Pregunta 1. Encuentre la expresión del espectro de Fourier (Forma exponencial y trigonométrica) para la señal $x(t) = |A \sin(2\pi F_o t)|^2$ con:

$$t \in \left[-\frac{1}{2F_o}, \frac{1}{2F_o} \right]$$

Solución

$$t \in \left[-\frac{1}{2F_o}, \frac{1}{2F_o} \right] \rightarrow t_o = -\frac{1}{2F_o}$$

$$x(t) = |A \sin(2\pi F_o t)|^2 \rightarrow \text{No existe parte compleja}$$

$$T = \frac{1}{2F_o} - \left(-\frac{1}{2F_o} \right) = \frac{2}{2F_o} = \frac{1}{F_o} = T_o$$

$$t \in \left[-\frac{T_o}{2}, \frac{T_o}{2} \right]$$

$$x(t) = A^2 \operatorname{sen}^2(2\pi F_o t)$$

$$= A^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\pi 2 F_o t) \right]$$

Forma Exponencial

$$x(t) = \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2} \cos(2\pi 2 F_o t)$$

$$= \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2} \cos(4\pi F_o t)$$

Por trigonométrica

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(n w_o t) + b_n \operatorname{Sen}(n w_o t)$$

$$C_n = \frac{a_n - j b_n}{2}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} |e^{jnw_o t}| \, dt = T$$

$$a_n = \frac{\langle x(t), \cos(n w_0 t) \rangle}{T/2 \, \| \cos(n w_0 t) \|^2}$$

$$\| \cos \|^2 = \int_{-T/2}^{T/2} |\cos(n w_0 t)| \, dt = \frac{T}{2}$$

$$x(t) = \sum_{n=-N}^{N} C_n e^{j n w_0 t}$$

$$x(t) = \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2} \cos(2 w_0 t) = a_0 + a_2 \cos(2 w_0 t)$$

$$C_0 = a_0 = \frac{A^2}{2} \; ; \; a_2 = -\frac{A^2}{2}$$

$$C_2 = -A^2$$

$$C_{-2} = A^2$$

Así

a_0 codifica el nivel DC de la señal, entonces:

$$a_0 = \frac{1}{t_f - t_i} \int_{t_i}^{t_f} x(t) \, dt$$

$$a_0 = \frac{1}{1/2F_0 - (-1/2F_0)} \int_{-1/2F_0}^{1/2F_0} \left(\frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2} \cos(2 w_0 t) \right) dt$$

$$\frac{1}{2F_0} + \frac{1}{2F_0} = \frac{1}{2/2F_0} \rightarrow F_0$$

$$a_0 = F_0 \cdot \frac{A^2}{2} \int_{-1/2F_0}^{1/2F_0} dt - \frac{A^2}{2} \int_{-1/2F_0}^{1/2F_0} \cos(2 w_0 t) \, dt$$

$$a_0 = F_0 \cdot \frac{A^2}{2} \Bigg|_{-1/2F_0}^{1/2F_0} - \frac{A^2}{2} \operatorname{sen}(2 w_0 t) \Bigg|_{-1/2F_0}^{1/2F_0}$$

$$a_0 = F_0 \cdot \frac{A^2}{2}\left[\frac{1}{2F_0} - \left(-\frac{1}{2F_0}\right)\right] - \frac{A^2}{2} Sen\left(2w_0 \cdot \frac{1}{2F_0} - 2w_0 \cdot -\frac{1}{2F_0}\right)$$

$$a_0 = F_0 \cdot \frac{A^2}{2}\left[\frac{1}{2F_0} + \frac{1}{2F_0}\right] - \frac{A^2}{2} sen\left(\frac{\cancel{2}w_0}{\cancel{2}F_0} + \frac{\cancel{2}w_0}{\cancel{2}F_0}\right)$$

$$a_0 = F_0\left[\frac{A^2}{2} \cdot \frac{1}{F_0}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right] - \frac{A^2}{2} \cdot \frac{1}{F_0} sen(w_0 + w_0)\right]$$

