Capitolul 12
Regulatoare cu structură fixă de tip P, PI, PID

Conținut

Scopul capitolului

Proiectarea regulatorului automat se face pe baza datelor inițiale, furnizate de caracteristicile procesului tehnologic şi ale elementului de execuție, şi prin considerarea performanțelor de regim tranzitoriu şi staționar ce se urmăresc a fi realizate de către SRA.
Regulatorul cu structură fixă este un sistem ale cărui elemente necunoscute sunt doar coeficienții polinomului funcţiei sale de transfer. Procedeul de determinare a acestora, numit acordarea regulatorului cu structură fixă, conduce la obţinerea unui sistem rezultant global care să satisfacă cerinţele impuse.
Prin datele inițiale de proiectare se impun performanţele răspunsului regimului tranzitoriu (valoarea maximă a suprareglajului, durata regimului tranzitoriu, timpul de creştere, ş.a). Referitor la regimul staționar, se impune de obicei valoarea erorii staționare pentru un anumit tip de mărime de intrare (treaptă, rampă) şi/sau de perturbație.
În capitol se prezintă regulatoarele cu structură fixă, cele mai utilizate în practică, şi modul de acordare a acestora, utilizând metoda alocării (plasării) polilor, luând în calcul performanțele dinamice dorite pentru sistem.

1. Analiza regulatoarelor de tip P, PI, PID

În tabelul 12.1 sunt prezentate relațiile de calculul pentru mărimea de ieşire a regulatorului cu structură fixă $u(t)$ (mărimea de comandă pentru proces) şi funcțiile de transfer ($H_R(s)=U(s)/\varepsilon(s)$), ale regulatoarelor proporțional P, proporțional-integral PI, proporțional-integral-derivativ PID.

Tabel 12.1 ***Relațiile pentru calculul mărimii de ieşire (a comenzii)*** $u(t)$ ***şi al funcțiilor de transfer*** $H_R(s)$***, pentru regulatoarele cu structură fixă***

Regulator de tip	Relaţia de calcul a comenzii $u(t)$	Funcţia de transfer
P	$u(t)=K_P\cdot\varepsilon(t)$	$H_R(s)=K_P$
PI	$u(t)=K_P\cdot\varepsilon(t)+K_I\cdot\int\varepsilon(t)dt$	$H_R(s)=K_P+\frac{K_I}{s}$
PID	$u(t)=K_P\cdot\varepsilon(t)+K_I\cdot\int\varepsilon(t)dt+K_D\frac{d\varepsilon(t)}{dt}$	$H_R(s)=K_P+\frac{K_I}{s}+K_D\cdot s$

În tabel se pot identifica coeficientii (mărimi constante), corespunzători componentei proporționale (amplificarea) - K_P , ai părții integrale - K_I , şi ai părții derivative K_D a regulatorului. Răspunsul regulatorului este controlat prin aceşti coeficienți, utilizați pentru a mări/micşora ponderea fiecărei componente a acestuia în răspunsul de ansamblu al sistemului ce este reglat. Acțiunea fiecărei componente a regulatorului poate fi descrisă astfel:

- *proporțională* – asigură un răspuns proporțional (liniar) cu eroarea;
- *integrală* – ține evidența erorilor acumulate în timp, avand efect de filtrare;
- *derivativă* – mărimea de comandă este proportională cu viteza de variație a erorii.

Schema de reglare cu regulatoare cu structură fixă PID este prezentată în figura 12.1.a, iar efectul fiecărei componente a regulatorului este ilustrat în figura 11.1.b.

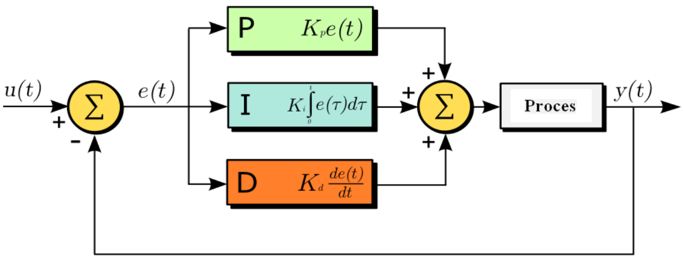


Fig. 12.1.a Schema de reglare a unui proces cu regulator PID

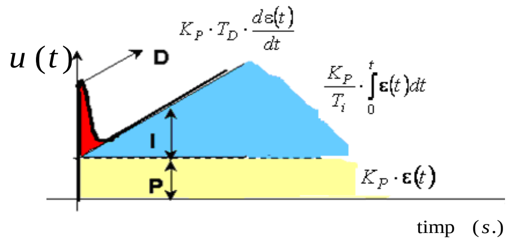


Fig. 12.1.b Acțiunea proporțională - P, integrală - I și derivativă - D asupra mărimii de comandă în proces

Note: 1. Regulatoarele de tip P nu au în structura lor un model intern, deci nu vor respecta condițiile **(B)** și **(D)**. Regulatoarele de tip PI și PID au inclus modelul mărimii exogene de tip treaptă, deci dacă vor îndeplini condiția **(A)**, vor îndeplini și cerințele **(B)** și **(D)**. Acestea nu îndeplinesc aceste condiții pentru alte mărimi exogene (rampă, sinus, etc.). Mărimile exogene tip treaptă sunt în general utilizate în aplicații, și se pot urmării relativ bine chiar și referințele oarecare, ce se pot descompune în secvențe de trepte. De asemenea, perturbațiile sunt deseori de tip treaptă.

2. Caracteristicile regulatoarelor cu structură fixă sunt descrise sumar în tabelul 12.2.

Tabel 12.2 ***Caracteristici ale regulatoarelor cu structură fixă***

Tip regulator	Avantaje	Dezavantaje
P	-Construcție simplă	-Nu ține cont de evoluția anterioară a erorii -Eroare staționară diferită de zero. -Nu sunt recomandate pentru sistemele ce prezintă întârziere de reacție la variația semnalului de comandă
I	-Nu prezintă eroare staționară	-Durata procesului de reglare este mai mare decât la regulatoarele P. Funcționarea SRA mai puțin stabilă
D	-Permite o anticipare a modificării mărimii reglate, deci determină o viteză a răspunsului crescută	-Durata foarte mică a intervalului în care se manifestă răspunsul.
PI	-Nu prezintă eroare staționară. Suprimă mai rapid efectul perturbațiilor, în comparație cu regulatorul de tip I. Reglaj îmbunătățit față de regulatorul P. Elimină zgometele care apar pe valoarea măsurată.	-Construcție mai complicată decât în cazul unui regulator P
PD	-Folosit pentru prcese lente în vederea detectării direcției și vitezei de variație a erorii. -Reduce sensibil durata procesului tranzitoriu (se mărește viteza de răspuns)	-Eroare staționară diferită de zero, în majoritatea cazurilor
PID	-Sistemele automate cu regulatoare PID reunesc avantajele comenzilor de tip P, I și D în cadrul unui regulator. -Nu prezintă eroare staționară. -Performanțele cele mai bune, răspunsul SRA este de calitate (rapid, oscilații amortizate, suprareglare acceptabilă)	-Necesitatea *acordării* (creșterii/ micșorării pondererii) celor trei forme diferite de acționare: P, I și D, în conformitate cu comportamentul sistemului controlat (pe baza răspunsului la treaptă unitară)

3. În practică, se folosesc în multe cazuri pentru regulatoarele PID ideale, implementări care permit reglarea amplificării globale simultan pentru toate cele 3 componente printr-un singur parametru K_R, și folosesc relația:

$$H_R(s) = K_R\left(1 + \frac{1}{T_I \cdot s} + T_D \cdot s\right),$$

unde : T_I este constanta de timp a părții integrale (timp de întârziere),

T_D – constanta de timp a părții derivative (timp de anticipare).

Exemplificarea unui răspuns indicial al acestor tipuri de regulatoare este reprezentată în figura 12.1.c.

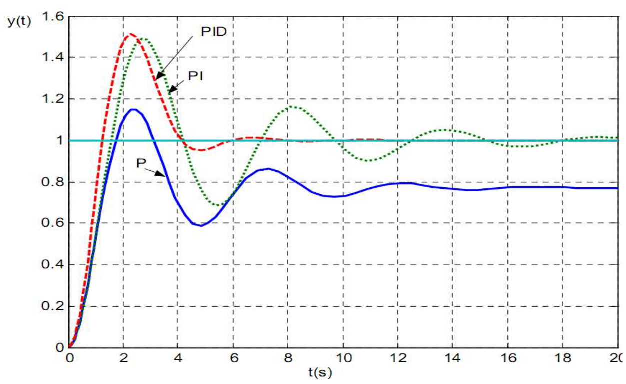
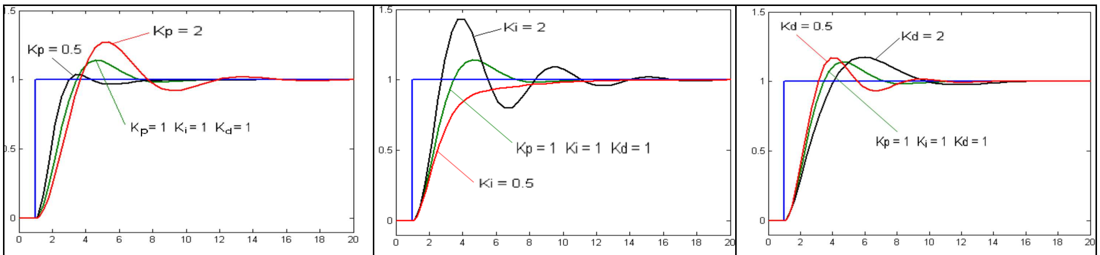


Fig.12.1.c. Răspunsul indicial al unui sistem cu regulatoare de tip P, PI, PID



(a) Valori diferite ale constantei K_p (iar K_i si K_d sunt pastrate constante) | **(b) Valori diferite ale constantei K_i (K_p si K_d - pastrate constante)** | **(c) Valori diferite ale constantei K_d (K_p si K_i - pastrate constante)**

Fig. 12.1.d Evidențierea răspunsului sistemului de reglare în timp pentru mai multe valori ale constantelor regulatorului cu structură fixă

Aplicații rezolvate

A.12.1. Un sistemul de reglare automată trebuie să permită reglarea continuă a vitezei unui motor de curent continuu în toată plaja de valori posibile. Se considera un motor cu următoarele date: R = 1Ω, L = 0.5H, K = 0.01Nm/A, F = 0.1Nm/rad/s, J=0.01Kgm^2. Se va aplica o intrare de tip trepata de valoare 1 [rad/sec]. Se urmareşte analiza:

a) răspunsului în viteză al motorului atunci când sistemul de reglare este buclă deschisă şi respectiv în buclă închisă fiind comandat cu un regulator P şi PID.

b) efectulului componentelor unui regulator P şi PID asupra răspunsului în viteză al motorului de curent continuu, folosind funcții Matlab. Se vor considera pentru regimul dinamic următoarele valori pentru mărimile ce-l caracterizează: timp de stabilizarea mai redus de 2 sec, ; suprareglaj $\sigma < 5\%$; eroarea de regim stationar $\varepsilon_{ss} < 1\%$.

Se cere să se ruleze codurile Matlab prezentate în continuare ca rezolvare a aplicației.

