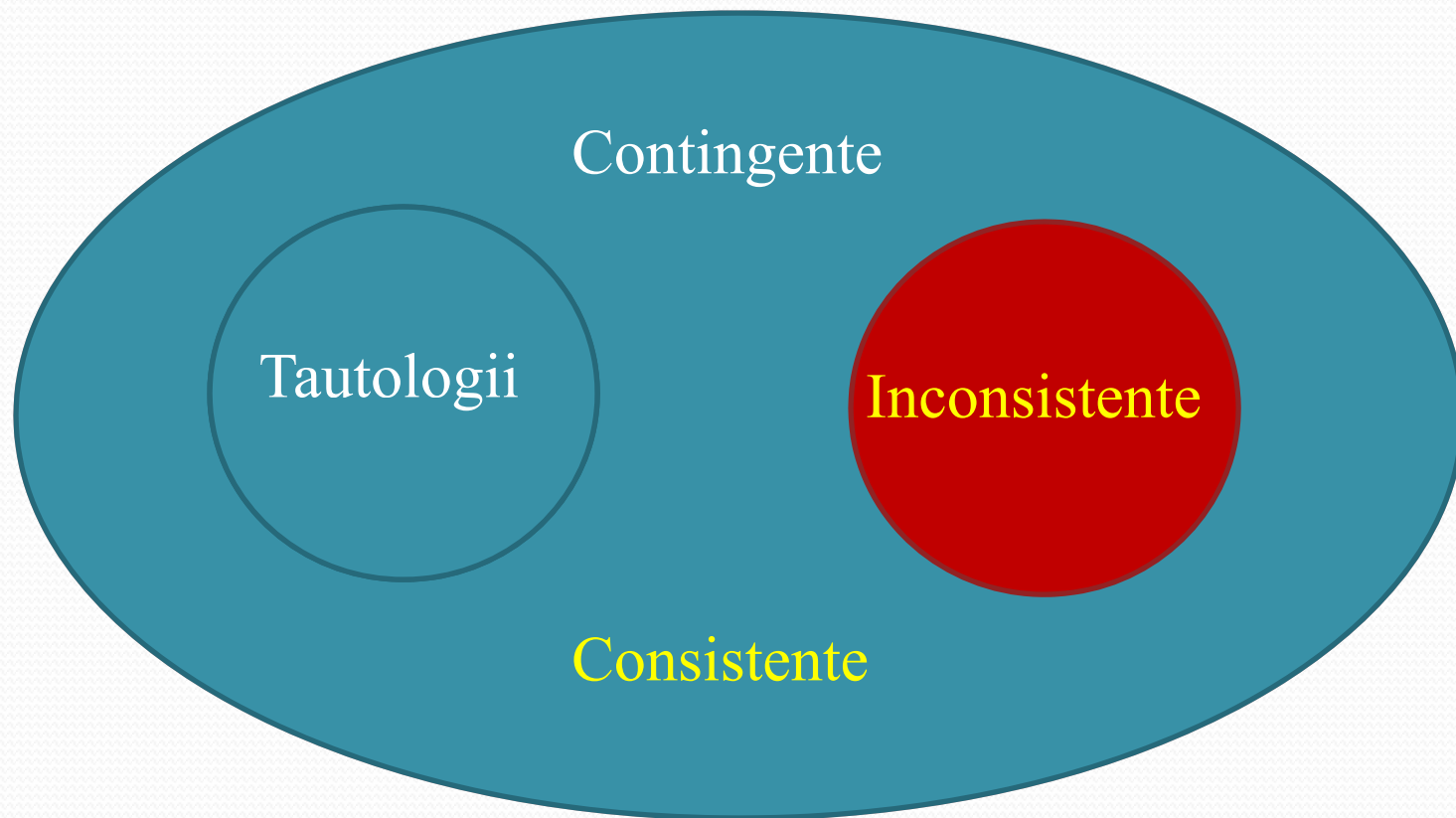
- O interpretare $i: \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \rightarrow \{T, F\}$ care evaluează formula U ca adevărată, $i(U)=T$, se numește ***model*** al formulei.
- O interpretare $i: \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \rightarrow \{T, F\}$ care evaluează formula U ca falsă, $i(U)=F$, se numește ***anti-model*** al formulei.

Concepte semantice (Def.) – cont.

Fie formula propozițională $U(p_1, p_2, \dots, p_n) \in F_P$.

