

Acrobáticos vectores nos brindan un espectáculo de formas

Cristian Fernando Ávila Navarro
Universidad Industrial de Santander
Cra 27 Calle 9 Ciudad Universitaria

11 de noviembre de 2021

Índice

1. Introducción	1
2. Metodología	2
3. Paralelismos, relaciones y cálculos	2
4. Conclusiones	11

Resumen

Nos enfocamos primero en destacar la importancia de los patrones como piezas de arte de siempre. Luego, definimos las redes de Bravais y a partir de ahí relacionamos imágenes con su respectiva raíz en forma de vector primario. Nos trasladamos entonces a R3, donde nos esperaban muchas más celdas y vectores que nos definían esa base para nuestro análisis (usado en cristalográfica). Para finalizar, se demostraron algunas relaciones vectoriales que nos permitieron analizar de forma más matemática estas celdas.

1. Introducción

Formas dispuestas en un arreglo de coloridos y llamativos patrones han sido del interés de nuestra especie desde tiempos en que aún no se contaban historias de héroes y dioses. En una suerte de homenaje, hoy analizaremos el aporte de Auguste Bravais a un campo que ha sido motivo de asombro para generaciones enteras de seres humanos, que veían en la simetría una manifestación de la divinidad.

Bravais vio la posibilidad de utilizar objetos matemáticos bien conocidos como los vectores para caracterizar cristales, tomando acomodos de átomos en el plano y el espacio. Dicho modelo consiste en definir una celda en una disposición de átomos particular, llamada red, a partir de la magnitud del producto cruz (área) y la suma de dos vectores, y de ahí en adelante aplicar traslaciones hasta que eso me genere un patrón parecido a un fractal o al estampado de un vestido.

Veremos que se generan figuras bastante curiosas que nos dejarán con ganas de ver qué otras maravillas nos pueden traer las representaciones geométricas de objetos matemáticos.

Se dará solución a las problemáticas sugeridas por el texto, además de dar un resultado tanto con palabras, como con ecuaciones y dibujos. Se intentará ser lo más claro y conciso que se pueda mediante la introducción de elementos gráficos que aterricen las ideas a algo palpable y verificable a simple vista.

2. Metodología

Se presentará un análisis puramente gráfico y vectorial para las primeras interrogantes propuestas en el problema, pues estas constan de singulares patrones de los que se nos hace explícita la necesidad de relacionar imágenes y vectores primitivos.

A partir del apartado *b*, se hará uso de reglas propias del álgebra de vectores para demostrar los enunciados expuestos. Se dispondrá de herramientas graficadoras, como Geogebra 3D¹, para los puntos que así lo requieran.

Además de lo anterior, se agregará texto explicando en detalle la idea o lo que se tiene en mente para el desarrollo de la actividad. No se entrará en estricto detalle, pues el trabajo se haría laborioso en exceso tanto para abordar como para realizar.

Para el desarrollo del último punto se empleará Maxima, obedeciendo así la instrucción correspondiente.

3. Paralelismos, relaciones y cálculos

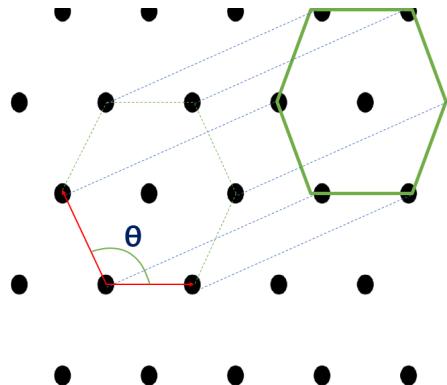


Figura 1: Haciendo un barrido visual a la red, se puede ver que los vectores(celdas) primitivos que se asumen en la figura tienen un ángulo θ que se encuentra entre $\pi/2$ y π , lo que nos hace inclinarnos a que la forma $|a| = |b|$, $\theta \approx 120^\circ$ es bastante posible. Pero no hay manera de verificarlo pues se trata de un esquema sin demasiado detalle.

