Guía de Estudio
Curso: Estructuras discretas
Tema: Sistemas de Numeración

Guina Guadalupe Sotomayor Alzamora
Ingeniería de Sistemas, Universidad Nacional del Altiplano de Puno, Perú
gsotomayor@unap.edu.pe

26 de agosto de 2024

Objetivos de aprendizaje

Al terminar este capítulo, los alumnos deben ser capaces de:

- Adquirir principios de diferentes sistemas de numeración en procesos de conversión.
- Realizar operaciones aritméticas básicas en diferentes sistemas de numeración.
- Representar números por la computadora, considerando los rangos aceptados.
- Sumar cantidades en complemento a 2 para comprender cómo la computadora realiza operaciones aritméticas.

1. Introducción

Los sistemas de numeración son un conjunto de reglas y símbolos que permiten la representación de un número. Los primeros sistemas de numeración fueron los aditivos, en los cuales se utilizaban figuras para representar cantidades, un ejemplo es el sistema de numeración romano, en el cual los símbolos I, V, X, L, C, D y M representan cantidades y una línea sobre el símbolo implica una multiplicación del número por mil.

Luego surgieron los sistemas posicionales, en los que se establece un símbolo para el número cero, entre estos sistemas se tiene al de los babilónicos y mayas. Actualmente los sistemas para representar cantidades son posicionales, siendo el más común el decimal, otros importantes son el binario, octal y hexadecimal. Estos sistemas poseen una base numérica que corresponde al valor máximo de dígitos que utiliza el número para realizar su representación, la base es un número entero mayor que uno.

2. El Sistema decimal

Utiliza los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y su base es 10, se caracterizan por no usar subíndice, todo número que no lo tenga es decimal, a menos que se indique lo contrario. En este sistema los dígitos tienen un valor posicional, por ejemplo, el número 746,58 se compone de una parte entera con 7 centenas, con el valor posicional 100; 4 decenas, con el valor posicional 10 y 6 unidades con el valor posicional 1; y en la parte fraccionaria 5 décimas con el valor posicional 0,1 y 8 centésimas con el valor posicional 0,01, como se muestra en la Tabla 1.

Dígito	7	4	6	5	8
Valor posicional	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$
Valor exponencial	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}

Tabla 1: Valor de los dígitos de una cifra según su posición

La forma posicional para representar el número dado es:

$$746{,}58 = 7 \times 100 + 4 \times 10 + 6 \times 1 + 5 \times \frac{1}{10} + 8 \times \frac{1}{100}$$

Así mismo, la forma exponencial para representar el número dado es:

$$746{,}58 = 7 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 6 \times 10^0 + 5 \times 10^{-1} + 8 \times 10^{-2}$$

La representación exponencial es importante, pues por medio de esta se puede convertir una cantidad representada en cualquier sistema de numeración al sistema decimal.

3. El Sistema binario

Este sistema posicional utiliza los dígitos 0 y 1, la base es 2 y se identifican con el subíndice 2. Por ejemplo, el número 1011_2 es un número binario, pues contiene sólo los dígitos 0 y 1, siendo uno de los sistemas más importantes en cuanto a su aplicación en sistemas digitales y programación.

3.1. Conversión de número binario a decimal

Para convertir un número binario a decimal se expresa el número dado de forma exponencial, considerando su base, y se realizan las operaciones correspondientes. Por ejemplo, para convertir el número binario $1011,01_2$ a decimal se considera la base $b = 2$ como sigue:

$$\begin{aligned} 1011,01_2 &= 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} \\ &= 8 + 0 + 2 + 1 + 0 + 0,25 = 11,25 \end{aligned}$$

Vale recordar que todo número elevado a cero es uno como en $2^0 = 1$, y que toda cantidad multiplicada por cero es cero como en $0 \times 2 = 0$.

Ejercicios

Convierta a base decimal los siguientes números binarios:

1. $11,01_2$
2. $101,1_2$
3. $11011,10_2$
4. $101011,011_2$
5. $1001001,11_2$

3.2. Conversión de número decimal a binario

Para convertir un número de decimal a binario se consideran dos partes, la parte entera y la parte fraccionaria.

- Parte entera. Se utilizan las divisiones sucesivas entre la base (2 en este caso) y los residuos resultantes se toman en orden contrario a cómo se encontraron. Las divisiones se realizan hasta que el cociente sea cero.
- Parte fraccionaria. Se utilizan las multiplicaciones sucesivas por la base (2 en este caso), la parte entera del resultado conforma la parte fraccionaria en el orden en que fueron encontrados. Se recomienda realizar el proceso de la multiplicación el doble de veces del número de decimales que se tiene, sin embargo, para ilustrar el procedimiento con fines académicos, es suficiente con cuatro dígitos después del punto que separa la parte entera de la fraccionaria.

