Matrices

Angelica Bravo[1]

[1]Department of Basic Science
University of Cundinamarca

2016

Tabla de Contenido

Outline

- Una parabola es el conjunto de todos los puntos P del plano que son equidistantes de una recta fija L, llamada directriz, y de un punto F, llamado foco.
- Las matrices se escriben en mayusculas.
- Las matrices se dividen en filas (horizontal) y columnas (verticales).
- Los elementos a_{ij} se llaman entradas de la matriz, i representa las filas y j las columnas. Una matriz se escribe como:

$$A = (a_{ij}) \tag{1}$$

- Las matrices tienen dimensiones mxn, tambien se llama Tamao de la matriz.
- Una matriz de tamano nxn se llama MATRIZ CUADRADA

Una Matriz A de *mxn*

es un arreglo rectangular de mn nmeros dispuestos en m renglones y n columnas.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Ejemplos

- Si las entradas de una matriz son todas cero, esta se llama matriz cero.

Ejemplos

- Si las entradas de una matriz son todas cero, esta se llama matriz cero.
- $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ es una matriz cuadrada de $2x2$
- $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ es una matriz de $3x2$
- $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix}$ es una matriz de $2x3$
- $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ es una matriz cero de $2x3$

Ejemplos

- Si las entradas de una matriz son todas cero, esta se llama matriz cero.
- $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ es una matriz cuadrada de $2x2$
- $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ es una matriz de $3x2$
- $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix}$ es una matriz de $2x3$
- $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ es una matriz cero de $2x3$
- Third item.

Ejemplos

- Si las entradas de una matriz son todas cero, esta se llama matriz cero.
- $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ es una matriz cuadrada de $2x2$
- $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ es una matriz de $3x2$
- $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix}$ es una matriz de $2x3$
- $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ es una matriz cero de $2x3$
- Third item.
- Fourth item.

Ejemplos

- Si las entradas de una matriz son todas cero, esta se llama matriz cero.
- $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ es una matriz cuadrada de $2x2$
- $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ es una matriz de $3x2$
- $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix}$ es una matriz de $2x3$
- $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ es una matriz cero de $2x3$
- Third item.
- Fourth item.
- Fifth item.

Ejemplos

- Si las entradas de una matriz son todas cero, esta se llama matriz cero.
- $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ es una matriz cuadrada de $2x2$
- $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ es una matriz de $3x2$
- $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix}$ es una matriz de $2x3$
- $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ es una matriz cero de $2x3$
- Third item.
- Fourth item.
- Fifth item. Extra text in the fifth item.

Outline

Operaciones

Igualdad

Dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son iguales si:
(1) son del mismo tamano,
(2) las componentes correspondientes son iguales.

Vectores

Los vectores son matrices de un renglon o una columna.
El vector renglon o fila tiene n componentes y es una matriz de $1xn$.
$(a_1, a_2, ..., a_m)$

El vector columna tiene m componentes y es una matriz de $nx1$. $\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ a_n \end{vmatrix}$

operaciones

Producto α

Sean $A = (a_{ij})$ y una matriz de mxn y α un escalar, entonces la matriz αA esta dada por:

$$\alpha \mathrm{A} = \begin{vmatrix} \alpha\ \mathrm{a}_{11} & \alpha \mathrm{a}_{12} & \dots & \alpha \mathrm{a}_{1j} & \dots & \alpha \mathrm{a}_{1n} \\ \alpha \mathrm{a}_{21} & \alpha \mathrm{a}_{22} & \dots & \alpha \mathrm{a}_{2j} & \dots & \alpha \mathrm{a}_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \alpha \mathrm{a}_{i1} & \alpha \mathrm{a}_{i2} & \dots & \alpha \mathrm{a}_{ij} & \dots & \alpha \mathrm{a}_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \alpha \mathrm{a}_{m1} & \alpha \mathrm{a}_{m2} & \dots & \alpha \mathrm{a}_{mj} & \dots & \alpha \mathrm{a}_{mn} \end{vmatrix}$$

Suma

Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ dos matrices de mxn la suma de A y B es la matriz $A + B$ dada por:

$$A + B = \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1j} + b_{1j} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2j} + b_{2j} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \dots & a_{ij} + b_{ij} & \dots & a_{in} + b_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mj} + b_{mj} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{vmatrix}$$

Propiedades de la Suma

Sea A,B,C tres matrices de *mxn* y sean $\alpha y \beta$ dos escalares. Entonces:

1. $A + 0 = A$
2. $OA = 0$
3. $A + B = B + A$ (Ley conmutativa para la suma de las matrices)
4. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (Ley asociativa para la suma de las matrices)
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + B$ (Ley conmutativa para la suma de las matrices)
6. $1A = A$
7. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

Propiedades de la Suma

Producto

Producto Escalar entre vectores

Sea

$$a = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ a_n \end{vmatrix} \text{ y } b = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{vmatrix} \text{ dos vectores.}$$

Entonces el **producto escalar** de **a** y **b** esta dado por:

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n \tag{2}$$

algunas veces se llama **producto interno** de vectores. El producto interno de vectores es un escalar.