Soluție:

```
% Date initiale al motorului de curent continuu
R = 1;          %[ohm]     Rezistenta rotorului
L = 0.5;        %[H]       Inductivitatea rotorului
J = 0.01;       %[kgm2]    Momentul de inertie al rotorului
K = 0.01;       %[Nm/A]    Constanta de cuplu
F = 0.1;        %[Nms]     coef. de frecari vascose
%------------------------------------------------------------
% Functia de transer a motorului de c.c. - procesul
num = K;                                          % numarator
den = [(J*L) ((J*R)+(L*F)) ((F*R)+K^2)]; % numitor
functie_motor = tf(num,den)
subplot(3,1,1);
t = 0:0.01:2;                      %timpul de simulare
step(functie_motor,t);             % raspunsul sistemului in bucla deschisa
title('Raspunsul sistemului in bucla deschisa'); grid;
K_p = 700;
num_Kp = K_p*num;   den_Kp = den;
[numf,denf] = cloop(num_Kp,den_Kp);
subplot(3,1,2); step(numf,denf,t);
title('Raspunsul sistemului in bucla inchisa -regulator P'); grid;
% Determinarea functiei de transfer a regulatorului
kp = 200;   ki = 200;    kd = 10;
```

```
regulator = tf([kd kp ki],[1 0]);
sys = feedback(regulator*motor,1);
subplot(3,1,3); step(sys,t);
title('Raspunsul sistemului in bucla inchisa -regulator PID'); grid;
```

Transfer function:

```
             0.01
---------------------------
0.005 s^2 + 0.06 s + 0.1001
```

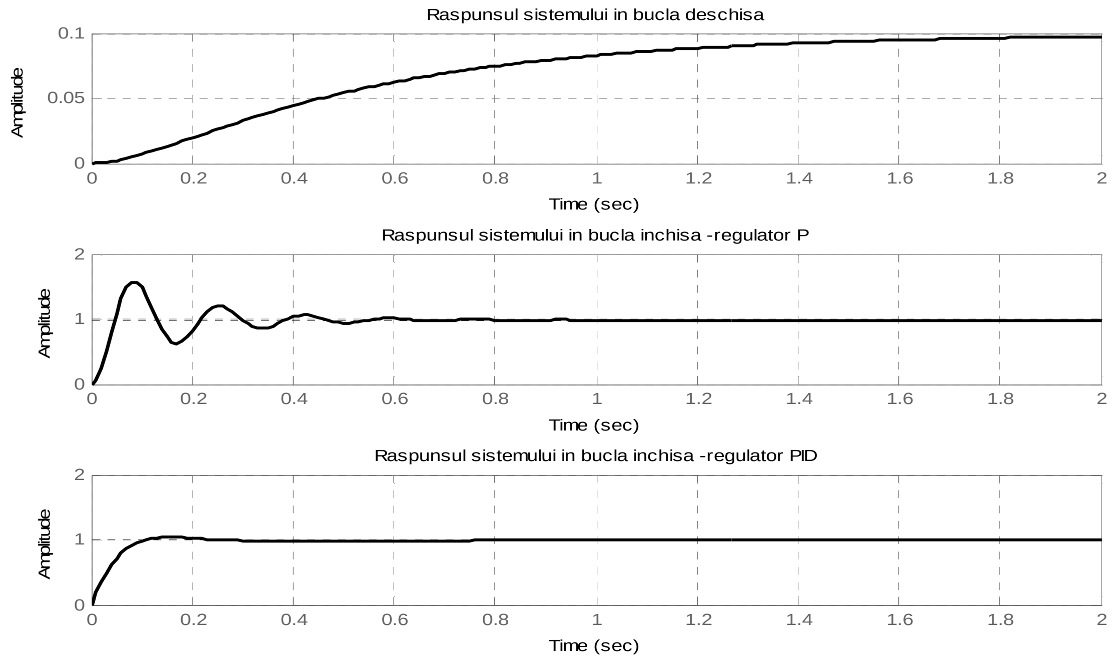


Fig. 12.2 Răspunsului în viteză al motorului atunci cand sistemul de reglare este buclă deschisă şi respectiv în buclă închisă fiind comandat cu un regulator P şi PID

O soluție echivalentă pentru vizualizarea rapida a raspunsului sistemului, utilizand interfața Matlab „**ltiview**”

```
%-----------------------------------------------------------------
% Datele motorului:
J = 0.01; F = 0.1; K = 0.01;
R = 1; L = 0.5;
%-----------------------------------------------------------------
% Apelare functie de transfer
s = tf('s');
% Functie de transfer a motorului de c.c
fct_motor = K/((J*s+F)*(L*s+R)+K^2);
ltiview('step',fct_motor,0:0.1:5);
```

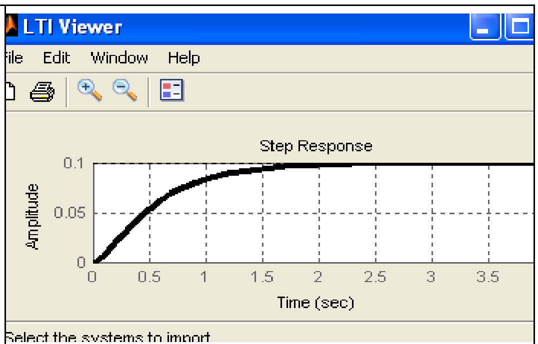


Fig. 12.3

În continuare, pentru analiza răspunsului sistemului reglat cu regulator P şi PID s-au ales următoarele valori ale coeficienților Kp, Ki, Kd:

(a) Kp = 100
(b) Kp = 75, Ki= 1, Kd = 1;
(c) Kp = 100, Ki = 200, Kd = 1;
(d) Kp = 100, Ki = 200, Kd = 10.

Acestea se vor introduce în codurile Matlab prezentate demonstrativ la punctele (a), (b), (c), (d) pentru valorile coeficientilo Kp, Ki, Kd ai regulatorului date şi se vor urmări grafic răspunsurile obținute.

Următoarele coduri MATLAB® se pot rula în versiunea ***7.14****.*

```
% (a) Influenta coeficientului Kp,
 % in cazul utilizări unui regulator P
Kp = 100;
Reg = pid(Kp);
sist_reg_P = feedback(Reg * fct_motor, 1)
t = 0:0.01:5;
step(sist_reg_P, t)
title('Regulator Proportional');
grid
```

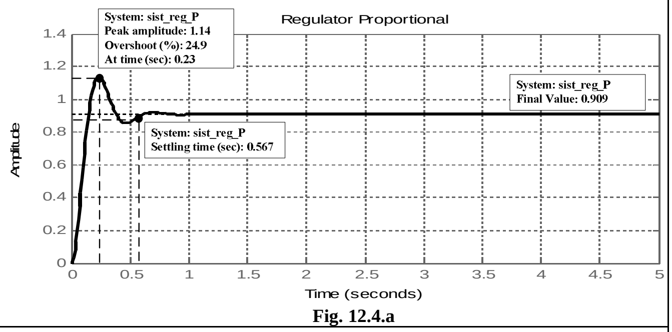


Fig. 12.4.a

```
% (b) Influenta coeficientilor Kp Ki si Kd
% Kp – mare şi Ki, Kd – mici
Kp = 75;
Ki = 1;
Kd = 1;
Reg = pid(Kp,Ki,Kd);
sist_ reg_PID = feedback(Reg * fct_motor,1)
step(sist_reg_PID, [0:1:200])
title('Regulator PID');
grid
```

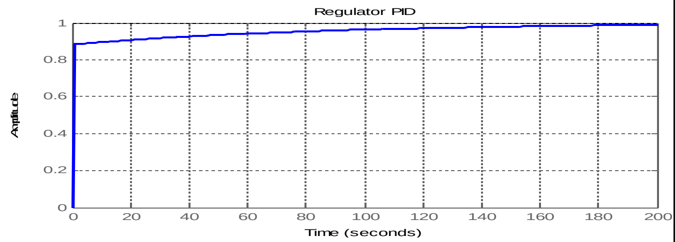


Fig. 12.4.b

```
% (c) Influenţa coeficientilor Kp Ki si Kd
% Kp, Ki – mare şi Kd – mic
Kp = 100;
Ki = 200;
Kd = 1;
Reg = pid(Kp,Ki,Kd);
sist_ reg_PID = feedback(Reg * fct_motor,1)
step(sist_ reg_PID, 0:0.01:4)
title('Regulator PID');
grid
```

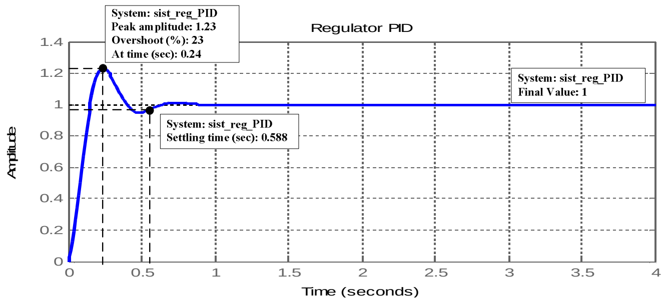


Fig. 12.4.c

```
% (d) Alegerea coeficienţi Kp, Ki şi Kd
% pentru un raspuns optim
Kp = 100;
Ki = 200;
Kd = 10;
Reg = pid(Kp,Ki,Kd);
sist_ reg_PID = feedback(Reg * fct_motor,1)
step(sist_ reg_PID, 0:0.01:4)
title('Regulator  PID');
grid
```

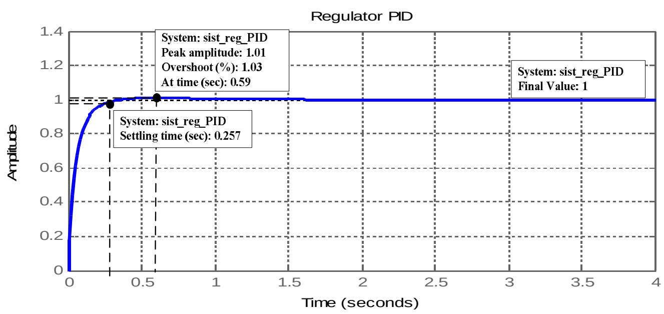


Fig. 12.4.d

Fig. 12.4 Efectul coeficienţilor regulatorului asupra răspunsului sistemului în timp

În concluzie acordarea unui regulator cu structură fixă P, PI, PID implică determinarea coeficienţilor K_P, K_I, K_D astfel încât sistemul rezultant să aibă un comportament cât mai apropiat de cel dorit. Astfel, în contiunare se vor prezenta metodele uzuale de acordare analitică a regulatoarelor cu structură fixă.

2. Metode de acordare a regulatoarelor cu structură fixă

2.1. Acordarea regulatoarelor PI cu metoda alocării polilor

Studiul algoritmului de acordare necesită determinarea funcţiei de transfer echivalente (în buclă închisă) a SRA prezentat în figura 11.5.

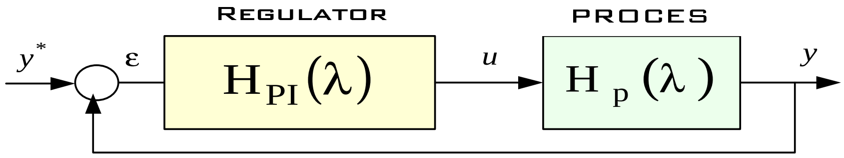


Fig. 12.5 Schema de reglare a unui sistem de ordinul I cu regulator PI

Sistemul liniar de ordinul I cu funcția de transfer generală $H_P(\lambda)$, este comandat printr-un regulator de tip PI. Sunt cunoscute:

1. **funcția de transfer a sistemului (procesul), de ordinul 1 ce va fi reglat**, poate fi scrisă sub forma:

$$H_P(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{b}{\lambda+a}\\ \dfrac{b_d}{\lambda-a_d}\end{cases} \qquad \text{în care: } \lambda=\begin{cases}s & t\in R\\ z & t\in Z\end{cases} \tag{12.1}$$

unde λ reprezinta operatorul transformatei Laplace pentru sistemele cu timp continuu, respectiv operatorul transformatei Z pentru sistemele cu timp discret, iar coeficienții a_d ,b_d sistemului cu timp discret pot fi calculati cu relatiile:

$$b_d=\begin{cases} b\cdot h, \ \text{dacã} \ \ a=0\\ b_d=\dfrac{b}{a}\cdot\left(1-e^{-a\cdot h}\right) \text{dacã} \ \ a=0\end{cases} \quad \text{și} \quad a_d=e^{-a\cdot h}, \tag{12.2}$$

2. **funcția de transfer a regulatorului ce va fi acordat,** se poate determina utilizand relatiile:

$$H_{PI}(\lambda)=\begin{cases}K_P+\dfrac{K_I}{\lambda}\\ K_p+\dfrac{K_i}{\lambda-1}\end{cases} \tag{12.3}$$

Note:

1. Echivalentul discret al funcției de transfer pentru procesul controlat a fost obținut prin aplicarea transformatei Z, utilizand relația:

$$H_P(z)=\frac{z-1}{z}\cdot \mathrm{Z}\left[\frac{H_P(s)}{s}\cdot\frac{z}{z-e^{-T\cdot h}}\right]$$ unde T este perioada de eşantionare

2. Funcția de transfer a regulatorului PI discret s-a obținut alegând echivalentului discret al integratorului $1/s$ de forma:

$$\frac{1}{s}\to\frac{T}{z-1} \quad => \quad H_{PI}(z)=K_P+K_I\frac{T}{z-1}=K_p+\frac{K_i}{z-1}$$

în care funcția de transfer a regulatorului discret are următorii coeficienții proporționali şi integrali: $K_p=K_P$ şi $K_i=K_I T$.

