Puertas cuánticas X,Y y Z de Pauli

Cristian Ávila
Willmar López

20 de julio de 2023

Resumen

1. Introducción

Los componentes de computadoras clásicas tienden a hacerse más y más pequeños, tanto así, que se acercan peligrosamente a los enrevesados dominios de la mecánica cuántica. Todo esto en aras de una aspiración no poco ambiciosa: la eficiencia. En tamaña empresa, no se puede esperar nada menos que unos tiempos de procesamiento absurdos y accesibilidad para al menos aplicaciones de talla mundial, implicando porcentajes importantes del presupuesto de países enteros. Esta tarea no es nada sencilla, pues como se verá, el mundo pequeño no se presenta tan elegante como se esperaría a la fiesta de lo intuitivo.

1.1. Objetivos

- Presentar una propuesta existente de modelo cuántico de computación.
- Establecer un puente (mediante las puertas lógicas) que permita conectar ideas de computación clásica y cuántica.
- Establecer un caso particular sencillo en donde las puertas entren en operación sobre un sistema cuántico conveniente.

1.2. Marco teórico

1.2.1. Bit

La unidad mínima de información en un computador clásico es el bit, el cual es una señal eléctrica que codifica para 1 o 0 dependiendo de la corriente que circule por los conductores del dispositivo.

1.2.2. Transistor

Es un semiconductor encargado de administrar el flujo de corriente en los procesadores de instrucciones que tienen las computadoras. El tránsito de la corriente antes mencionada es regulado por los transistores. Se podría ver como aquel que hace que todo este entramado del lenguaje binario cobre sentido en un circuito de este tipo.

1.2.3. Puerta lógica

Son operadores que actúan como funciones booleanas que responden a estímulos (normalmente comunicados por transistores y otros elementos electrónicos) y generan información nueva a partir de una ya conocida. Estos presentan diversas respuestas de acuerdo a la función que cumplan dentro del circuito. Algunos ejemplos son: AND, OR, XOR, entre otras.

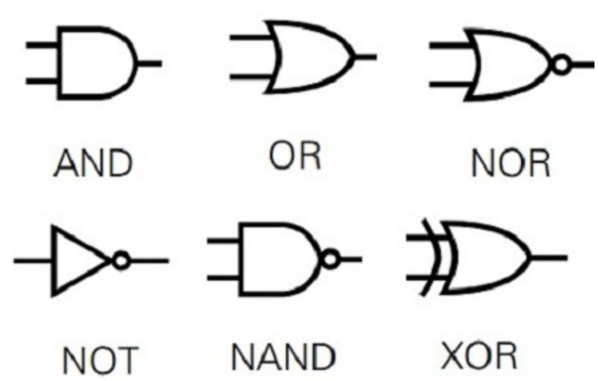

Figura 1: Representaciones gráficas de algunas puertas lógicas

1.2.4. Qubit

Un qubit es también el valor mínimo de información pero ahora en computación cuántica. ¿De qué manera se presenta está información? en bits hay claridad sobre 1 y 0 cómo paso de corriente a operaciones lógicas a partir de esos dos estados definidos. Definir el estado de un qubit es especialmente complicado siempre que se toman en cuenta todos los estados posibles del sistema.

Dicho lo anterior, el estado de un qubit se define como:

$$|\phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \tag{1}$$

En donde α y β se conocen como amplitudes de probabilidad.

1.2.5. Amplitud de probabilidad

Sin entrar en formalismos, es un número complejo $(a + bi)$ que, con su módulo elevado al cuadrado, resulta en la densidad de probabilidad de encontrar una partícula en determinado estado.

