En Caso tridimencional tenemos que si $\{e_i\}$ define un sistema de coordenadas (dextrogiro) y no necesariamente ortogonal, entonces demuestre que

$$e^i = \frac{e_j \times e_k}{e_i \cdot (e_j \times e_k)}$$

$$e^1 \propto e_2 \times e_3$$

$$e^1 \cdot e_1 = 1 \longrightarrow e^1 \cdot e_1 (e_2 \times e_3) = e_2 \times e_3 \rightarrow e^1 = \frac{e_2 \times e_3}{e_1 (e_2 \times e_3)}$$ Podriamos generalizar

$$e^i \propto (e_j \times e_k)$$
$$e^i \cdot e_i = \delta^i_i$$
$$\longrightarrow e^i \cdot e_i = 1 \rightarrow e^i \cdot e_i \cdot (e_j \times e_k) = (e_j \times e_k)$$
$$e^i = \frac{(e_j \times e_k)}{e_i \cdot (e_j \times e_k)}$$

Si los volumenes $V = e_1 \cdot (e_2 \times e_3)$ y $\tilde{V}\ e^1 (e^2 \times e^3)$ entonces $V \tilde{V} = 1$

$$V \cdot \tilde{V} = e_1 \cdot (e_2 \times e_3) \cdot e^1 (e^2 \times e^3)$$
$$\underbrace{e_1 \cdot e^1}_{1} \underbrace{(e_2 \times e_3)(e^2 \times e^3)}_{1}$$
$$V \cdot \tilde{V} = 1$$
$$V \cdot \tilde{V} = e_i (e_j \times e_k) \cdot e^i (e^j \times e^k)$$
$$V \cdot \tilde{V} = e_i \cdot e^i \underbrace{(e_j \times e_k)}_{L} \cdot \underbrace{(e_j \times e^k)}_{L}$$
$$= \delta^i_i \cdot \delta^L_L$$

¿Que vector satisface que $a \cdot e^i = 1$

$$a \cdot e^i = 1 \qquad |a\rangle = a^k e_k \rightarrow$$
$$a \cdot e^i = \delta^i_j$$
$$a^k e_k e^i = \delta^i_j$$
$$a^k \delta^i_k = \delta^i_j$$
$$a^i = \delta^i_j \longrightarrow a = e_j$$

Encuentre el producto vectorial de dos vectores a y b que estan representados en un sistema oblicuo dada la base $W_1 = 4i + 2j + k$ $\quad W_2 = 3i + 3j$ $\quad W_3 = 2k$

$$|V\rangle = \varepsilon^i |e_i\rangle$$
$$\langle V| = \varepsilon^* \langle e^i|$$

Halle las bases reciprocas

$$e^1 = \frac{W_2 \times W_3}{W_1 (W_2 \times W_3)} \qquad e^2 = \frac{W_1 \times W_3}{W_2 (W_1 \times W_3)} \qquad e^3 = \frac{W_1 \times W_2}{W_3 (W_1 \times W_2)}$$

$$e^1 = \frac{W_2 \times W_3}{W_1 \cdot (W_2 \times W_3)} \qquad e^2 = \frac{W_1 \times W_3}{W_2\,(W_1 \times W_3)} \qquad e^3 = \frac{W_1 \times W_2}{W_3\,(W_1 \times W_2)} \qquad W_1 = 4i + 2j + k \quad W_2 = 3i + 3j \quad W_3 = 2k$$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 6i - 6j \qquad \begin{pmatrix} i & j & k \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 4i - 8j \qquad \begin{pmatrix} i & j & k \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = -3i - 3j + 6k$$

$$e^1 = \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j$$

$$e^2 = -\frac{1}{3}(i - 2j) \qquad e^3 = \frac{-3i - 3j + 6k}{12} = -\frac{1}{4}i + \frac{1}{4}j + \frac{1}{2}k$$