Por ejemplo, para convertir el número decimal 85,48 a binario se tiene:

- Parte entera 85 a $b = 2$:

$$
\begin{array}{rcrll}
85/2 & = & 42 & \text{residuo} & 1 \\
42/2 & = & 21 & \text{residuo} & 0 \\
21/2 & = & 10 & \text{residuo} & 1 \\
10/2 & = & 5 & \text{residuo} & 0 \\
5/2 & = & 2 & \text{residuo} & 1 \\
2/2 & = & 1 & \text{residuo} & 0 \\
1/2 & = & 0 & \text{residuo} & 1
\end{array}
$$

  Los restos se toman en orden inverso a cómo fueron encontrados, siendo primero el último residuo, en este caso el número en base 2 es: 1010101_2.

- Parte fraccionaria 0,48 a $b = 2$:

$$
\begin{array}{lcccl}
0{,}48 & \times & 2 & = & 0{,}96 \\
0{,}96 & \times & 2 & = & 1{,}92 \\
0{,}92 & \times & 2 & = & 1{,}84 \\
0{,}84 & \times & 2 & = & 1{,}68
\end{array}
$$

  Para la parte fraccionaria se toma la parte entera de cada resultado, la cual en base 2 es: $0,0111_2$.

Por lo tanto $85,48$ en base decimal es equivalente a $1010101,0111_2$ en base binaria.

Ejercicios

Convierta a base binaria los siguientes números decimales:

1. 255
2. 1984
3. 19,93
4. 47,518
5. 345,07

4. El Sistema Octal

Este sistema posicional utiliza los números del 0 al 7 para representar las distintas cantidades, y su base es 8, las reglas de los sistemas decimal y binario también se aplican al sistema octal. Siguiendo los pasos:

- Convertir el número de la base dada, en este caso octal $b = 8$ a base decimal usando el método exponencial.
- Convertir el nuevo número decimal a la base requerida, en este caso binaria $b = 2$ usando las divisiones sucesivas para la parte entera y las multiplicaciones sucesivas para la parte fraccionaria.

Por ejemplo, para convertir el número $47,26_8$ a binario se tiene:

- De base 8 a base 10

$$47,26_8 = 4 \times 8^1 + 7 \times 8^0 + 2 \times 8^{-1} + 6 \times 8^{-2} = 39,34375$$

- De base 10 a base 2
  - Parte entera

$$\begin{array}{rcccc} 39/2 & = & 19 & \text{residuo} & 1 \\ 19/2 & = & 9 & \text{residuo} & 1 \\ 9/2 & = & 4 & \text{residuo} & 1 \\ 4/2 & = & 2 & \text{residuo} & 0 \\ 2/2 & = & 1 & \text{residuo} & 0 \\ 1/2 & = & 0 & \text{residuo} & 1 \end{array}$$

  - Parte fraccionaria

$$\begin{array}{rcccl} 0{,}34375 & \times & 2 & = & 0{,}6875 \\ 0{,}6875 & \times & 2 & = & 1{,}375 \\ 0{,}375 & \times & 2 & = & 0{,}75 \\ 0{,}75 & \times & 2 & = & 1{,}5 \\ 0{,}5 & \times & 2 & = & 1{,}0 \\ 0{,}0 & \times & 2 & = & 0{,}0 \end{array}$$

Por lo tanto $47,26_8$ es equivalente a $100111,010110_2$.

Sin embargo, la conversión de octal a binario y de binario a octal es relativamente fácil si se utiliza la Tabla de Equivalencias (Tabla 2), que aplica 3 dígitos en binario para cada número en octal, recordando que todos los números deberán usar la misma cantidad de bits. Para comprobar la veracidad de la tabla basta con dividir de manera sucesiva los números octales por la base del sistema binario. Por ejemplo, para convertir el número $47,26_8$ a binario se puede usar la Tabla 2 directamente, obteniendo:

$$\begin{array}{ccccc} 4 & 7 & , & 2 & 6_8 \\ 100 & 111 & , & 010 & 110_2 \end{array}$$