$$a_0 = \cancel{F_0} \cdot \frac{1}{\cancel{F_0}}\left[\frac{A^2}{2}\left[\cancel{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}^{\,1}\right] - \cancel{\frac{A^2}{2} sen(2w_0)}^{\,0}\right]$$

$$a_0 = 1\left[\frac{A^2}{2}\right] = \frac{A^2}{2}$$

Por otra parte:

$$b_n = \frac{2}{t_f - t_i}\int_{t_i}^{t_f} x(t)\, Sen(nw_0t)\, dt \qquad \pi 2F_0 = w_0$$

$$b_n = \frac{2}{1/2F_0 - (-1/2F_0)}\int_{-1/2F_0}^{1/2F_0}\left(\frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2} Cos(2\pi 2F_0t)\, Sen(nw_0t)\right)dt$$

$$\frac{1}{2F_0} + \frac{1}{2F_0} = \frac{2}{\cancel{2}/\cancel{2}F_0} \rightarrow 2F_0$$

$$b_n = 2F_0 \int_{-1/2F_0}^{1/2F_0} \frac{A^2}{2} sen(nw_0t) - \frac{A^2}{2} Cos(2w_0t)\, Sen(nw_0t)\, dt$$

$$b_n = 2F_0 \int_{-1/2F_0}^{1/2F_0} \frac{A^2}{2} sen(nw_0t) - \int \frac{A^2}{2} Cos(2w_0t)\, Sen(nw_0t)\, dt$$

Sabiendo que:

$$Sen(\theta)\, Cos(\alpha) = \frac{Sen(\theta + \alpha)}{2} + \frac{Sen(\theta - \alpha)}{2}$$

$$\theta = nw_0t$$

$\alpha = 2w_0t \rightarrow w_0 = \pi 2F_0 \rightarrow 2\pi 2F_0t = \alpha$

$$b_n = 2F_0 \cdot \frac{A^2}{2}\int_{-1/2F_0}^{1/2F_0} \overset{1}{sen(nw_0t)}\,dt - \frac{A^2}{2}\int_{1/2F_0}^{1/2F_0} \overset{2}{\frac{Sen(2w_0t + nw_0t)}{2}} + \overset{3}{\frac{Sen(2w_0t - nw_0t)}{2}}\,dt$$

Resolviendo 1

$$= \cancel{2}F_0 \cdot \frac{A^2}{\cancel{2}}\int_{-1/2F_0}^{1/2F_0} Sen(nw_0t)\,dt$$

$u = nw_0t)$

$du = nw_0\,dt$

$dt = \dfrac{du}{nw_0}$

$$= F_0 \cdot A^2 \int_{-1/2F_0}^{1/2F_0} \frac{sen(u)}{nw_0}\,du$$

$$= F_0 \cdot A^2 \cdot \frac{1}{nw_0}\int_{-1/2F_0}^{1/2F_0} sen(u)\,du$$

$$= F_0 \cdot A^2 \cdot \frac{1}{nw_0} \cdot -\cos(u)$$

$$= F_0 \cdot A^2 \cdot \frac{1}{nw_0} \cdot -\cos(nw_0t)$$

$$= F_0 \cdot A^2 \cdot -\frac{\cos(nw_0t)}{nw_0}\Bigg|_{-1/2F_0}^{1/2F_0}$$

$$= F_0 \cdot A^2 \cdot \left[\frac{-\cos(nw_0 \cdot 1/2F_0)}{nw_0} - \frac{-\cos(nw_0 \cdot (-1/2F_0))}{nw_0}\right]$$

$$= F_0 \cdot A^2 \cdot (0) = 0$$

Resolviendo 2

$$= 2F_0 \cdot -\frac{A^2}{2}\int_{-1/2F_0}^{1/2F_0} \frac{Sen\,(2w_0t + nw_0t)}{2}\,dt$$