3. Pentru cazul sistemelor de ordinul I, utilizarea unui regulator PI permite alocarea polilor sistemului rezultant, prin alegerea corespunzătoare a componentelor K_P și K_I .

2.1.1. Etape necesare pentru acordarea regulatorului PI

Etapa 1: Determinarea funcției de transfer echivalente a SRA

Deoarece regulatorul PI şi sistemul de ordinul 1 sunt două sisteme legate în serie funcția de transfer echivalentă serie este următoarea: $H_{ech-serie}(s)=H_{PI}(\lambda)\cdot H_P(\lambda)$. Astfel, sistemul echivalent cu bucla de reacție închisă are funcția de transfer:

$$H_{ech}(\lambda)=\frac{H_{PI}\cdot H_P}{1+H_{PI}\cdot H_P} \tag{12.4}$$

de unde rezultă funcțiile echivalente în buclă închisă pentru cazul:

- continuu: $$H_{ech}(s)=\frac{b\cdot(s\cdot K_P+K_I)}{s^2+s(K_P\cdot b+a)+K_I\cdot b} \quad (12.5)$$
- discret: $$H_{ech}(z)=\frac{(K_p\cdot z+K_i-Kp)\cdot b_d}{z^2+z\cdot(K_p\cdot b_d-a_d-1)+b_d\cdot(K_i-K_p)+a_d} \quad (12.6)$$

Etapa 2: Impunerea performanțelor SRA implică stabilirea răspunsului acestuia

Întrucât atât stabilitatea unui sistem cât și performanțele sale dinamice depind de poziția polilor functiei de transfer rezultă să este necesară alegerea valorilor dorite pentru rădăcinile numitorului (polii) funcției de transfer în buclă închisă $H_{ech}(\lambda)$ pe baza performanțelor dorite pentru sistemul de reglare.

Construirea polinomului dorit pentru numitorul funcției de transfer $H_{ech}(\lambda)$ cunoscând rădăcinile acestuia

Se impune ca pentru acordarea regulatorului PI pozițiile poliilor să corespundă unui sistem de ordin egal cu ordinul polinomului de la numitorul functiei de transfer a sistemului echivalent $H_{ech}(\lambda)$ (ordin II).

- ***Pentru cazul continuu:*** Se consideră răspunsul unui sistem standard de ordin II, descris de funcția:

$$H_2(s)=\frac{\omega^2}{s^2+s\cdot 2\zeta\cdot\omega+\omega^2} \quad (12.7)$$

definit prin factorul de amortizare ξ și de pulsația proprie ω. Mărimea ω determină frecvența oscilațiilor ce apar, şi se alege corelat cu pulsația proprie a sistemului de reglat $\omega\le(\omega_p)_{\text{sist de reglat}}$. Impunerea performanțelor unui sistem de ordinul doi înseamnă impunerea perechii de valori (ζ,ω), adică a polilor funcției de transfer de ordinul II, $H_2(s)$: $s_{1,2}=-\zeta\cdot\omega\pm j\omega\sqrt{1-\zeta^2}$.

- ***Pentru cazul discret***: Ținând cont că unui punct s_1 din planul complex Laplace, îi corespunde în planul complex Z punctul $z_1=e^{s_1 h}$, unde h – pasul de eştantionare, echivalentul discret al polilor este:

$$z_{1,2}=e^{-\zeta\cdot\omega h}\left(\cos\left(\omega\cdot h\cdot\sqrt{1-\zeta^2}\right)+j\sin\left(\omega\cdot h\cdot\sqrt{1-\zeta^2}\right)\right)$$

Observație: Pentru acordarea regulatoarelor este necesară determinarea coeficienților regulatorului K_P, K_I, astfel încât sistemul rezultant să aibă un comportament cât mai apropiat de cel dorit. Se va ține cont de suprareglajul maxim acceptat şi banda de trecere dorită pentru sistemul rezultant.

Etapa 3: Determinarea coeficienților K_P şi K_I ai regulatorului

- **Cazul continuu:** Prin egalarea numitorilor funcțiilor (12.5) și (12.7) rezultă un sistem de două ecuații ale cărui necunoscute sunt K_P, K_I:

$$s^2+s(K_P\cdot b+a)+K_I\cdot b=s^2+2\zeta\omega s+\omega^2$$

din care se obține soluția sistemului, adică coeficienții regulatorului PI cu timp continuu, notați K_{P_c}, K_{I_c}:

$$\begin{cases}2\zeta\omega=K_P b+a\\ \omega^2=K_I b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}K_{P\_c}=(2\zeta\omega-a)/b\\ K_{I\_c}=\omega^2/b\end{cases} \quad (12.8)$$

- **Cazul discret:** Polinomul dorit pentru funcția de transfer în buclă închisă este:

$$P_{dorit}(z) = z^2 + z \cdot p1 + p2 \quad \text{unde:} \quad \begin{cases} p1 = -(z_1 + z_2) = -2 \cdot e^{-\zeta \cdot \omega h} \cdot \cos\left(\omega \cdot h \cdot \sqrt{1-\zeta^2}\right) \\ p2 = z_1 \cdot z_2 = e^{-2 \cdot \zeta \cdot \omega h} \end{cases}$$

Egalând numitorul funcției (12.6) cu polinomul dorit al funcției de transfer echivalente $P_{dorit}(z)$, rezultă sistemul de două ecuații ale cărui necunoscute sunt coeficienții regulatorului PI., K_P, K_I :

$$\begin{cases} K_P \cdot b_d - a_d - 1 = p1 \\ (K_I - K_P) \cdot b_d + a_d = p2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_{P-d} = \dfrac{(p1 + a_d + 1)}{b_d} \\ K_{I-d} = \dfrac{(p2 - a_d)}{b_d} + Kp \end{cases} \quad (12.9)$$

2.2. Acordarea regulatoarelor PID cu metoda alocării polilor

În cazul sistemelor de ordinul II, utilizarea unui regulator PID permite alocarea polilor sistemului rezultant, prin determinarea coeficienților K_P, K_I și K_D.

Exact ca în cazul acordării sistemelor de ordinul I sunt cunoscute:

1. funcția de transfer a sistemului (procesul) de ordinul 1I ce va fi reglat

- pentru procese cu timp continuu poate avea forma: $H_p(s) = \dfrac{b}{s^2 + a_1 s + a_0}$
- iar echivalentul discret al funcției de transfer a procesului este:

$$H_P(z) = \frac{b_{1d} \cdot z + b_{0d}}{z^2 + z \cdot a_{1d} + a_{0d}} \quad (12.10)$$

2. funcția de transfer a regulatorului PID ce va fi acordat

- **pentru cazul continuu** are forma: $H_{PID}(s) = K_{P\_c} + \dfrac{K_{I\_c}}{s} + K_{D\_c} s$ (12.11)

unde $K_{P\_c}, K_{I\_c}, K_{D\_c}$ reprezintă coeficienții regulatorului.

În figura 12.6 se prezintă schema de reglare a unui proces de ordinul II, comandat printr-un regulator PID cu timp continuu.

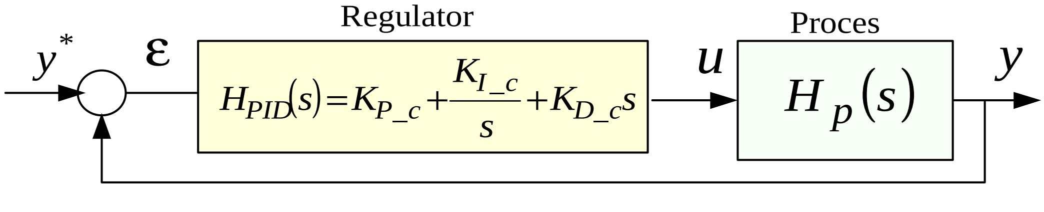


Fig. 12.6 Schema de reglarea unui proces de ordinul II cu regulator PID cu timp continuu

În practică este des întânlită schema de reglare prezentată în figura 12.7, unde aplicarea părții derivative se face numai asupra semnalului de reacție, iar formulele de acordare sunt valabile și pentru acest exemplu. Principalul efect al schemei de reglare este evitarea obținerii unor variații mari ale comenzii cauzate de partea derivativă atunci când apar modificări bruște ale referinței [2].

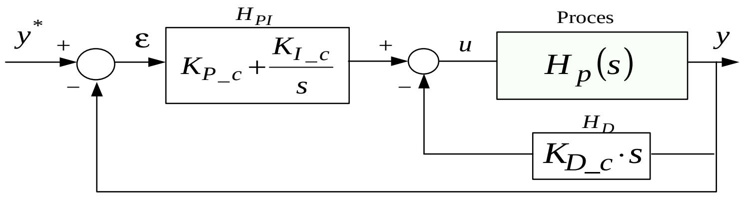


Fig. 12.7 Schema unui regulator PID cu timp continuu, cu componenta D doar pe reacție

- **pentru cazul discret** se obține folosind echivalentul discret al integratorului și echivalentul discret al derivatorului:

$$H_R(z) = K_{p\_d} + K_{i\_d}\frac{T}{z-1} + K_{d\_d}\frac{z-1}{zT} = K_{P\_d} + K_{I\_d}\frac{1}{z-1} + K_{D\_d}\frac{z-1}{z}$$

unde: $K_{P\_d} = K_{p\_d}$, $K_{I\_d} = K_{i\_d}T$ și $K_{D\_d} = K_{d\_d}/T$ sunt coeficienții proporțional, intregral și derivativ ai regulatorului discret. În acest caz, regulatorul și procesul au numitorul funcției de transfer de ordin 2, deci sistemul rezultant va fi de ordinul IV. Prin aplicarea metodei de alocare a polilor se obține la un sistem de 4 ecuații cu 4 necunoscute - coeficienții K_{P_d}, K_{I_d} și K_{D_d} și constanta filtrului pe partea derivativă. Din acest considerent pentru cazul discret filtrul se ia în considerare, și funcția de transfer a regulatorului PID cu timp discret va avea forma:

$$H_R(z) = K_{P\_d} + K_{I\_d}\frac{1}{z-1} + K_{D\_d}\frac{z-1}{z-r} \tag{12.12}$$

unde $r \in [0,1]$ depinde de constanta τ_D a filtrului și $K_{D\_d} = K_{D\_d}^{'}(1-r)$.

In figura 12.8 se prezintă schema de reglare a unui proces de ordinul II, comandat printr-un regulator PID cu timp discret [2].

