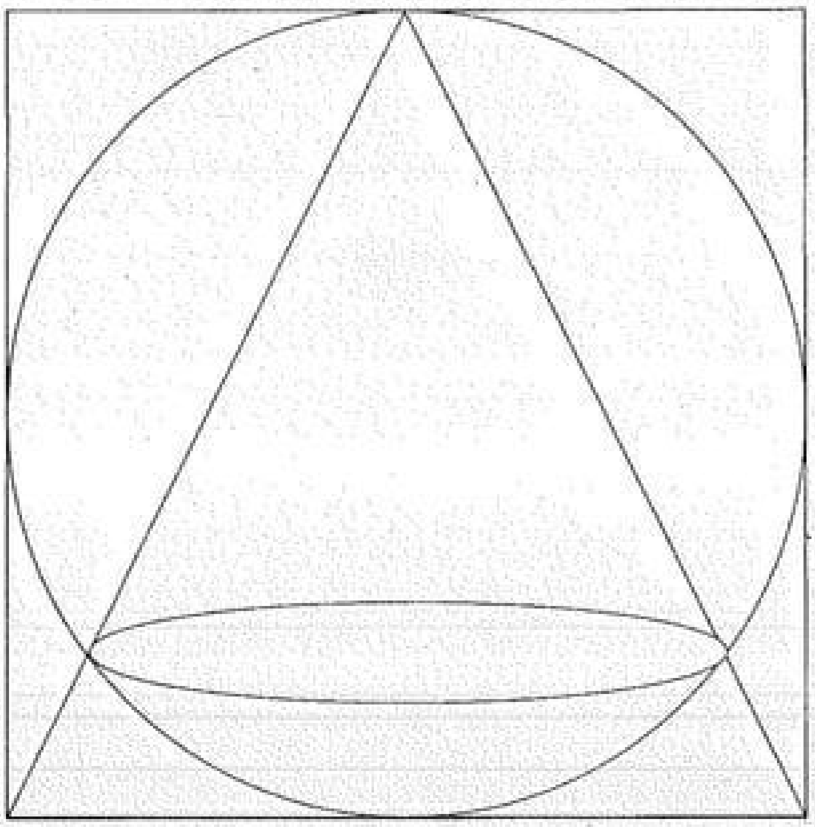
GEOMETRIA

PLANA Y DEL ESPACIO
GEOMETRIA ANALITICA
DIBUJO



G. CALVACHE
T. ROSERO
M. YACELGA

2009

MINISTERIO DE EDUCACION Y CULTURA

Certificados de Inscripción y de Derechos de Autor

Nº 002482; 002483

Fac. nº 5021-07 Repuesto por Sr. Esteban Risole, Esteban Patricio en febrero 2010 # 23.000

PRESENTACION

Este texto de Geometría está dedicado a los estudiantes que se preparan para ingresar a las diferentes Instituciones que imparten Educación Superior en las diferentes ramas de la Ingeniería. El mismo pretende ser una guía y ayuda tanto para el docente y estudiante que están inmersos en el aprendizaje de esta asignatura.

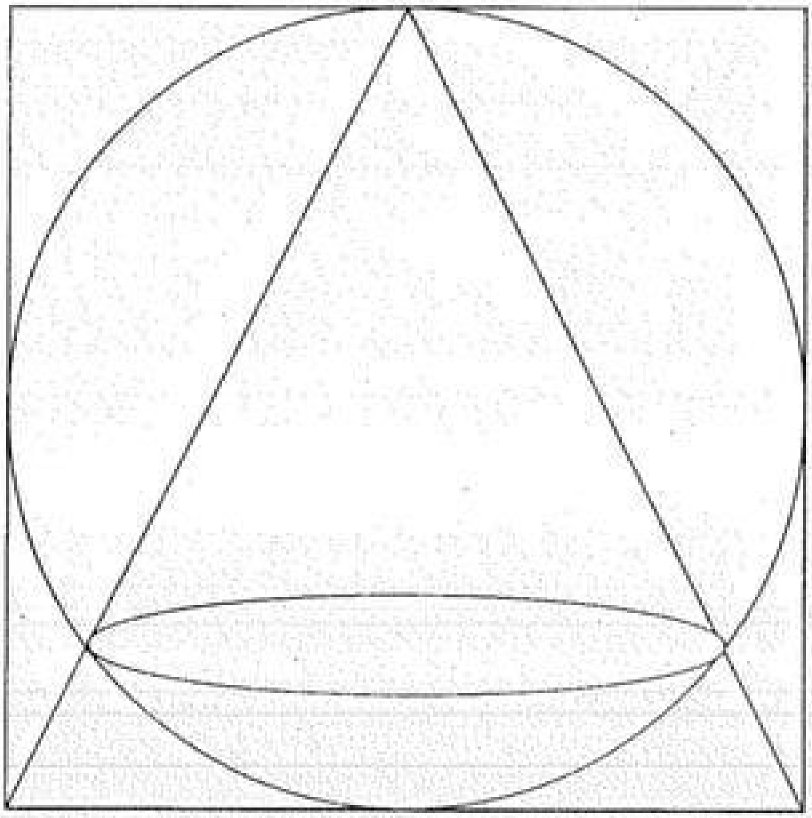
El Objetivo es lograr unificar los conocimientos de Geometría que los estudiantes reciben en los establecimientos de Educación Media.

La respuesta favorable que tenga este trabajo y sus recomendaciones que nos hagan llegar, constituirá un estimulo para continuar trabajando.

LOS AUTORES

GEOMETRIA
PLANA

EJERCICIOS PROPUESTOS Y EJERCICIOS RESUELTOS



G. CALVACHE
T. ROSERO
M. YACELGA

CONTENIDOS

UNIDAD 1
CONCEPTOS FUNDAMENTALES

UNIDAD 2
PROPORCIONALIDAD

UNIDAD 3
ANGULOS

UNIDAD 4
POLIGONOS

UNIDAD 5
CIRCULOS

UNIDAD 6
POLIGONOS Y CUADRILATEROS

1. CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Geometría, es la ciencia de las formas espaciales del mundo material, se basa en un conjunto de proposiciones que estudia la forma, propiedades y medida de las figuras y cuerpos geométricos; entendiéndose por proposición el enunciado de una ley o un principio.
Es necesario considerar que las proposiciones no deben ser contradictorias y todos los resultados y conclusiones que se obtengan de ellas tampoco deben ser contradictorios entre sí, ni con los conocimientos ya existentes.

La geometría es una ciencia y un arte, es decir, es al mismo tiempo matemática y filosofía. Forma uno de los sistemas más perfectos de lógica que se conocen. Proporciona una disciplina mental y conocimientos indispensables para seguir estudios superiores.

Aunque la geometría es una de las partes más antiguas de la matemática, en la actualidad ha encontrado nuevas áreas de aplicación en campos tan diversos como la exploración del espacio.

En geometría aprendemos a comprobar las proposiciones por razonamiento deductivo o inductivo, analizando un problema en términos de los datos que se den, las leyes y principios que pueden aceptarse como verdaderos y mediante una reflexión cuidadosa, lógica y exacta, seleccionar una solución para el problema.

Una causa común de desavenencias, no sólo en geometría, sino en todas las actividades humanas, es el hecho de que la misma palabra puede tener distintos significados para diferentes personas; por tanto es necesario que los términos que usemos en las demostraciones tengan el mismo significado para cada uno de nosotros.

1.1. TÉRMINOS NO DEFINIDOS

Los objetos que rodean al hombre, forman en su mente el concepto de rectas y de curvas, de figuras planas y de cuerpos con formas y volúmenes diferentes.

Al observar varios cuerpos geométricos, algunos tienen la misma forma, ejemplo : el tronco de un árbol, una lata de conservas, un tubo de oleoducto; tienen una forma común, sin tomar en cuenta su material, color, peso, posición , etc., se produce en nuestra mente una **idea abstracta** a la cual se le da un nombre en este caso, **cilindro.**

Del mismo modo, en la construcción de una casa, las paredes (verticales) y pisos (horizontales), nos da la idea de perpendicularidad y paralelismo.

Los conceptos geométricos básicos son por lo tanto abstractos y existen sólo en nuestra mente. Los conocimientos iniciales de las propiedades y de las formas espaciales se obtienen por inducción, es decir, por medio de observaciones y experiencias reiteradas.

En el idioma existen palabras que son difíciles definir y se los describe en términos de otras palabras igualmente no definidas; tales definiciones se llaman **"tautologías"**.

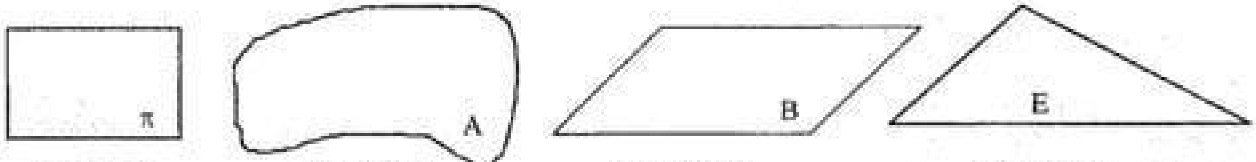
De esta manera, muchas palabras no se pueden definir sin caer en un círculo vicioso y siempre empezaremos con uno o más términos que no están definidos.
Al usar un término no definido, se supone que la palabra es tan elemental que todos conocen su significado, puesto que no hay palabras más sencillas para definir el término.
La geometría usa los siguientes términos no definidos : **punto, recta, plano, espacio y medida.**

En la primera parte del contenido de este trabajo presentaremos proposiciones que relacionen puntos y rectas, los puntos serán los elementos de un plano y las rectas serán subconjuntos del mismo plano formadas por puntos, de ésta manera desarrollaremos la **Geometría Plana**; posteriormente añadiremos otras proposiciones que relacionen planos, puntos y planos, rectas y planos para desarrollar la **Geometría del espacio.**

1.2. PLANO

Una hoja de papel lo más extensa posible da la idea del concepto abstracto de plano.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y DENOMINACIÓN



PLANO π　　PLANO A　　PLANO B　　PLANO E

Por medio de una letra mayúscula ubicada en el interior de su representación.

1.3. PUNTO

Para desarrollar muchos sistemas matemáticos, se empieza considerando un conjunto de elementos. Los elementos considerados en geometría son llamados **puntos**. Podemos representar el punto con una minúscula marca en el pizarrón, pero ésta no es un punto; si podríamos subdividir la marca y cada parte subdividirla nuevamente en marcas más pequeñas y así indefinidamente, todavía no tendríamos un punto.

Euclides definió el punto como el elemento geométrico que tiene posición pero no dimensión, sin embargo la palabra "posición y dimensión" tampoco han sido definidas y no se estaría mejor que antes, tendríamos varias palabras que definir en vez de una; la solución del dilema es sencilla : la palabra punto no se define. Lo esencial es que todos tenemos una noción intuitiva bastante buena de lo que es un punto.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y DENOMINACIÓN

Por medio de una marca (· o x).

Por medio de una letra mayúscula escrita cerca de la representación gráfica, ejemplo :

·A o xA

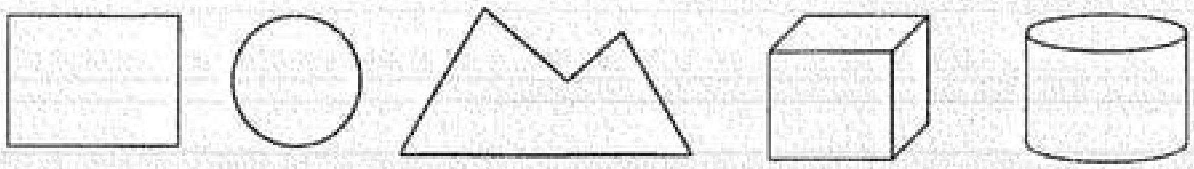
1.4. POSICIÓN RELATIVA PUNTO - PLANO

1) COPLANAR. Si el punto es elemento del plano.