Así mismo, se puede convertir de base binaria a base octal usando la Tabla 2, por ejemplo, para convertir el número $10110111011001010,00101111_2$ a base $b = 8$, se separan los bits de la cantidad binaria en bloques a cada tres números, partiendo del punto decimal hacia la izquierda para la parte entera, y del punto decimal a la derecha en la parte fraccionaria. Si fuera necesario, los bloques deben ser completados, para ello se agregan ceros en los extremos, como se muestra a continuación:

Octal	Binario
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Tabla 2: Valor de los dígitos de una cifra según su posición

$$\begin{array}{cccccccccc} 010 & 110 & 111 & 011 & 001 & 010 & , & 001 & 011 & 100_2 \\ 2 & 6 & 7 & 3 & 1 & 2 & , & 1 & 3 & 4_8 \end{array}$$

Para verificar este resultado usando el método convencional, primero se convierte de binario a decimal y de decimal a octal como sigue:

- De base 2 a base 10

$$\begin{aligned} 10110111011001010, 0010111_2 &= 1\times 2^{16}+1\times 2^{14}+1\times 2^{13}+1\times 2^{11}+1\times 2^{10}+1\times 2^{9}+1\times 2^{7}+1\times 2^{6}+1\times 2^{3}+1\times 2^{1}+1\times 2^{-3}+1\times 2^{-5}+1\times 2^{-6}+1\times 2^{-7} \\ &= 65536 + 16384 + 8192 + 2048 + 1024 + 512 + 128 + 64 + 8 + 2 + 0.125 + 0.03125 + 0.015625 + 0.0078125 \\ &= 93898,\ 1797 \end{aligned}$$

- De base 10 a base 8
  - Parte entera

$$\begin{array}{rcrll} 93898/8 & = & 11737 & \text{residuo} & 2 \\ 11737/8 & = & 1467 & \text{residuo} & 1 \\ 1467/8 & = & 183 & \text{residuo} & 3 \\ 183/8 & = & 22 & \text{residuo} & 7 \\ 22/8 & = & 2 & \text{residuo} & 6 \\ 2/8 & = & 0 & \text{residuo} & 2 \end{array}$$

  - Parte fraccionaria

$$\begin{array}{lccll} 0{,}1797 & \times & 8 & = & 1{,}4376 \\ 0{,}4376 & \times & 8 & = & 3{,}5008 \\ 0{,}5008 & \times & 8 & = & 4{,}0064 \\ 0{,}0064 & \times & 8 & = & 0{,}0512 \end{array}$$

Por lo tanto $10110111011001010, 0010111_2$ es equivalente a $267312, 134_8$, este resultado es igual al encontrado con la Tabla de Equivalencia (Tabla 2).

Hexadecimal	Binario
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

Tabla 3: Valor de los dígitos de una cifra según su posición

Ejercicios

Convierta los siguientes números a la base requerida:

1. 29,9 a base octal
2. 523,79 a base octal
3. 791,53 a base octal y binaria
4. $456,23_8$ a base binaria
5. $11010,11001_2$ a base octal

5. El Sistema Hexadecimal

Este sistema posicional utiliza los diez números del sistema decimal (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) y las primeras seis letras del alfabeto, representado con letras mayúsculas (A, B, C, D, E, F) para representar a los dígitos mayores a 10, siendo que A=10, B=11, C=12, D=13, E=14 y F=15, con base $b = 16$. La Tabla 3 muestra la conversión de hexadecimal a binario, para cada uno de los caracteres, donde el símbolo mayor ocupa cuatro bits, por lo tanto todos los símbolos se representan con cuatro bits.

Para la conversión del número $2A8D,F5_{16}$ a octal usando la Tabla 3 se pasa la cantidad a sistema binario, poniendo cada 4 bits para cada caracter correspondiente, y luego se pasa de binario a octal, agrupando la información en bloques de 3 bits. Vale indicar que se deben agregar los ceros necesarios en los extremos.

$$\begin{array}{cccccccc} 2 & A & 8 & D & , & F & 5_{16} \\ 0010 & 1010 & 1000 & 1101 & , & 1111 & 0101_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 010 & 101 & 010 & 001 & 101 & , & 111 & 101 & 010_2 \\ 2 & 5 & 2 & 1 & 5 & , & 7 & 5 & 2_8 \end{array}$$

Por lo tanto el número 2A8D,F5_{16} es equivalente al número $25215,752_8$.