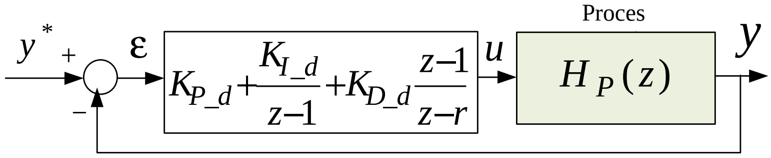


Fig. 12.8 Schema de reglare a unui proces de ordinul II cu regulator PID cu timp discret

În cazul când partea derivativă se aplică numai pe semnalul de reacție, se obține schema de reglare din figura 12.9. Ca și în cazul regulatoarelor PID cu timp continuu, această soluție are ca principal efect evitarea obținerii unor variații mari ale comenzii cauzate de partea derivativă când apar modificări bruște ale referinței [2].

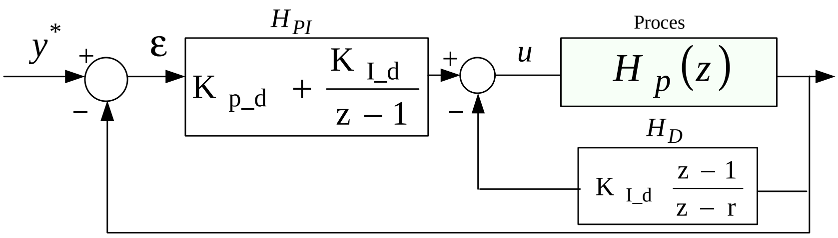


Fig. 12.9 Schema unui regulator PID cu timp discret cu componenta D doar pe reacție

2.2.1. Etape necesare pentru acordarea regulatorului PID

Etapa 1: Determinarea funcției de transfer echivalente a SRA

Sistemul echivalent rezultant, de ordin III, va avea funcția de transfer:

$$H_{ech}(\lambda)=\frac{H_{PID}(\lambda)\cdot H_P(\lambda)}{1+H_{PID}(\lambda)\cdot H_P(\lambda)}$$

de unde rezultă:

- **pentru cazul continuu** :

$$H_{ech}(s)=\frac{\left(K_{D\_c}\cdot s^2+K_{P\_c}\cdot s+K_{I\_c}\right)\cdot b}{s^3+s^2\left(K_{D\_c}\cdot b+a_1\right)+s\left(K_{P\_c}\cdot b+a_0\right)+K_{I\_c}\cdot b} \qquad (12.13)$$

- **pentru cazul discret :**

$$H_{ech}(z)=\frac{\left(b_{1d}\cdot z+b_{0d}\right)\cdot\left(\alpha 2\cdot z^2+\alpha 1\cdot z+\alpha 0\right)}{(z-1)\cdot(z-r)\cdot\left(z^2+a_{1d}\cdot z+a_{0d}\right)+\left(b_{1d}\cdot z+b_{0d}\right)\cdot\left(\alpha 2\cdot z^2+\alpha 1\cdot z+\alpha 0\right)} \qquad (12.14)$$

unde pentru simplitatea scrierii se fac următoarele notații:

$$\begin{aligned}\text{num\_H}_{\text{ech}}(z)= & \, z^4+z^3\cdot\left[a_{1d}-(1+r)+\alpha 2\cdot b_{1d}\right]+\\ & +z^2\cdot\left[a_{0d}+r-a_{1d}\cdot(1-r)+\alpha 2\cdot b_{0d}+\alpha 1\cdot b_{1d}\right]+\\ & +z\cdot\left[r\cdot a_{1d}-a_{0d}\cdot(1+r)+\alpha 0\cdot b_{1d}+\alpha 1\cdot b_{0d}\right]+\\ & +r\cdot a_{0d}+\alpha_{0d}\cdot b_{0d}\end{aligned}$$

şi:

$$\begin{aligned}&\alpha 2=K_{P\_d}+K_{D\_d};\\ &\alpha 1=K_{I\_d}-K_{P\_d}\cdot(1-r)-2\cdot K_{D\_d};\\ &\alpha 0=K_{P\_d}\cdot r-K_{I\_d}\cdot r+K_{D\_d}\end{aligned}$$

Etapa 2: Impunerea performanțelor SRA

Pentru cazul continuu alocarea poliilor de la numitorul funcției de transfer echivalente (12.13) se face prin alegerea a 2 poli principali - care vor influența în cea mai mare măsură răspunsul sistemului rezultant prin impunerea perechii (ζ,ω), la fel ca în cazul regulatorului PI şi un al treilea pol secundar – cu o contribuție aproape neglijabilă, care se plasează pe axa reală negativă la o distantă mult mai mare față de origine comparativ cu polii principali: $s_{1,2}=-\zeta\cdot\omega\pm j\omega\sqrt{1-\zeta^2}$

Numitorul dorit pentru funcția de transfer în buclă închisă se poate exprima astfel: $(s-s_3)\left(s^2+2\zeta\omega s+\omega^2\right)=\left(s-\alpha\cdot\mathrm{Re}\{s_{1,2}\}\right)\left(s^2+2\zeta\omega s+\omega^2\right)$, unde $s_3=\alpha\cdot(-\zeta\omega)$, care pentru simplitate poate fi aproximat astfel: $s_3=-\alpha\cdot\omega$, în care se alege valoarea α în intervalul $\alpha=5\div 10$.

Pentru cazul discret comportamentul sistemului rezultant de ordin IV va fi foarte asemănător celui din cazul sistemului de ordinul II. Alocarea polilor este şi în acest caz analogă cazului continuu, prin alegerea a doi poli:

- principali, cu influența cea mai mare asupra răspunsului sistemului rezultant, astfel încât să corespundă, în planul *s*, polilor unui sistem cu timp continuu de ordinul II, definit prin factorul de amortizare ζ şi pulsația naturală ω;
- secundari, cu o contribuție aproape neglijabilă, spre exemplu $z_{3,4}=e^{-\alpha\omega\cdot h}=\beta$, unde $\alpha=5\div 10$.

  Numitorul dorit pentru funcția de transfer rezultantă va fi de forma: $(z-\beta)^2\cdot\left(z^2+p1\cdot z+p0\right)$, unde $p1$ şi $p2$ se obțin din relațiile [2]:

$$\begin{cases} p1 = -(z_1 + z_2) = -2 \cdot e^{-\xi \cdot \omega \cdot T} \cdot \cos\left(\omega \cdot T \cdot \sqrt{1-\xi^2}\right) \\ p2 = z_1 \cdot z_2 = e^{-2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot T} \end{cases}$$

Etapa 3: Determinarea coeficienților K_P, K_I și K_D, ai regulatorului

Prin egalarea numitorilor funcțiilor rezultă un sistem de ecuații a căror necunoscute sunt coeficienții K_P, K_I și K_D, pentru cazul sistemelor cu timp continuu, de forma:

$$K_{p\_c} = \frac{\omega^2(1+2\zeta\alpha) - a_0}{b}; \quad K_{I\_c} = \frac{\alpha\omega^3}{b}; \quad K_{D\_c} = \frac{\omega(2\zeta+\alpha) - a_1}{b} \tag{12.15}$$

şi în cazul sistemelor cu timp discret:

$$K_{p\_d} = \frac{(\alpha 2 - \alpha 0 - K_{I\_d} \cdot r)}{(1-r)}; \; K_{I\_d} = \frac{(\alpha 2 + \alpha 1 + \alpha 0)}{(1-r)}; \; K_{D\_d} = \alpha 2 - K_{p\_d} \tag{12.16}$$

unde pentru simplificarea scrierii s-au facut următoarele notațiile:

$$\alpha 2 = (c3 - a_{1d} + 1 + r)/b_{1d} \; ; \quad \alpha 1 = (\gamma - r \cdot \delta)/b_{1d}{}^2 \; ; \alpha 0 = (c0 - r \cdot a_{0d})/b_{0d}$$

$$r = \frac{c1 + a_{0d} - \gamma \cdot b_{0d} / b_{1d}^2 - c0 \cdot b_{1d} / b_{0d}}{a_{1d} - a_{0d} - \delta \cdot b_{0d} / b_{1d}^2 - a_{0d} \cdot b_{1d} / b_{0d}}$$

$$c3 = p1 - 2 \cdot \beta; \quad c2 = p2 + \beta^2 - 2 \cdot \beta \cdot p1; \quad c1 = \beta^2 \cdot p1 - 2 \cdot \beta \cdot p2; \quad c0 = \beta^2 \cdot p2$$

$$\gamma = b_{1d} \cdot (c2 - a_{0d} + a_{1d}) - b_{0d} \cdot (c3 - a_{1d} + 1) \; ; \; \delta = b_{1d} \cdot (1 - a_{1d}) + b_{0d}$$

Note:

A) Atât în cazul continuu cât şi în cel discret trebuie să sobținem coeficienți $K_P, K_I, K_D \geq 0$. Dacă în urma procesului de acordare K_I rezultă negativ, trebuie impusă o valoare mai mare a benzii de trecere dorite, ω.

B) În general însă, dimensiunea ***n*** a SRA este mai mare decât doi. Alocarea a mai multor poli doriți se face astfel: se aleg 2 poli principali care vor influența în cea mai mare măsură răspunsul sistemului rezultant şi următorii poli secundari - cu o contribuție aproape neglijabilă. În acest caz, comportamentul sistemului rezultant va fi foarte asemănător cu cel al unui sistem de ordinul II. Deci, pentru cazul sistemelor de ordin mai mare decât 2, pentru polinomul dorit se impun 2 poli exact ca la un sistem de ordinul 2 (λ_1 și λ_2), impunând perechea (ζ,ω), iar ceilalți poli ($\lambda_3, \lambda_4, ..., \lambda_n$ - pentru cazul polinomului de ordin n) se aleg egali între ei, pe axa reală, cu partea reală de 10 ori mai mare decât partea reală a polului s_1. Se obține un sistem cu cei 2 poli dominanți (λ_1 și λ_2), iar efectul polilor $\lambda_3, \lambda_4, ..., \lambda_n$ asupra răspunsului sistemului poate fi neglijat, forma polinomului dorit fiind:

$$P_{dorit}(\lambda) = (\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4)(\lambda - \lambda_5)...(\lambda - \lambda_n) \cdot \left(\lambda^2 + \lambda \cdot 2\zeta \cdot \omega + \omega^2\right)$$

2.3. Implementarea numerică a regulatorului

Pentru cazul construirii unui regulator numeric, funcția de transfer este de forma:

$$H_R(z) = \frac{u_i}{\varepsilon_i} = K_{P\_d} + K_{I\_d} \frac{1}{z-1} + K_{D\_d} \frac{z-1}{z-r} = \frac{\alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0}{z_2 - (1+r)z + r},$$

iar aceasta se poate scrie ca relație între ieşirea regulatorului la pasul curent u_i şi intrarea la pasul curent ε_i, sub forma:

$$u_i = \frac{\alpha_2 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_0 z^{-2}}{1-(1+r)z^{-1} + rz^{-2}}\varepsilon_i$$

Ținând cont că înmulțirea cu z^{-1} înseamnă întârziere cu un pas de eşantionare, adică $u_i \cdot z^{-1} = u_{i-1}$, unde u_{i-1} înseamnă comanda la pasul anterior $i-1$, se poate ajunge simplu la o relație de forma **(**12.17), utilă pntru implementare regulatorului numeric:

$$u_i = \alpha_2\varepsilon_i + \alpha_1\varepsilon_{i-1} + \alpha_0\varepsilon_{i-2} + (1+r)u_{i-1} - ru_{i-2} \qquad \textbf{(}12.17)$$

Implementarea regulatoarelor numerice se face folosind sisteme cu microcontrolere, sau microprocesoare. Calculul ieşirii regulatorului se face la intervale de timp egale cu pasul de control (de eşantionare) al sistemului. Periodicitatea execuției este asigurată cu ajutorul unui timer, iar execuția propriu-zisă are loc într-o rutină de tratare a întreruperii (RTI) care este declanşată de către timer.