$$= 2F_0 \cdot \left[-\frac{A^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\right]\int_{-1/2F_0}^{1/2F_0} Sen\,(2w_0t + nw_0t)\,dt$$

$$u = 2w_0t + nw_0t$$

$$du = 2w_0 + nw_0 dt$$

$$dt = \frac{du}{2w_0 + nw_0}$$

$$= 2F_0 \cdot \left[-\frac{A^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\right]\int_{-1/2F_0}^{1/2F_0} \frac{Sen\,(u)\,du}{2w_0 + nw_0}$$

$$= 2F_0 \cdot \left[-\frac{A^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2w_0 + nw_0}\right]\int_{-1/2F_0}^{1/2F_0} Sen\,(u)\,du$$

$$= 2F_0 \cdot \left[-\frac{A^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2w_0t + nw_0}\cdot(-Cos\,(u))\right]$$

$$= 2F_0 \cdot \left[-\frac{A^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2w_0t + nw_0}\cdot(-Cos\,(2w_0t + nw_0t)\right]$$

$$= 2F_0 \cdot \left[-\frac{A^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-Cos\,(2w_0t + nw_0t)}{2w_0t + nw_0}\right]\Bigg|_{-1/2F_0}^{1/2F_0}$$

$$= 2F_0 \cdot \left[-\frac{A^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-Cos\,(2w_0\cdot 1/2F_0 + nw_0\cdot 1/2F_0)}{2w_0 + nw_0} - \frac{-Cos\,(2w_0\cdot -1/2F_0 + nw_0\cdot -1/2F_0)}{2w_0 + nw_0}\right)\right]$$

$$= 2F_0 \cdot \left[-\frac{A^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(0)\right] = 0$$

Resolviendo 3

$$= 2F_0 \cdot \frac{1}{2}\int_{-1/2F_0}^{1/2F_0} Sen\,(2w_0t - nw_0t)\,dt$$

$$= 2F_0 \cdot \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2w_0t - nw_0}(-\cos(2w_0t + nw_0t)\right]$$

$$= \cancel{2}F_0 \cdot \frac{1}{\cancel{2}}\left[\frac{(-\cos(2w_0t + nw_0t))}{2w_0t - nw_0}\right]\Bigg|_{-1/2F_0}^{1/2F_0}$$

$$= F_0 \cdot \left[\left(\frac{-\cos(2w_0 \cdot 1/2F_0 + nw_0 \cdot 1/2F_0)}{2w_0 - nw_0} - \frac{-\cos(2w_0 \cdot -1/2F_0 + nw_0 \cdot -1/2F_0)}{2w_0 - nw_0}\right)\right]$$

$$= F_0 \cdot (0) = 0 \longrightarrow b_n = 0 \quad \forall n \in \{1, \dots N\}$$

Para $n \neq \frac{1}{2F_0}$ $b_n \neq 0$. No obstante, para $n = 2 = a_2$ debemos calcular el

límite y aproximar la indeterminación $0/0$.

Primero calculamos a_n con la siguiente fórmula:

$$a_n = \frac{2}{t_f - t_i}\int_{t_i}^{t_f} x(t)\cos(nw_0t)\,dt$$

$$a_n = \frac{2}{1/2F_0 - (-1/2F_0)}\int_{-1/2F_0}^{1/2F_0} \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2}\cos(2\pi 2F_0 t)\cos(nw_0t)\,dt$$

$$a_n = 2F_0 \int_{-1/2F_0}^{1/2F_0} \frac{A^2}{2}\cos(nw_0t)\,dt - \int_{-1/2F_0}^{1/2F_0} \frac{A^2}{2}\cos(2w_0t)\cos(nw_0t)\,dt$$

Sabiendo que:

$$\cos(\theta)\cos(\alpha) = \frac{1}{2}(\cos(\theta - \alpha) + \cos(\theta + \alpha))$$