Ejercicios

Convierta los siguientes números a la base requerida:

1. B3,C_{16} a base decimal
2. AB,F_{16} a base decimal
3. 1D,F_{16} a base binaria
4. AAA,A_{16} a base octal
5. $2137,5_8$ a base hexadecimal

6. Generalización de conversiones

Las cantidades de cualquier sistema numérico pueden ser convertidas a otro sistema, así, un número X en base b se puede representar en notación exponencial por X_b para convertirla a base 10 de la forma

$$X_b = d_n \times b^n + \cdots + d_1 \times b^1 + d_0 \times b^0 + d_{-1} \times b^{-1} + \cdots + d_{-k} \times b^{-k}$$

Así mismo, para convertir un número Y de un sistema decimal a otra base, se puede representar por su parte entera YE y su parte fraccionaria YF como $Y = YE + YF$. Para ello, se utilizan las divisiones sucesivas del cociente por la base b, comenzando por YE hasta obtener cero como cociente, la sucesión de los residuos representan el número entero en base b, recordando tomar el orden desde el último residuo hasta el primero. Así mismo, para encontrar la parte fraccionaria se realizan multiplicaciones sucesivas por la base b comenzando en YF, hasta obtener una parte fraccionaria de cero o repetida, la sucesión de las partes enteras es la representación de YF en base b. Por ejemplo, se puede convertir $158,3_9$ a base 5 de la siguiente forma:

- De base 9 a base 10

$$158,3_9 = 1 \times 9^2 + 5 \times 9^1 + 8 \times 9^0 + 3 \times 9^{-1} = 81 + 45 + 8 + 0{,}33 = 134,33$$

- De base 10 a base 5
  - Parte entera

$$\begin{array}{rcccc} 134/5 & = & 26 & \text{residuo} & 4 \\ 26/5 & = & 5 & \text{residuo} & 1 \\ 5/5 & = & 1 & \text{residuo} & 0 \\ 1/5 & = & 0 & \text{residuo} & 1 \end{array}$$

  - Parte fraccionaria

$$\begin{array}{rcccc} 0{,}33 & \times & 5 & = & 1{,}65 \\ 0{,}65 & \times & 5 & = & 3{,}25 \\ 0{,}25 & \times & 5 & = & 1{,}25 \\ 0{,}25 & \times & 5 & = & 1{,}25 \end{array}$$

- Por lo tanto $158,3_9$ es equivalente a $1014,1311_5$.

Ejercicios

Convierta los siguientes números a la base requerida:

1. $B3{,}C_{15}$ a base 10
2. $1234{,}5_7$ a base 2
3. $1D{,}F_{16}$ a base 5
4. 568_9 a base 4
5. $2A{,}B_{12}$ a base 7

7. Operaciones aritméticas

Para realizar operaciones básicas como suma, resta, multiplicación y división, los números deben tener la misma base, siguiendo las mismas reglas del sistema decimal, cuidando que los números resultantes durante el proceso correspondan a la base con la cual se está trabajando. Si los números estuvieran en bases diferentes, se debe hacer la conversión correspondiente, según sea el caso.

Por ejemplo, si se requiere la suma de dos números X_5 y Y_7, cuya respuesta deba ser Z_{13}, se puede convertir X_5 y Y_7 a base 10, realizar la suma $Z = X + Y$ y finalmente convertir Z a base 13. Vale indicar que otras estrategias pueden ser adoptadas, desde que la respuesta esté en la base solicitada.

7.1. Suma

Para sumar dos números, recuerde llenar los espacios vacíos de los extremos con ceros, por ejemplo, para sumar los números 159,5 + 32,67 tenemos:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 5 & 9 & , & 5 & 0 & + \\ 0 & 3 & 2 & , & 6 & 7 & \\ \hline 1 & 9 & 2 & , & 1 & 7 & \end{array}$$

Explicación por columna:

$0 + 7$	$=$	7	El 7 es válido en base decimal.
$5 + 6$	$=$	11	El 11 no es válido en base decimal, por lo que se debe dividir el número entre la base, colocar el resto debajo de la línea y sumar el cociente a los números de la siguiente columna de la izquierda.
$1 + 9 + 2$	$=$	12	El 12 no es válido en base decimal, se divide entre la base y se procede como se hizo anteriormente.
$1 + 5 + 3$	$=$	9	El 9 es válido en base decimal.
$1 + 0$	$=$	1	El 1 es válido en base decimal.

Por lo tanto, si el resultado de la suma es un símbolo válido en ese sistema de numeración, no se divide entre la base, pero podría dividirse ya que el cociente es 0, por lo que no afecta a la siguiente columna de la izquierda y el residuo es el mismo número.