Structura programului cuprinde câteva etape importante:

- *inițializări* – unde sunt setați parametri ceasului de timp real şi se inițializează cu zero valorile anterioare: $u_{i-1} = 0,\ u_{i-2} = 0,\ \varepsilon_{i-1} = 0,\ \varepsilon_{i-2} = 0;$.
- RTI trebuie să realizeze:
  - citirea şi calculul referinței pentru pasul curent şi citirea ieşirii procesului pentru pasul curent;
  - calcul erorii la pasul curent: ε_i ;
  - calcul comenzi actuale u_i utilizând relația 12.17 şi limitarea comenzi la plaja de valori posibile (care este dată de regulă de gama convertorului);
  - trimiterea comenzii către proces după limitarea acesteia (operație ce presupune scrierea comenzii la CN/A),
  - actualizarea variabilelor globale utilizate la următorul pasul al programului, astfel: $u_{i-2} = u_{i-1}$; $u_{i-1} = u_i$; $\varepsilon_{i-2} = \varepsilon_{i-1}$; $\varepsilon_{i-1} = \varepsilon_i$.

Aplicații rezolvate

A.12.1 Să se proiecteze un SRA cu regulator cu structură fixă PI pentru un proces având funcția de transfer $H_p(s) = \dfrac{10}{s+4}$ stiind că: $\zeta = 0.7$ şi $\omega = 10$ rad/s. Se cere:

A. Să se verifice stabilitatea externă a sistemului

B. Să se acordeze regulatorul PI

C. Să se studieze influența asupra răspunsului sistemului.

Calculele se for efectua în Matlab. În final se va simula răspunsul sistemului de reglare la aplicarea unei intrări treaptă de valorare $u(t) = 1$.

Soluție:

Rezolvare analitică:

Pentru verificarea stabilității externe se calculează polii funcției de transfer a sistemului:

$$s + 4 = 0 \ \Rightarrow\ s = -4 \in \{\mathrm{Re} < 0\} \Rightarrow \text{sistemul este stabil extern}$$

A. Ştiind că funcţia de transfer a sistemului are expresia $H(s)=\dfrac{y(s)}{u(s)}$, rezultă că:

$y(s)=u(s)\cdot H(s)=\dfrac{1}{s}\cdot\dfrac{10}{s+4}$ care prin descompunere în fracţii simple conduce la soluţia: $y(s)=\dfrac{5}{2}\left(\dfrac{1}{s}-\dfrac{10}{s+4}\right)$

Răspunsul în timp al sitemului se află cu ajutorul transformatei Laplace inversă:

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{y(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{10}{s+4}\right)\right\}=\frac{5}{2}\left(1-e^{-4t}\right)$$

B. Pentru acordarea regulatorului PI, se observă că procesul este de forma $H(s)=\dfrac{b}{s+a}$, unde $a=4$ şi $b=10$. Ştiind că performanţele dinamice ale sistemului sunt impuse cu ajutorul parametrilor (ζ,ω): $\zeta=0.7$ şi $\omega=10$ rad/s, rezultă coeficienţii regulatorului:

$$K_{P\_c}=\frac{2\zeta\omega-a}{b}=1, \qquad K_{I\_c}=\frac{\omega^2}{b}=10$$

Rezolvare în Matlab:

% Datele problemei
`csi = 0.7;`
`omega = 10;`
`a = 4;  b = 10;`
% Functia de transfer a procesului
`num_I = b;`
`den_I = [1 a];`
% Calculul coeficientilor regulatorului
`Kp_c = (2*csi*omega - a)/b`
`Ki_c = omega^2/b`
	Furnizează soluţia:
	
	Transfer function:
	`10`
	`-----`
	`s + 4`
	`Kp =`
	`1`
	`Ki =`
	`10`

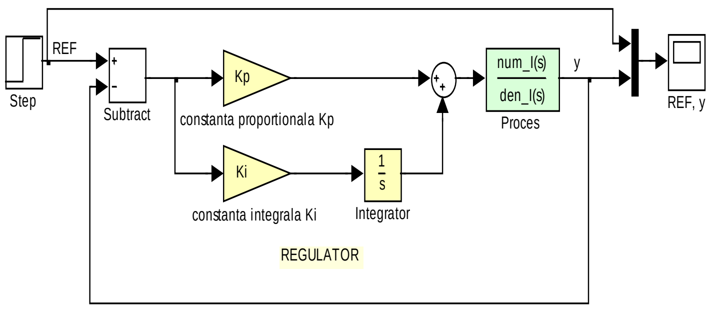


Fig. 12.10.1 Schema de simulare

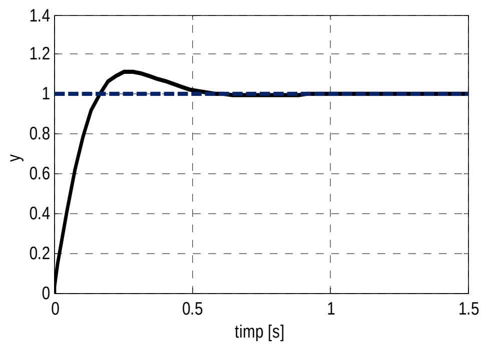


Fig.12.10.2 Răspunsul sistemului în timp

A.12.2. Un proces având funcţia de transfer $H_{proces}(s)=\dfrac{2}{s^2+4s+7}$ este comandat cu un regulator PID. Să se acordeze regulatorul pentru: $\xi=0.7$, $\omega=10$ rad/s şi $\alpha=10$. Calculele se for efectua în Matlab. În final se va simula răspunsul sistemului de reglare la aplicarea unei intrări treaptă de valorare $u(t)=10$.

Soluţie :

Rezolvare analitică:

Pentru acordarea regulatorului PID, se observă că procesul este de forma:

$$H_p(s) = \frac{b}{s^2 + a_1 s + a_0}, \quad \text{unde } a_0 = 7,\ a_1 = 4 \text{ şi } b = 2.$$

Ştiind că performanţele dinamice ale sistemului sunt impuse cu ajutorul parametrilor ($\zeta = 0.7$ şi $\omega = 10\,\text{rad/s}$), rezultă următorii coeficienţi ai regulatorului:

$$K_{p\_c} = \frac{\omega^2(1 + 2\zeta\alpha) - a_0}{b} = 746.5;$$

$$K_{I\_c} = \frac{\alpha\omega^3}{b} = 5000;$$

$$K_{D\_c} = \frac{\omega(2\zeta + \alpha) - a_1}{b} = 55.$$

Rezolvare în Matlab

% Datele problemei
`csi = 0.7; omega = 10; alfa = 10;`
`b = 2; a0 = 7; a1 = 4;`
% Functia de transfer a procesului
`num_II = [b];`
`den_II = [1 a1 a0];`
`tf(num_II,den_II)`
% Calculul coeficientilor regulatorului
`Kp_c = (omega*omega*(1+2*csi*alfa)-a0)/b`
`Ki_c = alfa*omega^3/b`
`Kd_c = (omega*(2*csi+alfa)-a1)/b`
	Furnizează soluția:
	
	Transfer function:
	`      2`
	`-------------`
	`s^2 + 4 s + 7`
	`Kp_c =`
	`      746.5000`
	`Ki_c =`
	`      5000`
	`Kd_c=`
	`      55`

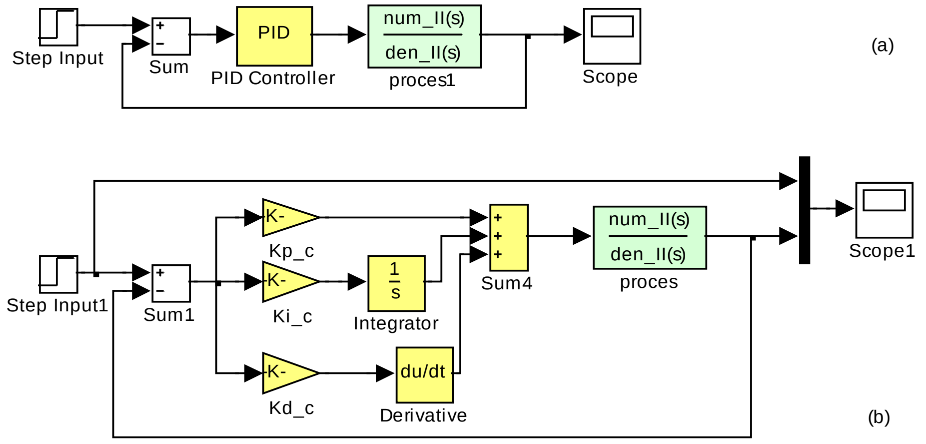


Fig 12.11.1 Schema de simulare cu bloc regulator predefinit în librăria Simulink – (a), şi construit pe componente – (b)

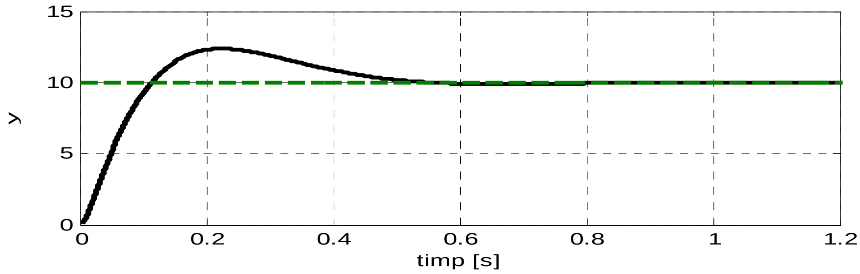


Fig 12.11.2 Răspunsul sistemului în timp

În cele ce urmează sunt prezentate două exemple concrete de proiectare a unor SRA: unul cu timp continuu şi celălalt cu timp discret. În ambele cazuri, se indică cerinţele şi se parcurg etapele principale ale fazei de proiectare, care presupun modelarea matematică a procesului, proiectarea regulatorului şi implementarea sistemului de reglare.

A.12.3. Controlul vitezei unui motor de curent continuu

Un sistemul de reglare automată trebuie să permită reglarea continuă a vitezei unui motor de curent continuu cu magneți permanenți în toată plaja de valori posibile. Se consideră un motorul cu următoarele date: rezistența rotorului R = 10Ω, inductivitatea rotorului L = 1mH, constanta de cuplu k = 0,05 Nm/A, momentul de inerție total (include şi sarcina) J = 5*10^{-7} kgm^2. Motorul este alimentat printr-un amplificator care furnizează o tensiune de maxim ±24V. Tensiunea furnizată este proporțională cu o tensiune de comandă în plaja ±10V. Motorul este cuplat cu un tahogenerator care dă o tensiune proporțională cu viteza motorului. Relația de proporționalitate este dată de constanta tahogeneratorului – K_{TG} = 4V/1000rpm (rpm = rotații pe minut). Referința de viteză se dă printr-o tensiune ce poate varia în plaja ±10V.

Solutie: Pas1. ***Obținerea modelului matematic.*** Ecuațiile ce descriu funcționarea motorului sunt :

$$\begin{cases} U = Ri + L\dfrac{di}{dt} + k\Omega \\ m = ki \\ J\dfrac{d\Omega}{dt} = ki - m_s - m_f \end{cases}$$

unde: u este tensiunea de alimentare a motorului (mărimea de comandă pentru sistem),

R, L – rezistența şi respectiv inductivitatea rotorului;

i este curentul care trece prin motor,

Ω - viteza unghiulară a rotorului,

m – cuplul activ dezvoltat de motor, $m = ki$

k - constantă de tensiune electromotoare, respectiv de cuplu, ce depinde de construcția mașinii.

m_s - cuplul rezistent opus de către sarcină, constant (mărime de perturbație),

m_f - cuplul rezistent de frecări vâscoase al motorului şi al sarcinii

$m_f = F \cdot \Omega$, unde F este coeficientul de frecări vâscoase,

J este momentul total de inerție al motorului şi sarcinii.