2) EXTERNO. Si el punto no es elemento del plano.

1.5. FIGURAS GEOMÉTRICAS

Al observar los diferentes cuerpos y figuras geométricas, encontraremos que todos tienen algo en común y son los puntos. De esto podríamos concluir que una figura geométrica es un conjunto no vacío de puntos.



1.6. RECTA

La huella dejada al doblar una hoja de papel nos da la idea abstracta de recta. En dicha recta pueden marcarse infinitos puntos, por lo tanto, la recta es una figura geométrica, subconjunto de un plano, formada por un conjunto de puntos.

DETERMINACIÓN

Dos puntos determinan una recta.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y DENOMINACIÓN

$\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{B}$

Por medio de dos puntos cualesquiera de la recta, o por medio de un punto de la recta.

1.7. POSICIÓN RELATIVA PUNTO - RECTA

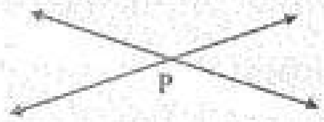
1) COLINEAL. Si el punto es elemento de la recta.

2) EXTERNO. Si el punto no es elemento de la recta.

1.8. POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS EN UN PLANO

1) PARALELAS. Si la intersección es un conjunto vacío.

2) SECANTES. Si su intersección es un punto.



1.9. SEGMENTO ($\overline{AB}$)

Es la figura geométrica de puntos colineales cuyos elementos son los puntos A y B y todos los puntos entre A y B. Los puntos A y B se llaman extremos.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y DENOMINACIÓN

$\overline{AB}$

1.10. SEGMENTO ABIERTO ($\overset{\circ\!-\!\circ}{AB}$)

Es la figura geométrica de puntos colineales, cuyos elementos están comprendidos entre los puntos A y B.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y DENOMINACIÓN

$\overset{\circ\!-\!\circ}{AB}$

1.11. SEGMENTO SEMIABIERTO ($\overset{-\!\circ}{AB}$ o $\overset{\circ\!-}{AB}$)

Es la figura geométrica de puntos colineales, cuyos elementos están comprendidos entre los puntos A y B incluyendo ya sea el punto A o el punto B.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y DENOMINACIÓN

Segmento semiabierto en B : ($\overset{-\!\circ}{AB}$)

Segmento semiabierto en A : ($\overset{\circ\!-}{AB}$)

1.12. SEMIRECTA ($\overset{\circ\!\rightarrow}{AB}$)

Es la figura geométrica de puntos colineales, cuyos elementos están al mismo lado de A y B excluyendo A.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y DENOMINACIÓN

$\overset{\circ\!\rightarrow}{AB}$

1.13. RAYO ($\overrightarrow{AB}$)

Es la figura geométrica de puntos colineales, cuyos elementos están al mismo lado de A y B incluyendo A.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y DENOMINACIÓN

$\overrightarrow{AB}$

A es el origen y B indica la dirección.

1.14. PROPOSICIÓN

Es el enunciado de una verdad, de un principio, de una propiedad.

Las proposiciones más comunes que se utilizan son : axiomas, postulados, teoremas y corolarios.

1.14.1. AXIOMA

Es la proposición, que siendo evidente, no requiere demostración. Es el resultado de la observación o experimentación; los axiomas son propiedades de cualquier asignatura.

1. Axioma de identidad. $a = a$

2. Axioma de sustitución. Toda cantidad puede reemplazarse por su igual.

3. Propiedades de igualdad.

- Dos cantidades iguales a una tercera son iguales entre sí.
- Si a cantidades iguales se suman, restan, multiplican, dividen, se elevan a una misma potencia o se extraen la misma raíz los resultados son iguales.

4. Propiedades de las desigualdades.

- El todo es mayor que cualquiera de sus partes e igual a la suma de las mismas.
- Si una cantidad es mayor que otra y ésta mayor que una tercera, la primera es mayor que la tercera.
- Si en los dos miembros de una desigualdad, se ejecuta una misma operación con números positivos, el sentido de la desigualdad no cambia.
- Si se suman dos desigualdades de un mismo sentido, el resultado es otra desigualdad en el mismo sentido.
- Si los dos miembros de una desigualdad se restan de los dos miembros de una igualdad, el resultado es una desigualdad de sentido contrario a la dada.
- Si se cambian los signos de los dos miembros de una desigualdad, la desigualdad cambia de sentido.

1.14.2. POSTULADOS

Son proposiciones, cuya verdad aunque no tenga la evidencia de un axioma, se lo acepta sin demostración. A diferencia de los axiomas, éstos son propiedades geométricas.

- Por dos puntos distintos pasa una sola recta.
- Una recta es un conjunto ordenado de puntos, no existe primero ni último. Entre dos puntos siempre existe otro.
- Toda recta puede prolongarse indefinidamente en los dos sentidos.
- La distancia entre dos puntos es la longitud del segmento que los une.
- Por tres puntos dados no colineales pasa un plano y sólo uno.
- Si dos puntos están en un mismo plano, la recta que los contiene pertenece al plano.
- Se puede trazar un círculo con centro y radio dados.
- Toda figura puede hacerse cambiar de posición sin alterar su forma y dimensiones.

1.14.3. TEOREMA

Es la proposición cuya verdad necesita ser demostrada; una vez demostrado un teorema se lo puede utilizar para la demostración de otros teoremas, junto con axiomas, postulados, definiciones, etc..

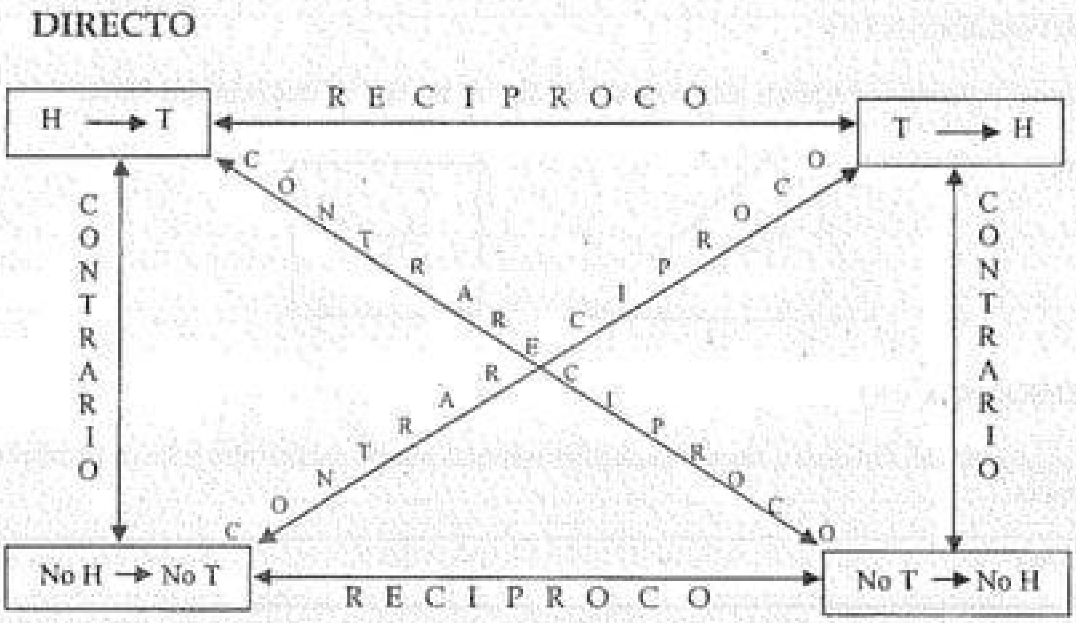
Un teorema se compone de : **Hipótesis** y **Tesis.**

- **Hipótesis**, son las condiciones o datos del teorema.
- **Tesis**, es la propiedad a demostrarse.

1.14.3.1. RELACIONES ENTRE TEOREMAS

Según como se tome la hipótesis y tesis de un teorema, pueden existir los siguientes teoremas :

- **DIRECTO :** Es el enunciado de un teorema .
- **RECÍPROCO :** Es la proposición que tiene por hipótesis y tesis, la tesis y la hipótesis del teorema directo. Un teorema recíproco puede ser verdadero o falso.
- **CONTRARIO :** Es la proposición que tiene por hipótesis y tesis las negaciones respectivas de la hipótesis y la tesis del teorema directo.
- **CONTRARECÍPROCO :** Es la proposición contraria a la recíproca de la directa.



ESQUEMA DE LA RELACIÓN ENTRE LOS TEOREMAS

EJEMPLO:

- **Directo.-** Todos los puntos de la mediatriz de un segmento, equidistan de sus extremos.
- **Recíproco.-** Todos los puntos que equidistan de los extremos de un segmento, pertenecen a la mediatriz del segmento.
- **Contrario.-** Todo punto externo a la mediatriz de un segmento no equidista de los extremos del segmento.
- **Contrarecíproco.-** Todo punto que no equidista de los extremos de un segmento, no pertenece a la mediatriz del segmento.

1.14.4. COROLARIO

Es una proposición, consecuencia directa de un teorema demostrado, por tanto no hace falta demostración.

1.15. PROBLEMA

Es una situación particular que se plantea para ser resuelta.

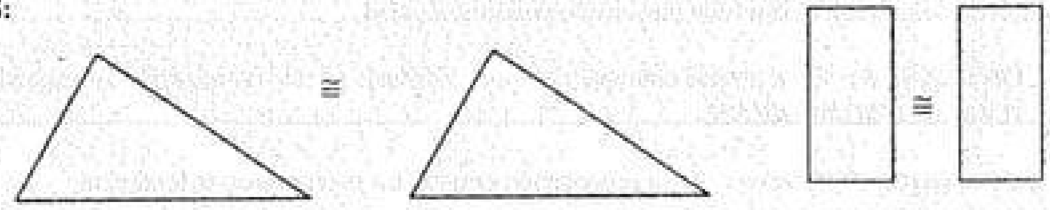
1.16. CONGRUENCIA (≅)

Dos figuras geométricas congruentes tienen exactamente la misma forma y medida y al superponerlas coinciden en todos sus puntos.

La congruencia implica de hecho una igualdad de medida, pero no siempre la igualdad de medida implica congruencia.

En segmentos y ángulos, la igualdad de medida implica congruencia.

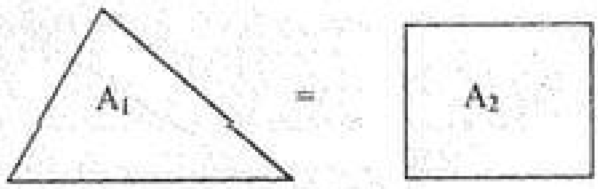
EJEMPLOS:



1.17. EQUIVALENCIA (=)

Dos figuras geométricas equivalentes tienen igual medida y no necesariamente la misma forma.

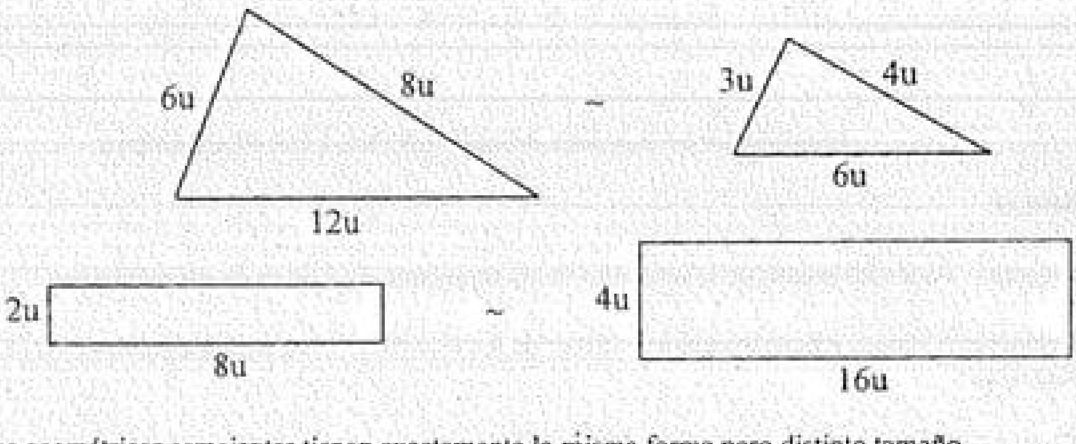
EJEMPLO:



1.18. SEMEJANZA (~)

Dos figuras geométricas semejantes tienen sus ángulos respectivamente congruentes y sus lados respectivamente proporcionales.