Su rol en la ecuación de estado (1) es la de coeficiente que acompaña a la base en una combinación lineal. Para la base, se opta por una ortonormal en R2 sencilla:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De su simplicidad se deduce el hecho de que todo el paradigma cuántico recae sobre la amplitud de probabilidad. Una relación importante es la condición de normalización dada por el segundo axioma de probabilidad:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \tag{2}$$

De donde la probabilidad de que resulte 0 de la salida $|0\rangle$ es de $|\alpha|^2$ y lo mismo para 1 en $|1\rangle$. A su vez, se definen las amplitudes de probabilidad así:

$$\alpha = r_\alpha e^{i\theta_\alpha} \tag{3}$$

$$\beta = r_\beta e^{i\theta_\beta} \tag{4}$$

En donde los subíndices indican la pertenecia a determinado número complejo.

1.2.6. Esfera de Bloch

Constituye una representación geométrica conveniente para los estados de un qubit. Analizar estas configuraciones será útil más adelante. Si se reemplaza (3) y (4) en (1) y luego se hace una transformación que la deje invariante, así:

$$|\phi'\rangle = e^{-i\theta_\alpha}|\phi\rangle \tag{5}$$

Se llegará a que:

$$|\phi'\rangle = r_\alpha|0\rangle + r_\beta e^{i\theta}|1\rangle \tag{6}$$

En donde se puede ver una dependencia de tres parámetros: α, β y θ.

Ahora, invocando (2), se tiene un equivalente en polares:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

$$\rightarrow |r_\alpha|^2 + |x + iy|^2 = r_\alpha^2 + x^2 + y^2 = 1 \tag{7}$$

La ecuación de una esfera de radio 1.

Para visualizar la esfera con facilidad, se dispone de (1) en coordenadas esféricas de la siguiente manera:

$$|\phi\rangle = cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\Phi}sen\frac{\theta}{2}|1\rangle \tag{8}$$

Con Φ como la diferencia de fase entre α y β y $0 < \theta < \pi$; $0 < \Phi < 2\pi$

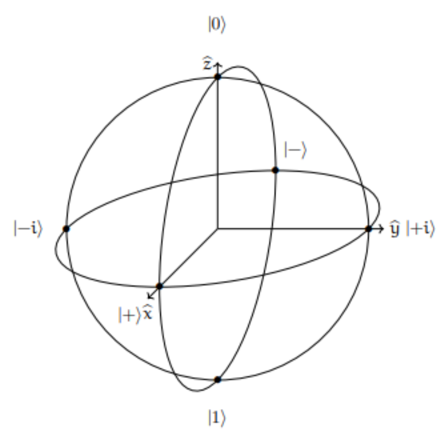

Figura 2: Representación geométrica de los estados de un qubit

Esta representación geométrica es conveniente al momento de interpretar matemáticamente el efecto de una compuerta cuántica X, Y o Z de Pauli.

1.2.7. Puertas lógicas de Pauli

En matemática, las matrices de Pauli son arreglos de la manera:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Y corresponden a rotaciones en la esfera de Bloch.

2. Caso particular

Para empezar, se escogerá un sistema cuántico que permita definir un qubit. Este debe cumpli que sea de dos estados que permitan superposición de dos variables independientes. Los dos estados deben ser distinguibles el uno del otro.

Se optó por escoger el fotón, siempre que es una partícula que cumple con el criterio y presenta propiedades familiares para el nivel académico que manejamos. La variable de análisis será la polarización de la onda (partícula) de luz.

Con el fin de hacer más intuitiva la notación, se escribirá la base (1) en términos de polarizaciones verticales y horizontales:

$$|\phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \alpha|H\rangle + \beta|V\rangle \tag{12}$$

Se podrían considerar polarizaciones circulares, elípticas o diagonales respecto a un eje, pero se evitan para escapar a la complejidad que supondrían.

A partir de ahora, se empleará un arreglo conveniente para expresar información acerca de la dirección del campo eléctrico. Dicho esto, según el formalismo de Jones:

$$\begin{pmatrix} E_{0x}e^{i\phi_x} \\ E_{0y}e^{i\phi_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \\ V \end{pmatrix} \tag{13}$$

Lo que, agregando las amplitudes de probabilidad queda:

$$\begin{pmatrix} \alpha E_{0x}e^{i\phi_x} \\ \beta E_{0y}e^{i\phi_y} \end{pmatrix}$$

Con ϕ como el ángulo que toma el vector campo eléctrico con respecto a la vertical.