¹<https://www.geogebra.org/3d?lang=fr>

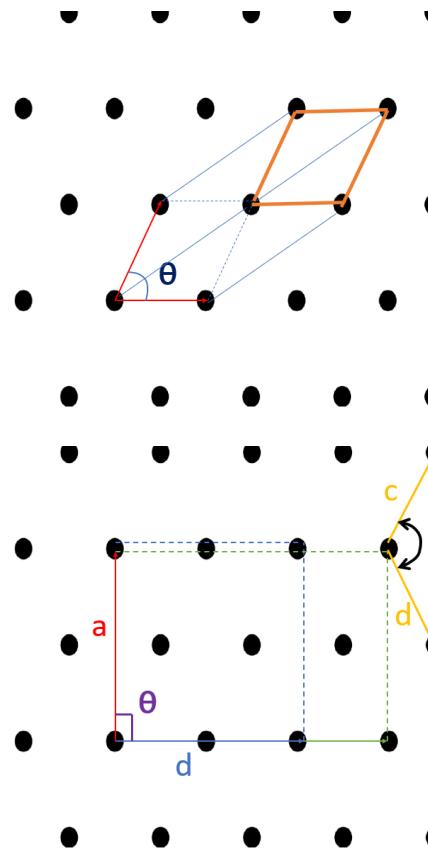


Figura 2: Otra muy posible forma de disponer vectores primitivos (y celdas) es como se muestra en este gráfico, presentando $0 < \theta < \pi/2$ y $|a| \neq |b|$.

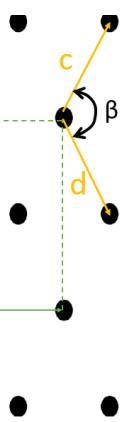
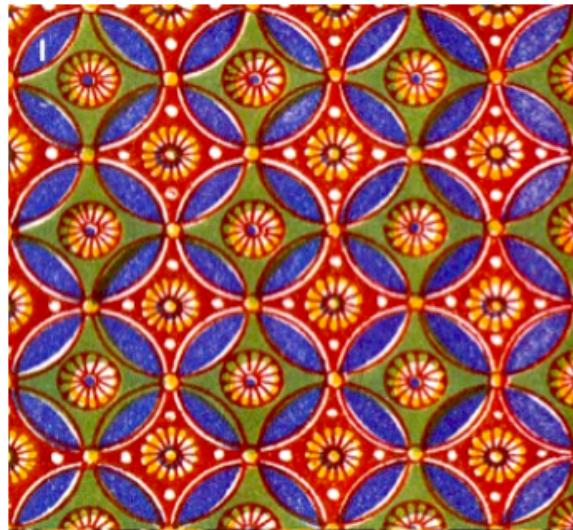
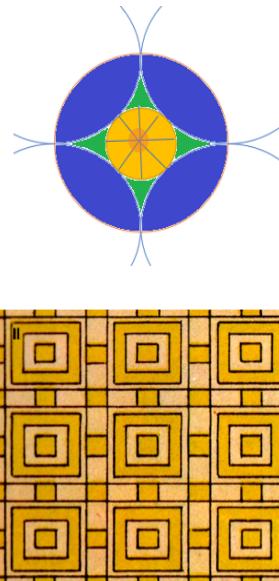


Figura 3: Por último, se hace notable que cualquiera de las demás bases (la verde con $|a| \neq |b|$ y la azul para $|a| = |b|$), tomando de manera conveniente los vectores que las definen, podrían formar una geometría en esta red haciendo uso de la proposición de Bravais.

