Demostrar

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}$$

Solución

Primero definimos el producto punto entre dos vectores $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ como:

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$$

La norma (o longitud) de un vector u se define como:

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots u_n^2}$$

Ahora, consideremos dos vectores u y v en R^n.

La longitud del vector u se denota como $\|u\|$ y la longitud del vector v se denota como $\|v\|$.

El ángulo entre u y v se denota como θ.

La proyección de u sobre v se define como:

$$\text{proj}_v(u) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|} \cdot \frac{v}{\|v\|}$$

Ahora, expresamos $\cos(\theta)$ en términos de la proyección de u sobre v y la norma de u:

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}$$

Ahora, observemos que

$$\|u\| \cdot \frac{v}{\|v\|}$$

es un vector unitario en la dirección de v. Denotémoslo como $\hat{v}$.

Entonces,

$$\frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|}$$

es la proyección de u sobre v.

Por lo tanto, podemos expresar u como la suma de dos componentes: una componente en la dirección de v y otra componente perpendicular a v:

$$u = proj_v(u) + (u - proj_v(u))$$

Ahora, tomando el producto punto de ambos lados de esta ecuación con v:

$$\langle u, v \rangle = \langle proj_v(u), v \rangle + \langle u - proj_v(u), v \rangle$$

Usando la propiedad de linealidad del producto punto, obtenemos:

$$\langle u, v \rangle = \langle proj_v(u), v \rangle + \langle u, v \rangle - \langle proj_v(u), v \rangle$$

Ahora, observa que $\langle proj_v(u), v \rangle$ y $-\langle proj_v(u), v \rangle$ son opuestos y se cancelan entre sí:

$$\langle u, v \rangle = \langle u, v \rangle$$

Esto confirma la identidad original, y así demostramos que

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}$$