UdeC

UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA

FUNCIONES

GRUPO DE INVESTIGACIÓN AXIOMA

Ingeniería - Ciencias Básicas
Universidad de Cundinamarca

Función inyectiva o uno a uno

Una función f es llamada una función uno a uno, si nunca toma el mismo valor dos veces, es decir,

$$f(x_1) \neq f(x_2) \quad \text{siempre que} \quad x_1 \neq x_2$$

Test de la recta horizontal

Una función es uno a uno si y solo si ninguna recta horizontal intersecta su gráfico más de una vez.

Ejemplo

La función $f(x) = x^3$ es inyectiva.
Si $x_1 \neq x_2$, entonces $x_1^3 \neq x_2^3$ (dos números diferentes no pueden tener el mismo cubo). Si que f es inyectiva

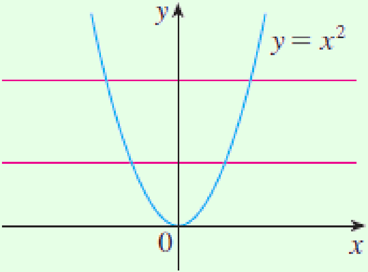
EJEMPLO

La función $g(x) = x^2$ no es inyectiva.

$$g(-2) = 4 = g(2)$$

por lo que 2 y -2 tienen la misma salida.

Además, podemos argumentar que g no es inyectiva debido a existe una recta horizontal que corta a la gráfica de la función en dos puntos o más.

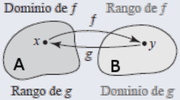


INVERSA

Sea f una función uno a uno con dominio A y rango B. Entonces la función inversa f^{-1} tiene dominio B y rango A y está definida por

$$f^{-1}(y) = x \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = y$$

para todo $y \in B$.



OBSERVACIÓN

- $\mathrm{Dom}(f^{-1}) = \mathrm{Ran}(f)$
- $\mathrm{Ran}(f^{-1}) = \mathrm{Dom}(f)$
- $(f \circ f^{-1})(x) = x$, para toda $x \in B$
- $(f^{-1} \circ f)(x) = x$, para toda $x \in A$

Cómo encontrar la función inversa de una función f uno a uno

1. Escribir $y = f(x)$
2. Resolver esta ecuación para x en términos de y (si es posible).
3. Para expresar f^{-1} función de x, intercambiamos x por y. La ecuación resultante es $y = f^{-1}(x)$

Ejemplo

Encuentre la función inversa de $f(x) = x^3 + 1$
Empezamos escribiendo

$$y = x^3 + 1$$

Después, despejamos x

$$x^3 = y - 1$$
$$x = \sqrt[3]{y - 1}$$

Finalmente, intercambiamos x y y:

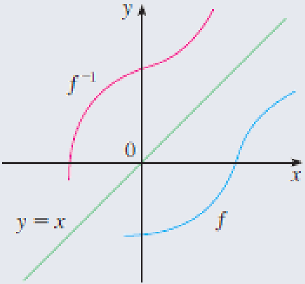
$$y = \sqrt[3]{x - 1}$$

Ahora, la función inversa es

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$$

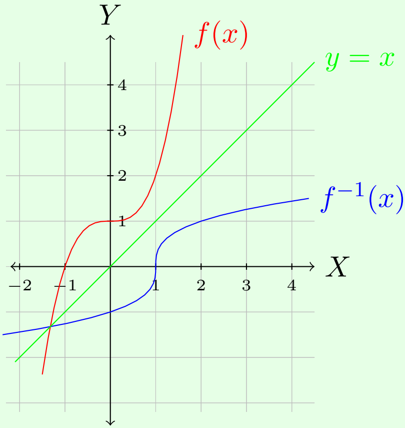
$\boxed{\text{La gráfica de } f^{-1} \text{ se obtiene reflejando la gráfica de } f \text{ sobre la recta } y = x.}$

El principio de intercambio de x e y para encontrar la función inversa también nos da el método para obtener la gráfica de f^{-1} a partir de la gráfica de f.



Ejemplo

La inversa de $f(x) = x^3 + 1$



FUNCIÓN LOGARÍTMICA

La **función logarítmica** con base $b > 0$, $b \neq 1$, se define por :

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = b^y$$

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA $f(x) = \log_b x$

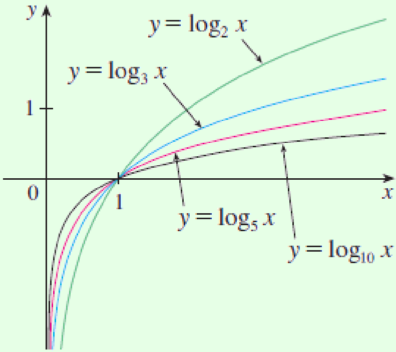
1. El dominio de f es el conjunto de números reales positivos; es decir, $(0, \infty)$
2. El rango de f es el conjunto de números reales; es decir, $(-\infty, \infty)$
3. La intersección con el eje X de f es $(1, 0)$. La gráfica de f no tiene intersección Y.
4. Para $b > 1$ la función f es creciente sobre el intervalo $(0, \infty)$.
   Para $0 < b < 1$ la función f es decreciente sobre el intervalo $(0, \infty)$.
5. El eje y, es decir, $x = 0$, es una asíntota vertical para la gráfica de f.
6. La función f es uno a uno.

Propiedades de cancelación

i. $\log_a(a^x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$

ii. $a^{\log_a x} = x$, para $x > 0$

La figura muestra las gráficas de $y = \log_a x$ con varios valores de la base $a > 1$.Todas las funciones logarítmicas pasan por el punto (1, 0).



Leyes logarítmicas

Si x e y son números positivos, entonces

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a x^r = r\log_a x$

Ejemplo

Use las leyes de los logaritmos para evaluar

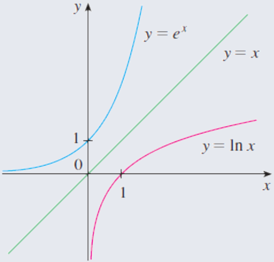
$$\log_2 80 - \log_2 5$$

$$\begin{aligned} \log_2 80 - \log_2 5 &= \log_2\left(\frac{80}{5}\right) \\ &= \log_2(16) \\ &= 4 \end{aligned}$$

Logaritmo natural

Al logaritmo con base e se le llama logaritmo natural y tiene una notación especial:

$$\log_e x = \ln x$$



Propiedades de cancelación

I. $\ln(e^x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$

II. $e^{\ln x} = x$, para $x > 0$