Entonces, aplicando (9), (10) y (11) usando producto matricial simple:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha E_{0x}e^{i\phi_x} \\ \beta E_{0y}e^{i\phi_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta E_{0y}e^{i\phi_y} \\ \alpha E_{0x}e^{i\phi_x} \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha E_{0x}e^{i\phi_x} \\ \beta E_{0y}e^{i\phi_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta i E_{0y}e^{i\phi_y} \\ \alpha i E_{0x}e^{i\phi_x} \end{pmatrix} \tag{15}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha E_{0x}e^{i\phi_x} \\ \beta E_{0y}e^{i\phi_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha E_{0x}e^{i\phi_x} \\ -\beta E_{0y}e^{i\phi_y} \end{pmatrix} \tag{16}$$

La esfera de Bloch puede dar una interpretación geométrica acerca de lo que hacen estas transformaciones, así:

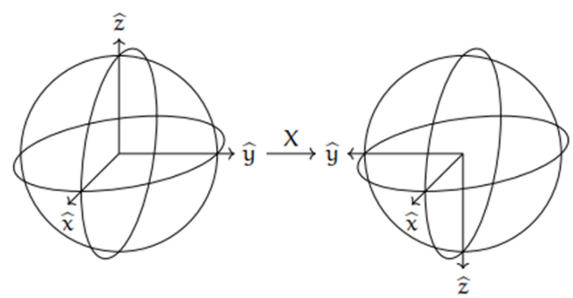

Figura 3: Efecto de la puerta X sobre la señal

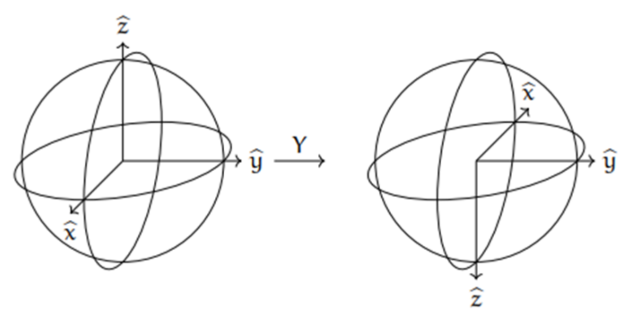

Figura 4: Efecto de la puerta Y sobre la señal

Lo que pone en términos más intuitivos aquello que se analiza.

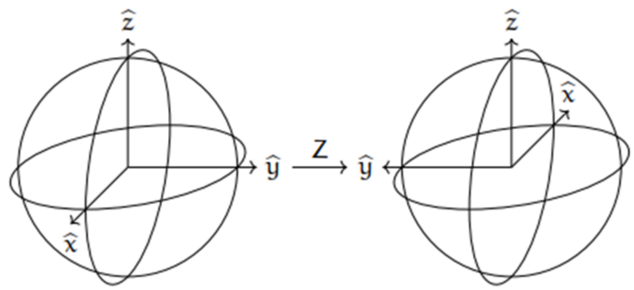

Figura 5: Efecto de la puerta Z sobre la señal

3. Conclusión

El modelo cuántico propuesto en la actualidad es equivalente al modelo clásico en cuanto a concepción de información como estados de un sistema físico que cambian al pasarlos a través de una puerta lógica.

Para definir completamente un estado cuántico, hace falta considerar todos los posibles estados del sistema que se encuentren en superposición.

El fotón es un sistema que cumple con el criterio de tener dos estados cuánticos independientes en superposición.

Se pueden acomodar los estados del sistema en una esfera geométrica conveniente para tener una idea intuitiva de lo que se hace al transformar con la puerta lógica.

Referencias

Link a un trabajo de grado de una doctorante sueca: `https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:14014/FULLTEXT01.pdf`

Link a Wikipedia que proporcionó información verás y verificable por múltiples fuentes: `https://en.wikipedia.org/wiki/Two-state_quantum_system`