EJEMPLOS :

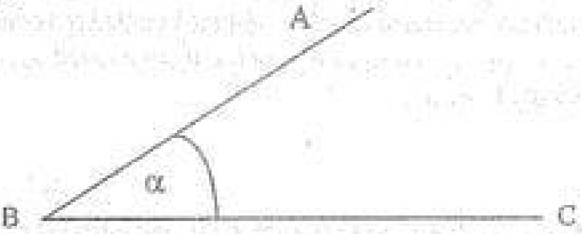


Dos figuras geométricas semejantes tienen exactamente la misma forma pero distinto tamaño.

1.19. IDENTIDAD (=)

Cuando nos referimos a una misma figura geométrica.

EJEMPLO:



$$\widehat{ABC} \equiv \widehat{\alpha}$$

1.20. LA DEMOSTRACIÓN

Es un conjunto de razonamientos, por medio de los cuales la veracidad de la proposición que se demuestra se deduce de axiomas y verdades antes demostradas o conocidas.

En geometría se admiten sin demostración sólo un pequeño número de verdades fundamentales o axiomas; todas las demás verdades (teoremas), se demuestran basándose en estos axiomas mediante una serie de deducciones. La veracidad de los propios axiomas está garantizada porque tanto ellos mismos, como los teoremas que se demuestran apoyándose en ellos, han sido comprobados por reiteradas observaciones y larga experiencia.

La demostración se realiza en virtud del requerimiento de una de las leyes fundamentales de nuestro pensamiento, el principio de la razón suficiente, que establece la necesidad de que la veracidad de nuestras afirmaciones esté rigurosamente fundamentada.

Una demostración bien estructurada sólo puede apoyarse en proposiciones antes demostradas, siendo inadmisible toda alegación a la evidencia.

La demostración es necesaria también para fundamentar la generalidad de la proposición que se demuestra, es decir, la posibilidad de su aplicación a todos los casos particulares.

Finalmente, por medio de las demostraciones, las verdades geométricas se reducen a un sistema armonioso de conocimientos científicos, en el cual se pone de manifiesto todas las relaciones internas que existen entre las diversas propiedades de las formas espaciales. "Llamando espaciales aquellas propiedades por las cuales se determinan la forma, la magnitud y la posición mutua de los objetos".

1.20.1. MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN

1.20.1.1. MÉTODO INDUCTIVO

Es un razonamiento que parte de conocimientos o verdades particulares para obtener mediante ellos una verdad general, o que observa varios fenómenos para inferir la ley que los explica.

EJEMPLOS:

- Demostrar que el cuadrado de cualquier número impar disminuido en una unidad da un número múltiplo de ocho.

Demostración: $3^2 - 1 = 9 - 1 = 8 = 8 \times 1$

$5^2 - 1 = 25 - 1 = 24 = 8 \times 3$

$7^2 - 1 = 49 - 1 = 48 = 8 \times 6$

$9^2 - 1 = 81 - 1 = 80 = 8 \times 10$

....

$$(2n - 1)^2 - 1 = 4n^2 - 4n = 4n(n-1)$$

$4n(n-1)$ es múltiplo de 4 n y $(n-1)$ son dos números sucesivos, de los cuales uno de ellos es par y múltiplo de 2, por lo tanto, $4n(n-1)$ es múltiplo de 8.

- Queremos saber el valor del sumatorio de las medidas de los ángulos internos de un triángulo. Para esto escogemos varios triángulos diferentes y mediante un transportador medimos cuidadosamente los ángulos ,y al realizar el sumatorio nos da en todos los casos π; entonces se llega a la conclusión que el sumatorio de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es π.

1.20.1.2. MÉTODO DEDUCTIVO

Es un razonamiento que parte de conocimientos o verdades generales para obtener mediante ellos una verdad particular.

La mayoria de los teoremas y problemas geométricos se demuestran usando el método deductivo.

1.20.2. PROCEDIMIENTO DE UNA DEMOSTRACIÓN

Los teoremas pueden demostrarse por dos procedimientos ; **directo e indirecto.**

La demostración directa, prueba la veracidad de la proposición, estableciendo una relación directa entre ella y las demostradas con anterioridad.

La demostración indirecta, pone en duda la veracidad de la proposición que se demuestra y tomándola por falsa, llegamos a una contradicción con las condiciones del teorema o con una proposición ya demostrada.

Por esto, la demostración indirecta se llama también "demostración por reducción al absurdo".

1.20.3. INSTRUCCIONES PARA UNA DEMOSTRACIÓN

Cuando se buscan argumentos para realizar una demostración, se puede recurrir a los experimentos, las observaciones, o a las proposiciones ya demostradas anteriormente. Por lo tanto, en el curso de una demostración , también se puede usar una combinación de la inducción y la deducción.

Conviene subrayar, que todas las demostraciones deben ser exhaustivas. En particular, hay que enunciar precisamente y, si es necesario demostrar todos los teoremas a los cuales se hace referencia en el proceso de demostración.

En la mayoría de los problemas, el dibujo desempeña un papel importantísimo, permitiendo encontrar (e incluso sugerir) la idea de la resolución. Por eso conviene trazar los dibujos minuciosa y exactamente, saber notar en ellos las propiedades geométricas que se puedan aprovechar.

A veces una propiedad, señalada con acierto en el dibujo, permite deducir la resolución del problema.

En resumen las instrucciones para una demostración serían las siguientes :

1. Hacer un gráfico que represente lo más exactamente posible el enunciado de la proposición, empleando letras mayúsculas para cada punto notable. Indicar con marcas, símbolos, letras, etc. en la figura, las partes de medidas iguales.

2. Expresar la hipótesis en forma simbólica.

3. Expresar la tesis en forma simbólica.

4. Realizar la demostración, en la misma que debe constar de proposiciones y razones.

NOTA: En el presente texto, las demostraciones no contienen razones, quedando como inquietud para el estudiante.

EJEMPLOS :

PROCEDIMIENTO DIRECTO

H) AB = CD

T) AC = BD

D) AB = CD (1) (Hipótesis)

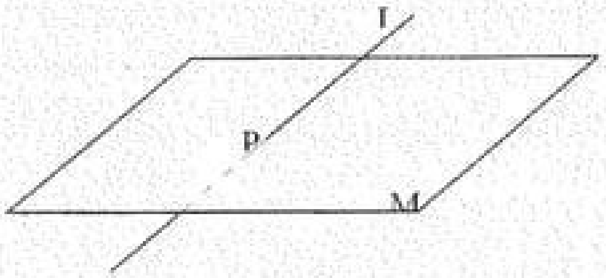
BC = BC (2) (Identidad)

AB + BC = CD + BC (1) + (2)

=> AC = BD ///.

PROCEDIMIENTO INDIRECTO

Si una recta interseca a un plano que no la contiene, entonces la intersección contiene un solo punto.



H) $\overleftrightarrow{L}$ interseca al plano M en .P

$\overleftrightarrow{L}$ $\not\in$ al plano M

T) .P y solo .P $\in$ $\overleftrightarrow{L}$ y plano M

D) (1) $\overleftrightarrow{L}$ interseca al plano M en .P (Hipótesis)

(2) $\overleftrightarrow{L}$ $\not\in$ al plano M (Hipótesis)

(3) $\overleftrightarrow{L}$ interseca en algún otro punto Q del plano M (suposición temporal)

. P y .Q están en el plano M

(4) → $\overleftrightarrow{L}$ $\in$ M (Si dos puntos están en un plano, entonces la recta que los contiene está en el plano)

La proposición (4) contradice a (2), por tanto (3) es falso; en consecuencia el teorema planteado como ejemplo es verdadero.

UNIDAD 2

2. PROPORCIONALIDAD

2.1. RAZÓN

La mayor parte de las ideas que se expresan en la actualidad, están basadas en la comparación de números y cantidades. Cuando se dice la distancia de Quito a Guayaquil es de 550 Km., se está comparando con una unidad llamada Kilómetro.

DEFINICIÓN

La razón es una comparación de una cantidad respecto a otra cantidad semejante, el resultado es un número abstracto, es decir no tiene unidades.

Es importante hacer notar que una razón es un cociente entre cantidades semejantes, porque no tendrían significado encontrar la razón de la medida de un segmento a la de un ángulo.

Una razón es una fracción, por lo tanto, todas las propiedades que tiene una fracción se aplican a las razones.

REPRESENTACIÓN

Para representar la razón 15 a 4, se lo hace : $\frac{15}{4}$, 15/4 , $15 \div 4$

El 15 y el 4 se denominan términos de la razón.

2.2. PROPORCIÓN

Es la igualdad de dos razones. Si dos razones tienen el mismo valor, las razones pueden igualarse como una proporción, por ejemplo : $\frac{4}{12} = \frac{12}{36}$

Si tres o más razones son iguales, se tiene una serie de razones iguales.

REPRESENTACIÓN

Si las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son iguales, la proporción puede representarse como :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad ; \quad a \div b = c \div d$$

DENOMINACIÓN

Se lee " **a** es a **b** como **c** es a **d** " o también " **a** y **c** son proporcionales a **b** y **d** ".

TÉRMINOS

Son los elementos que forman la proporción; **a** es el primer término, **b** el segundo, **c** el tercero y **d** el cuarto término.

EXTREMOS : a y d
MEDIOS : b y c
ANTECEDENTES : a y c
CONSECUENTES : b y d

2.2.1. CUARTA PROPORCIONAL

De tres cantidades, es el cuarto término de la proporción, así, en la proporción : $\frac{a}{x} = \frac{b}{c}$, x es la cuarta proporcional entre a , b y c.

2.2.2. MEDIA PROPORCIONAL (Media Geométrica o Proporción Continua)

Si en una proporción, el segundo y tercero o primero y cuarto término son iguales, se dice, que cualquiera de los dos es media proporcional entre el primero y cuarto o segundo y tercero términos de la proporción respectivamente, así: $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ *o* $\frac{x}{a} = \frac{b}{x}$; entonces x es media proporcional entre a y b. $x^2 = ab$, $x = \sqrt{ab}$ (media geométrica)

2.2.3. PROPIEDADES DE LAS PROPORCIONES

1.- En una proporción pueden invertirse las razones.

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

Ejemplo : $\frac{17}{5} = \frac{51}{15}$ => $\frac{5}{17} = \frac{15}{51}$

2.- El producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $a \times d = b \times c$

Ejemplo : $\frac{17}{5} = \frac{51}{15}$ => $17 \times 15 = 51 \times 5$

3.- En una proporción a cada antecedente se puede sumar su respectivo consecuente, o, a cada consecuente se puede sumar su respectivo antecedente.

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ *o* $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$

Ejemplo : $\frac{17}{5} = \frac{51}{15}$ => $\frac{17+5}{5} = \frac{51+15}{15}$ *o* $\frac{17}{5+17} = \frac{51}{15+51}$

4.- En una proporción a cada antecedente se puede restar su respectivo consecuente, o, a cada consecuente se puede restar su respectivo antecedente.

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ *o* $\frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c}$

Ejemplo : $\frac{17}{5} = \frac{51}{15}$ => $\frac{17-5}{5} = \frac{51-15}{15}$ *o* $\frac{17}{5-17} = \frac{51}{15-51}$

5.- En una serie de razones iguales, la suma de los antecedentes, es a la suma de los consecuentes, como uno cualquiera de sus antecedentes es a su respectivo consecuente.