$\theta = 2w_0t$

$\alpha = nw_0t$

$$a_n = 2F_0 \cdot \frac{A^2}{2}\underbrace{\int_{-1/2F_0}^{1/2F_0}\cos(nw_0t)\,dt}_{1} - \frac{A^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\underbrace{\int_{-1/2F_0}^{1/2F_0}\cos(2w_0t - nw_0t)\,dt}_{2} + \underbrace{\int_{-1/2F_0}^{1/2F_0}\cos(2w_0t - nw_0t)\,dt}_{3}$$

Resolviendo 1

$$= 2F_o \cdot \frac{A^2}{2} \int_{-1/2F_o}^{1/2F_o} Cos(nw_ot)\,dt$$

$$u = nw_ot$$

$$du = nw_o\,dt$$

$$dt = \frac{du}{nw_o}$$

$$= 2F_o \cdot \frac{A^2}{2} \int_{-1/2F_o}^{1/2F_o} \frac{Cos(u)\,du}{nw_o}$$

$$= 2F_o \cdot \frac{A^2}{2} \cdot \frac{1}{nw_o} \cdot Sen(nw_ot)\Big|_{-1/2F_o}^{1/2F_o}$$

$$= 2F_o \cdot \frac{A^2}{2}\left(\frac{Sen(nw_o \cdot 1/2F_o)}{nw_o} - \frac{Sen(nw_o \cdot -1/2F_o)}{nw_o}\right)$$

Sabiendo que: $w_o = 2\pi F_o$

$$= 2F_o \cdot \frac{A^2}{2}\left(\frac{Sen(n\pi \cancel{2F_o} \cdot 1/\cancel{2F_o})}{n\pi 2F_o} - \frac{Sen(n\pi \cancel{2F_o} \cdot -1/\cancel{2F_o})}{n\pi 2F_o}\right)$$

$$= 2F_o \cdot \frac{A^2}{2} \cdot \frac{Sen(n\pi) - Sen(n\pi)}{n\pi 2F_o}$$

$$= 2F_o \cdot \frac{A^2}{2} \cdot \frac{\cancel{2}\,Sen(n\pi)}{n\pi \cancel{2}F_o} \rightarrow 2F_o \cdot \frac{A^2}{2} \cdot \frac{Sen(n\pi)}{n\pi F_o}$$

$$= \cancel{2}\cancel{F_o} \cdot \frac{A^2}{\cancel{2}} \cdot \frac{Sen(n\pi)}{n\pi \cancel{F_o}} \rightarrow \frac{A^2 \cdot Sen(n\pi)}{n\pi}$$

Resolviendo 2

$$= 2F_o \cdot \frac{A^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_{-1/2F_o}^{1/2F_o} Cos(2w_ot - nw_ot)\,dt$$

$$u = 2w_o t - nw_ot$$

$du = 2w_0 - nw_0 dt$

$dt = \dfrac{du}{2w_0 - nw_0}$

$= 2F_0 \cdot \dfrac{A^2}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{-1/2F_0}^{1/2F_0} \dfrac{\cos(u)\, du}{2w_0 - nw_0}$

$= 2F_0 \cdot \dfrac{A^2}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2w_0 - nw_0} \displaystyle\int_{-1/2F_0}^{1/2F_0} \cos(u)\, du$

$= 2F_0 \cdot \dfrac{A^2}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2w_0 - nw_0} \cdot \operatorname{Sen}(2w_0 t - nw_0 t) \Big|_{-1/2F_0}^{1/2F_0}$

$= 2F_0 \cdot \dfrac{A^2}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2w_0 - nw_0} \cdot \left(\operatorname{Sen}(2\pi \cancel{2F_0} \cdot 1/\cancel{2F_0} - n\pi 2F_0 \cdot 1/2F_0) - \operatorname{Sen}(2\pi \cancel{2F_0} \cdot (-1/\cancel{2F_0}) - n\pi \cancel{2F_0}\right.$

$\left.(-1/\cancel{2F_0})\right)$

$= 2F_0 \cdot \dfrac{A^2}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2w_0 - nw_0} \cdot (\operatorname{Sen}(2\pi(1) - n\pi(1)) - \operatorname{Sen}(2\pi - n\pi(-1))$