- U se numește **consistentă (realizabilă)** dacă și numai dacă are cel puțin un model, deci poate fi evaluată ca adevărată:
 $\exists i: \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \rightarrow \{T, F\}$ astfel încât $i(U) = T$.
- U se numește **validă (tautologie)**, notație: $\models U$, dacă și numai dacă U este evaluată ca adevărată în orice interpretare, adică:
 $\forall i: \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \rightarrow \{T, F\}, i(U) = T$. Toate interpretările formulei U sunt modele ale formulei.
- Formula U se numește **inconsistentă (nerealizabilă)** dacă și numai dacă U nu are niciun model, adică U este interpretată totdeauna ca falsă: $\forall i: \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \rightarrow \{T, F\}, i(U) = F$.
- Formula U se numește **contingentă** dacă și numai dacă este consistentă, dar nu este validă.

Tipuri de formule



Metasimboluri – relații semantice între formule

- Formula V este **consecință logică** a formulei U ,
notație: $U \models V$, dacă și numai dacă $\forall i: F_P \rightarrow \{T, F\}$ astfel
încât $i(U)=T$, are loc $i(V)=T$.
- Formulele $U(p_1, p_2, \dots, p_n) \in F_P$ și $V(p_1, p_2, \dots, p_n) \in F_P$ sunt
logic echivalente, notație: $U \equiv V$, dacă și numai dacă
tabelele lor de adevăr sunt identice, adică: $\forall i: F_P \rightarrow \{T, F\}$,
 $i(U) = i(V)$.

Exemplu

- $U(p,q,r) = (\neg p \vee q) \wedge (r \vee p),$
- $V(p,q,r) = (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge p)$
- $p \uparrow \neg p$
- $p \downarrow \neg p$

Tabela de adevăr

| | p | q | r | $\neg p \vee q$ | $r \vee p$ | $U(p,q,r)$ | $V(p,q,r)$ | $p \uparrow \neg p$ | $p \downarrow \neg p$ |
|-------|-----|-----|-----|-----------------|------------|------------|------------|---------------------|-----------------------|
| i_1 | T | T | T | T | T | T | T | T | F |
| i_2 | T | T | F | T | T | T | T | T | F |
| i_3 | T | F | T | F | T | F | F | T | F |
| i_4 | T | F | F | F | T | F | F | T | F |
| i_5 | F | T | T | T | T | T | T | T | F |
| i_6 | F | T | F | T | F | F | F | T | F |
| i_7 | F | F | T | T | T | T | T | T | F |
| i_8 | F | F | F | T | F | F | F | T | F |

$$U(p,q,r) = (\neg p \vee q) \wedge (r \vee p),$$

$$V(p,q,r) = (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge p)$$

Observații

- modele pt. U : i_1, i_2, i_5 și i_7
 $i_1 : \{p, q, r\} \rightarrow \{T, F\}$, $i_1(p)=T$, $i_1(q)=T$, $i_1(r)=T$ și $i_1(U)=T$
- anti-modele pt. U : i_3, i_4, i_6 și i_8
- $p \uparrow \neg p$ – tautologie
- $p \downarrow \neg p$ – inconsistentă
- $U \equiv V$
- $U \models \neg p \vee q$

Concepte semantice pentru mulțimi de formule

- O **mulțime** $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ de formule se numește **consistentă** (**realizabilă**) dacă și numai dacă formula $U_1 \wedge U_2 \wedge \dots \wedge U_n$ este consistentă, adică: $\exists i: F_p \rightarrow \{T, F\}$ astfel încât $i(U_1 \wedge U_2 \wedge \dots \wedge U_n) = T$, i se numește **model** al mulțimii $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$.
- O **mulțime** $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ de formule se numește **inconsistentă** (**nerealizabilă, contradictorie**) dacă și numai dacă formula $U_1 \wedge U_2 \wedge \dots \wedge U_n$ este inconsistentă, adică, $\forall i: F_p \rightarrow \{T, F\}$ astfel încât $i(U_1 \wedge U_2 \wedge \dots \wedge U_n) = F$, i se numește **anti-model** al mulțimii $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$.
- Formula V este **consecință logică** a mulțimii de formule $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ și se notează $U_1, U_2, \dots, U_n \models V$, dacă și numai $\forall i: F_p \rightarrow \{T, F\}$ astfel încât $i(U_1 \wedge U_2 \wedge \dots \wedge U_n) = T$, are loc $i(V) = T$. Formulele U_1, U_2, \dots, U_n se numesc *premize, ipoteze, fapte*, iar V se numește *concluzie*.