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \ldots$, entonces $\frac{a+c+e+\ldots}{b+d+f+\ldots} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \ldots$

Ejemplo : $\frac{17}{5} = \frac{51}{15} = \frac{153}{45} \quad \Rightarrow \quad \frac{17 + 51 + 153}{5 + 15 + 45} = \frac{17}{5} = \frac{51}{15} = \frac{153}{45}$

2.3. SEGMENTO UNITARIO

Es el segmento arbitrario que se toma como unidad para medir otros segmentos.

2.4. LONGITUD DE UN SEGMENTO (AB)

Es un número que representa las veces que está contenido el segmento unitario en el segmento. $\overline{AB}$.

2.5. PROPIEDADES DE UN SEGMENTO

1.- Dados los puntos colineales A, B y C :

B está entre A y C , si AB + BC = AC .

2.- Dados los puntos colineales A, M y C :

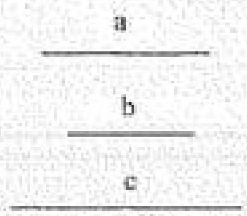
. M es el punto medio del segmento $\overline{AC}$, si AM = MC .

2.6. OPERACIONES CON SEGMENTOS

2.6.1. SUMA DE SEGMENTOS

Consiste en encontrar un segmento de longitud igual a la suma de las longitudes de los segmentos dados.

Gráficamente, el segmento que representa la suma se obtiene ubicando consecutivamente en una misma recta los segmentos dados.

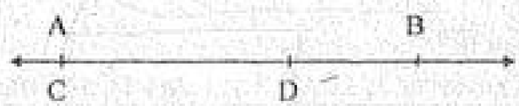


PQ = a + b + c

2.6.2. RESTA DE SEGMENTOS

Restar de un segmento otro menor, consiste en encontrar un tercer segmento tal que, sumado al segundo de por resultado el primero.

Gráficamente, se ubican los dos segmentos en un mismo rayo, de modo que el origen del rayo sea extremo común de los dos segmentos. El segmento determinado por los otros dos extremos de los segmentos dados, es el segmento diferencia.



DB = AB - CD

2.6.3. MULTIPLICACIÓN DE UN SEGMENTO POR UN NÚMERO

Consiste en encontrar un segmento de longitud igual al producto de la longitud del segmento dado por el número.

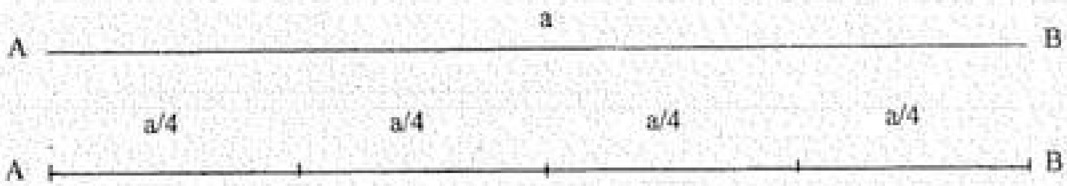
Gráficamente, el segmento que representa el producto, se obtiene sumando el segmento dado tantas veces como indique el número.

PQ = 5 a

2.6.4. DIVISIÓN DE UN SEGMENTO POR UN NÚMERO

Es el segmento tal que multiplicado por el número nos da el segmento dado.

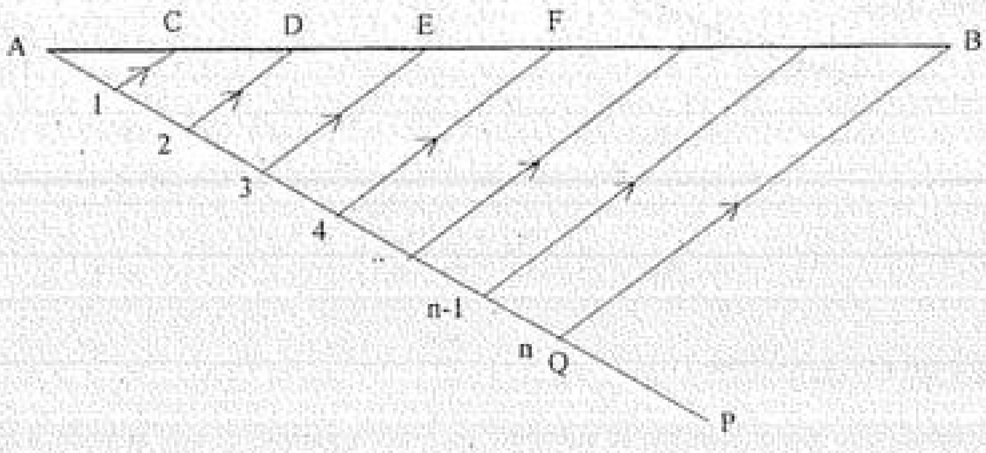
Gráficamente, el segmento dado se debe dividir en tantas partes iguales como indica el número. Cualquiera de las partes iguales es el segmento buscado.



2.7. DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN n PARTES CONGRUENTES

SOLUCIÓN GRÁFICA

Dato: $\overline{AB}$



CONSTRUCCIÓN

1. $\overline{AP}$ recta cualquiera
2. En AP tomamos n partes congruentes.
3. AQ = n
4. Trazamos $\overline{BQ}$
5. Por los puntos 1, 2, 3,....................,(n - 1), n trazamos paralelas a $\overline{BQ}$, obteniéndose los puntos de división C, D, E, F,............

2.8. DIVISIÓN INTERNA DE UN SEGMENTO

Consiste en localizar un punto situado en el interior de un segmento, tal que forme dos segmentos que están en una razón dada m/n.

Si P es el punto que divide interiormente al segmento $\overline{AB}$, se cumple : $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{m}{n}$

2.9. DIVISIÓN EXTERNA DE UN SEGMENTO

Consiste en ubicar un punto en la prolongación de un segmento, tal que forme dos segmentos que estén en una relación dada m/n.

Si Q es el punto que divide externamente al segmento $\overline{AB}$, se cumple : $\dfrac{AQ}{BQ} = \dfrac{m}{n}$

$\dfrac{m}{n} > 1$

$\dfrac{m}{n} < 1$

2.10. DIVISIÓN ARMÓNICA DE UN SEGMENTO

Consiste en dividir un segmento interna y externamente en una misma razón.

Si P y Q dividen armónicamente al segmento $\overline{AB}$, se cumple : $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AQ}{BQ} = \dfrac{m}{n}$

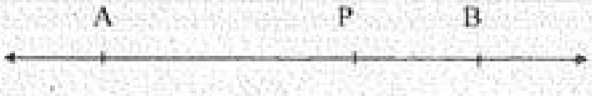
$\dfrac{m}{n} > 1$

$\dfrac{m}{n} < 1$

2.11. DIVISIÓN EN MEDIA Y EXTREMA RAZÓN DE UN SEGMENTO

Consiste en dividir un segmento interna o externamente en dos segmentos tales que, uno de ellos es media proporcional entre el segmento dado y el otro de la división.

Si P divide internamente en media y extrema razón al segmento $\overline{AB}$, se cumple :



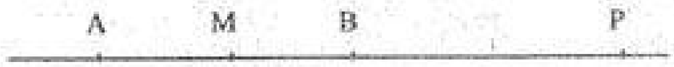
$AP^2 = AB \times PB$

Si Q divide externamente en media y extrema razón al segmento $\overline{AB}$, se cumple :

$BQ^2 = AB \times AQ$

2.12. EJERCICIOS

1.



H) AM = MB

T) 2 PM = PA+ PB

2.

H) 2 PM = PB – PA

T) AM = MB

3.

H) $AB = \frac{7}{5}\ BC$ T) $\frac{BC}{AC} = ?$ Resp. $\frac{5}{12}$

4.

H) $BC = \frac{3}{4} AB$ T) $\frac{AC}{BC} = ?$ Resp. $\frac{7}{3}$

5. Dados los puntos colineales A, B y C. Si las longitudes AB y BC son proporcionales a los números 9 y 5 respectivamente, y AC = 504 u., calcular AB. Resp. 324 u.

6. Dados los puntos colineales A, B, C y D. Si BD - AB = 2 BC.
Demostrar que AC = CD

7.

H) AB = BD – AC

T) CD = 2 AB

8.

H) AM = AB + AC
AB = BC
AM = MD

T) CD = 2 AC

9.

H) CD = 2 AB
$BF = \frac{3}{2} CE$

T) DE = 2 EF

10. Dados los puntos colineales A, R, P, C y D tales que : AP = PD, AR = PC y RC = 20. Calcular AD.
Resp. 40

11.

H) AC + BD = 14
AD = 11

T) BC = ?

Resp. 3

12. Si en el gráfico: CD = 2 AB. Demostrar que: $AC = \frac{BD + BC}{2}$

13. Dados los puntos colineales A, B, C y D. Si $AD = 24$ u., $CD = 8$ u. y $\frac{AB}{BC} = 3$

Calcular BC. Resp. 4 u.

14. Dados los puntos colineales consecutivos Q, A, B y P tales que: $QA = 20$ m., $BP = 40$ m. y QB y AP están en la razón 4/5. Calcular AB. Resp 60 m.

15.

H) $AB = \frac{BC}{2} = \frac{CD}{3} = \frac{DE}{4}$ T) $CD = ?$ Resp. 3 u

$DE - BC = 2$

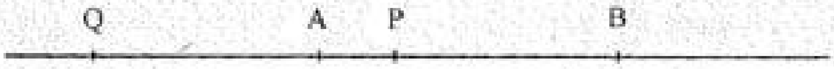
16. Dados los puntos colineales A, B, C, D, E y F. Si $AB = BD$, $BC = CE$, $DE = EF$ y $BD - EF = 6$ u.. Calcular CD. Resp. 3 u.

17. Dados los puntos colineales A, B, C, D y E. Si $BC = 3\ AB$, $\frac{CD}{BC} = \frac{1}{3}$ y $\frac{AC}{CE} = \frac{4}{9}$.

Encontrar $\frac{DE}{BC}$ Resp. $\frac{8}{3}$

18. Dados los puntos colineales A, B, C, D y E. Si $\frac{BD}{CE} = \frac{2}{5}$, $DE - AB = 6$, $AE = 40$ y $BD = 10$. Calcular CD. Resp. 7 u.

19.



H) $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB}$ T) $AP = ?$

$PB = 3420$ u. Resp. 2220 u.

$BQ = 16074$ u.

20.

H) $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB}$ T) $AQ = ?$

$AB = 792$ u. Resp. 142,31 u.

$PQ = 247$ u.

21.

H) $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB}$

$PB \times BQ = 28$ u T) $AB = ?$. Resp. 8 u.

$BQ - PB = 7$ u.

22.

H) $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB}$ T) $AB = \frac{2AQ \times PB}{PQ}$

23.

H) $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB}$ T) $AB = \frac{2\ AP \times AQ}{2\ AP + PQ}$

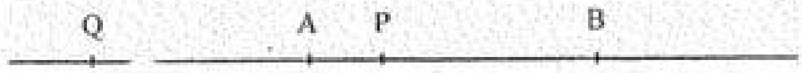
24.

H) AP x BQ = PB x AQ $\quad$ T) PB = ? $\quad$ Resp. 6,6 u.
AP = PQ = 20 u.

25.

H) AP x BQ = PB x AQ $\quad$ T) PB = ?. $\quad$ Resp. 3.3 u
AP = BQ = 8 u.

26.



H) AP x BQ = PB x AQ $\quad$ T) $PB = \frac{2}{3} AB$

AQ = AB

27. En una recta se toman los puntos A, B, C y D de manera que : $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{BD}$

Demostrar que $BC = \frac{AB \times BD}{AB + BD}$

28. En una recta se toman los puntos A, B, C, D, E, ..., sabiendo que AB = 0.1u., BC = 0.02 u., CD = 0.003 u.,............Calcular la longitud del segmento que es la suma de los segmentos dados. $\quad$ Resp. $\frac{10}{81}$ u.

