Tema 2, 17 noiembrie 2023

Termen de predare: 08:00 dimineaţa, 24 noiembrie 2023, prin e-mail (fe.olariu@gmail.com)

- **Tema poate fi rezolvată în echipe de câte doi studenţi.**
- **Soluţiile vor fi redactate in LaTeX sau un procesor de texte dintr-o suită Office precum Word, Writer etc.**
- **Pentru soluţii (corect) redactate în LaTeX se oferă un bonus de 2 puncte.**
- **Nu rescrieţi enunţurile! Nu este nevoie de mai mult de o pagină sau o pagină şi jumătate pentru fiecare dintre probleme.**
- **ORICE SOLUŢIE COPIATĂ A UNEIA DINTRE PROBLEMELE DE MAI JOS VA FI PENALIZATĂ CU 2 PUNCTE.**
- **CADRELE DIDACTICE CARE CONDUC SEMINARIILE ÎŞI REZERVĂ DREPTUL DE A VERIFICA ORIGINALITATEA ŞI AUTENTICITATEA SOLUŢIILOR.**
- **Soluţiile vor fi trimise prin e-mail până pe 24 noiembrie 2023 la ora 08:00 dimineaţa, la următoarea adresă:** fe.olariu@gmail.com
- **E-mail-ul trebuie să conţină fişierul sursă (un fişier .doc, .odt sau .tex) şi fişierul .pdf, amândouă cu următorul format al numelui:**

  Nume1_grupă_Nume2_grupă_Tema1.tex (sau .doc, .odt)

  Nume1_grupă_Nume2_grupă_Tema1.pdf

- **Exemple:**

  IonescuPVasile_A8_VasilescuTIon_X1_Tema1.tex (sau .doc, .odt, .pdf)

  IonescuPVasile_B6_VasilescuTIon_E5_Tema1.tex (sau .doc, .odt, .pdf)

1. Fie $G = (S, T; E)$ un graf bipartit aşa încât $d_G(u) > 0$, $\forall u \in S$ şi $d_G(u) \geqslant d_G(v)$, $\forall uv \in E$ cu $u \in S$ şi $v \in T$. Folosind teorema lui Hall arătaţi că G are un cuplaj care saturează toate nodurile din S.

(2 puncte)

2. Fie $G = (V, E)$ un graf conex, $q \in \mathbb{R}, q \geqslant 1$ şi $c : E \to \mathbb{R}_+^*$ o funcţie de cost definită pe muchiile sale. Fie G' un subgraf al lui G; pentru orice două noduri $x, y \in V(G')$ notăm cu $c_{G'}(x, y)$ costul minim al unui xy-drum în G' (dacă nu există drum de la x la y, costul este ∞).

Un subgraf G' al lui G este un q-**graf al lui** G dacă (i) $V(G') = V$ şi (ii) $c_{G'}(x, y) \leqslant q \cdot c_G(x, y)$, $\forall x, y \in V$.

(a) Arătaţi că un graf parţial G' al lui G este un q-graf dacă şi numai dacă $c_{G'}(u, v) \leqslant q \cdot c(uv)$, $\forall uv \in E \setminus E(G')$.

(b) Fie G' un 1-graf al lui G şi $uv \in E$; arătaţi că dacă $c_{G-uv}(u, v) > c(uv)$, atunci $uv \in E(G')$.

(c) Fie T un arbore parţial de cost minim al lui G (relativ la funcţia de cost c) şi G' un 1-graf al lui G; arătaţi că $E(T) \subseteq E(G')$.

(d) Să presupunem că G are un 1-graf, G', care este arbore (deci arbore parţial al lui G). Demonstraţi că G' este singurul arbore parţial de cost minim al lui G.

(2 + 1 + 2 + 1 = 6 puncte)

3. Fie $G = (V, E)$ un graf 2-conex astfel că niciun circuit al lui G nu are corzi (o coardă este o muchie între noduri neconsecutive pe circuit). Presupunem că G nu este un circuit; demonstraţi că G are următoarele proprietăţi:

(a) $G - e$ nu este 2-conex, pentru orice muchie $e \in E$;

(b) orice circuit al lui G conţine un nod de grad mai mare decât 2 care are un vecin de grad 2;

(c) ştergând toate nodurile de grad 2 din G se obţine o pădure cu cel puţin doi arbori.

(1 + 3 + 2 = 6 puncte)

4. Fie $G = (V, E)$ un graf conex cu $n \geqslant 3$ noduri şi $c : E \to \mathbb{R}$ o funcţie de cost definită pe muchiile sale. Pentru orice arbore parţial T al lui G definim $edge\_cost(T)$ ca fiind tabloul $(n-1)$-dimensional care conţine costurile în ordine crescătoare ale muchiilor din T. Arătaţi că, dacă T_1 şi T_2 sunt doi arbori parţiali de cost minim ai lui G (relativ la funcţia de cost c), atunci $edge\_cost(T_1) = edge\_cost(T_2)$.

(2 puncte)