Logică computațională
Curs 5

Lector dr. Mihiș Andreea-Diana

Metoda tabelelor semantice

- introdusă de Smullyan
- se bazează pe considerații semantice
- încearcă să construiască modelele unei formule date

  (FND)
- $\vdash U$ prin respingere, $\neg U$ nu are modele

- ideea:
  - descompunerea formulei inițiale în subformule
  - până la nivel de literali

Clase de formule

- clasa α - formule de tip conjunctiv

$$A \wedge B$$

$$\neg (A \vee B)$$

$$\neg (A \rightarrow B)$$

- clasa β - formule de tip disjunctiv

$$A \vee B$$

$$\neg (A \wedge B)$$

$$A \rightarrow B$$

Reguli de descompunere a formulelor

- regula α

$$\begin{array}{c} A \wedge B \\ | \\ A \\ | \\ B \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg(A \vee B) \\ | \\ \neg A \\ | \\ \neg B \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg(A \to B) \\ | \\ A \\ | \\ \neg B \end{array}$$

- regula β

$$\begin{array}{ccc} & A \vee B & \\ / & & \backslash \\ A & & B \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \neg(A \wedge B) & \\ / & & \backslash \\ \neg A & & \neg B \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & A \to B & \\ / & & \backslash \\ \neg A & & B \end{array}$$

Arborele binar de descompunere a unei formule

Având o formulă *U*, ei i se poate asocia o tabelă semantică, care este de fapt un arbore binar ce conţine în nodurile sale formule şi se construieşte astfel:

- rădăcina arborelui este etichetată cu formula *U*;
- fiecare ramură a arborelui care conţine o formulă va fi extinsă cu subarborele corespunzător regulii de descompunere care se aplică formulei;
- extinderea unei ramuri se *încheie* în două situaţii:
  a) dacă pe ramură apare o formulă şi negaţia sa;
  b) dacă au fost descompuse toate formulele de pe acea ramură

Exemplu

$$U \overset{\text{not.}}{=\!=} p \wedge (q \to \neg p)\ (1)$$

| —— regula α pentru (1)

$$p$$

$$|$$

$$q \to \neg p \quad (2)$$

– regula β pentru (2)

$$\neg q \qquad\qquad \neg p$$

$$\odot \qquad\qquad \otimes$$

$$FND(U) = (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg p) \equiv p \wedge \neg q$$

Tipuri de ramuri

- O *ramură* a tabelei se numeşte *închisă* (simbolizată prin ⊗) dacă ea conţine o formulă şi negaţia ei, în caz contrar *ramura* se numeşte *deschisă* (simbolizată prin⊙).
- O *ramură* a tabelei se numeşte *completă* dacă ea este fie *închisă*, fie *toate formulele* de pe acea ramură au fost *descompuse*.

Tipuri de tabele semantice

- O *tabelă* se numeşte *închisă* dacă toate ramurile sale sunt închise. Dacă o tabelă are cel puţin o ramură deschisă, atunci ea se numeşte *deschisă*.
- O *tabelă* se numeşte *completă* dacă toate ramurile ei sunt complete.

Exemplul (2)

$U = (p \lor q) \land \neg(q \to r) \land (p \to q \land r)$ (1)

| – regula α pentru (1)

$p \lor q$ (2)

$\neg(q \to r)$ (3)

$p \to q \land r$ (4)

– regula β pentru (2)

$\boxed{p}$ | q

regula α pentru (3) – | – regula α pentru (3)

q | q

$\boxed{\neg r}$ | $\boxed{\neg r}$

regula β pentru (4) – | – regula β pentru (4)

$\boxed{\neg p}$ | $q \land r$ (5) | $\neg p$ | $q \land r$ (6)

$\otimes$ | regula α p u (5) – | $\odot$ | – regula α pentru (6)

q | q

$\boxed{r}$ | $\boxed{r}$

$\otimes$ | $\otimes$

Observații:

- Procesul de construire a unei tabele semantice este unul *nedeterminist* deoarece regulile de descompunere se pot aplica în orice ordine şi la un moment dat se pot alege mai multe ramuri pentru extindere. Astfel unei formule i se pot asocia mai multe tabele semantice, dar acestea sunt echivalente.
- Pentru a obţine tabele semantice *cât mai simple* (mai puţin ramificate) se recomandă:
  - utilizarea regulilor de tip α înaintea regulilor de tip β care realizează o ramificare;

Observații (2):

- formulele de pe aceeaşi ramură a unei tabele semantice sunt *legate* între ele prin conectiva logică $\wedge$, iar *ramificarea* corespunde conectivei logice $\vee$.
- tabela semantică asociată unei formule propoziţionale este o reprezentare grafică a *formei* sale *normale disjunctive*. Fiecare ramură reprezintă un *cub* (conjuncţia tuturor literalilor de pe acea ramură), iar arborele este *disjuncţia* tuturor *ramurilor* sale.
- Unei formule *consistente* i se asociază o *tabelă completă deschisă*, iar fiecare *ramură deschisă* a tabelei furnizează cel puţin un *model* pentru formula respectivă.
- O *tabelă semantică închisă* asociată unei formule indică faptul că formula este *inconsistentă*, adică nu există nicio interpretare în care formula să fie adevărată

Teorema de corectitudine şi completitudine a metodei tabelelor semantice

- O formulă U este teoremă (tautologie) dacă şi numai dacă există o tabelă semantică închisă pentru formula $\neg U$.

Teoremă

- $U_1, U_2, ..., U_n \vdash Y$ (echivalent cu $U_1, U_2, ..., U_n \models Y$) dacă şi numai dacă există o tabelă semantică închisă pentru formula $U_1 \wedge U_2 \wedge ... \wedge U_n \wedge \neg Y$.