Por ejemplo, los números $5B2A{,}D_{16}$ y $803{,}51_{16}$ se pueden sumar ya que ambos se encuentran en el sistema hexadecimal, como sigue:

$$\begin{array}{cccccccc}
5 & B & 2 & A & , & D & 0_{16} & + \\
0 & 8 & 0 & 3 & , & 5 & 1_{16} & \\
\hline
6 & 3 & 2 & E & , & 2 & 1_{16} &
\end{array}$$

Explicación por columna:

$0+1$	$=$	1	El 1 es válido en base hexadecimal.
$13+5$	$=$	18	El 18 no es válido en base hexadecimal, por lo que se debe dividir el número entre la base, colocar el resto debajo de la línea y sumar el cociente a los números de la siguiente columna de la izquierda.
$1+10+3$	$=$	14	El 14 es válido en base hexadecimal.
$2+0$	$=$	2	El 2 es válido en base hexadecimal.
$11+8$	$=$	19	El 19 no es válido en base hexadecimal, se divide entre la base y se procede como se hizo anteriormente.
$1+5$	$=$	6	El 6 es válido en base hexadecimal.

Como se observa, el procedimiento para realizar la suma de diferentes sistemas de numeración no cambia, solamente se debe considerar la base en que se realiza la operación. Además, si la suma de dos dígitos sobrepasa al dígito mayor en un sistema de numeración determinados, el resultado se debe dividir entre la base del sistema de numeración, el resultado se pone en la misma columna y el cociente se suma en la siguiente columna de la izquierda.

Ejercicios

Sumar:

1. B3,C_{16} + AB,F_{16}
2. $11011,10_2$ + 19,92
3. 47,518 + $456,23_8$
4. $11010,11001_2$ + 1D,F_{16}
5. $25,32_6$ + 1B,8_{15} = S_3

Si los sumandos tienen diferente base y no se pide de forma explícita la base para el resultado de la suma, esta puede ser dada en base decimal, o en cualquiera de las bases de los sumandos.

7.2. Multiplicación

La multiplicación en los diversos sistemas numéricos se realizan de forma similar a la multiplicación en decimal, la única diferencia es la base. Por ejemplo para multiplicar 806,23 × 54,7 se tiene:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 8 & 0 & 6, & 2 & 3 & \times \\
 & & & & & 5 & 4, & 7 & 0 & \\
\cline{5-9}
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + \\
 & & 5 & 6 & 4 & 3 & 6 & 1 & & \\
 & 3 & 2 & 2 & 4 & 9 & 2 & & & \\
4 & 0 & 3 & 1 & 1 & 5 & & & & \\
\hline
4 & 4 & 1 & 0 & 0, & 7 & 8 & 1 & 0 &
\end{array}$$

Explicación :

0×3	$=$	0	Para todos los valores multiplicados por cero, toda la primera fila resultante es válida en base decimal, pues el producto es 0.
7×3	$=$	21	El 21 no es válido en base decimal, se divide entre la base para obtener el cociente 2 y el residuo 1, el residuo se coloca debajo de la línea correspondiente y el cociente se suma en el producto de la siguiente columna.
$7 \times 2 + 2$	$=$	16	El 16 no es válido en base decimal, se divide entre la base para obtener el cociente 1 y el residuo 6, el residuo se coloca debajo de la línea correspondiente y el cociente se suma en el producto de la siguiente columna.

Se continúa el mismo procedimiento para todos los multiplicandos de los multiplicadores 7, 4 y 5, luego el producto obtenido para todos los multiplicadores se suma, para obtener el resultado final.

Por ejemplo, en el sistema binario, para multiplicar los valores $101,01_2$ y $10,1_2$ se tiene:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & 1 & 0 & 1, & 0 & 1_2 & \times \\
 & & & & 1 & 0, & 1 & 0_2 & \\
\cline{4-8}
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + \\
 & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & & & & \\
\hline
1 & 1 & 0 & 1, & 0 & 0 & 1 & 0_2 &
\end{array}$$

Ejercicios

Multiplicar:

1. $12_8 \times 46_8$
2. $1101,101_2 \times 11,01_2$
3. $3C2_{16} \times$ A,8_{16}
4. $1110,11_2$ $\times +$ 1,F_{16}
5. $101,32_4$ $\times$ 1,3_6 $=$ S_3

Si el multiplicando y el multiplicador están en diferente base y no se pide de forma explícita la base para el producto, este puede ser dado en base decimal, o en cualquiera de las bases de los factores.