Tarea #2 Métodos matemáticos

Puntos 3 y 10 de la sección 2.1.6

Cristian Fernando Ávila Navarro – 2190729 – Universidad Industrial de Santander

Ejercicios mm1

3)

$\times$	I	χ_A	χ_B	χ_C	$R\frac{2\pi}{3}$	$\tilde{R}\frac{2\pi}{3}$
I	I	χ_A	χ_B	χ_C	$R\frac{2\pi}{3}$	$\tilde{R}\frac{2\pi}{3}$
χ_A	χ_A	I	$\tilde{R}\frac{2\pi}{3}$	$R\frac{2\pi}{3}$	χ_C	χ_B
χ_B	χ_B	$R\frac{2\pi}{3}$	I	$\tilde{R}\frac{2\pi}{3}$	χ_A	χ_C
χ_C	χ_C	$\tilde{R}\frac{2\pi}{3}$	$R\frac{2\pi}{3}$	I	χ_B	χ_A
1 $\tilde{R}\frac{2\pi}{3}$	$R\frac{2\pi}{3}$	χ_B	χ_C	χ_A	$\tilde{R}\frac{2\pi}{3}$	I
2 $R\frac{2\pi}{3}$	$\tilde{R}\frac{2\pi}{3}$	χ_C	χ_A	χ_B	I	$R\frac{2\pi}{3}$

*Me equivoqué en poner la línea arriba de la R en 1 cuando debí ponerla en 2

b) $x_i \times x_j = R_k \in G_\Delta$; $x_i \times R_k = x_m \in G_\Delta$

$R_i \times R_j = R_n \in G_\Delta$; $R_i \times x_k = x_l \in G_\Delta$
(ó I)

$x_i \times I = I \times x_i = x_i \ \wedge \ R_i \times I = I \times R_i = R_i$

comprobando así que es cerrada.

$\rightarrow x_m \times (x_i \times x_j) = x_m \times R_k = x_l$

$(x_m \times x_i) \times x_j = R_k \times x_s = x_l$

$\rightarrow R_n \times (x_i \times x_j) = R_n \times R_k = R_m$

$(R_n \times x_i) \times x_j = x_l \times x_j = R_m$

$\rightarrow x_m \times (R_n \times x_j) = x_m \times x_l = R_s$

$(x_m \times R_n) \times x_j = x_i \times x_j = R_s$

$\rightarrow R_n \times (R_m \times x_j) = R_n \times x_i = x_s$

$(R_n \times R_m) \times x_j = R_l \times x_j = x_s$

$\rightarrow R_n \times (R_m \times R_l) = R_n \times R_i = R_k$

$(R_n \times R_m) \times R_l = R_j \times R_l = R_k$

$$x_i \times I = I \times x_i = x_i$$
$$R_n \times I = I \times R_n = R_n$$
→ Neutro

$$x_i \times x_i = I \quad y \quad R_n \times R_{-n} = I$$

En general, el grupo no es abeliano.

c) $\{R_i\} = \{R\frac{2\pi}{3}, R\frac{4\pi}{3}, R2\pi\}$

Porque $R\frac{2\pi}{3} \times R\frac{2\pi}{3} = R\frac{4\pi}{3}$

y $R2\pi = R\frac{4\pi}{3} \times R\frac{2\pi}{3} = R\frac{2\pi}{3} \times R\frac{2\pi}{3} \times R\frac{2\pi}{3}$

y $R2\pi = I$

Se ve que: $R\frac{2\pi}{3} \times R\frac{4\pi}{3} = R2\pi = I$

$$R\frac{4\pi}{3} \times R\frac{2\pi}{3} = R2\pi = I$$

Primera reflexión:

$\{I, x_A\}$ Donde se ve que

$x_A^2 = 1$ → orden 2

$$x_A \times I = x_A$$
$$x_A \times x_A = I$$

$\{I, \chi_B\} \Rightarrow \chi_B \times I = \chi_B$; $\chi_B \times$

d) Notaré como punto $(\cdot)$ el producto de matrices:

$T =$

$\cdot$	I	A	B	C	D	E
I	I	A	B	C	D	E
A	A	B	I	E	C	D
B	B	I	A	D	E	C
C	C	D	E	I	A	B
D	D	E	C	B	I	A
E	E	C	D	A	B	I

Es grupo, pues: $A \cdot B = I \in T$; $A \cdot C = E \in T$
y así con todos

$A \cdot (B \cdot C) = A \cdot D = C$

$(A \cdot B) \cdot C = I \cdot C = C$

$C \cdot (D \cdot E) = C \cdot A = D$

$(C \cdot D) \cdot E = A \cdot E = D$

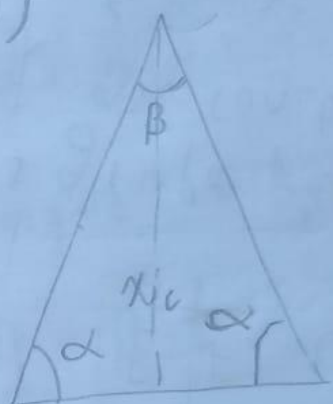
y así con todos

★ $A \cdot I = I \cdot A = A$; $B \cdot I = I \cdot B = B \ldots$

★ $C \cdot C = D \cdot D = E \cdot E = I$; $B \cdot A = A \cdot B = I$

e) Sí, pues la tabla es la misma. Básicamentes es cambiar las letras.

f)



; Reflexión x_c

Si se puede, y es de orden 1

X	I	x_c
I	I	I
x_t	I	I

Es un grupo, pues:

$$x_c \times I = I \times x_c = x_c \in G$$

$$x_c \times (I \times x_c) = (x_c \times I) \times x_c = I$$

$$x_c \times x_c = I$$

Es un grupo con solo el neutro.