29.

H) AP x BQ = PB x AQ $\quad$ T) $AB = \frac{2\,PB \times QB}{BQ + PB}$

30.-

H) $\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$

T) $AB^2 = BC \times BD$

31.

H) $BC = \frac{3}{7} AC$

T) $BD = \frac{4\,CD + 3\,AD}{7}$

32.

H) $\frac{AB}{AD} = \frac{DE}{EB}$

T) AD = EB

33.

H) $\frac{PQ}{PR} = \frac{SR}{SQ}$

T) PR = QS

34.

H) AB = BC $\quad$ T) BE = ? $\quad$ Resp. 9 u
DE = EF
AD = 10 u
CF = 8 u

35. A P B C D

H) $AB = BC = CD$ T) $PB = \dfrac{PD - 2\,AP}{3}$

36. A B C D

H) $BC = CD$

T) $AC^2 = AB \times AD + \dfrac{BD^2}{4}$

37. En una recta se ubican los puntos colineales A, B, C, D, E y F. Si : $AB = BC$, $CE = EF$ y $AD = DF$, demostrar que $CD = EF - BC$.

38. A B C D E

H) $\dfrac{AC}{CE} = \dfrac{BE}{AD}$ T) $AC^2 - CE^2 = BC \times DE - AB \times CD$

39. A B C D E F

H) $AB = BD$
$CE = EF$
$AC = 10$ u
$DF = 14$ u

T) $BE = ?$ Resp. 12 u

40. A B M C

H) $BM = MC$

T) $AB^2 + AC^2 = 2\,(AM^2 + BM^2)$

41. A B C D

H) $BC = DC$
$AB = a$
$AC = m$
$AD = b$

T) $m = \sqrt{a \times b + \dfrac{(b-a)^2}{4}}$

42. A B C D

H_1) $AB \times CD = 2\,AD \times BC$ H_2) $\dfrac{1}{\mathit{AD}} + \dfrac{7}{AB} = \dfrac{8}{AC}$

T_1) $\dfrac{2}{AB} + \dfrac{1}{AD} = \dfrac{3}{AC}$ T_2) $AB \times CD = 7\,BC \times AD$

43. A B C D

H) $\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{BD} = \dfrac{1}{BC}$ T) $AB \times BD = BC \times AD$

44. A B C D

H) $BC = \dfrac{3}{7}\,BD$

T) $AB = \dfrac{7AC - 3AD}{4}$

45. En una recta se toman los puntos consecutivos A, B, C, D, E y F, de modo que : $BE = 5/8\ AF$. Calcular BE sabiendo que $AC + BD + CE + DF = 39$ u. Resp. 15 u.

46. A B C D E

H) $AC = \dfrac{AD}{2}$; $DE = \dfrac{AE}{3}$; $CD = 5$ u.

T) DE = ? Resp. 5 u.

47. A B C D E F G

H) AB = BC ; CD = 2 AC T) BF = ?
EF = FG ; DE = 2 EG
AB + FG = 4,5 u. Resp. 22,5 u.

48. A M C D B

H) AM = MB
CD = 2 MC = 2 DB T) DB = ? Resp. 2 u.
AM - CD = 4 u.

49. A B C D

H) 3 AD x BC = AB x CD T) $BC = \dfrac{AB \times BD}{4\,AB + 3\,BD}$

50. A B C D

H) 3 AD x BC = AB x CD
AD = 4 AB T) AB = ? Resp. 4.06 u.
AC = 5 u.

51. A B C D

H) CD = 2 AB
AC = 8 u. T) BC = .? Resp. 2 u.
BD = 14 u.

52. A B C D

H) BC = 3 u.
AC + BD = 14 u T) AD = ?. Resp. 11 u.

53. A M P B Q

H) AP x BQ = PB x AQ
AM = MB
MP = 3 u T) MB = ? Resp. 6 u.
MQ = 12 u

54. A P B Q

H) AP x BQ = PB x AQ
AP = 6 u T) AB = ? Resp. 9,2 u
PQ = 14 u

55. Q A P B

H) $AQ \times PB = AP \times BQ$ T) $\dfrac{2}{AB} = \dfrac{1}{AP} - \dfrac{1}{AQ}$

56. Sobre una recta se toman los puntos A, B, C y D tal que AB = 1u., CD = 3 u. y $\dfrac{1}{BC} + \dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{AD} = 1$.
Hallar BC. Resp. 2 u.

57.


H) $AP \times BQ = PB \times AQ$ T) $AB = \dfrac{2\,PB \times BQ}{BQ - PB}$

58.


H_1) $\dfrac{1}{PB} + \dfrac{1}{BQ} = \dfrac{2}{AB}$ H_2) $AB = \dfrac{2AP \times BQ}{PQ}$ T) $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AQ}{QB}$

59.


H) $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AQ}{QB}$ T) $\dfrac{1}{PB} - \dfrac{1}{BQ} = \dfrac{2}{AB}$ T) $AB = \dfrac{2\,AP \times BQ}{PQ}$

60.


H) $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AQ}{QB}$ T) $MB^2 = MP \times MQ$
$AM = MB$

61.


H) $PB \times AQ = AP \times BQ$ T) $BQ = 2\,PB$
$AP = PQ$

62.


H) $\dfrac{5}{AQ} = \dfrac{1}{AP}$ T) $AP \times BQ = AQ \times PB$
$AQ = 3\,AB$

63.


H) $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AQ}{QB}$ T) AP = ? Resp. 554,55 u.
PB = 12.43 u
BQ = 13 u.

64.


H) PA = 10 u. T) PC = ?. Resp. 60 u.
PB = 30 u
$\dfrac{AC}{5} = \dfrac{BC}{3}$

65.


H) $\dfrac{EC}{CF} = \dfrac{EB}{BF}$; $BE = \dfrac{3}{4}BC$; EC = 2 u.
T) BF = ? Resp. 12 u.

66.

H) $AM = \dfrac{MB}{3}$

$AP = 30$ u T) $PB = ?$. Resp. 6 u.

$PM = 24$ u.

67. Los segmentos a, b, c son proporcionales a los números 7, 5 y 6 respectivamente. Si : $a + b + c = 12$ u., calcular las medidas de a, b y c. Resp. 4,67 ; 3,33 ; 4 u.

68.

H) $AP = \dfrac{PD}{3}$ T) $BP = ?$ Resp. 6 u.

$BD - 3\,AB = 24$ u.

69.

T) $BG = \dfrac{AD + CE + DF + EH}{2}$

70.

H) $AC + BD + CE = 44$ u T) $DE = ?$ Resp. 4 u.

$AE = 25$ u.

$DE = 2\,AB$

71.

H) $AB = \dfrac{AC + CD}{2}$ T) $AB = ?$ Resp. 1 u.

$BD^2 - 2\,BD + 1 = 0$

72. Dados los puntos colineales Ao, A_1, A_2,................., An; si:

$AoA_1 = a$

$A_1A_2 = 1$

$A_2A_3 = 1/a$, donde a es un número real. Hallar AoAn. Resp. $a^2/(a - 1)$

73. A, B, C, D y E son puntos colineales tales que: $2\,AB = 3\,BC = 4\,CD = 5\,DE$ y $AE + BD = 56$. Hallar AB. Resp. 15 u.

74. A, B, C, D, E, F, G y H son puntos colineales tales que los segmentos CF, BG y AH son proporcionales a los números 12, 20 y 30 respectivamente, y $AD + BE + CF + DG + EH = 620$ u., Hallar CF; BG y AH. Resp. 120; 200; 300 u.

75. A, B, C, D, E y F son puntos colineales tales que: $CD = 8$; $AF = 28$; $AB = EF$ y $BC = DE$. Hallar AD. Resp. 18 u.

76.

H) $AC = \dfrac{9}{4}CD$; $AB = \dfrac{7}{8}CD$; $BC = \dfrac{33}{2}$

T) $AD = ?$ Resp. 39 u.

77.

H) $CD = 2\,EF$

$AC = CE$ T) $AB = 3\,EF$

$BD = DF$

78.

H) $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{CD}$ T) $\dfrac{2}{AC} - \dfrac{2}{BD} = \dfrac{1}{AB} - \dfrac{1}{CD}$

79.

H) $AM = MC$ T) $MN = \dfrac{AB + CD}{2}$

$BN = ND$

80.

H) $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{CD}$ T) $CD = ?$ Resp. 8 u.; 12 u.

$AD = 24$ u.

$BC = 4$ u.

81. A, B, C, D y E son puntos colineales tales que: $\dfrac{BC}{CE} = \dfrac{AB}{AE}$; $DE = 6$ u; $CD = 4$ u y $BD = DE$. Hallar AC.

Resp. 5 u.

2.12.1. EJERCICIOS RESUELTOS

21.

$PB \times BQ = 28$ u.

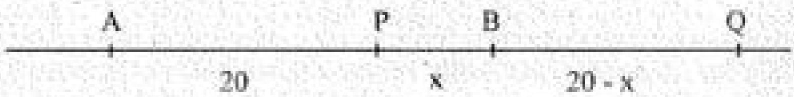
$BQ - PB = 7$ u. 2 ecuaciones => $BQ^2 - 7\,BQ - 28 = 0$

$\therefore$ $BQ = 9{,}84$ u. ///

$\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AQ}{QB}$ => $\dfrac{AB - 2{,}84}{2{,}84} = \dfrac{AB + 9.84}{9{,}84}$

$\therefore$ $AB = 8$ u. ///

24.



$AP = PQ = 20$ u.

$AP \times BQ = PB \times AQ$ => $20\,(20 - x) = 40\,x$

$\therefore\ x = PB = 6{,}6$ u. ///

35.

$AB = AP + PB$

$PD = PB + 2\,AB$ $\therefore$ $PD = PB + 2\,(AP + PB)$

$PD - 2\,AP = 3\,PB$ => $PB = \dfrac{PD - 2AP}{3}$ ///

42.

$AB \times CD = 2\,AD \times BC$

$AB \times (AD - AC) = 2\,AD \times (AC - AB)$

$AB \times AD - AB \times AC = 2\,AD \times AC - 2\,AD \times AB$

$$3AB \times AD = 2\,AD \times AC + AB \times AC$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{AB} + \frac{1}{AD} = \frac{3}{AC} \quad ///$$

47.

$AB = BC = a \qquad \therefore\ CD = 4\,a$

$EF = FG = b \qquad \therefore\ DE = 4\,b$

$AB + FG = a + b = 4{,}5$ u.

$BF = a + 4\,a + 4\,b + b = 5\,(a + b) = 5\,(4{,}5) = 22{,}5$ u. ///

59.

$T_1)\quad \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{BQ}$

$$\frac{AB-PB}{PB} = \frac{AB+BQ}{BQ}$$

$$\frac{AB}{PB} - 1 = \frac{AB}{BQ} + 1$$

$$AB\ \frac{1}{PB} - \frac{1}{QB} = 2$$

$$\therefore\ \frac{1}{PB} - \frac{1}{BQ} = \frac{2}{AB}$$

$T_2)\quad \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{BQ}$

$$AP \times BQ = AQ \times PB = (AB + BQ) \times (PQ - BQ)$$

$$AP \times BQ = AB \times PQ + BQ \times PQ - AB \times BQ - BQ^2$$

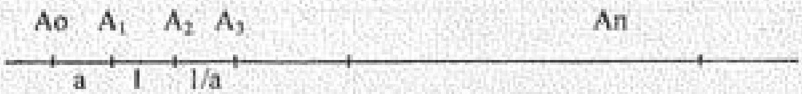
$$AP \times BQ = AB \times PQ + BQ \times (PQ - AB - BQ)$$

$$AP \times BQ = AB \times PQ - AP \times BQ$$

$$2\,AP \times BQ = AB \times PQ$$

$$\therefore\ AB = \frac{2AP \times BQ}{PQ}$$

72.