Mărimile de stare sunt curentul prin motor i şi viteza acestuia. Ecuațiile sistemului se pot scrie astfel:

$$\begin{cases} L\dfrac{di}{dt} = -Ri - k\Omega + u \\ J\dfrac{d\Omega}{dt} = Ki - m_s - F\Omega \end{cases},$$

sau matriceal:
$$\underbrace{\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i \\ \Omega \end{bmatrix}}_{\overset{\bullet}{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\dfrac{R}{L} & -\dfrac{k}{L} \\ \dfrac{k}{J} & -\dfrac{F}{J} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} i \\ \Omega \end{bmatrix}}_{x} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ m_s \end{bmatrix}$$

În cazul în care se dorește ca ieşirea sistemului să fie turația Ω atunci matricele de scalare a mărimilor de ieșire au forma: $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ şi D=0. Pentru a răspunde la punctul 3, unde sunt cerute ambele mărimi de stare: $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, iar $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

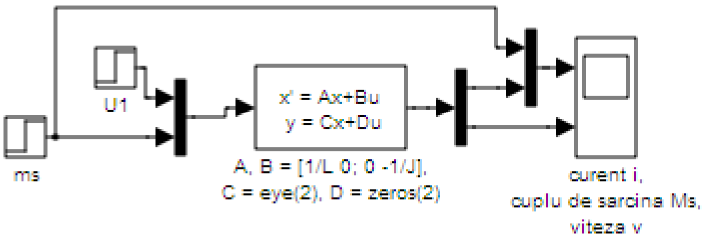


Fig. 2.9 Schema Simulink – necesară la punctul 3

<u>Indicație</u> pentru cerințele 4 și 5.

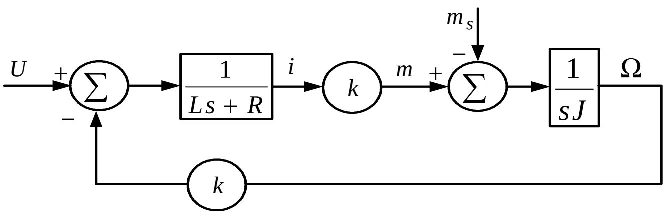


Fig. 2.10 Schema bloc a motorului de curent continuu

Motorul de c.c are următoarele doua funcții de transfer:

a) de la tensiunea U - care este mărimea de comandă (intrare), la viteza Ω - mărimea se ieșire:

$$H_{U\to\Omega}(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{\dfrac{k}{sJ(R+sL)}}{1+\dfrac{k^2}{sJ(R+sL)}} = \frac{k}{s^2JL + sJR + k^2}$$

b) de la cuplul rezistent m_s - care este o perturbație, la viteza Ω:

$$H_{m_s\to\Omega}(s) = \frac{m_s(s)}{U(s)} = \frac{\dfrac{-1}{sJ}}{1+\dfrac{k^2}{sJ(R+sL)}} = \frac{-(R+sL)}{s^2JL + sJR + k^2}$$

Ținând cont că: $\tau_{el} = \frac{L}{R}$ este constanta electrică a motorului şi $\tau_{em} = \frac{JR}{k^2}$ este constanta electromecanică a motorului, relațiile anterioare se pot rescrie sub forma:

$$H_{U\to\Omega}(s) = \frac{1/k}{s^2 \frac{JR}{k^2} \cdot \frac{L}{R} + s\frac{JR}{k^2} + 1} = \frac{1/k}{s^2 \cdot \tau_{el} \cdot \tau_{em} + s \cdot \tau_{em} + 1} \quad (2.12.a)$$

şi respectiv:

$$H_{m_s\to\Omega}(s) = \frac{-R/k^2(1+\frac{L}{R})}{s^2 \frac{JL}{k^2} + s\frac{JR}{k^2} + 1} = \frac{-R/k^2(1+s\cdot\tau_{el})}{s^2 \cdot \tau_{el} \cdot \tau_{em} + s \cdot \tau_{em} + 1} \quad (2.12.b)$$

Proiectarea regulatorului se va face considerând doar funcția de transfer (2.12.a), care depinde de comandă. Din datele motorului, cele 2 constante de timp rezultă:

$$\tau_{el} = \frac{L}{R} = \frac{10^{-3}}{10} = 0.1ms \text{, respectiv } \tau_{em} = \frac{JR}{k^2} = \frac{5\cdot10^{-7}\cdot10}{\left(5\cdot10^{-2}\right)^2} = 2ms \text{ .}$$

Întrucât $\tau_{el} << \tau_{em}$, produsul $\tau_{el}\cdot\tau_{em}$ se poate neglija, astfel încât funcția de transfer (2.12) se poate simplifica considerând-o cu o bună aproximație ca fiind de ordinul I, de forma:

$$H_{U\to\Omega}(s) = \frac{1/k}{1+s\cdot\tau_{em}} \quad (2.13)$$

Figura 2.11 prezintă comparativ răspunsul a 2 procese având funcțiile de transfer (2.12) şi (2.13) la o intrare treaptă $U = 24V$. Cele 2 răspunsuri sunt aproape identice, demonstrând că utilizarea formei simplificate (2.13) este corectă.

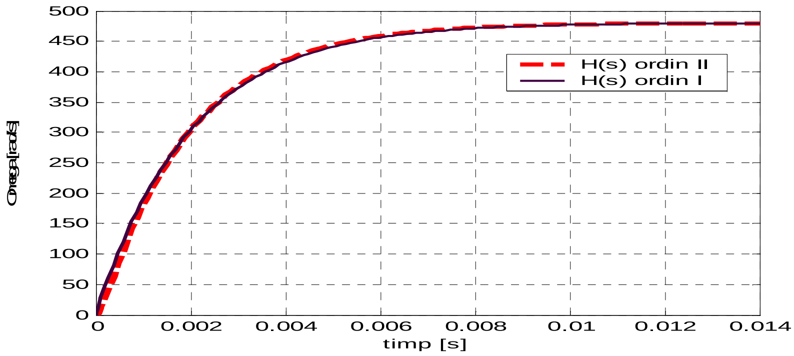


Fig. 2.11 Evoluția comparativă a procesului real de ordin II şi a celui simplificat de ordin I

<u>Indicație</u> pentru cerința 6

Pentru construirea schemei motorului de curent continuu se vor utiliza următoarele blocuri Simulink:

- **Step, Scope** şi **Transfer Fcn,** iar pentru setările corespunzătoare se poate reveni la aplicația demonstrativă 2;
- **Gain** şi **Sum** din biblioteca **Math Operation**;

şi se vor înlocui blocurile **In** şi **OUT** din schema prezentată în figura 2.12 cu blocurile **Step** şi respectiv **Scope**.

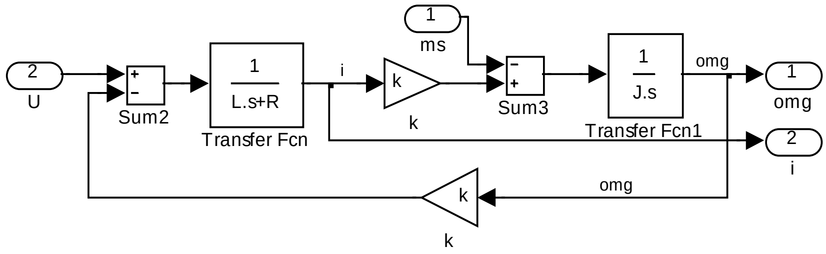


Fig. 2.12.a Schema Simulink pentru motorul de curent continuu, detaliu

Se poate simplifica reprezentarea schemei din figura 2.12.a prin conectarea acesteia sub forma de subsistem, în care se pot identifica mărimile de intrare şi ieşire. Subsistemul creat în figura 2.12.b, poate fi introdus în cadrul altor reprezentări complexe ce utilizează motorul de c.c.

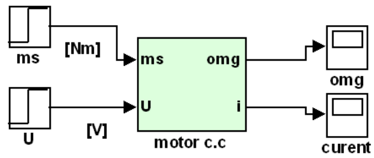


Fig. 2.12.b Schema Simulink pentru motorul de curent continuu, subsistem

Pas 2. Proiectarea regulatorului analogic – SRA cu timp continuu

Ținând cont că procesul este de ordinul I, se va utiliza un regulator cu structură fixă de tip PI care trebuie acordat. În figura 12.12 se prezintă schema Simulink a sistemului de reglare a vitezei maşinii de curent continuu ce include următoarele subblocuri importante:

- **regulator PI** – prezentat în figura 12.5.a
- **motor c.c** – prezentat în figura 2.12.a şi b
- **amplificator de tensiune** prin care motorul este comandat, având constanta de amplificare K_A;
- **tahogenerator** pentru măsurarea vitezei, având constanta K_{TG};
- adaptarea de semnal de la ieşirea tahogeneratorului la intrarea în regulator, dată de constanta K_Ω. Toate aceste elemente trebuiesc luate în considerarea la acordarea regulatorului PI. Pentru o mai bună înțelegere a rolului acestor elemente s-au inclus plajele de valori de variație ale semnalelor pentru fiecare componentă a schemei de reglare.

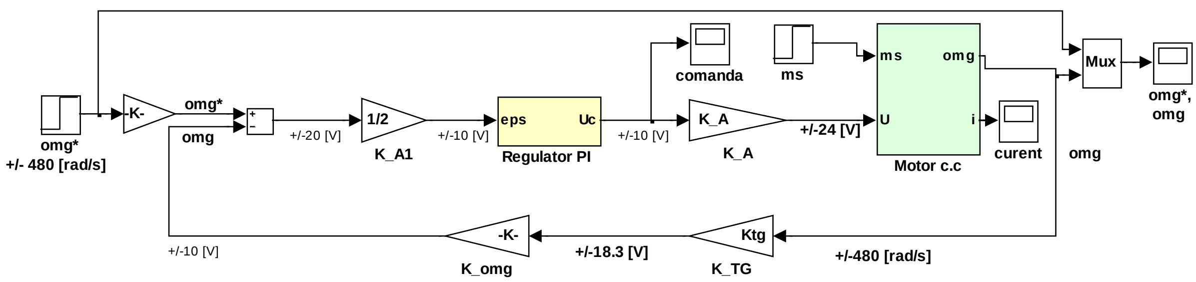


Fig. 12.12 Schema Simulink de reglare a vitezei unui motor de c.c. cu un regulator PI analogic

Setări pentru schema de reglare:

- Referința de viteză este dată sub forma unei tensiuni în plaja ±10V, conform cerințelor de proiectare,. Pentru a putea compara mărimi de acelaşi tip şi dimensiune, rezultă că şi mărimea de feedback trebuie să fie tot o tensiune în plaja de valori ±10V.
- Tipic regulatoarele analogice au plaja de intrare şi cea de ieşire ±10V. La intrarea regulatorului se aplică o tensiune proporțională cu eroarea ε şi la ieşirea regulatorului se obține o tensiune de comandă Uc proporțională cu tensiunea care trebuie aplicată pe motor.

Notă: Când referința și feedback-ul variază în plaja ±10V, eroarea rezultă în plaja ±20V. Pentru a o aduce în gama ±10V se practică 2 metode:

*a)*erorile se limitează la plaja de ±10V

*b)*calculul erorii se face cu relația: $\varepsilon = 1/2 \cdot (\Omega^* - \Omega_V)$ care reduce plaja erorii de la ±20V la ±10V. Această atenuare de ½ trebuie însă luată în calcul la proiectarea regulatorului.

În rezolvarea ce urmează se folosește metoda b).