$= 2F_0 \cdot \dfrac{A^2}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2w_0 - nw_0} \cdot \operatorname{Sen}(\cancel{2\pi} - n\pi - \cancel{2\pi} - n\pi)$

$= 2F_0 \cdot \dfrac{A^2}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2\pi 2F_0 - n\pi 2F_0} \cdot \operatorname{Sen}(-2n\pi)$

$= \cancel{2F_0} \cdot \dfrac{A^2}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\cancel{2F_0}(2\pi - n\pi)} \cdot \operatorname{Sen}(-2n\pi)$

$= \dfrac{-A^2 \operatorname{Sen}(2n\pi)}{8\pi - 4n\pi}$

Resolviendo 3

$= 2F_0 \cdot \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{-1/2F_0}^{1/2F_0} \cos(2w_0 t - nw_0 t)\, dt$

$$u = 2w_0t - nw_0t$$

$$du = 2w_0 - nw_0$$

$$dt = \frac{du}{2w_0 - nw_0}$$

$$= 2F_0 \cdot \frac{1}{2}\int_{-1/2F_0}^{1/2F_0} \frac{\cos(u)\,du}{2w_0 - nw_0}$$

$$= 2F_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2w_0 - nw_0}\int_{-1/2F_0}^{1/2F_0} \cos(u)\,du$$

$$= 2F_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2w_0 - nw_0} \cdot \operatorname{Sen}(2w_0t - nw_0t)\Big|_{-1/2F_0}^{1/2F_0}$$

$$= 2F_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2w_0 - nw_0} \cdot \left(\operatorname{Sen}(2\pi \cancel{2F_0} \cdot 1/\cancel{2F_0} - n\pi \cancel{2F_0} \cdot 1/\cancel{2F_0}) - \operatorname{Sen}(2\pi 2F_0 \cdot (-1/2F_0) - n\pi \cancel{2F_0} \cdot (-1/\cancel{2F_0})\right)$$

$$= 2F_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2w_0 - nw_0} \cdot \operatorname{Sen}(\cancel{2\pi} - n\pi - \cancel{2\pi} - n\pi)$$

$$= 2F_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi 2F_0 - n\pi 2F_0} \cdot \operatorname{Sen}(-2n\pi)$$

$$= \cancel{2F_0} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2F_0}(2\pi - n\pi)} \cdot \operatorname{Sen}(-2n\pi)$$

$$= \frac{-\operatorname{Sen}(2n\pi)}{4\pi - 2n\pi}$$

Así entonces:

$$a_n = \frac{A^2 \cdot \operatorname{Sen}(n\pi)}{n\pi} - \frac{A^2 \cdot \operatorname{Sen}(2n\pi)}{8\pi - 4n\pi} - \frac{\operatorname{Sen}(2n\pi)}{4\pi - 2n\pi}$$

Para $n \neq \frac{1}{2F_0}$ $b_n = 0$. No obstante para $n = 2 = a_2$ debemos calcular el límite y aproximar la indeterminación $0/0$:

$$a_2 = \lim_{n \to 2} \frac{d/dn\left(-A^2 \cdot Sen(2n\pi)\right)}{d/dn\left(8\pi - 4n\pi\right)}$$

$$a_2 = \lim_{n \to 2} \frac{-A^2 \cdot 2\pi\, Cos(2n\pi)}{4\pi}$$

$$a_2 = \lim_{n \to 2} -\frac{A^2}{2}\, Cos\underbrace{(2 \cdot 2\pi)}_{\to 1}$$

$$a_2 = \lim_{n \to 2} -\frac{A^2}{2} \cdot 1 \rightarrow -\frac{A^2}{2}$$

— // — // — // — // — // — // — // — // — // — // — // — // —

$$a_{-2} = \lim_{n \to -2} \frac{d/dn\left(-A^2 \cdot Sen(2n\pi)\right)}{d/dn\left(8\pi - 4n\pi\right)}$$

