Encontrar la proyección la proyección perpendicular de los siguientes vectores en $C_{[-1,1]}$ (Espacio de funciones continuas en el intervalo $[-1,1]$ y con el producto interno definido por $\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{1} dx\, f(x)g(x)$ al subespacio generado por los polinomios $\{1, x, x^2-1\}$ calcular la distancia de cada una de estas funciones al subespacio mencionado

$\{1, x, x^2-1\}$

a) $f(x) = x^n$

b) $f(x) = \text{sen}(x)$

c) $f(x) = 3x^2 \longrightarrow 3x^2 = a(1) + b(x) + c(x^2-1) \Longrightarrow 3x^2 = a + bx + cx^2 - c$

$a - c = 0$; $b = 0$; $c = 3$ entonces $3x^2 = 3 + 0x + 3(x^2-1)$

$a = c$

$\langle 1|x\rangle = \int_{-1}^{1} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right) = 0$ $\quad \langle 1|x^2-1\rangle = \int_{-1}^{1} x^2 - 1\,dx = \frac{x^3}{3} - x\Big]_{-1}^{1} = 0$

$\langle x|x^2-1\rangle = \int_{-1}^{1} x^3 - x\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\Big]_{-1}^{1} = 0$

Al ser vectores base ortogonales Para a) x^n

$C^0 = \frac{\langle x^n|1\rangle}{\langle 1|1\rangle}$ $\quad C^1 = \frac{\langle x^n|x\rangle}{\langle x|x\rangle}$ $\quad C^2 = \frac{\langle x^n|x^2-1\rangle}{\langle x^2-1|x^2-1\rangle}$

$\langle x^n|1\rangle = \int_{-1}^{1} x^n\,dx = \frac{(1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ $\quad \langle 1|1\rangle = \int_{-1}^{1} dx = x\Big]_{-1}^{1} = 2$

$2k \qquad 2k+1$

$C^0 = \frac{\frac{2}{n+1}}{2}$, 0

$\langle x^n|x\rangle = \int_{-1}^{1} x^{n+1}\,dx = \frac{1^{n+2}}{n+2} - \frac{(-1)^{n+2}}{n+2}$ $\quad \langle x|x\rangle = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$

$2k \qquad 2k+1$

$C^1 = 0$, $\frac{\frac{2}{n+2}}{\frac{2}{3}} \to \frac{3}{n+2}$

$\langle x^2-1|x^2-1\rangle = \int_{-1}^{1} (x^2-1)^2\,dx = \int_{-1}^{1} x^4 - 2x^2 + 1\,dx = \frac{x^5}{5} - \frac{2}{3}x^3 + x\Big]_{-1}^{1} = \frac{16}{15}$

$\langle x^n|x^2-1\rangle = \int_{-1}^{1} x^{n+2} - x^n\,dx = \frac{1^{n+3}}{n+3} - \frac{1^{n+1}}{n+1} - \left(\frac{(-1)^{n+3}}{n+3} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right)$

$C^2 = \frac{\frac{2}{n+3} - \frac{2}{n+1}}{\frac{16}{15}}$; 0

$$\langle 1 | \mathrm{sen}(x) \rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{sen}(x)\, dx = -\cos(x) \Big]_{-1}^{1} = -\cos(1) - (\cos(-1)) = 0$$

ILate $u = x$ $du = 1$ $dv = \mathrm{sen}\, x$ $v = -\cos(x)$

$$\langle x | \mathrm{sen}(x) \rangle = \int_{-1}^{1} x\, \mathrm{sen}\, x\, dx = -x\cos x = -x\cos(x) + \int_{-1}^{1} \cos(x)$$

$$= -x\cos(x) + \mathrm{sen}(x) \Big]_{-1}^{1} = 2(\sin(1) - \cos(1))$$

$$\langle (x^2 - 1) | \mathrm{sen}(x) \rangle \int x^2 \mathrm{sen}(x) - \mathrm{sen}(x)\, dx = \int_{-1}^{1} x^2 \mathrm{sen}(x)\, dx - \int_{-1}^{1} \mathrm{sen}(x) = 0$$

entonces $f(x) = 2(\sin(1) - \cos(1))\, x$

Considere el espacio vectorial de las matrices complejas 2x2 hermíticas. Tal y como demostremos con vigor en la sección 4.3.2.2 una matriz hermítica (o autoadjunta) será igual a su adjunta esto es, una matriz será igual a su traspuesta conjugada $(A^{+})^{i}_{j} \rightarrow (A^{*}) = A^{j}_{i}$:

$$A \longleftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} = A^T = \begin{pmatrix} z_1^* & z_3^* \\ z_2^* & z_4^* \end{pmatrix} \quad \text{es decir} \quad \begin{array}{l} z_1^* = z_1 \\ z_4^* = z_4 \\ z_2^* = z_3 \end{array}$$

a)

$$A = \begin{pmatrix} z^1 & z^2 \\ z^2 & z_4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & c+id \\ c-id & b \end{pmatrix}$$

Base de pauli $\left\{ \sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$

$$A = \alpha\sigma_0 + \beta\sigma_1 + \gamma\sigma_2 + \mu\sigma_3$$

$$\begin{pmatrix} a & c+id \\ c-id & b \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \mu = a \\ \beta - i\gamma = c + id \\ \beta + i\gamma = c - id \\ \alpha - \mu = b \end{array}\right\} \quad \begin{pmatrix} \alpha + \mu & \beta - i\gamma \\ \beta + i\gamma & \alpha - \mu \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \alpha - \mu = a \\ \alpha + \mu = b \end{array} \quad \alpha = \frac{a+b}{2} \quad \mu = \frac{a-b}{2}$$

$$\begin{array}{l} \beta - i\gamma = c + id \\ \beta + i\gamma = c - id \end{array} \quad \beta = c \quad \gamma = -d$$

Sea Producto interno $\langle a|b\rangle = Tr(A^T B)$

$$\left\{ \sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\sigma_0^T \sigma_1$ $\quad \sigma_1^T \sigma_2$ $\quad \sigma_2^T \sigma_3$

$\sigma_0^T \sigma_2$ $\quad \sigma_1^T \sigma_3$

$\sigma_0^T \sigma_3$

$$\sigma_0^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_1^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2^T = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\langle \sigma_0|\sigma_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \langle \sigma_0|\sigma_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \text{tra}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle \sigma_0|\sigma_3\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{tra}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 0 \quad \langle \sigma_1|\sigma_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \text{tra}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle \sigma_1|\sigma_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{tra}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \langle \sigma_2|\sigma_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{tra}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = 0$$

El producto de la base de paulini es ortogonal

- Explorar si se pueden construir subespacios vectoriales de matrices reales e Imaginarias para

Sea $R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matriz de reales $\quad S = \begin{pmatrix} ai & bi \\ -bi & ci \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma &= a \\ \alpha - \gamma &= d \\ \beta &= b \end{aligned} \longrightarrow \alpha = \frac{a-d}{2} \quad \gamma = \frac{d-a}{2} \quad \beta = b$$

Si existiria el espacio seria

$$\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_3\}$$

Para los Imaginarios se necesitaria otra base que Contenga Imaginarios en la diagonal

$\sigma_2 = \left\{\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right\} \longrightarrow$ Solo genera Imaginarios en R_{12}, R_{21} y Con los otros vectores de la base solo obtendriamos en la diagonal reales