X	I
I	I

10) $|P_n\rangle \to p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

$\dots + a_{n-1} x^{n-1}$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

a) 1) $$\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} b_j x^j = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i x^i + b_j x^j)$$

solo se da en $i = j$, entonces:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \overbrace{(a_i + b_i)}^{c_i} x^i = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i \in |P_n\rangle$$

2) $$\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} b_j x^j = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + b_i) x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{(b_i + a_i)}_{\text{Conmutativi-dad de los reales}} x^i = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

3) $$\left(\sum_{i=0}^{n-1} (a_i + b_i) x^i\right) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i = \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i\right) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i$$

$$= \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + b_0 + b_1 x + b_2 x^3 + \ldots + b_{n-1} x^{n-1}\right)$$

$$+ c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots c_{n-1} x^{n-1}$$

Por álgebra:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + \left(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{n-1} x^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i\right)$$

4) Si $a_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$

$$= \sum b_i x^i$$

5) $\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} -a_i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i - \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = 0$

6) $\alpha \sum a_i x^i = \alpha \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} \right)$

$= \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \alpha a_2 x^2 + \dots + \alpha a_{n-1} x^{n-1}$

$= \sum_{i=0}^{n-1} \alpha a_i x^i$

7) $\alpha \left(\sum_{i=0}^{n-1} \beta a_i x^i \right) = \alpha \left(\beta a_0 + \beta a_1 x + \dots + \beta a_{n-1} x^{n-1} \right)$

$= \alpha \beta \left(a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} \right) = \alpha \beta \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$

8) $(\alpha + \beta) \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = \alpha \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \beta \sum^{n-1} a_i x^i$

9) $\alpha \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i \right) = \alpha \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \alpha \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$

10) $1 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$

Multiplicación (la denoto como $\cdot$)

1) $$\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \cdot \sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_i x^i \cdot b_j x^j$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} (a_i \cdot b_j) x^{i+j} \in |P_n\rangle$$

2) $$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} (a_i \cdot b_j) x^{i+j} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} (b_j \cdot a_i) x^{i+j}$$

3) $$(a_i x^i \cdot b_j x^j) \cdot c_k x^k = (a_i \cdot b_j) x^{i+j} \cdot c_k x^k$$

↑
Notación de Einstein

$$= (a_i \cdot b_j \cdot c_k) x^{i+j+k} = \dots$$

$$= a_i x^i \cdot (b_j \cdot c_k) x^{j+k}$$

4) El neutro será: $\sum_{i=0}^{0} a_i x^i = a_0 = 1$

pues $\sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j \cdot \sum_{i=0}^{0} a_i x^i = \sum_{j=0}^{n-1} (b_j \cdot a_0) x^{j+0}$

$= \sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j$

5) $a_i x^i \cdot b_j x^j = (a_i \cdot b_j) x^{i+j} \Rightarrow \overbrace{b_j = \frac{1}{a_i}}^{\text{Inverso en } \mathbb{R}}$

y $j = -i$

$\Rightarrow \left(\frac{a_i}{a_i}\right) x^{i-i} = 1$

6) $\alpha \sum a_i x^i = \sum \alpha a_i x^i$

7) $\alpha(\beta(a_i x^i)) = \alpha\beta(a_i x^i) = \alpha\beta a_i x^i$

8) $(\alpha+\beta) a_i x^i = \alpha a_i x^i + \beta a_i x^i$

9) $\alpha(a_i x^i \cdot b_j x^j) = \alpha(a_i \cdot b_j) x^{i+j}$

$= (\alpha a_i \cdot b_j) x^{i+j}$

10) $1(a_i x^i) = a_i x^i$

b) Si a_i son enteros:

Bajo la suma: si es espacio vectorial, pues se cumplen todos los axiomas

Bajo el producto: No, pues en (5):

$$a_i x^i \cdot b_j x^j = (a_i \cdot b_j) x^{i+j} \Rightarrow b_j = a_{-i}$$

Pero si $b_i \in \mathbb{Z} \Rightarrow b_j \neq a_{-i} \ \forall a_i$.

No se puede hallar el elemento simétrico.

c) I) Neutro presente, $a_{n-1} x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-1} = \ldots$

$$= \underbrace{(a_{n-1} + b_{n-1})}_{c_{n-1}} x^{n-1} = c_{n-1} \in S$$

y $\alpha (a_{n-1} + b_{n-1}) x^{n-1} = \underbrace{(\alpha a_{n-1} + \alpha b_{n-1}) x^{n-1}}_{d_k x^{n-1} \in S}$

$\Rightarrow$ I es subespacio

II) Neutro presente, $a_i x^{2i} + b_i x^{2i}$

$$= \alpha (a_i + b_i) x^{2i} = \alpha c_i x^{2i} \in S$$

II es subespacio

III) $\sum_{i=1}^{n-1} a_i x^i = 0$ siempre que $a_i = 0 \; \forall a_i$.

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=1}^{n-1} b_i x^i\right)\alpha = \alpha(a_i + b_i)x^i = \alpha c_j x^i \in S$$

III Es subespacio

IV) $\sum_{i=0}^{n-1} a_i (x-1)^i = 0$ siempre que $a_i = 0$

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i (x-1)^i + \sum_{j=1}^{n-1} b_i (x-1)^i\right)\alpha = \alpha(a_i + b_i)(x-1)^i$$

$$= (\alpha a_i + \alpha b_i)(x-1)^i = \alpha c_j (x-1)^i \in S.$$

IV es subespacio