$$a_{-2} = \lim_{n \to -2} -\frac{A^2}{2}\, Cos\underbrace{(2 \cdot (-2)\pi)}_{\to -1}$$

$$a_{-2} = -\frac{A^2}{2} \cdot (-1) \rightarrow \frac{A^2}{2}$$

— // — // — // — // — // — // — // — // — // — // — // — // —

Por consiguiente:

$$a_n = \begin{cases} 0 & \forall n \setminus \{-2, 2\} \\ -\dfrac{A^2}{2} & n = 2 \\ \dfrac{A^2}{2} & n = -2 \end{cases}$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n\, Cos(n w_0 t) + \underbrace{b_n\, Sen(n w_0 t)}_{\to 0} = \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2}\, Cos(2 w_0 t)$$

Para el caso de la serie exponencial compleja

$$C_0 = a_0 = \frac{A^2}{2}$$

y

$$C_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$$

Entonces

$$C_n = \frac{\frac{A^2 \cdot Sen(n\pi)}{n\pi} - \frac{A^2 Sen(2n\pi)}{8\pi - 4n\pi} - \frac{Sen(2n\pi)}{4\pi - 2n\pi} - j0}{2}$$

$$C_n = \begin{cases} j0 & n = 1/2F_0 \\ A^2 & n = -2 \\ -A^2 & n = 2 \\ 0 & \forall n \setminus \{-2, 0, 2\} \end{cases}$$

$$x(t) = \sum_{n=-N}^{N} C_n e^{jnt} \qquad w_0 = \pi 2F_0$$

$$x(t) = C_{1/2F_0} e^{j2w_0t} + C_{-2} e^{-2} + C_{-1/2F_0} e^{-j2w_0t}$$

$$x(t) = 0_j \; Cos(2w_0t) - j \; Sen(2w_0t) + \frac{A^2}{2} - 0_j \,(Cos(2w_0t + j \; Sen(2w_0t))$$

$$x(t) = \cancel{0_j \; Sen(2w_0t)} - \frac{A^2}{4} Cos(2w_0t) + \frac{A^2}{2} - \cancel{0_j \; Sen(2w_0t)}$$

$$-\frac{A^2}{4} Cos(2w_0t) = \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2} Cos(2w_0t)$$

Como $w_0 = \pi 2F_0$, tenemos que de forma exponencial

$$x(t) = \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2} \cos(2\pi \, 2F_0 t)$$

$$= \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2} \cos(4\pi F_0 t)$$

Pregunta 3.

$$y(\omega) = F\{y(t)\}$$

$$= F\left\{1 + \frac{m(t)}{Ac} c(t)\right\}$$

$$= \left\{c(t) + \frac{m(t)}{Ac} c(t)\right\}$$

$$Y(\omega) = F\{c(t)\} + \frac{1}{Ac} F\{m(t)\, c(t)\}$$

$$Y(\omega) = c(\omega) + \frac{1}{Ac} F\{m(t)\, c(t)\}$$

$$c(\omega) = F\{c(t)\} = F\{Ac\ Sen\ (2\pi F_c t)\}$$

$$c(\omega) = A_c F\left\{\frac{e^{j2\pi F_c t} - e^{-j2\pi F_c t}}{2j}\right\}$$

$$c(\omega) = \frac{Ac}{2j}\left[F\{e^{j2\pi F_c t}\} - F\{e^{-j2\pi F_c t}\}\right]$$

$$F\left[F^{-1}\{x(\omega \pm \omega_o)\}\right] = F\{x(t)\, e^{\mp j\omega o t}\}$$

$$F\{x(t \pm t_o)\} = X(\omega)\, e^{\pm j\omega o t}$$

$$F\{x(t)\, e^{\mp j\omega o t}\} = X(\omega \pm \omega_o)$$

$$F\{1 \cdot e^{\pm j\omega o t}\}$$

$$F\{\delta(t)\} = 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = e^{0} = 1$$