$a = i + 2j + 3k$

$$(a|w_j) \longrightarrow \langle a|w_1\rangle = 4 + 4 + 3 = 7 = a^1;\ \langle a|w_2\rangle = 3 + 6 + 0 = 9 = a^2;\ \langle a|w_3\rangle = 6 = a^3$$

$$\langle e^i|a\rangle \longrightarrow \langle e^1|a\rangle = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} = a_1;\ \langle e_2|a\rangle = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = 1 = a^2;\ \langle a|e^3\rangle = -\frac{1}{4} + \frac{8}{4} = \frac{7}{4} = a^3$$

7. Considere una vez más el espacio vectorial de matrices hermíticas 2×2 y la definición de producto interno $\langle a\,|b\rangle \rightleftharpoons \mathrm{Tr}(\mathbb{A}^\dagger \mathbb{B})$ que introdujimos en los ejercicios de la sección 2.2.4. Hemos comprobado que la matriz unitaria y las matrices de Pauli $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ –presentadas también en los ejercicios de la sección 2.2.4– forman base para ese espacio (ver ejercicios sección 2.3.6). Encuentre entonces la base dual asociada a las base de Pauli y, adicionalmente, dado un vector genérico en este espacio vectorial encuentre su 1-forma asociada.

$$\langle a|b\rangle \rightleftharpoons \mathrm{tra}(A^* B) \qquad \left\{ \sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$A \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} = A^T = \begin{pmatrix} z_1^* & z_3^* \\ z_2^* & z_4^* \end{pmatrix} \quad \text{es decir} \quad z_1^* = z_1,\ z_4^* = z_4,\ z_2^* = z_3$$

base ortogonal las matrices de pauli

$$\delta_i^j = \langle \sigma_i | \sigma^j \rangle$$

$$\langle \sigma_0 | \sigma_0 \rangle \qquad \langle \sigma_1 | \sigma_1 \rangle \qquad \langle \sigma_2 | \sigma_2 \rangle$$

$$\mathrm{tra}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = 2 \qquad \mathrm{tra}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = 2 \qquad \mathrm{tra}\left[\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right] = \mathrm{tra}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

$$\langle \sigma_3 | \sigma_3 \rangle$$

$$\mathrm{tra}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right] = 2$$

$$\sigma^{i*} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & \frac{-i}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

$$\langle \sigma_i | \sigma_j \rangle = 2\delta_{ij}$$

$$\text{entonces} \left\{ \begin{aligned} \langle \sigma_i | \sigma^i \rangle \cdot \sigma_j &= 2\,\delta_{ij}\,\sigma^i \\ \delta_i^i\, \sigma_j &= 2\,\delta_{ij}\,\sigma^i \\ \sigma_j &= 2\sigma^j \longrightarrow \frac{1}{2}\sigma_j = \sigma^j \end{aligned} \right.$$

$i = 0, 1, 2, 3$

$$A = \begin{pmatrix} a & c + di \\ c - id & b \end{pmatrix} \longrightarrow A = \alpha^i \sigma_i = \alpha^0 \sigma_0 + \alpha^1 \sigma_1 + \alpha^2 \sigma_2 + \alpha^3 \sigma_3$$

$$A = \alpha_i \sigma^i = \frac{1}{2}(\alpha_0 \sigma^0 + \alpha_1 \sigma^1 + \alpha_2 \sigma^2 + \alpha_3 \sigma^3)$$

$\alpha^0 =$

$\alpha^0 = \frac{a+b}{2}$ $\alpha^3 = \frac{a-b}{2}$

$\alpha^1 = c$ $\alpha^2 = -d$

en el espacio vectorial

$\alpha_1 = \frac{a+b}{4}$ $\alpha_3 = \frac{a-b}{4}$

$\alpha_1 = \frac{c}{2}$ $\alpha_2 = -\frac{d}{2}$

Los del espacio vectorial dual