- Conform cerințelor, amplificatorul poate furniza motorului o tensiune U în plaja ±24V. Pentru a acoperii întreaga gamă de tensiuni admisibile, ±10V tensiune de comandă trebuie să conducă la ±24V tensiune pe motor. Prin urmare amplificatorul are constanta de amplificare $K_A = 24V/10V = 2,4$.
- Motor este comandat cu tensiunea U, deci poate atinge teoretic o viteza maximă $\Omega_{\max} = U/k = 24V/0.05Nm/A = 480rad/s$. Ținând cont și de polaritatea negativă aceasta înseamnă o plajă de valori de ±480 rad/s.

Notă: *În practică această limită nu este atinsă niciodată deoarece întotdeauna există un cuplu de frecări nenul.*

- Tahogeneratorul cu constanta: $K_{TG} = 4V/1000rpm = \frac{4V \cdot 60s}{1000 \cdot 2\pi} = 0,0382V/rad/s$, va furniza o tensiune proporțională cu turația motorului în plaja $\Omega_{TG} = \pm 480 \cdot 0.038 = 18.33V$. Cum acest semnal depășește plaja de intrare în regulator de ±10V, el trebuie atenuat, factorul de divizare fiind $K_\Omega = 10/18.33 = 0.545$.
- Regulatorul *'vede'* drept funcție de transfer a procesului, tot ceea ce este în afara lui. Regulatorul trimite o comanda Uc și citește reacția procesului prin eroarea ε, ambele mărimi fiind în plaja ±10V. Prin urmare funcția de transfer reală a procesului pe baza căreia se va face proiectarea regulatorului este:

$$H_{real}(s) = K_{ech}/(1 + s \cdot \tau_{em}) = b/(s+a)$$

unde: $K_{ech} = 1/2 \cdot K_A \cdot 1/k \cdot K_{TG} \cdot K_\Omega = 2.4 \times 0.0382 \times 0.545/0.05 = 0.5$ $b = K/\tau_{em} = 0.5/(2 \cdot 10^{-3}) = 250$;
$a = 1/\tau_{em} = 1/(2 \cdot 10^{-3}) = 500$

Pentru acordare se pot alege: factorul de amortizarecu valoare optimă $\xi = 0,707$ și pulsația naturală $\omega = 1/\tau_{em} = 500$ rad/s.

Rezultatele se pot obține prin rularea următorului program Matlab:

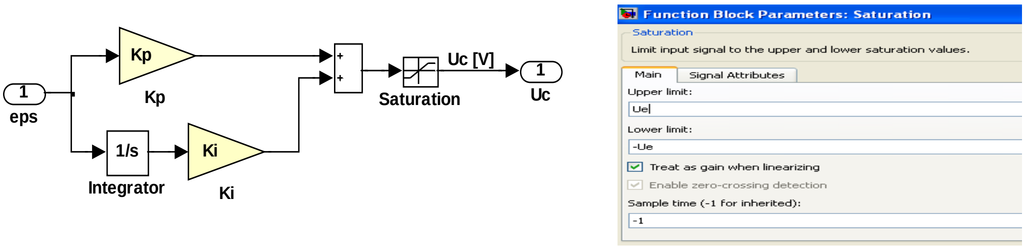
```
% Comanda buclei de viteza cu regulator PI analogic
%-----------------------------------------------------------------
% Date initiale motor si sarcina
R = 10;                         % [ohm] - rezistenta rotorului
L = 1e-3;                       % [H] - inductivitatea rotorului
k = 0.05;                       % [Nm/A] - constanta de cuplu a motorului
J = 5e-7;                       % [kg*m^2] - momentul de inertie total (motor+sarcina)
%-----------------------------------------------------------------------------------------------------
% Date initiale regulator PI analogic
Ui = 10;                        % [V] - plaja tensiunii de referinta si feedback (+/-)
Ue = 10;                        % [V] - plaja tensiunii de iesire/comanda (+/-)
Ueps = 10;                      % [V] - plaja tensiunii de eroare (+/-)
% Date initiale amplificatorului de putere
Uin = Ue;                       % [V] - plaja tensiunii de intrare = iesirea din regulator
U = 24;                         % [V] - plaja tensiunii maxime aplicate pe motor (+/-)
% Date initiale tahogenerator
K_TG = 4;                       % [V/1000rpm] - constanta tahogeneratorului
% Calcul parametrii
tau_el = L/R;                   % [s] - constanta electrica a motorului
tau_em = J*R/k^2;                     % [s] - constanta electromecanica a motorului
omg_max = U/k;                        % [rad/s] - viteza (unghiulara) maxima a motorului
K_A = U/Uin;                          % [V/V] - constanta amplificatorului de tensiune
K_tg = K_TG*60/(2*pi*1000);           % [V/rad/s] - constanta tahogen. in unitati SI
K_omg = Ui/(omg_max*K_tg);            % [V/V] - constanta de atenuare a vitezei masurate
```

```
% Functia de transfer reala a motorului de la c-da la viteza (ordin II)
num = 1/k;                          % numarator
den = [tau_el*tau_em tau_em 1];     % numitor
% Functia de transfer redusa a motorului de la c-da la viteza (ordin I)
num1 = 1/k;                         % numarator
den1 = [tau_em 1];                  % numitor
% Functia de transfer vazuta de regulator de forma: H(s)=b/s+a
Kech = K_A*1/k*K_tg*K_omg*Ueps/(Ui+Ue);
b = Kech/tau_em
a = 1/tau_em
% Acordare regulator PI analogic
w = 500;                            % [rad/s] - pulsatia naturala dorita w = 1/tau_em
csi = 0.707;                        % factorul de amortizare
% Determinarea coeficientilor regulatorului PI
Kp = (2*csi*w - a)/b
Ki = w^2/b
```

Soluțiile furnizate sunt:

```
Kp =   0.827999999999999
Ki =   9.999999999999998e+002
```

În figura 12.13 este prezentată schema Simulink a regulatorului PI analogic cu saturarea răspunsului de comandă către blocul motor, la valorile limită ale tensiuni.

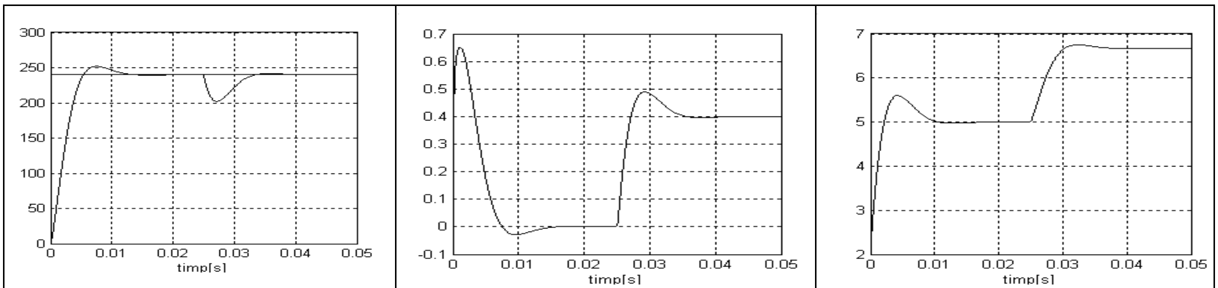


(a) **(b)**

Fig. 12.13 Schema regulatorului PI analogic cu limitarea comenzii – (a), setari pentru blocul Saturation –(b)

În blocul Saturation sunt limitate comenzile către ieşire la ±10V.

În simulare s-a aplicat o referință treaptă egală cu jumătate din viteza maximă posibilă a motorului. Pentru testarea capacității de-a rejecta efectul perturbațiilor, s-a aplicat după 25ms de la aplicarea referinței un cuplu de sarcină $ms = 20mNm$.



(a) Varatia vitezei motorului **(b) Variatia curentul prin motor** **(c) Variatia ieşirii regulatorului**

Fig. 12.14 Aplicarea referinței treaptă de 240 rad/s şi a cuplului de sarcină de valoare 20mNm după 25ms

În figura 12.14 este prezentată evoluția vitezei şi curentului motorului, iar în varianta c) este ilustrată evoluția comenzii date de regulatorul PI în plaja de tensiune ±10V [2].

A.12.4. Controlul poziției unui motor de curent continuu – SRA cu timp discret

Se consideră motorul cu aceleaşi date nominale ca cel din exemplul precedent - aplicația A.14.3. Cerințele aplicației actuale sunt următoarele:

- SRA trebuie să permită reglarea poziției unui motor de curent continuu cu magneți permanenți în toată plaja ±10 rotații.
- Motorul este alimentat printr-un amplificator care furnizează o tensiune de maxim ±24V. Tensiunea furnizată este proporțională cu o tensiune de comandă în plaja ±10V.
- Motorul este cuplat cu un encoder incremental de 500 linii pe rotație. El permite măsurarea poziției motorului cu rezoluția de 2000 pulsuri pe rotație.
- Sistemul numeric de comandă include: o interfață de encoder care permite citirea directă a variației de poziție; un convertor numeric analogic de 10 biți şi un circuit de adaptare de semnal prin care ieşirea convertorului este adusă în plaja ±10V; o interfața utilizator prin care se poate introduce referința de poziție.

Soluție: Pas 1. Obținerea modelului matematic. Pentru calculul procesului la funcția de transfer de la tensiunea de comanda U la poziția motorului θ se adaugă un integrator, deoarece poziția motorului se obține integrând viteza lui [2]:

$$H_{U\to\theta}(s)=\frac{1/k}{s(1+s\cdot\tau_{em})} \tag{12.18}$$

Pas 2. Proiectarea regulatorului numeric. Ținând cont că procesul este de ordinul II, se va utiliza un regulator cu structură fixă de tip PID care trebuie acordat. În figura 12.15 este prezintată schema Simulink a sistemului de reglare, tipul şi plaja de valori pentru semnale care fac legătura între blocurile componente.

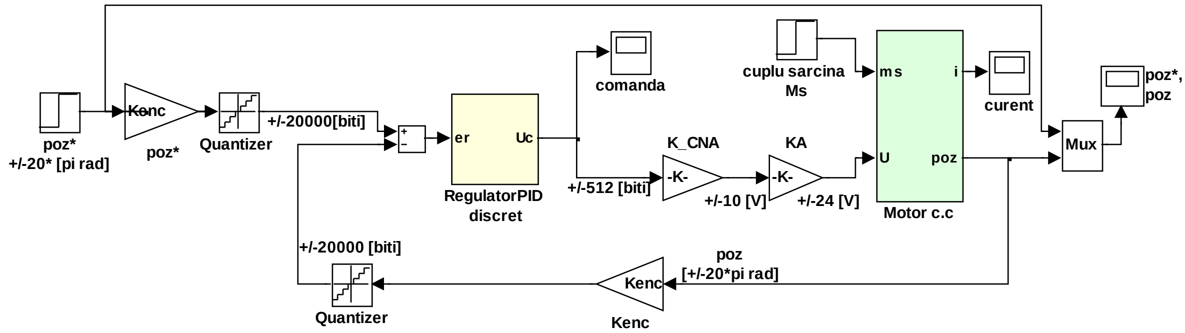


Fig. 12.15 Schema Simulink de reglare a poziției unui motor de c.c. cu un regulator PID discret

Setări pentru schema de reglare:

- Referința de poziție este un număr (unitatea de măsură - biți) care conform cerințelor trebuie să acopere plaja de valori ±10 rotații. Având în vedere că poziția motorului este citită cu rezoluția de 2000 de pulsuri/biți pe rotație, plaja de valuri a referinței este ±20000 biți.
- Tensiunea de comandă de ±10V intră în amplificatorului de putere care o converteşte în tensiunea efectivă aplicată motorului. Prin urmare amplificatorul are constanta de amplificare $K_A = 24V/10V = 2{,}4$.
- Poziția motorului este citită prin intermediul encoderului incremental, corespondența fiind 2000 pulsuri sau biți la o rotație, adică: $K_{ENC} = 2000/2\pi\ [biti/rad]$.
- Funcția de transfer a procesului se calculează luând în considerare tot ceea ce este în afara lui regulatorului, astfel:

$$H_{real}(s)=\frac{K_{ech}}{s(1+s\cdot\tau_{em})}=\frac{K_{ech}}{s\cdot\tau_{em}(1/\tau_{em}+s)}=\frac{b}{s(s+a)} \tag{12.19}$$

unde:

$$b = \frac{K}{\tau_{em}} = \frac{298.4}{2\cdot 10^{-3}} = 149200 \quad ; \quad a = \frac{1}{\tau_{em}} = \frac{1}{2\cdot 10^{-3}} = 500$$

$$K_{ech} = K_{CNA}\cdot K_A \cdot 1/k\cdot K_{ENC}\cdot = \frac{10/512\times 2.4\times 2000/(2\pi)}{0.05} = 298.4$$

- Echivalentul discret al relației (12.19) este dat de relațiile (12.10), soluțiile fiind date de relațiile (4.3.2).
- Regulatorul trebuie să de-a la ieşire o comandă care să corespundă cu rezoluția convertorului numeric analogic (CNA). Dacă CNA are 10 biți, înseamnă că poate converti într-o tensiune de orice număr în plaja [0, 2^{10}-1]. Ținând cont că tensiunea de comandă e bipolară, corespondența conversiei este: ±512 (±2^9) biți ce corespund la ±10V. Astfel, factorul de conversie este: $K_{CNA} = 10 / 512 \quad [V / biti]$.
- Acordarea regulatorului se face aplicând formula (12.16).

