Logică computațională
Curs 4

Lector dr. Mihiș Andreea-Diana

Sistemul axiomatic al calculului propozițional

- propus de Hilbert; deductiv, formal
- $P=(\Sigma_P , F_P , A_P , R_P)$
  - $\Sigma_P = Var\_propoz \cup Conective \cup \{ (,) \}$
    - $Var\_propoz = \{ p, q, r, p_1, p_2, \ldots\}$
    - $Conective = \{ \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow \}$
  - F_P = mulţimea formulelor propoziţionale corect construite
    - - *baza*: $p_i \in F_P$, i=1,2,…
    - - *inducţia*: dacă $U,V \in F_P$ atunci:

      $\neg U \in F_P$, $U \wedge V \in F_P$, $U \vee V \in F_P$, $U \rightarrow V \in F_P$, $U \leftrightarrow V \in F_P$
    - - *închiderea*: toate formulele din F_P se obţin doar prin aplicarea regulilor precedente de un număr finit de ori.

Axiome și reguli de inferență

- $A_P = \{A_1, A_2, A_3\}$ scheme axiomatice
  - A_1: $U \rightarrow (V \rightarrow U)$
  - A_2: $(U \rightarrow (V \rightarrow Z)) \rightarrow ((U \rightarrow V) \rightarrow (U \rightarrow Z))$
  - A_3: $(U \rightarrow V) \rightarrow (\neg V \rightarrow \neg U)$
- $R_P = \{m_P\}$ – o singură regulă de inferență „ *modus ponens*”
  - $U, U \rightarrow V \vdash V$

  „din faptele U şi $U \rightarrow V$ se deduce (inferă) V”

Definiția deducției

- Fie formulele $U_1, U_2, \ldots, U_n$ numite ipoteze şi V formulă propoziţională. Spunem că ***V* este deductibilă din $\boldsymbol{U_1, U_2, \ldots, U_n}$** şi notăm $U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}, U_n \vdash V$, dacă există o secvenţă de formule $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ astfel încât $f_m = V$ şi $\forall i \in \{1,\ldots,m\}$ avem:
  - $f_i \in A_{\mathrm{p}}$;
  - $f_i \in \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$;
  - $f_j, f_k \vdash_{m_{\mathrm{p}}} f_i$, $j < i$ și $k < i$
- Secvenţa $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ se numeşte ***deducţia* lui *V* din $\boldsymbol{U_1, U_2, \ldots, U_n}$**.

Noțiunea de teoremă

- **Definiţia 1.8.** O formulă $U \in F_{\mathrm{P}}$, astfel încât $\varnothing \vdash U$ (sau $\vdash U$) se numeşte ***teoremă***.

- **Observaţie**: Teoremele sunt formule care sunt deductibile doar din axiome şi folosind regula modus ponens.

Teorema de deducție și inversa sa

- **Teorema de deducţie**

  Dacă $U_1,U_2,\ldots,U_{n\text{-}1},U_n \vdash V$, atunci $U_1,U_2,\ldots,U_{n\text{-}1} \vdash U_n \rightarrow V$.

- **Inversa teoremei de deducţie**

  Dacă $U_1,U_2,\ldots,U_{n\text{-}1} \vdash U_n \rightarrow V$ atunci $U_1,U_2,\ldots,U_{n\text{-}1},U_n \vdash V$.

Generalizarea

$U_1, U_2, \ldots, U_{n\text{-}1}, U_n \vdash V$ dacă și numai dacă

$U_1, U_2, \ldots, U_{n\text{-}1} \vdash U_n \rightarrow V$ dacă și numai dacă

$U_1, U_2, \ldots, U_{n\text{-}2} \vdash U_{n\text{-}1} \rightarrow (U_n \rightarrow V)$ dacă și numai dacă

$\ldots$

$U_1 \vdash U_2 \rightarrow (\ldots U_{n\text{-}1} \rightarrow (U_n \rightarrow V) \ldots)$ dacă și numai dacă

$$\vdash U_1 \rightarrow (U_2 \rightarrow (\ldots U_{n\text{-}1} \rightarrow (U_n \rightarrow V\,\underbrace{)\ldots)}_{n\text{-}1}$$

Consecințele teoremei de deducție

- $\vdash U \to ((U \to V) \to V)$
- $\vdash (U \to V) \to ((V \to Z) \to (U \to Z))$ legea silogismului
- $\vdash (U \to (V \to Z)) \to (V \to (U \to Z))$ legea permutării premizelor
- $\vdash (U \to (V \to Z)) \to (U \wedge V \to Z)$ legea reuniunii premizelor
- $\vdash (U \wedge V \to Z) \to (U \to (V \to Z))$ legea separării premizelor

- Temă facultativă – se acordă 10 doar la primul student care demonstrează. În sistemul axiomatic al calculului propozițional, folosind definiția deducției și teorema de deducție:

  $\vdash (U \to V) \to ((\neg U \to V) \to V)$

Proprietățile logicii propozițiilor

- **Problemele decizionale** în logica propoziţiilor:
  - „Este o formulă propoziţională o teoremă sau nu?"
  - „Este o formulă deductibilă dintr-o mulţime de formule?"

- **Teorema de corectitudine**

  Dacă $\vdash U$ **atunci** $\models U$. (Validitatea sintactică implică validitatea semantică)

- **Teorema de completitudine**

  Dacă $\models U$ **atunci** $\vdash U$. (Validitatea semantică implică validitatea sintactică)

- **Teorema de corectitudine și completitudine**

  $\vdash U$ **dacă și numai dacă** $\models U$.

Consecințele teoremei de corectitudine și completitudine

1) ***Logica propoziţiilor este necontradictorie:***

   nu pot avea loc simultan $\vdash U$ şi $\vdash \neg U$.

2) ***Logica propoziţiilor este coerentă:***

   nu orice formulă propoziţională este teoremă.

3) ***Logica propoziţiilor este decidabilă:***

   se poate decide dacă o formulă propoziţională este sau nu teoremă.