Parcial 1: Señales y Sistemas 2024-I

Profesor: Andrés Marino Álvarez Meza, Ph.D.
Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica, y Computación
Universidad Nacional de Colombia - sede Manizales

1. Instrucciones

- Para recibir crédito total por sus respuestas, estas deben estar claramente justificadas e ilustrar sus procedimientos y razonamientos (paso a paso) de forma concreta, clara y completa.
- El parcial debe ser enviado al correo electrónico `amalvarezme@unal.edu.co` antes de las 23:59 del 21 de marzo de 2024, vía link de GitHub, con componentes teóricas de solución a mano en formato pdf y componentes de simulación en un cuaderno de Python `.ipynb`.
- Los códigos deben estar debidamente comentados en las celdas de código, y discutidos/explicados en celdas de texto (markdown). Códigos no comentados ni discutidos, no serán contabilizados en la nota final.

2. Preguntas

a). La distancia media entre dos señales periódicas $x_1(t) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ y $x_2(t) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$; se puede expresar a partir de la potencia media de la diferencia entre ellas:

$$d^2(x_1, x_2) = \bar{P}_{x_1 - x_2} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_T |x_1(t) - x_2(t)|^2 \, dt.$$

Sea $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos señales como se muestra a continuación:

$$x_1(t) = Ae^{jw_0 t}$$

$$x_2(t) = Be^{j5w_0 t}$$

con $w_0 = \frac{2\pi}{T}$; $T, A, B \in \mathbb{R}^+$. Determine la distancia entre las dos señales.

b). Cuál es la señal obtenida en tiempo discreto al utilizar un conversor análogo digital con frecuencia de muestreo de $5kHz$, aplicado a la señal continua $x(t) = 3\cos(1000\pi t) + 5\sin(2000\pi t) + 10\cos(11000\pi t)$?. Realizar la simulación del proceso de discretización. En caso de que la discretización no sea apropiada, diseñe e implemente un conversor adecuado para la señal estudiada.

c). Implemente una simulación para encontrar la salida del sistema lineal e invariante al tiempo $\mathcal{H}\{\cdot\}$, con respuesta al escalón $h_\epsilon[n] = \{2, 4, 1, 5, 0, 10\}$, $n \in \mathbb{Z}$, ante la entrada análoga en corriente $x(t) = 20(\cos(t/3) + \cos(t/4))$ [A]. A: Amperios. Incluya los acondicionamientos necesarios de discretización y cuantización, asumiendo un microprocesador de 4 bits con entrada análoga de 4mA a 20mA.

a) La distancia media entre dos señales periódicas $x_1(t) \in R, C$ y $x_2(t) \in R, C$; se puede expresar a partir de la potencia media de la potencia media de la diferencia entre ellas:

$$d^2(x_1, x_2) = \overline{P}_{x_1 - x_2} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_T |x_1(t) - x_2(t)|^2 dt$$

Sea $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos señales como se muestra a continuación:

$$x_1(t) = Ae^{j\omega_0 t}$$

$$x_2(t) = Be^{j\omega_0 t}$$

Con $\omega_0 = 2\pi/T$; $T, A, B \in R^+$. Determine la distancia entre las dos señales.

$$x_1(t) = Ae^{j\omega_0 t}$$

$$x_2(t) = Be^{j\omega_0 t}$$

$$x(t) \cdot x(t)^* \rightarrow e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega_0 t}$$
$$e^{j\omega_0 t - j\omega_0 t}$$

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_T |x_1(t) - x_2(t)|^2 dt$$

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_T |Ae^{j\omega_0 t} - Be^{j5\omega_0 t}|^2 dt$$

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_T |A^2 e^{j2\omega_0 t} - 2AB e^{j6\omega_0 t} + B^2 e^{j10\omega_0 t}| dt$$

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_T A^2 e^{j2\omega_0 t} dt - \int_T 2AB e^{j6\omega_0 t} dt + \int_T B^2 e^{j10\omega_0 t} dt$$

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} A^2 \int_T e^{j2\omega_0 t} dt - 2AB \int_T e^{j6\omega_0 t} dt + B^2 \int_T e^{j10\omega_0 t} dt$$

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} A^2 \int_T e^{j2\omega_0 t} \cdot e^{-j2\omega_0 t} dt - 2AB \int_T e^{j6\omega_0 t} dt + B^2 \int_T e^{j10\omega_0 t} e^{-j10\omega_0 t} dt$$

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} A^2 \int_T e^{j2\omega_0 t - j2\omega_0 t} dt - 2AB \int_T e^{j6\omega_0 t} dt + B^2 \int_T e^{j10\omega_0 t - j10\omega_0 t} dt$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} A^2 \int_T e^0\, dt - 2AB \int_T e^{j6\omega_0 t}\, dt + B^2 \int_T e^0\, dt$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} A^2 \cdot t \Big|_T - 2AB \int_T e^{j6\omega_0 t}\, dt + B^2 \cdot t \Big|_T$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \cdot A^2 \cdot T - 2AB \int_T e^{j6\omega_0 t}\, dt + B^2 T$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left(A^2 \cdot T - 2AB \int_T e^{j6\omega_0 t}\, dt + B^2 \cdot T \right)$$