Notă: Pentru implementarea programului sunt prezenți paşi de urmat în **RTI**:

- *citirea şi calculul referinței de poziție* pentru pasul curent - θ_i^* şi *citirea poziției motorului pentru pasul curent* - θ_i , de la interfața de encoder;
- *calcul erorii la pasul curent*: $\varepsilon_i = \theta_i^* - \theta_i$;
- *calcul comenzi actuale* u_i utilizând relația:

$$u_i = \alpha_2\varepsilon_i + \alpha_1\varepsilon_{i-1} + \alpha_0\varepsilon_{i-2} + (1+r)u_{i-1} - ru_{i-2}$$

- *limitarea comenzi* la plaja de valori posibile, care pentru acest exemplu este în gama dată de convertor, [-512,+511], cu limitarea valorilelor mai mici de –512 se la valoarea maximă de –512, iar pentru valorile mai mari de 511 se limitează la 511;
- *trimiterea comenzii către proces* după limitarea acesteia (operație ce presupune scrierea comenzii la CN/A),
- *actualizarea variabilelor globale utilizate la următorul pasul* al programului, astfel: $u_{i-2} = u_{i-1}$; $u_{i-1} = u_i$; $\varepsilon_{i-2} = \varepsilon_{i-1}$; $\varepsilon_{i-1} = \varepsilon_i$.

Coeficienții regulatorului se pot obține în Matlab prin rularea următorului program:

```
% Comanda buclei de pozitie cu regulator PID numeric
%----------------------------------------------------------------------------------------------------
% Datele initiale pentru motor si sarcina
R = 10;                    %[ohm] - rezistenta rotorului
L = 1e-3;                  %[H] - inductivitatea rotorului
k = 0.05;                  %[Nm/A] - constanta de cuplu a motorului
J = 5e-7;                  %[kg*m^2] - momentul de inertie total (motor+sarcina)
%----------------------------------------------------------------------------------------------------
% Datele initiale ale regulatorului PID numeric
CNA = 10;                  %[ ] - rezolutie convertorului N/A
Ue = 10;                   %[V] - plaja tensiunii de iesire/comanda (+/-)
T = 1e-4;                  %[s] - pasul de esantionare
% Datele initiale ale amplificatorului de putere
Uin = Ue;                  %[V] - plaja tensiunii de intrare = iesirea din regulator
U = 24;                    %[V] - plaja tensiunii maxime aplicate pe motor (+/-)
% Datele initiale pentru encoder
N_linii = 500;             %[ ] - numar de linii pe rotatie
% Calculul parametrilor
tau_el = L/R;              %[s] - constanta electrica a motorului
tau_em = J*R/k^2;          %[s] - constanta electromecanica a motorului
K_A = U/Uin;               %[V/V] - constanta amplificatorului de tensiune
K_CNA=Ue/2^(CNA-1);        %[V/biti] - constanta convertorului N/A
Kenc = 4*N_linii/2/pi;     %[biti/rad] - constanta encoderului
% Functia de transfer redusa a motorului de la c-da la pozitie (ordin II)
num1 = 1/k;                % numarator
den1 = [tau_em 1 0];       % numitor
```

```
% Functia de transfer vazuta de regulator este de forma: H(s)=b/s(s+a)
Kech = K_CNA*K_A*1/k*Kenc;
b = Kech/tau_em;
a = 1/tau_em;
% Prin discretizarea procesului se obtine:
H(z)=(b1d*z+b0d)/(z^2+a1d*z+a0d)
b1d = b/a*((exp(-a*T)-1)/a+T);
b0d = b/a*((1-exp(-a*T))/a-T*exp(-a*T));
a1d = -1-exp(-a*T);
a0d = exp(-a*T);
% Acordarea regulatorului PID discret
w = 500;                          %[rad/s] - pulsatia naturala dorita w = 1/tau_em
tzeta = 0.707;                    %factorul de amortizare
alfa = 5;                         %pozitia polilor secundari relativ la cei principali
p1 = -2*exp(-tzeta*w*T)*cos(w*T*sqrt(1-tzeta^2));
p2 = exp(-2*tzeta*w*T);
beta = exp(-alfa*w*T);
c3 = p1-2*beta;
c2 = p2+beta^2-2*beta*p1;
c1 = beta^2*p1-2*beta*p2;
c0 = beta^2*p2;
gama = b1d*(c2-a0d+a1d)-b0d*(c3-a1d+1);
delta = b1d*(1-a1d)+b0d;
r=(c1+a0d-gama*b0d/b1d^2-c0*b1d/b0d)/(a1d-a0d-delta*b0d/b1d^2-a0d*b1d/b0d);
alfa2 = (c3-a1d+1+r)/b1d;
alfa1 = (gama-r*delta)/b1d^2;
alfa0 = (c0-r*a0d)/b0d;
% Determinarea coeficientilor regulatorului PID discret
Ki = (alfa2+alfa1+alfa0)/(1-r)
Kp = (alfa2-alfa0-Ki*r)/(1-r)
Kd = alfa2-Kp
```

Soluțiile furnizate sunt:

```
Ki =
    0.1867
Kp =
    6.6330
Kd =
   34.0203
```

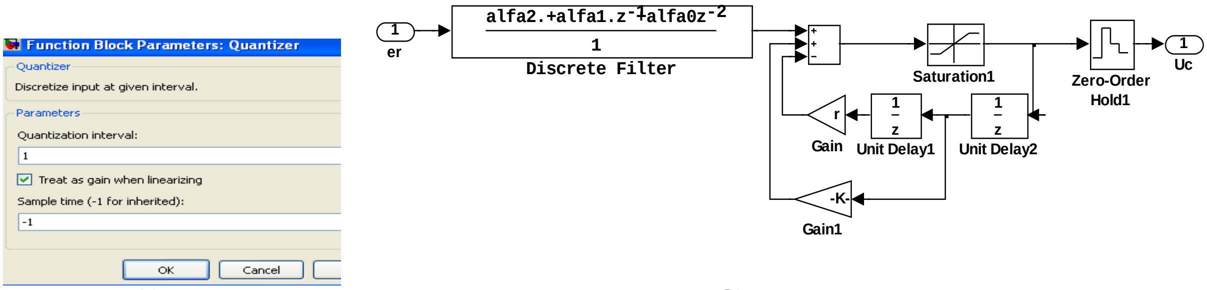
Suplimentare pentru verificarea calculelor se poate rula următorul cod Matlab:

```
nump = [0 b1d b0d];                              % numarator proces
denp = [1 a1d a0d];                              % numitor proces
numr = [alfa2 alfa1 alfa0];                      % numarator regulator
denr = [1 -1-r r];                               % proces regulator
[numbd,denbd] = series(numr,denr,nump,denp);     % calcul Hech bucla deschisa
[numbi,denbi] = feedback(numbd,denbd,1,1);       % calcul Hech bucla inchisa
poli_sra = roots(denbi)                          % afiseaza polii SRA construit
poli_impusi = roots([1 c3 c2 c1 c0])             % afiseaza polii impusi in algoritmul aplicatiei
```

Răspunsul returnat este următorul și se arată că verifică algoritmul de calcul:

```
poli_sra =
   0.9647 + 0.0341i
   0.9647 - 0.0341i
   0.7788
   0.7788
poli_impusi =
   0.9647 + 0.0341i
   0.9647 - 0.0341i
   0.7788 + 0.0000i
   0.7788 - 0.0000i
```

În simulare s-a aplicat o referință treaptă egală cu 3 radiani, iar pentru a testa capacitatea de-a rejecta efectul perturbațiilor s-a aplicat un cuplu de sarcină $ms = 50mNm$ după 25ms de la aplicarea referinței.



(a) (b)

Fig. 12.17 Regulator PID discret cu limitarea comenzii- setările bolocului Quantizer- (a), schema Simulink – (b)

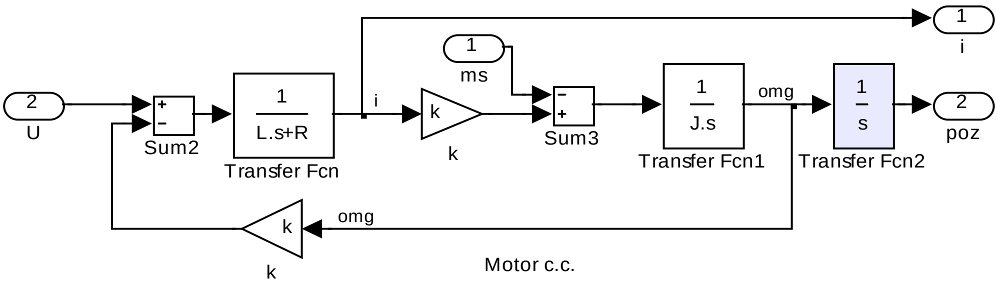
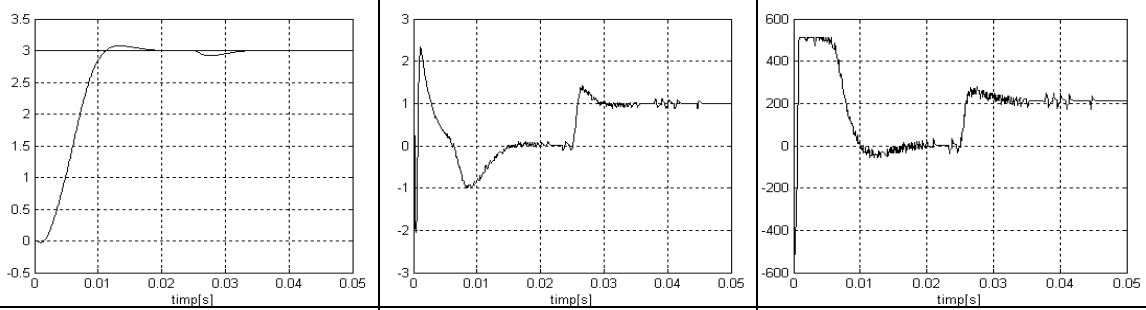


Fig. 12.17.c Motor de curent continuu cu poziția mărime de ieșire



a) Poziția motorului	b) Curentul motorului	c) Ieșirea regulatorului

Fig. 12.18 Aplicarea unei referințe treaptă de 3 rad. și a unui cuplu de sarcină=50mNm după 25ms.

În figura 12.18 este prezentă evoluția poziției motorului –(a), a curentului motorului –(b), şi a comenzii date de regulator.