Teoremă

- Fie $S = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ o mulțime de formule propoziționale.
 1. Dacă S este o mulțime consistentă, atunci
 $\forall j, 1 \leq j \leq n, S \setminus \{U_j\}$ este o mulțime consistentă.
 2. Dacă S este o mulțime consistentă și V este o formulă validă, atunci mulțimea $S \cup \{V\}$ este consistentă.
 3. Dacă S este o mulțime inconsistentă, atunci $\forall V \in F_p$ mulțimea $S \cup \{V\}$ este inconsistentă.
 4. Dacă S este o mulțime inconsistentă și U_j este o formulă validă, unde $1 \leq j \leq n$, atunci mulțimea $S \setminus \{U_j\}$ este inconsistentă.

Teoremă

- Fie $U_1, U_2, \dots, U_n, U, V$ formule propoziționale.
- $\models U$ ***dacă și numai dacă*** $\neg U$ este *inconsistentă* (O formulă este *tautologie* ***dacă și numai dacă*** negația sa este o formulă *inconsistentă*).
- $U \models V$ ***dacă și numai dacă*** $\models U \rightarrow V$ ***dacă și numai dacă*** mulțimea $\{U, \neg V\}$ este *inconsistentă*.
- $U \equiv V$ ***dacă și numai dacă*** $\models U \leftrightarrow V$.
- $U_1, U_2, \dots, U_n \models V$ ***dacă și numai dacă*** $\models U_1 \wedge U_2 \wedge \dots \wedge U_n \rightarrow V$ ***dacă și numai dacă*** mulțimea $\{U_1, U_2, \dots, U_n, \neg V\}$ este *inconsistentă*.

Echivalențe logice în logica propozițională

- Legile lui DeMorgan

$$\neg (U \wedge V) \equiv \neg U \vee \neg V \quad \text{și} \quad \neg (U \vee V) \equiv \neg U \wedge \neg V$$

- Legile de absorbție

$$U \wedge (U \vee V) \equiv U \quad \text{și} \quad U \vee (U \wedge V) \equiv U$$

- Legile de comutativitate

$$U \wedge V \equiv V \wedge U \quad \text{și} \quad U \vee V \equiv V \vee U$$

- Legile de asociativitate

$$U \wedge (V \wedge Z) \equiv (U \wedge V) \wedge Z \quad \text{și} \quad U \vee (V \vee Z) \equiv (U \vee V) \vee Z$$

- Legile de distributivității

$$U \wedge (V \vee Z) \equiv (U \wedge V) \vee (U \wedge Z) \quad \text{și} \quad U \vee (V \wedge Z) \equiv (U \vee V) \wedge (U \vee Z)$$

- Legile de idempotență

$$U \wedge U \equiv U \quad \text{și} \quad U \vee U \equiv U$$

Alte echivalențe logice

- Legile de simplificare

$$\neg \neg U \equiv U \quad U \rightarrow U \equiv T$$

$$U \wedge \neg U \equiv F \quad U \vee \neg U \equiv T$$

$$T \wedge U \equiv U \quad F \vee U \equiv U$$

$$U \rightarrow T \equiv T \quad U \rightarrow F \equiv \neg U$$

$$T \rightarrow U \equiv U \quad F \rightarrow U \equiv T$$

$$U \leftrightarrow T \equiv U \quad U \leftrightarrow F \equiv \neg U$$

$$U \oplus T \equiv \neg U \quad U \oplus F \equiv U$$

$$U \leftrightarrow U \equiv T \quad U \oplus U \equiv F$$

- Definirea conectivelor

$$U \rightarrow V \equiv \neg U \vee V$$

$$U \rightarrow V \equiv \neg (U \wedge \neg V)$$

$$U \rightarrow V \equiv U \leftrightarrow (U \wedge V)$$

$$U \rightarrow V \equiv V \leftrightarrow (U \vee V)$$

$$U \leftrightarrow V \equiv (U \rightarrow V) \wedge (V \rightarrow U)$$

$$U \oplus V \equiv \neg (U \rightarrow V) \vee \neg (V \rightarrow U)$$

$$U \leftrightarrow V \equiv (U \vee V) \rightarrow (U \wedge V)$$

$$U \vee V \equiv \neg (\neg U \wedge \neg V)$$

$$U \wedge V \equiv \neg (\neg U \vee \neg V)$$

$$U \vee V \equiv \neg U \rightarrow V$$

$$U \wedge V \equiv \neg (U \rightarrow \neg V)$$

$$\neg U \equiv U \uparrow U \equiv U \downarrow U$$

$$U \vee V \equiv (U \uparrow U) \uparrow (V \uparrow V) \equiv (U \downarrow V) \downarrow (U \downarrow V)$$

$$U \wedge V \equiv (U \downarrow U) \downarrow (V \downarrow V) \equiv (U \uparrow V) \uparrow (U \uparrow V)$$