$Ao\,An = (a + 1 + 1/a + 1/a^2 + \ldots\ldots\ldots)$

$Ao\,An - a = (1 + 1/a + 1/a^2 + \ldots\ldots\ldots)$

$a\,(Ao\,An - a) = a\,(1 + 1/a + 1/a^2 + \ldots\ldots\ldots) = Ao\,An$

$a\,Ao\,An - a^2 = Ao\,An$

$\therefore\ Ao\,An = a^2/(a-1)$ ///

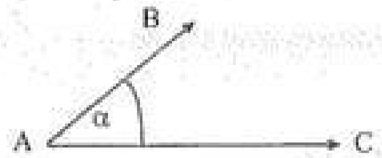
3. ÁNGULOS

3.1. DEFINICIÓN

Es la figura geométrica que está formada por dos rayos que tienen el mismo origen.

Dos rectas no paralelas en un mismo plano determinan un ángulo.

3.2. REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y ELEMENTOS



Lados del ángulo : $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

Vértice : Punto A

3.3. DENOMINACIÓN

1. Por la letra del vértice entre las otras dos : $\measuredangle BAC$, $\widehat{BAC}$

2. Por la letra del vértice : $\measuredangle A$, $\widehat{A}$

3. Por una letra, símbolo o número en el ángulo : $\measuredangle \alpha$, $\widehat{\alpha}$

3.4. UNIDADES DE MEDIDA

RADIÁN (rad.) : Es la medida de un ángulo, cuya longitud del arco subtendido es igual al radio del círculo.

GRADO SEXAGESIMAL: Si a una revolución completa se la divide en 360 partes de igual medida, a cada una de estas partes iguales se denomina grado. (°).

1 REVOLUCIÓN = 360° = 2 π rad. (π = 3.14159265. . . .)

Los submúltiplos del grado sexagesimal son el minuto y el segundo.

1 minuto (1 ') = 1 ° / 60 ; 1 segundo (1") = 1 ' / 60

CUADRO DE EQUIVALENCIAS PARA ÁNGULOS

SEXAGESIMAL	RADIAN
360 °	2 π
270 °	3/2 π
180 °	π
90 °	π/2
60 °	π/3
45 °	π/4
30 °	π/6

3.5. MEDIDA DE UN ÁNGULO

Es un número que representa las veces que está contenida la unidad de medida en el ángulo.

3.6. CONGRUENCIA DE ÁNGULOS

Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida, así :

$m \measuredangle A = \pi/3$ rad

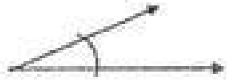
$m \measuredangle B = \pi/3$ rad

$m \measuredangle A = m \angle B \quad \Rightarrow \quad \measuredangle A \equiv \measuredangle B$

3.7. CLASES DE ÁNGULOS

3.7.1. POR SU MEDIDA

1. **AGUDO.** Su medida es menor a $\pi/2$ rad

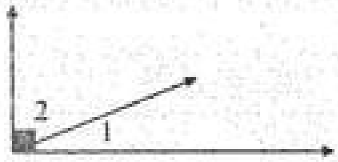


2. **RECTO.** Su medida es igual a $\pi/2$ rad

3. **OBTUSO.** Su medida es mayor a $\pi/2$ rad y menor a π rad.

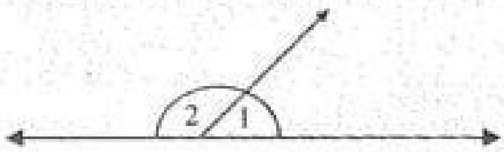
4. **ÁNGULO DE LADOS COLINEALES (LLANO).** Su medida es igual a π rad.

5. **ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS.** Son dos ángulos cuya suma de medidas es igual a $\pi/2$ rad. A cada ángulo se lo llama el complemento del otro.



$m\measuredangle 1 + m\measuredangle 2 = \pi/2$ rad.

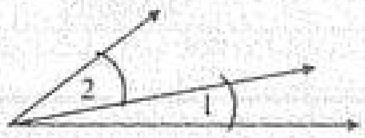
6. **ANGULO SUPLEMENTARIO.** Son dos ángulos cuya suma de medidas es igual a π rad. A cada ángulo se lo llama el suplemento del otro.



$m\measuredangle 1 + m\measuredangle 2 = \pi$ rad.

3.7.2. POR SU POSICIÓN

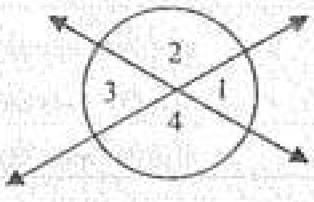
1. **ADYACENTES.** Son dos ángulos que tienen el mismo vértice y un lado común.



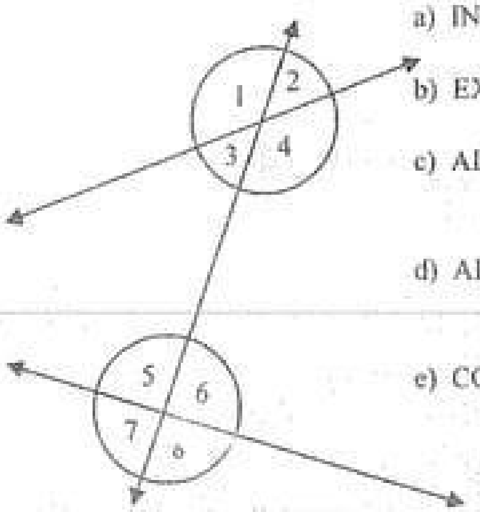
2. **CONSECUTIVOS.** Son los ángulos que tienen un lado común y se forman siguiendo un mismo sentido.

3. **OPUESTOS POR EL VÉRTICE.** Son dos ángulos no adyacentes, formados cuando dos rectas se intersecan.

$\measuredangle 1$ y $\measuredangle 3$
$\measuredangle 2$ y $\measuredangle 4$



4. ÁNGULOS FORMADOS EN DOS RECTAS CORTADAS POR UNA TRANSVERSAL.



a) INTERNOS : ∡3 , ∡4 , ∡5 , ∡6

b) EXTERNOS : ∡1 , ∡2 , ∡7 , ∡8

c) ALTERNOS INTERNOS : ∡3 y ∡6
∡4 y ∡5

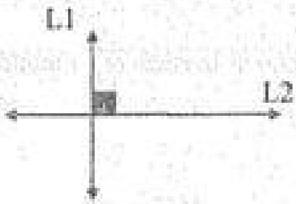
d) ALTERNOS EXTERNOS : ∡1 y ∡8
∡2 y ∡7

e) CORRESPONDIENTES :

∡1 y ∡5 ; ∡2 y ∡6
∡3 y ∡7 ; ∡4 y ∡8

3.8. RECTAS PERPENDICULARES

Dos rectas son perpendiculares si, y sólo si, se intersecan formando un ángulo recto.



$\overleftrightarrow{L1} \perp \overleftrightarrow{L2}$

3.9. PERPENDICULAR DE UN PUNTO A UNA RECTA

Es el segmento trazado desde el punto hasta la recta y forma con ella un ángulo de $\pi/2$ rad. PP′

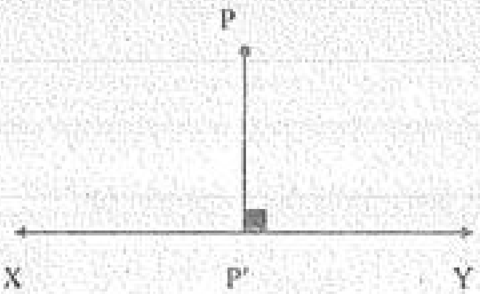
3.10. DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Es la longitud del segmento perpendicular del punto a la recta. PP′

3.11. PROYECCIÓN ORTOGONAL

3.11.1. DE UN PUNTO SOBRE UNA RECTA

Es el pie de la perpendicular trazada por dicho punto a la recta.



P punto a proyectarse

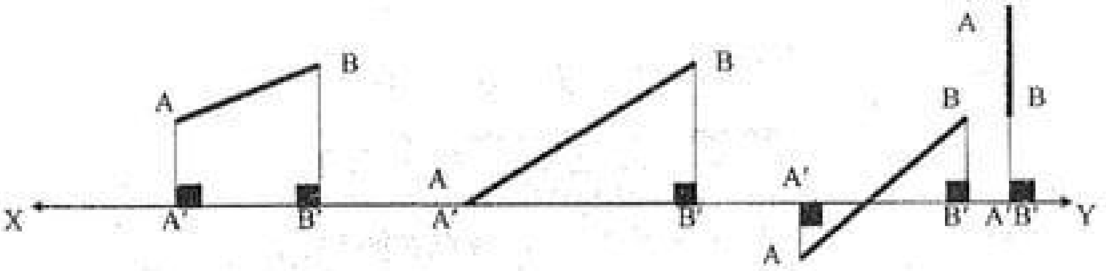
$\overline{PP'}$ proyectante

P′ proyección de P en la recta $\overleftrightarrow{XY}$

3.11.2. DE UN SEGMENTO SOBRE UNA RECTA

Es el segmento comprendido entre las proyecciones de los puntos extremos del segmento a proyectarse.

$\overline{A'B'}$ proyección del segmento $\overline{AB}$ en la recta $\overleftrightarrow{XY}$.



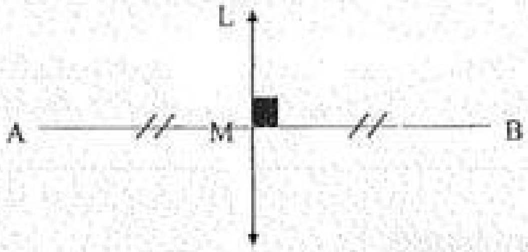
3.12. MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO

Es la recta perpendicular trazada por el punto medio de un segmento.

$AM = MB$

$\overleftrightarrow{L} \perp \overline{AB}$

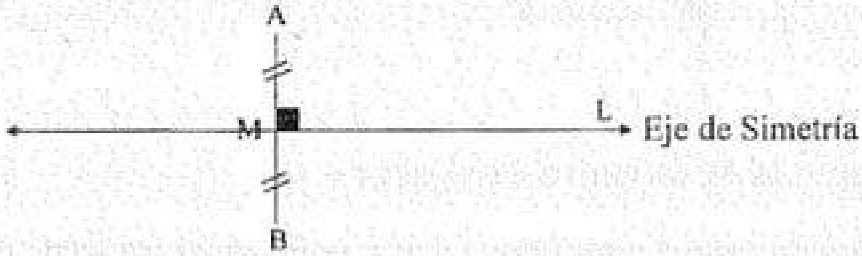
$\overleftrightarrow{L}$ Mediatriz de $\overline{AB}$



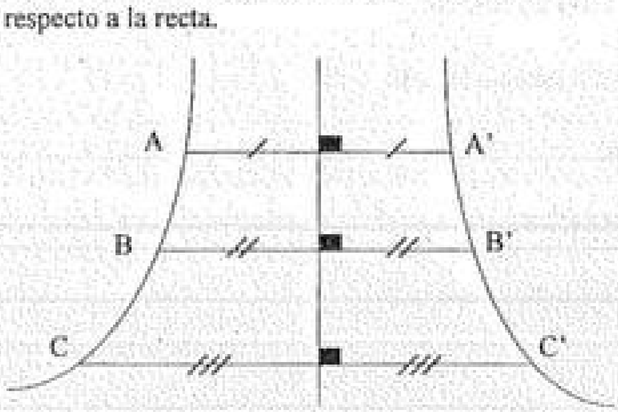
3.13. SIMETRÍA

3.13.1. CON RESPECTO A UNA RECTA

Se dice que dos puntos A y B son simétricos con respecto a una recta, si la recta es la mediatriz del segmento AB.