$$c(\omega) = \frac{Ac}{2j}\left[2\pi\, \delta(\omega - 2\pi F_c) - 2\pi\, \delta(\omega + 2\pi F_c)\right]$$

$$c(\omega) = \frac{Ac}{2j}\pi\left[\delta(\omega - 2\pi F_c) - \delta(\omega + 2\pi F_c)\right]$$

$$F_c >> F_{max}\ m(t)$$

$$m(t)\, c(t) = m(t)\left[Ac\ Sen\ (2\pi F_c(t))\right]$$

$$m(t)\, c(t) = m(t)\, Ac\left[\frac{e^{j2\pi F_c t} - e^{-j2\pi F_c t}}{2j}\right]$$

$$F\left\{\frac{A_c}{2j} m(t)\, e^{j2\pi F_c t}\right\} - F\left\{\frac{A_c}{2j} m(t)\, e^{-j2\pi F_c t}\right\}$$

$$\frac{A_c}{2j}\left[M(\omega - 2\pi F_c) - M(\omega + 2\pi F_c)\right]$$

$$Y(\omega) = \frac{A_c}{2j}\pi\left[\delta(\omega - 2\pi F_c) - \delta(\omega + 2\pi F_c)\right] + \frac{A_c}{2j}\left[M(\omega - 2\pi F_c) - M(\omega + 2\pi F_c)\right]$$

$$y(\omega) = \frac{A_c}{2\cancel{j}}\pi \cdot \cancel{j}\left[\delta(\omega - 2\pi F_c) - \delta(\omega + 2\pi F_c)\right] + \frac{A_c}{2\cancel{j}} \cdot \cancel{j}\left[M(\omega - 2\pi F_c) - M(\omega + 2\pi F_c)\right]$$

$$y(\omega) = \frac{A_c}{2}\pi\left[\delta(\omega - 2\pi F_c) - \delta(\omega + 2\pi F_c)\right] + \frac{A_c}{2}\left[M(\omega - 2\pi F_c) - M(\omega + 2\pi F_c)\right]$$

Pregunta 4

Distorsión Total de Armónicos (THD): La Distorsión Total de Armónicos es una medida que cuantifica el nivel de distorsión armónica presente en una señal eléctrica, comparando la potencia de las frecuencias armónicas con la potencia de la frecuencia fundamental. En un circuito ideal, la corriente o el voltaje es una onda sinusoidal pura, pero en la práctica, debido a la presencia de cargas no lineales (como rectificadores, dispositivos electrónicos, etc.), la señal puede contener armónicos, que son múltiplos de la frecuencia fundamental.

El THD se calcula como:

$$THD = \frac{\sqrt{V_2^2 + V_3^2 + \ldots + V_n^2}}{V_1} \times 100\%$$

donde:

- V_1 es el valor RMS (raíz cuadrada media) de la componente fundamental de la señal.
- $V_2, V_3, \ldots, V_n$ son los valores RMS de las componentes armónicas (de segundo orden, tercer orden, etc.).

Un THD bajo indica una señal más cercana a la onda sinusoidal pura, mientras que un THD alto indica mayor distorsión.

Factor de potencia (FP): El factor de potencia es una medida de la eficiencia con la que la potencia eléctrica se convierte en trabajo útil. Se define como la relación entre la potencia activa (potencia real utilizada para realizar un trabajo) y la potencia aparente (la combinación de la potencia activa y la potencia reactiva).

Matemáticamente:

$$FP = \frac{P_{activa}}{P_{aparente}} = \cos(\phi)$$

donde:

- P_{activa} es la potencia activa, medida en vatios (W).
- $P_{aparente}$ es la potencia aparente, medida en voltio-amperios (VA).
- ϕ es el ángulo de desfase entre la corriente y el voltaje.