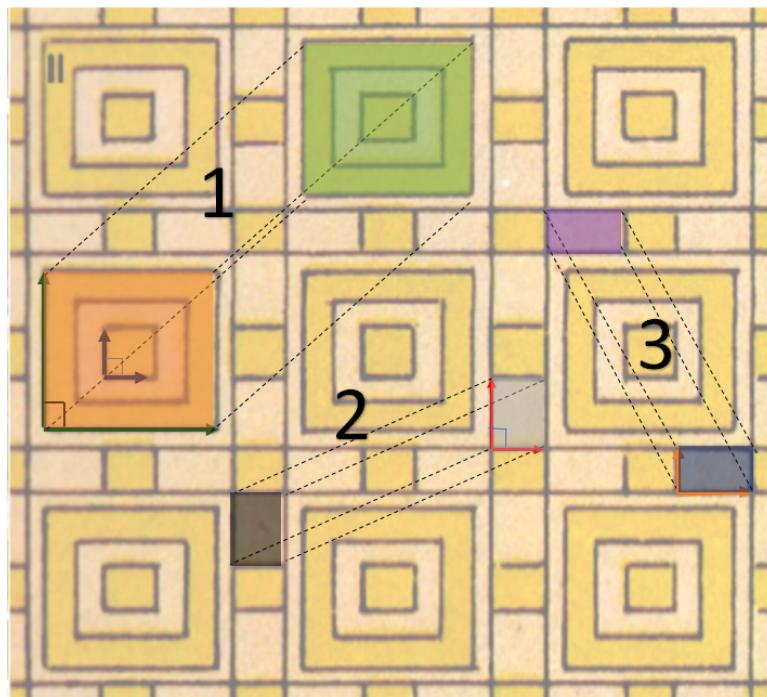


No nos fue posible encontrar una forma de hacer corresponder los vectores rectangulares de Bravais con formas circulares sin llegar a polígonos de infinitos vértices. Se nos ocurrieron aproximaciones

que no llegaban a tener un parecido sustancial. Sin embargo, algo que es un hecho, es que circunferencias superpuestas de determinados radios dan lugar al patrón. Las intersecciones tienen la misma base pero de diferente color y agregando un par de círculos más. Aquí un esquema de la idea.

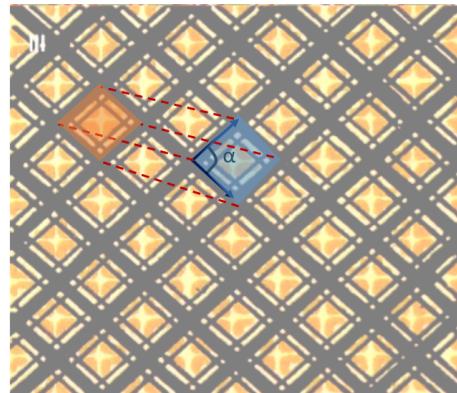


Este presenta una geometría mucho más relacionable con cualquier celda que tenga $\theta = 90^\circ$, pero solo nos quedaremos con las que no tiene un rombo adscrito.

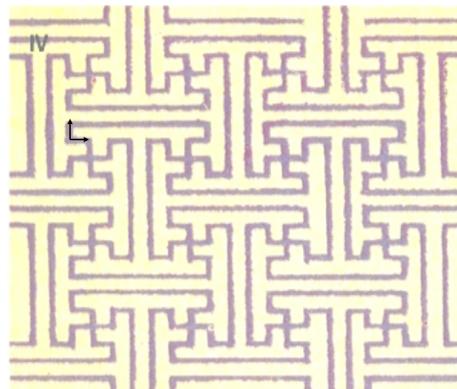


Vemos que en 1 se presenta una celda con vectores primitivos $|a| = |b|$ y ángulo de 90° .

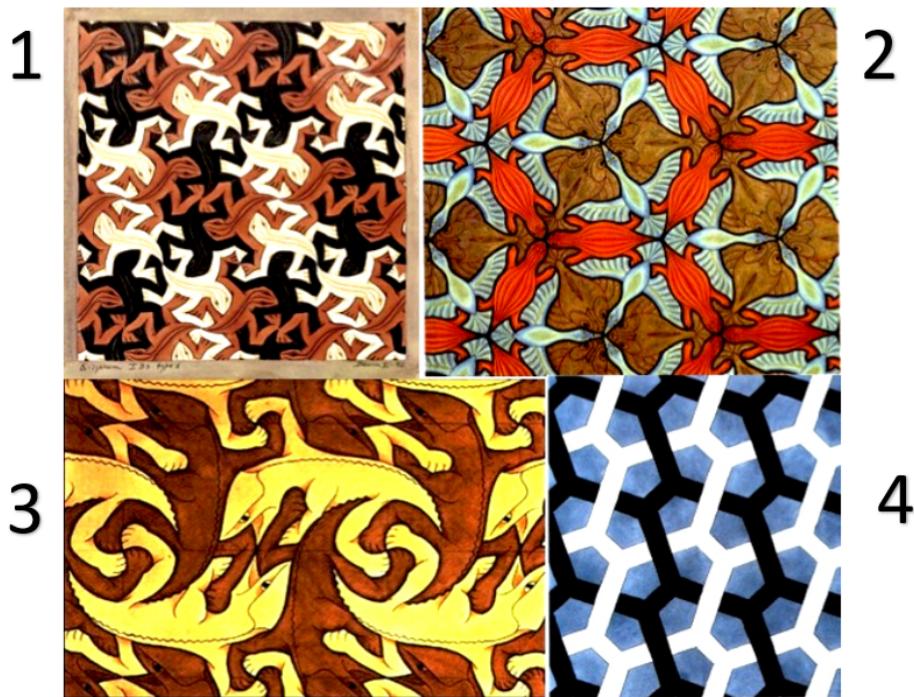
En 2 y 3 se tiene que $|a| \neq |b|$, y ninguna de las celdas primitivas tiene este comportamiento. Pero, haciendo el rombo $|c| = |d| = 0$, podemos conseguir solo el rectángulo de nuestro interés.



