a) La distancia media entre dos señales periódicas $x_1(t) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ y $x_2(t) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$; se puede expresar a partir de la potencia media de la diferencia entre ellas:

$$d^2(x_1, x_2) = P_{x_1 - x_2} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_T |x_1(t) - x_2(t)|^2 dt$$

Sea $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos señales como se muestra a continuación:

$$x_1(t) = A e^{j w_0 t}$$

$$x_2(t) = B e^{j 5 w_0 t}$$

Con $w_0 = 2\pi / T$; $T, A, B \in \mathbb{R}^+$. Determine la distancia entre las dos señales.

Solución

$$d^2(x_1, x_2) = P_{x_1 - x_2} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_T |x_1(t) - x_2(t)|^2 dt$$

$$x_1(t) = A e^{j w_0 t}$$

$$x_2(t) = B e^{j w_0 t}$$

$$x(t) \cdot x(t)^* \rightarrow e^{j w_0 t} e^{-j w_0 t}$$

$$e^{j w_0 t - j w_0 t} = e^0 = 1$$

$$w_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_T |A e^{j w_0 t} - B e^{j 5 w_0 t}|^2 dt$$

$$|A e^{j w_0 t} - B e^{j 5 w_0 t}| = |A|^2 + |B|^2 - 2 Re\, AB^* e^{j(w_0 t - 5 w_0 t)}$$

$$e^{j(w_0 t - 5 w_0 t)} = e^{(-j 4 w_0 t)}$$

Por tanto

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_T A^2 + B^2 - 2AB\, Re(e^{-j 4 w_0 t})\, dt$$

Sabemos que:

$$Re(e^{-j 4 w_0 t}) = \cos(4 w_0 t)$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_T A^2 + B^2 - 2AB\ \cos(4wot)\ dt$$

Dividiendo y evaluando las integrales, tenemos lo siguiente:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[\int_T A^2\, dt + \int_T B^2\, dt - \int_T 2AB\ \cos(4wot)\ dt\right]$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[A^2 \cdot t\Big|_T + B^2 \cdot t\Big|_T - 2AB\int_T \cos(4wot)\ dt\right]$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[A^2 \cdot T + B^2 \cdot T - 2AB\int_T \cos(4wot)\ dt\right]$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[T\left[A^2 + B^2\right] - 2AB\int_T \cos(4wot)\ dt\right]$$

La integral de cos(4wot) sobre un periodo T da cero debido a la naturaleza de la función coseno, que es una función periodica y simetrica.

La función coseno es periodica con un periodo 2π. Así que por ortogonalidad de las exponenciales complejas:

$$\int_T \cos(4wot)\ dt = 0$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[A^2 \cdot T + B^2 \cdot T - \overset{0}{\cancel{2AB \cdot 0}}\right]$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{\cancel{T}} \cdot \cancel{T}\left[A^2 + B^2\right]$$

Por lo tanto, la distancia media entre las dos señales periodicas es:

$$d^2(x_1, x_2) = A^2 + B^2$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_T \left|Ae^{jwot} - Be^{j5wot}\right|^2 dt = A^2 + B^2$$