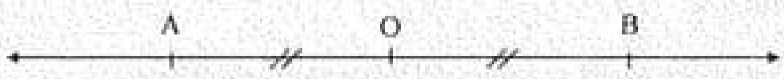


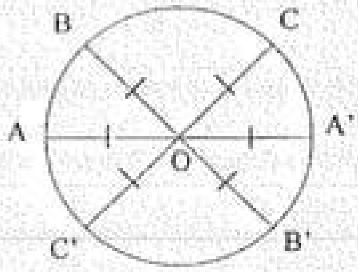
Una figura geométrica es simétrica con respecto a una recta, si cada uno de sus puntos forma parte de un par de puntos simétricos con respecto a la recta.



3.13.2. CON RESPECTO A UN PUNTO

Dos puntos A y B son simétricos con respecto a un punto O, si O es el punto medio del segmento AB.

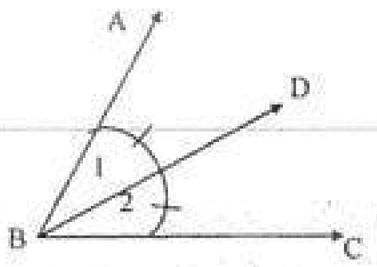




Una figura geométrica es simétrica con respecto a un punto O, si cada uno de sus puntos forma parte de un par de puntos simétricos con respecto a O.

3.14. BISECTRIZ

Es el rayo que divide a un ángulo dado en dos ángulos de igual medida.



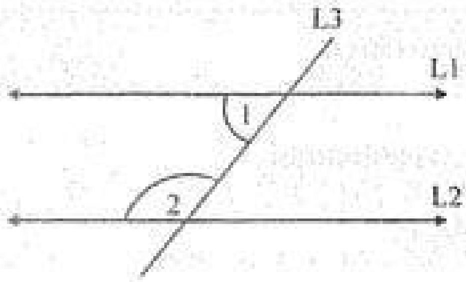
Si $m\measuredangle 1 = m\measuredangle 2$

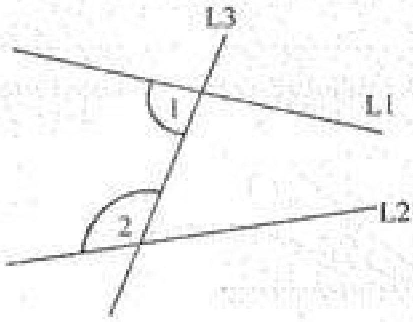
$\overrightarrow{BD}$ es bisectriz del $\measuredangle ABC$

3.15. PROPIEDADES

POSTULADO

Si en un plano, dos rectas son cortadas por una transversal, y si la suma de las medidas de los ángulos internos formados de un mismo lado es igual a π rad., las dos rectas son paralelas; caso contrario, las dos rectas se intersecan en un punto.





Si: $m\measuredangle 1 + m\measuredangle 2 = \pi$ rad.

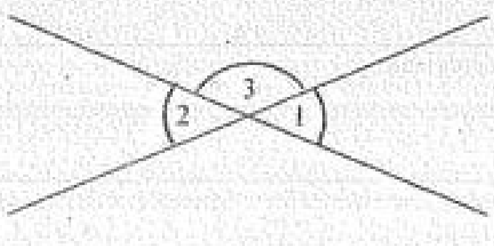
$\Rightarrow \overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L2}$

Si: $m\measuredangle 1 + m\measuredangle 2 \neq \pi$ rad.

$\Rightarrow \overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ se intersecan

TEOREMA # 1.

Los ángulos opuestos por el vértice, son congruentes.



H) $\measuredangle 1$ y $\measuredangle 2$ opuestos por el vértice

T) $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 2$

D) $m\measuredangle 1 + m\measuredangle 3 = \pi$ rad

$m\measuredangle 2 + m\measuredangle 3 = \pi$ rad

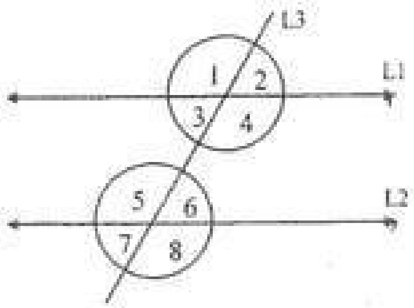
$m\measuredangle 1 + m\measuredangle 3 = m\angle 2 + m\angle 3$

$m\measuredangle 1 = m\measuredangle 2$

$\measuredangle 1 \cong \measuredangle 2$ ///.

TEOREMA # 2.

Los ángulos alternos internos, alternos externos y correspondientes, formados en dos rectas paralelas cortadas por una transversal, son congruentes.



H) $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$

T_a) $\measuredangle 3 \cong \measuredangle 6$
T_b) $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 8$
T_c) $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 5$

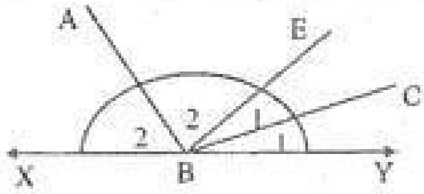
D_a) $m\measuredangle 3 + m\measuredangle 5 = \pi$ rad
$m\measuredangle 5 + m\measuredangle 6 = \pi$ rad
$m\measuredangle 3 + m\measuredangle 5 = m\measuredangle 5 + m\measuredangle 6$
$m\measuredangle 3 = m\measuredangle 6$
$\Rightarrow \measuredangle 3 \cong \measuredangle 6$ ///.

D_b) $m\measuredangle 1 + m\measuredangle 3 = \pi$ rad
$m\measuredangle 6 + m\measuredangle 8 = \pi$ rad
$m\measuredangle 1 + m\measuredangle 3 = m\measuredangle 6 + m\measuredangle 8$
$m\measuredangle 3 = m\measuredangle 6$
$m\measuredangle 1 = m\measuredangle 8$
$\Rightarrow \measuredangle 1 \cong \measuredangle 8$ ///.

D_c) $m\measuredangle 1 = m\measuredangle 8$
$m\measuredangle 5 = m\measuredangle 8$
$m\measuredangle 1 = m\measuredangle 5 \quad \Rightarrow \quad \measuredangle 1 \cong \measuredangle 5$ ///.

TEOREMA # 3.

Las bisectrices de dos ángulos adyacentes suplementarios son perpendiculares entre sí.



H) $\measuredangle XBE$ y $\measuredangle EBY$ suplementarios
$\overrightarrow{BA}$ bisectriz $\measuredangle XBE$
$\overrightarrow{BC}$ bisectriz $\measuredangle EBY$

T) $\overline{BA} \perp \overline{BC}$

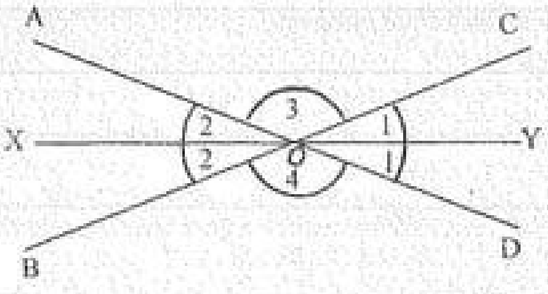
D) $2m\measuredangle 1 + 2m\measuredangle 2 = \pi$ rad
$m\measuredangle 1 + m\measuredangle 2 = \pi/2$ rad
$m\measuredangle ABC = \pi/2$ rad $\quad \Rightarrow \quad \overline{BA} \perp \overline{BC}$ ///.

TEOREMA # 4.

Las bisectrices de dos ángulos opuestos por el vértice, son colineales.

H) $\measuredangle AOB$ y $\measuredangle COD$ Opuestos por el vértice
$\overline{OX}$ bisectriz $\measuredangle AOB$
$\overline{OY}$ bisectriz $\measuredangle COD$

T) X – O – Y Colineales

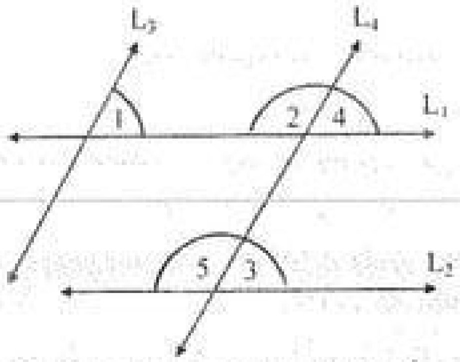


D) $2m\measuredangle 1 + 2m\measuredangle 2 + m\measuredangle 3 + m\measuredangle 4 = 2\pi$ rad.
$m\measuredangle 3 = m\measuredangle 4$
$2m\measuredangle 1 + 2m\measuredangle 2 + 2m\measuredangle 3 = 2\pi$ rad
$m\measuredangle 1 + m\measuredangle 2 + m\measuredangle 3 = \pi$ rad.

X - O - Y colineales ///.

TEOREMA # 5.

Si dos ángulos tienen sus lados respectivamente paralelos, son congruentes (paralelos en el mismo sentido) o suplementarios.



H) $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$; $\overleftrightarrow{L_3} \parallel \overleftrightarrow{L_4}$

T_a) $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 3$

T_b) $m\measuredangle 1 + m\measuredangle 5 = \pi$ rad

Da) $m\measuredangle 1 = m\measuredangle 4$

$m\measuredangle 3 = m\measuredangle 4$

$m\measuredangle 1 = m\measuredangle 3$

$\measuredangle 1 \cong \measuredangle 3$ ///.

D_b) $m\measuredangle 2 + m\measuredangle 4 = \pi$ rad

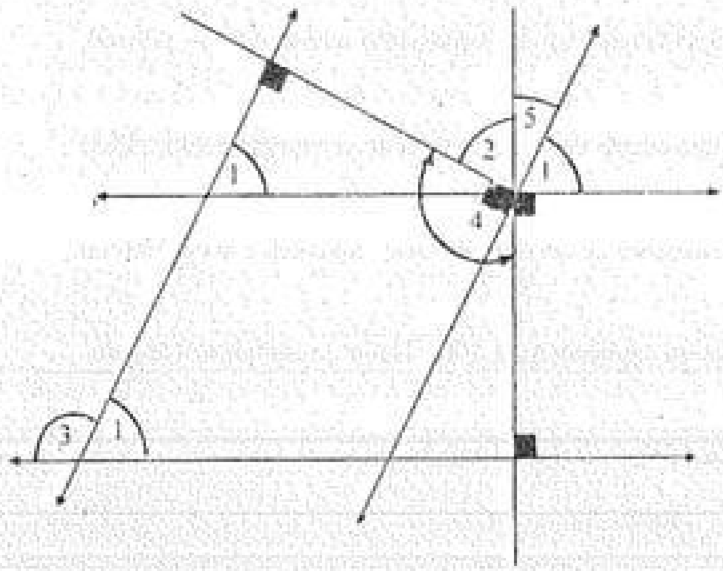
$m\measuredangle 2 = m\measuredangle 5$

$m\measuredangle 4 = m\measuredangle 1$

$m\measuredangle 5 + m\measuredangle 1 = \pi$ rad ///.

TEOREMA # 6.

Si dos ángulos tienen sus lados respectivamente perpendiculares, son congruentes o suplementarios.



T_a) $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 2$

T_b) $\measuredangle 3 \cong \measuredangle 4$

T_c) $m\measuredangle 1 + m\measuredangle 4 = \pi$ rad

D_a) $m\measuredangle 2 + m\measuredangle 5 = \pi/2$ rad

$m\measuredangle 5 + m\measuredangle 1 = \pi/2$ rad

$m\measuredangle 5 + m\measuredangle 1 = m\measuredangle 2 + m\measuredangle 5$

$\rightarrow m\measuredangle 1 = m\measuredangle 2$

$\Rightarrow \measuredangle 1 \cong \measuredangle 2$ ///.

Db) $m\measuredangle 1 + m\measuredangle 3 = \pi$ rad

$m\measuredangle 2 + m\measuredangle 4 = \pi$ rad

$m\measuredangle 3 = m\measuredangle 4$

$\Rightarrow \measuredangle 3 \cong \measuredangle 4$ ///.