En este patrón se puede ver que son los rombos que aparecen vinculados a rectángulos en una de las celdas primitivas. En particular, las que constan de 4 vectores primitivos. Haciendo que $|a| = |b| = 0$, nos quedan solo rombos para trasladar de un lado a otro.



A esta solo se le pueden asociar vectores ortogonales entre sí. Las celdas no se dan, a no ser que se eliminen algunos de sus lados.



Para este punto se empleará una presentación distinta a la utilizada hasta este punto. Empezando con la figura 1, que presenta un animal construido a partir de vectores y ángulos agudos entre ellos . Se observa que no se puede atribuir la repetición a celdas primitivas de Bravais. Los que si se le puede reconocer a las celdas, es que de ellas está compuesta la figura que se repite a lo largo y ancho de la imagen en algunas zonas.

La figura 2 contiene 3 animales que se repiten, cada uno dispuesto de forma que 4 figuras (2 de cada una) me generan la tercera. En esta, si bien hay simetría, no se pueden asociar vectores definidos con rectas para formas bases.

La figura 3 es parecida a la primera, exceptuando que esta presenta bordes redondeados en determinadas zonas, lo cual hace que estas no puedan ser completamente descritas con vectores y celdas primitivas rectos.

La figura 4 constituye un respiro, pues esta si que se puede definir por vectores y celdas rectos. El problema surge de que estos son hexágonos presentan transformaciones diferentes a la traslación, lo que se puede intuir de su figura achata y algo rotada. Por lo tanto, tampoco se le puede asociar celdas y vectores primitivos.

Para atacar el problema b, primero definimos:

$$a_i = a_1 + a_2 + a_3; b_i = b_1 + b_2 + b_3; c_i = c_1 + c_2 + c_3$$

a, b, c \equiv Magnitudes de los vectores

$$\angle(a, b) = \gamma;$$

$$\angle(b, c) = \alpha;$$

$$\angle(a, c) = \beta$$

Ahora veremos los casos más sencillos $\alpha = \beta = \gamma = \pi/2$:

Si $a = b = c$, es fácil ver que $|c \cdot (a \times b)| = cab = a^3 \equiv$ Volumen de un cubo

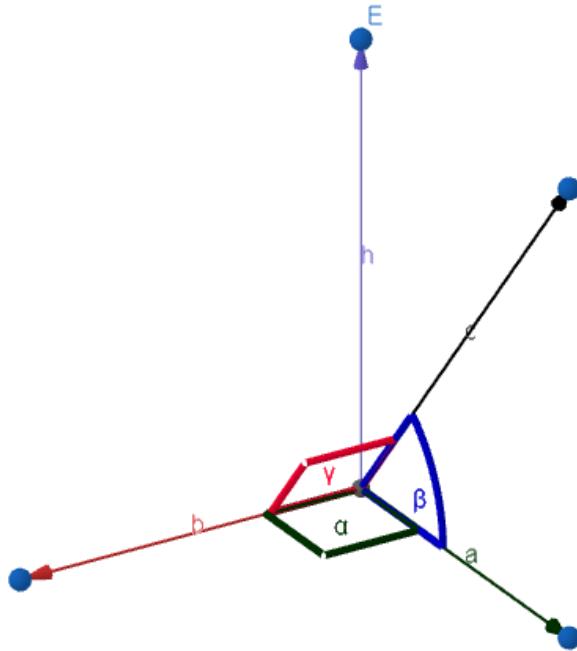
Si $a = b$, se cumple que $|c \cdot (a \times b)| = a^2 c$

Si $a \neq b \neq c$, de la misma manera $cba \equiv$ Área de la base por la altura

Lo anterior nace de que la magnitud del producto triple es el producto usual de las magnitudes de los vectores. Se ignora por completo la dirección, pues el volumen es una simple cantidad.