Un factor de potencia de 1 (o cercano a 1) indica que la mayoría de la potencia está siendo utilizada para realizar un trabajo útil, mientras que un factor de potencia bajo sugiere que hay una mayor cantidad de potencia reactiva, que no realiza trabajo útil pero que circula en el sistema.

¿Como puede calcularse el THD desde la FFT?

El cálculo de la Distorsión Total de Armónicos (THD) a partir de la transformada rápida de Fourier (FFT) es un proceso común en el análisis de señales eléctricas. La FFT descompone una señal en sus componentes de frecuencia, permitiendo identificar tanto la frecuencia fundamental como los armónicos presentes en la señal.

Pasos para calcular el THD desde la FFT

1. Obtener la señal en el dominio del tiempo:
   * Se comienza con la señal de corriente o voltaje que se desea analizar. Está señal debería ser una serie de muestras tomadas a intervalos regulares.

2. Aplicar la FFT a la señal:
   * Calcular la FFT de la señal. La FFT dará un espectro de frecuencias, donde cada componente indica la amplitud y la fase de una frecuencia particular en la señal.
   * La salida de la FFT es un vector de números complejos que representan las amplitudes y fases de las diferentes frecuencias componentes de la señal.

3. Identificar la frecuencia fundamental y las componentes armónicas:
   * La primera componente no nula en el espectro FFT (generalmente después de la componente de DC) corresponde a la frecuencia fundamental f_1.
   * Las siguientes componentes corresponderán a los armónicos $f_2 = 2f_1$, $f_3 = 3f_1$, etc.

4. Calcular los valores RMS de la fundamental y los ármonicos:
   * El valor de la magnitud de cada componente FFT (dividido por la longitud de la FFT) da la amplitud de la señal en esa frecuencia.
   * El valor RMS de la componente fundamental (V_1) es la magnitud de la FFT en la frecuencia fundamental.
   * Los valores RMS de los armónicos ($V_2, V_3, \ldots, V_n$) son las magnitudes de la FFT en las frecuencias armónicas correspondientes.

5. Calcular el THD:
   * Usando la fórmula del THD:

$$THD = \frac{\sqrt{V_2^2 + V_3^2 + \ldots V_n^2}}{V_1} \times 100\%$$

   * V_1 es el valor RMS de la frecuencia fundamental.
   * $V_2, V_3, \ldots, V_n$ son los valores RMS de las componentes armónicas.

¿Como puede calcularse la distorsión del factor de potencia con base al THD?

La distorsión del factor de potencia, conocida como Factor de Potencia Distorsionado (DFP), es un concepto que refleja cómo las distorsiones armónicas afectan el factor de potencia de un sistema. Para calcular el factor de potencia total en presencia de distorsiones armónicas, se utiliza el THD junto con el factor de potencia clásico basado en el coseno del ángulo de desfase cos (ϕ).

Relación entre el THD y el Factor de Potencia

El factor de potencia total (FP) en un sistema de distorsiones armónicas se calcula como:

$$FP = \cos(\phi) \times \frac{1}{\sqrt{1 + THD^2}}$$

donde:

* $\cos(\phi)$ es el factor de potencia debido al ángulo de desfase entre la corriente y el voltaje en la frecuencia fundamental (también conocido como factor de potencia de desplazamiento).

* $\frac{1}{\sqrt{1 + THD^2}}$ es el factor de potencia distorsionado (DFP), que tiene en cuenta las distorsiones armónicas.

Cálculo paso a paso:

1. Calcular el factor de potencia clásico ($\cos(\phi)$):
    * Este factor depende del ángulo de desfase entre la corriente y el voltaje a la frecuencia fundamental. Puede ser determinado midiendo el desfase en la señal o con un medidor de potencia.

2. Calcular el THD:
    * Se procede a calcular el THD a partir de la FFT. Este valor indica la relación de la suma de las potencias de los armónicos respecto a la potencia de la componente fundamental.

3. Calcular el factor de potencia total:
    * Se utiliza la fórmula mencionada para combinar $\cos(\phi)$ con el DFP derivado del THD.