Producto Escalar entre vectores

Theorem

Sean **a**,**b***y* **c** *tres n-vectores y sean* $\alpha y \beta$ *dos escalares. Entonces:*

1. $a \cdot 0 = 0$
2. $a \cdot b = b \cdot a$ *(Ley conmutativa)*
3. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ *(Ley distributiva)*
4. $(\alpha a) \cdot b = \alpha(a \cdot b)$

Producto de dos Matrices

Sea A una matriz *mxn* y B una matriz *nxp*. Entonces el producto de A y B es una matriz *mxp*, C en donde:

$$c_{ij} = (renglonideA) * (columnajdeB) \tag{3}$$

Es decir, el elemento ij de AB es el producto punto del renglon i de A y la columna j de B.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj} \tag{4}$$

Si el numero de columnas de A es igual al numero de columnas de B, entonces se dice que A y B son compatibles bajo la multiplicacin.

Ley asociativa para la multiplicacin de matrices

Sea A una matriz *mxn*, B una matriz *nxp* y C una matriz *pxq*. Entonces la ley asociativa:

$$A(BC) = (AB)C \tag{5}$$

se cumple y ABC, definida por cualquiera de los lados de la ecuacin es una matriz *mxp*

Ley distributiba para la multiplicacin de matrices

Si todas las matrices y todos los productos siguientes estan definidos, entonces:

$$A(B + C) = AB + AC \tag{6}$$

$$(A + B)C = AC + BC \tag{7}$$

El producto de la matriz A de *mxn* y el vector columna x es una combinacin lineal de las columnas de A.

sistemas

$$Ax= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1{*}x_1 + 2 * x_2 \\ 3{*}x_1 + 4 * x_2 \end{vmatrix}$$

Un sistema lineal de ecuaciones se puede representar de forma matricial como:

$$Ax = b \tag{8}$$

combinacion lineal

ejemplo

Considere el sistema:

$$\begin{array}{llll} 2x_1 & + 4x_2 & + 6x_3 & = 18 \\ 4x_1 & + 5x_2 & + 6x_3 & = 24 \\ 3x_1 & + x_2 & - 2x_3 & = 4 \end{array}$$

A son los coeficientes de las variables x, esa es la matriz A: $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

El vector X representa las variables: $\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$

y el vector b son los valores despues del igual: $\begin{vmatrix} 18 \\ 24 \\ 4 \end{vmatrix}$

inversa de una Matriz Cuadrada

Identidad

La matriz identidad I_n de nxn es una matriz cuyos elementos de la diagonal principal son iguales a 1 y todos los demas son cero.

Inversa

Sea A y B dos matrices de nxn. Suponga que

$$AB = BA = I$$

Entonces B se llama la matriz inversa de A y se denota por A^{-1}, se tiene:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Si A tiene inversa se dice que es invertible.
Si A no tiene inversa se dice que es singular.

Inversa

1. Se puede decir que $(A^{-1})^{-1} = A$ si es invertible.
2. No todas las matrices cuadradas tienen inversa.
3. La inversa de una matriz es unica.
4. Sean A y B invertibles, entonces AB es invertible y:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \tag{9}$$

5. Si A es invertible es sistema $Ax = b$ tiene una solucion unica.
6. Una matriz A cuadrada es invertible si y solo si su forma escalonada reducida por renglones es la matriz identidad; es decir, si su forma escalonada reducida por renglones tiene n pivotes.

Determinantes

Definicin

Sea A= $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Se define el determinante de A $= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ El determinante de A se escribe como det A

Inversa

Sea A una matriz de $2x2$ entonces:

1. A es invertible si y slo si $detA \neq 0$.
2. Si el $detA \neq 0$ entonces:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

(10)

Inversa

Se tienes el sistema $Ax = b$, si y slo si, la matriz A tiene inversa, se puede decir que:

$$x = A^{-1}b \tag{11}$$

Transpuesta de una matriz

Definicin y propiedades

Sea A una matriz de *mxn*. Entonces la transpuesta de A, es la matrix *nxm* obtenida al cambiar los renglones por las columnas de A. Asi, $A^t = (a_{ji})$. Suponga que A es una matriz de *mxn* y B es una matriz de *mxp* entocnes:

1. $(A^t)^t = A$
2. $(AB)^t = B^t A^t$
3. Si A y B son de *mxn* entonces $(A + B)^t = A^t B^t$
4. Si A es invertible, entonces A^t es invertible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
5. Una Matriz A (cuadrada) se llama Simtrica si $A^t = A$. Las columnas de A son tambin las filas de A. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

Determinantes

determinante nxn

Sea A una matriz de *nxn*. Entonces el determinante de A, esta dado por:

$$detA = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + ... + a_{1n}A_{1n}. \tag{12}$$

$$detA = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k} \tag{13}$$

Determinantes Propiedades

1. Si A es una matriz triangular Superior o inferior, entonces el
$$detA = a_{11}A_{11} + a_{22}A_{22} + a_{33}A_{33} + ... + a_{nn}A_{nn}. \tag{14}$$
Es igual al producto de sus componentes en la diagonal principal.
2. Si A es una matriz triangular Superior, entonces A e invertibler si y solo si $detA \neq 0$.
3. El area generada por $A = valorAbsolutodetA$
4. Sean A y B dos matrices de nxn. Entonces $detAB = detAdetB$
5. Si una matriz cuadrada tiene factorizacin LU, A=LU donde L tiene unos en la diagonal, entonces: $detA = detU$ =productos de loselementos de la diagonal de U.

Determinantes Propiedades

1. Si $PA = LU$, donde P es una matriz de permutacin y L y U son son como antes entonces: $detA = \dfrac{detU}{detP} = \pm detU$
2. $detA^t = detA$
3. Se puede calcular det A expandiendo los cofactores en cualquier fila, tambien se puede calcular el det A expandiendo por cofactores en cualquier columna de A.

$$detA = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj}. \tag{15}$$

4. Si cualquier fila o columna de A es un vector cero, entonces $detA = 0$
5. Si la fila i o la columna j de A se multiplica por una escalar c, entonces $detA$ se multiplica por c.

Determinantes Propiedades

1. Si A,B,C son matrices identicas excepto por la columna j y que la columna j de C es la suma de las j-esimas columnas de A y B. Entonces, $dertC = detA + detB$. Igual para los renglones.
2. El intercambio de cualesquiera dos filas(columnas) distintos de A tiene el efecto de multiplicar el $detA$ por -1.
3. Si A tiene dos filas o columnas iguales, entonces $detA = 0$
4. Si una fila (o columna) de A es un multiplo escalar de otra fila(o columna), entonces $detA = 0$.
5. Si se suma un multiplo escalar de una fila(o columna)de A a otra fila(o columna) de A, el determinante no cambia.

Inversa

Matriz Menor

Sea A la matriz de nxn, se define como matriz menor M_{ij} a la matiz de $n-1$ filas eliminando elrenglon i y $n-1$ columnas eliminando la columna j..

Ejemplo: A= $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

Tiene 9 matrices menores, la primera es : M_{11} que se define eliminando la fila 1 y la columna 1. $M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

La segunda es: $M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

Las otras son: $M_{13}, M_{21}, M_{22}, M_{23}, M_{31}, M_{32}, M_{33}$.

Inversa: Cofactores

Cofactores

Sea A una matriz de *nxn*. El cofactor *ij* de A, denotado por A_{ij}, est dado por:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij}) \tag{16}$$

El cofactor es 1 si la suma $i + j$ es par. El cofactor es -1 si la suma $i + j$ es impar.

Matriz Adjunta

Dada la Matriz B de *nxn* como la matriz compuesta de cofactores de A, B $= \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$

La adjunta de A es la transpuesta de la matriz B. adj A $= B^T =$
$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{vmatrix}$

Inversa

Determinante

Sea A una matriz de nxn. A es invertible si y solo si $detA \neq 0$.

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} adjA \tag{17}$$

Sea A una matriz de *nxn* y suponga que $detA \neq 0$. Entonces la solucion unica del sistema $Ax = b$ es:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D}, ..., x_n = \frac{D_n}{D} \tag{18}$$

Outline

Blocks

Block Title

You can also highlight sections of your presentation in a block, with it's own title

Theorem

There are separate environments for theorems, examples, definitions and proofs.

Example

Here is an example of an example block.

Summary

- The first main message of your talk in one or two lines.
- The second main message of your talk in one or two lines.
- Perhaps a third message, but not more than that.

- Outlook
  - Something you haven't solved.
  - Something else you haven't solved.

For Further Reading I

A. Author.
Handbook of Everything.
Some Press, 1990.

S. Someone.
On this and that.
Journal of This and That, 2(1):50–100, 2000.