Ahora, complicando un poco más el asunto, se tiene $\alpha = \gamma = \pi/2$ y a_i, b_i, c_i de magnitud arbitraria:

$ab \equiv$ Área de la base, $h \equiv$ componente ortogonal al plano ab



Entonces $h = c * \sin(\beta) \Rightarrow abc \sin(\beta) \equiv Volumen$

Continuamos con ángulos fijos $\alpha = \beta = 90^\circ$ y $\gamma = 120^\circ$ y $a = b$. Y notamos que es exactamente el caso anterior, solo que con $\beta = 2\pi/3$. Cambiamos β por γ y queda:

$$a^2 c * \sin(120^\circ) = \sqrt{3}/2 a^2 c$$

Para el caso general $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ y los vectores de magnitud arbitraria se tiene

$$V = (c \cdot (a \times b)) / (abc)^2 = 1 - \cos^2(\alpha) - \cos^2(\beta) - \cos^2(\gamma) + 2\cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma)$$

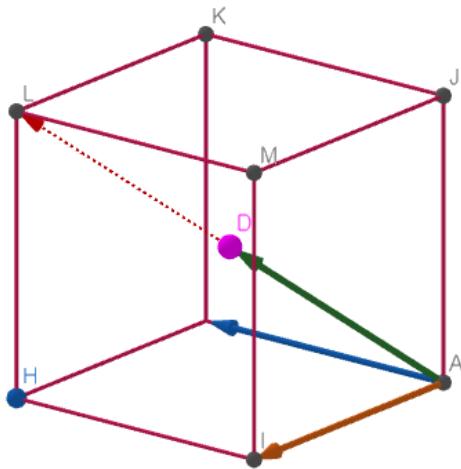
Lo cual nace de querer sacar el unitario y pasar al otro lado teorema del coseno. Dejando la expresión así

$$V = c \cdot (a \times b) = abc \sqrt{(1 - \cos^2(\alpha) - \cos^2(\beta) - \cos^2(\gamma) + 2\cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma)})$$

Se puede ver el caso que nos falta como un caso particular de este.

Ahora mostraré que los vectores $a = xi$ $b = xj$ $c = x(i + j + z)/2$ pueden ser vectores base de una celda cúbica del tipo bcc.

Comenzaré con la imagen1:



Donde claramente se observa que un átomo en el centro de la figura se conecta con el vector c . Multiplicando el vector c por dos, me caracteriza la diagonal del cubo. Se evidencia que los tres vectores me arman el cubo.

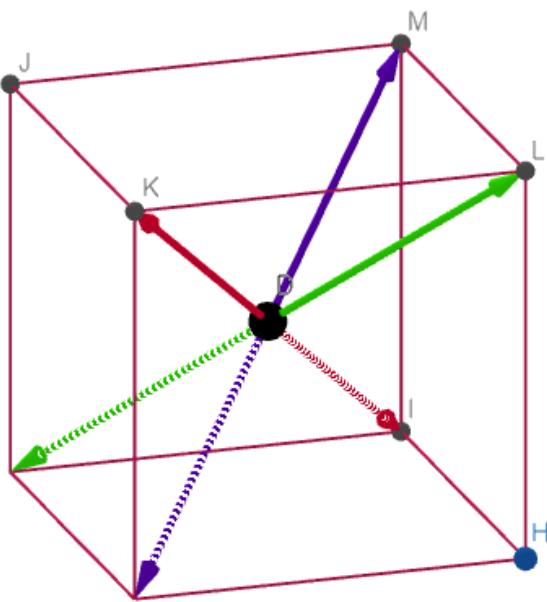
Ahora, para calcular el volumen, ya que la diagonal forma un triángulo equilátero con la arista AJ y la diagonal JL, entonces ya tenemos las tres componentes para hacer el producto.

$$x^3 \equiv \text{Volumen del cubo}$$

Pasando al siguiente problema, tenemos que:

$$a = x(-i + j + k)/2; b = x(i - j + k)/2; c = x(i + j - k)/2$$

La celda la defino tomando el átomo del centro en el origen coordenado. Cada vector tendrá su correspondiente negativo, para formar así 6 de los 8 vértices del cubo. Todo lo dicho se ve más claramente en la imagen.