Principiul dualității

- Pentru orice echivalență logică $U \equiv V$ care conține doar conectivele $\neg, \wedge, \vee, \uparrow, \downarrow$ există o altă echivalență logică, $U' \equiv V'$, unde U', V' sunt formule obținute din U, V prin interschimbarea conectivelor logice duale: $(\wedge, \vee), (\uparrow, \downarrow)$ și a valorilor de adevăr: T, F.
- *Conective duale*: $(\wedge, \vee), (\uparrow, \downarrow), (\leftrightarrow, \oplus)$.
- *Valori de adevăr duale*: T și F.
- *Concepte duale*: tautologie și formulă inconsistentă.

Forme normale în logica propozițiilor

1. Un *literal* este o variabilă propozițională sau negația sa.
2. O *clauză* este disjuncția unui număr finit de literali.
3. Un *cub* este conjuncția unui număr finit de literali.
4. *Clauza vidă*, simbolizată prin \square , este clauza fără literali, fiind singura clauză inconsistentă.
5. O formulă este în *formă normală disjunctivă (FND)*, dacă aceasta este scrisă ca o disjuncție de cuburi $\bigvee_{i=1}^p (\bigwedge_{j=1}^{q_i} l_{ij})$
unde l_{ij} sunt literali.
6. O formulă este în *formă normală conjunctivă (FNC)*, dacă aceasta este scrisă ca o conjuncție de clauze: $\bigwedge_{i=1}^n (\bigvee_{j=1}^{m_i} l_{ij})$
unde l_{ij} sunt literali.

Proprietate

Fie mulțimea de literali $\{l_1, l_2, \dots, l_n\}$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- clauza $\bigvee_{i=1}^n l_i$ este validă;
- cubul $\bigwedge_{i=1}^n l_i$ este inconsistent;
- în mulțimea $\{l_1, l_2, \dots, l_n\}$ există cel puțin o pereche de literali opuși, adică: $\exists i, j \in \{1, \dots, n\}$ astfel încât $l_i = \neg l_j$.

Teoremă

- *Orice formulă admite o formă normală conjunctivă și o formă normală disjunctivă logic echivalente cu ea.*

Algoritmul de normalizare

Pas1:

Înlocuirea formulelor de tip $U \rightarrow V$ cu forma echivalentă: $\neg U \vee V$

Înlocuirea formulelor de tip $U \leftrightarrow V$ cu forma echivalentă:

$$(\neg U \vee V) \wedge (\neg V \vee U).$$

Pas2:

Aplicarea legilor lui **DeMorgan** (se recomandă aplicarea dinspre exterior spre interior) \implies negația va preceda doar variabilele propoziționale.

Eliminarea negațiilor multiple folosind echivalența logică: $\neg \neg U \equiv U$.

Pas3: Aplicarea legilor **distributivității**.

Pentru FND

FNC

$$U \wedge (V \vee Z) \equiv (U \wedge V) \vee (U \wedge Z) \quad \text{respectiv} \quad U \vee (V \wedge Z) \equiv (U \vee V) \wedge (U \vee Z)$$

Pas4: Simplificarea formei obținute folosind alte echivalențe logice: legile de simplificare, legile absorbției, legile de idempotență.



Teoremă

- O formulă în forma normală conjunctivă (*FNC*) este tautologie dacă și numai dacă toate clauzele sale sunt valide.
- O formulă în forma normală disjunctivă (*FND*) este inconsistentă dacă și numai dacă toate cuburile sale sunt inconsistente.



Observații

- Prima parte a teoremei furnizează o *metodă directă* de rezolvare a problemei decizionale (verificarea dacă o formulă este tautologie) în logica propozițiilor.
- FND a unei formule propoziționale furnizează toate modelele formulei inițiale, prin găsirea interpretărilor care evaluează cuburile componente ca adevărate.
- FNC a unei formule propoziționale furnizează toate anti-modelele formulei inițiale prin găsirea interpretărilor care evaluează clauzele componente ca false.
- Cele două formulări din teorema precedentă sunt afirmații duale.