Sustitución

$u = j6\omega_0 t$

$du = j6\omega_0 t$

$dt = \frac{1}{j6\omega_0}$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left(A^2 \cdot T - 2AB \int_T e^{u} \cdot \frac{1}{j6\omega_0}\, du + B^2 T \right)$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left(A^2 \cdot T - 2AB \cdot \frac{1}{j6\omega_0} \int_T e^{u}\, du + B^2 T \right)$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left(A^2 \cdot T - 2AB \cdot \frac{1}{j6\omega_0} \cdot e^{j6\omega_0 t} \Big|_T + B^2 \right)$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{\cancel{T}} \left(A^2 \cdot \cancel{T} - 2AB \cdot \frac{e^{j6\omega_0 T}}{j6\omega_0} + B^2 \cdot \cancel{T} \right)$$

$$\lim_{T\to\infty} 1 \left(A^2 - 2AB \cdot \frac{e^{j6\omega_0 T}}{j6\omega_0} + B^2 \right)$$

$$\lim_{T\to\infty} 1 \left(A^2 - 2AB \cdot \frac{e^{j6\, 2\pi/\cancel{T} \cdot \cancel{T}}}{j6\, 2\pi} + B^2 \right)$$

$$\lim_{T\to\infty} A^2 - 2AB \cdot \frac{e^{j12\pi}}{j\frac{12}{6}\pi} + B^2$$

$$\lim_{T\to\infty} \left(A^2 - AB \cdot \frac{e^{j12\pi}}{j6\pi} + B^2 \right)$$

$$A^2 - AB\frac{e^{j12\pi}}{j6\pi} + B^2 \rightarrow$$ Esta es la distancia media entre dos señales periodicas.

b) Cual es la señal obtenida en tiempo discreto al utilizar un conversor analógo digital con frecuencia de muestreo de 5KHz, aplicado a la señal continua $x(t) = 3\cos(1000\pi t) + 5\sin(2000\pi t) + 10\cos(11000\pi t)$?. Realizar la simulación del proceso de discretización. En caso de que la discretización no sea apropiada, diseñe e implemente un conversor adecuado para la señal estudiada.

$$x(t) = 3\cos(1000\pi t) + 5\sin(2000\pi t) + 10\cos(11000\pi t)$$

$$F = \frac{\omega}{2\pi}\ [Hz]$$

$$F_s = 5000\ Hz$$

$$F_1 = \frac{1000\pi}{2\pi} = 500\ Hz$$

$$F_2 = \frac{2000\pi}{2\pi} = 1000\ Hz$$

$$F_3 = \frac{11000\pi}{2\pi} = 5500\ Hz$$

$$F_s \geq 2 \cdot F_{max}$$

$$5000\ Hz \geq 2 \cdot 5500\ Hz$$

$$5000\ Hz \geq 11000\ Hz$$

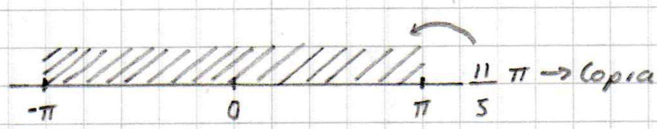
- No cumple Nyquist

$$t = nT_s = n/F_s$$

$$x[t = n/F_s] = 10\cos(11000\pi\, n/5000)$$

$$\Omega = \frac{11}{5}\pi \rightarrow \Omega > \pi \rightarrow \text{Cos Alias (Copia)}$$

Copia de quien?



$$\Omega_{original} = \Omega_{copia} \pm 2\pi$$

$$\Omega_{original} = \Omega_{copia} - 2\pi = \frac{11}{5}\pi - 2\pi = \frac{\pi}{5}$$

$$\Omega_{original} = \frac{\pi}{5}$$

$$\Omega_{ori} = 2\pi F_{original} = \frac{2\pi F_{original}}{F_s}$$

$$F_{original} = \frac{\Omega_{ori}}{2\pi} = \frac{\pi/5}{2\pi} = \frac{1}{10} \quad [\text{ciclos}/\text{muestras}]$$

$$N_{orig} = \frac{1}{F_{orig}} = \frac{1}{1/10} = 10$$

$$F_{orig} = F_{orig} \cdot F_s = \frac{1}{\cancel{10}} \cdot 500\cancel{0} = 500\,Hz$$

$$T_{orig} = \frac{1}{F_{orig}} = \frac{1}{500} \text{ segundos}$$

— // — // — // — // — // — // — // — // — // — // — // — // —

$F_s(\text{Nuevo}) = 12000\ Hz$

$F_3 = 5500\ Hz$

$F_s \geqslant 2 \cdot 5500\ Hz$

$12000\ Hz \geqslant 11000\ Hz$

$t = nT_s = n/F_s$

$x[t = n/F_s] = 10 \cos(11000\pi\ n/12000)$

$x[n] = 10 \cos(11\pi/12\ n)$

$$\Omega = \frac{11}{12}\pi \rightarrow -\pi < \frac{11\pi}{12} < \pi \rightarrow \text{Original}$$

Observación: Si hacemos que la frecuencia de muestreo sea mayor a la frecuencia máxima de la señal, logramos que se cumpla Nyquist con lo cual se estaría cumpliendo con los parámetros solicitados y sobre todo que la señal se encuentre bien discretizada.