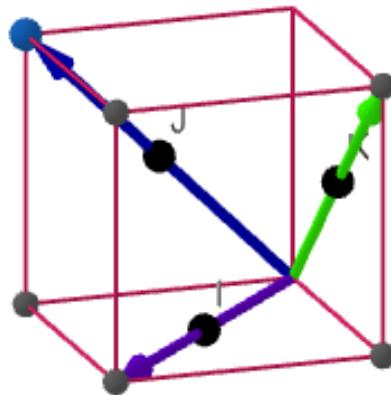
Se pudo hacer con los tres vectores que se nos daba inicialmente, pero preferí usar también sus negativos, pues estos me dan una idea más completa de la forma.

Para hallar tres lados representativos (uno en cada componente de la base), como se ve en la figura. Primero veo que una resta entre el vector a y el $-b$ me da el vector arista, al que le puedo sacar la norma.

$$\Rightarrow (-x/2, x/2, x/2) - (-x/2, x/2, -x/2) = (0, 0, x) \Rightarrow x \text{ será la norma.}$$

Ahora aplico el mismo truco con las aristas de interés restantes y me queda que $x^3 \equiv \text{Volumen}$.

Para la última celda a definir, tengo la siguiente imagen donde los puntos negros son los centros de cada cara. $a = x(j+k)/2$; $b = x(i+k)/2$; $c = x(i+j)/2$



Aquí el volumen lo calcularé así: $(x/2)^3$

Lo anterior es consecuencia de que la componente en k en el vector a es $x/2$ y al ser un cubo, todas las aristas son del mismo tamaño.

Llegamos al último punto y es momento de definir los vectores y las celdas recíprocas de un cubo.

Tomamos $a = (1, 0, 0)$, $b = (0, 1, 0)$ y $c = (0, 0, 1)$, pues ya sabemos que esta me genera un cubo.

$$\Rightarrow a' = b \times c / a \cdot (b \times c) = k/a^3 \quad b' = c \times a / a \cdot (b \times c) = j/a^3 \quad c' = a \times b / a \cdot (b \times c) = i/a^3$$

Y de la misma manera se puede encontrar para los que tienen átomos en el centro de sus caras o cuerpo, pues estas bases que usé, pueden definir fácilmente cualquiera de estos puntos centrales.

4. Conclusiones

Se constató que los vectores pueden ser usados para definir infinidad de celdas y, por consiguiente, de geometrías llamativas. En el trabajo también se corroboró que hay ciertos patrones en los que no es posible determinar su origen, pues no contemplan a la recta como un punto de partida. También se hizo evidente que en el momento de llegar a la realidad, todo se complica mucho más, pues R^3 contiene una cantidad mayor de componentes, luego las relaciones entre ellas se pueden hacer realmente complicadas y difíciles de dilucidar mentalmente.

Utilizando algunas herramientas graficadoras y para realizar cálculos, se llegó a ver con más claridad los enunciados que se nos planteó. A través del trabajo se vio desarrollada la habilidad de este servidor con la escritura en latex y el manejo de la misma.

Además de todo lo anterior, se evidenció el uso de trucos matemáticos para llegar a definir celdas que darían después lugar a geometrías en exceso complejas. Sin embargo, estas solo definen una pequeña parte de lo que se puede llegar a hacer con representaciones de cantidades matemáticas. Siendo estrictos, se habrían podido llegar a relizar las debidas relaciones entre celdas y aquellos puntos que no pudieron ser resueltos.

Referencias

- [1] L. NÚÑEZ y H. HERNÁNDEZ, *Matemáticas avanzadas*, Volumen 1, Colombia, 2021.

https://en.wikipedia.org/wiki/Bravais_lattice.