Dc) $m\measuredangle 1 + m\measuredangle 3 = \pi$ rad

$m\measuredangle 3 = m\measuredangle 4$

$\Rightarrow m\measuredangle 1 + m\measuredangle 4 = \pi$ rad ///.

3.16. EJERCICIOS

1.- Uno de los ángulos complementarios, aumentado en $\pi/6$ rad. es igual al otro. ¿Cuánto mide cada ángulo?
Resp. 30°; 60°

2.- La diferencia de dos ángulos suplementarios es $\pi/3$ rad. Hallar el complemento del ángulo menor.
Resp. 30°

3.- Dos ángulos son complementarios, y uno de ellos es $\pi/10$ rad. más, que el triple del otro. ¿Cuánto mide cada ángulo? Resp. 72°; 18°.

4.- ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos suplementarios, si quitando al menor de ellos $\pi/9$ rad. y agregándose al mayor, éste resulta el triple de lo que queda del menor. Resp. 65°; 115°

5.- Dos ángulos son suplementarios; uno de ellos es disminuido en $\pi/12$ rad. para ser agregado al otro, de tal manera que éste nuevo ángulo, es igual a cuatro veces el resto del primero. ¿Cuánto mide cada ángulo?
Resp. 51°; 129°

6.-Hallar la medida del ángulo que disminuido en su suplemento es igual al triple de su complemento.
Resp. 90°

7.- Uno de los ángulos suplementarios es los 3/5 del otro ángulo. ¿Cuánto mide cada ángulo?
Resp. 67.5° ; 112.5°

8.- De dos ángulos complementarios, los 4/3 de uno de ellos más la sexta parte del otro forman un ángulo recto. ¿Cuánto mide cada ángulo? Resp. 64,29° ; 25,71°

9.- ¿Cuánto mide un ángulo que es igual a su suplemento? Resp. 90°

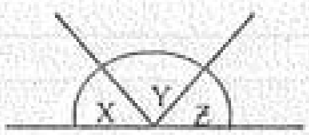
10.- Los 4/7 de un ángulo menos la cuarta parte de su suplemento, dan su suplemento aumentado en $\pi/6$ rad. ¿Cuánto mide el ángulo? Resp. 140°

11.- Dos veces la medida de un ángulo es $\pi/6$ rad. menos que cuatro veces la medida de su complemento. ¿Cuál es la medida del ángulo? Resp. 55°

12.- ¿Cuál es la diferencia entre el suplemento y el complemento de un ángulo que equivale a los 3/7 de un ángulo recto? Resp. 90°

13.- El doble del complemento de un ángulo más el triple de su suplemento es 500°. Hallar la medida del ángulo.
Resp. 44°

14.- Los ángulos X, Y , Z son proporcionales a los números 3, 5 y 7. Hallar el ángulo Z



Resp. 84°

15.- Calcular el valor de dos ángulos suplementarios, de modo que, si al quíntuplo del menor se le disminuye la mitad del mayor, se obtiene el triple del menor aumentado en $\pi/18$ rad. Resp. 40°; 140°

16.- Dos ángulos suplementarios están en la razón 5/4. Hallar sus medidas. Resp. 100° ; 80°

17.- Si al suplemento del suplemento de un ángulo se le aumenta el complemento del complemento del mismo ángulo, resulta el cuádruplo del complemento del mismo ángulo. Hallar el ángulo. Resp. 60°

18.- La medida de uno de los ángulos de un par de ángulos complementarios, es el doble de la medida del otro mas $\pi/20$. Encontrar la medida de cada ángulo. Resp. 27° ; 63°

19.- La diferencia entre los 5/6 del suplemento de un ángulo y el complemento de la mitad del ángulo excede en 5° al doble del complemento del ángulo. Calcular la medida del ángulo. Resp. 75°

20.- El duplo del suplemento de un ángulo es igual al suplemento de la diferencia entre el suplemento y el complemento del ángulo. Calcular la medida del ángulo. Resp. 135°

21.- La suma del complemento de un $\measuredangle \alpha$ con el suplemento de su ángulo doble, es igual a 3/2 del complemento de un $\measuredangle \beta$. Si: $m \measuredangle \alpha - m \measuredangle \beta = 3\pi/20$ rad. Calcular el complemento del ángulo $\measuredangle \alpha$. Resp. 27°

22.- Dos ángulos adyacentes complementarios están en la razón de 2 a 3. Hallar el valor del ángulo formado por la bisectriz del ángulo menor con el lado no común. Resp. 72°

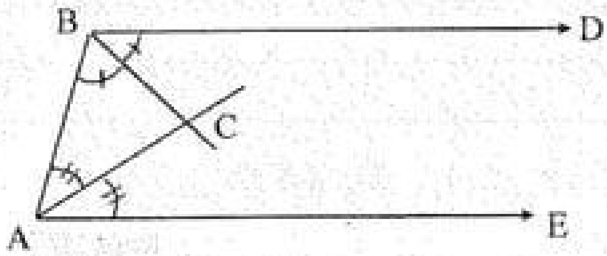
23.- La suma del suplemento de un ángulo con el complemento de su ángulo doble es mayor en 110° al tercio del ángulo. Hallar la medida del ángulo. Resp. 48°

24.- Si el suplemento del complemento de un ángulo más el complemento del suplemento de su ángulo doble es igual al doble del complemento del ángulo. Encontrar la medida del ángulo. Resp. 36°

25.- La sexta parte del suplemento del complemento de un ángulo es igual a la mitad de la cuarta parte del suplemento del complemento de 50°. Hallar la medida del ángulo. Resp. 15°

26.- Los ángulos $\measuredangle$ BAC agudo y $\measuredangle$ CAD recto, son adyacentes. Determinar la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos $\measuredangle$ BAC y $\measuredangle$ BAD. Resp. 45°

27.-

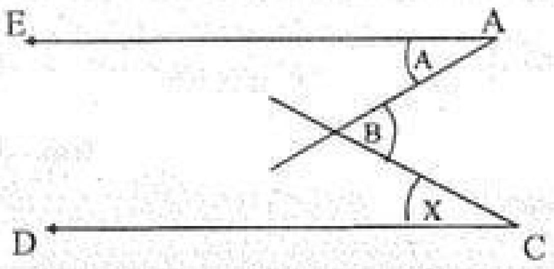


H) $\overrightarrow{BD} \parallel \overrightarrow{AE}$

T) $\overline{BC} \perp \overline{AC}$

28.- En un ángulo llano $\measuredangle$ AOD se trazan los ángulos adyacentes $\measuredangle$ AOB, $\measuredangle$ BOC y $\measuredangle$COD. Si las bisectrices de los ángulos $\measuredangle$ AOB y $\measuredangle$ COD forman un ángulo de 130°, hallar la medida del ángulo $\measuredangle$ BOC. Resp. 80°

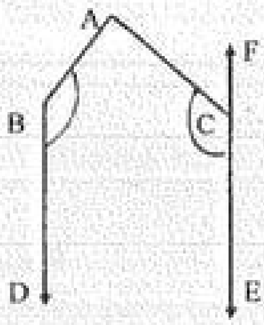
29.-



H) $\overrightarrow{AE} \parallel \overrightarrow{CD}$
$\measuredangle X = 30°$
$\measuredangle B = 7\pi/18$ rad

T) $\measuredangle A = ?$ Resp. 40°

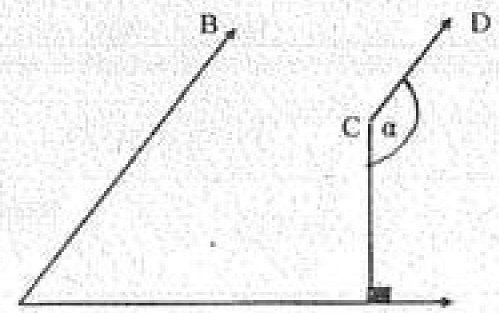
30.-



H) $\overrightarrow{BD} \parallel \overrightarrow{FE}$
$\measuredangle C = 150°$
$\measuredangle B = 13\pi/18$ rad

T) $\measuredangle A = ?$ Resp. 80°

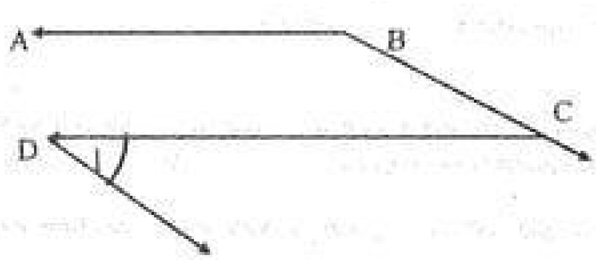
31.-



H) $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$
$\measuredangle A = 54°$

T) $\measuredangle \alpha = ?$ Resp. 144°

32.-

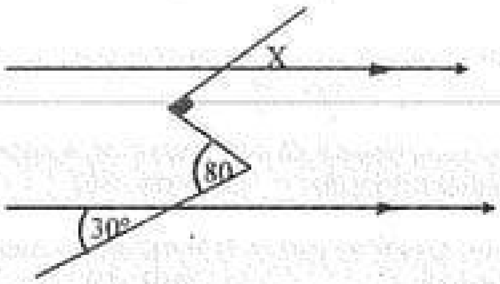


H) $\overrightarrow{BA} \parallel \overrightarrow{DC}$
$\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{DE}$

$\measuredangle B = 3\pi/4$ rad

T) $\measuredangle 1$ =? Resp. 45°

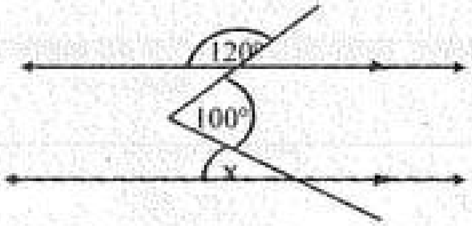
33.



T) $\measuredangle X$ =?

Resp. 40°

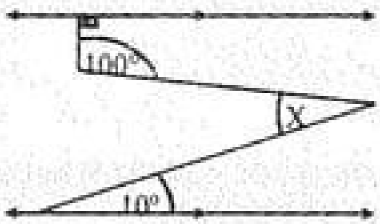
34.



T) $\measuredangle X$ =?

Resp. 40°

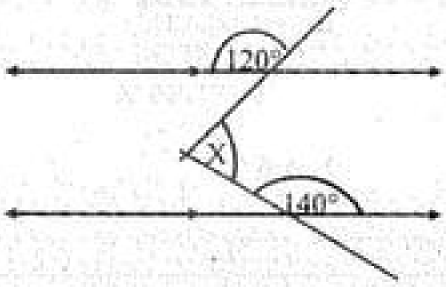
35.



T) $\measuredangle X$ =?

Resp. 20°

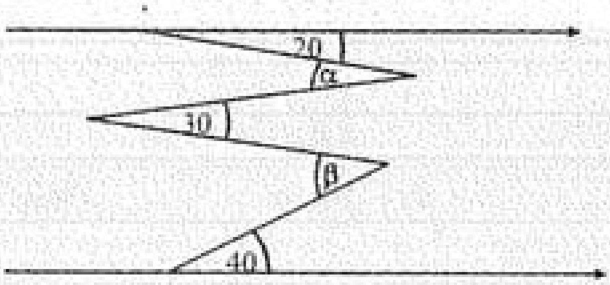
36.



T) $\measuredangle X$ =?

Resp. 100°

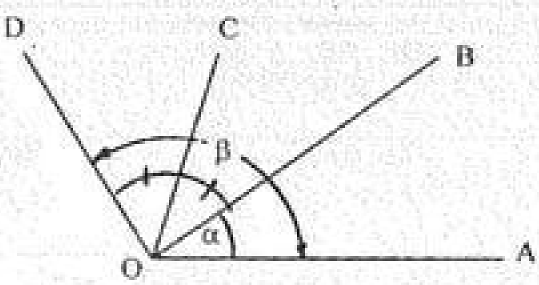
37.



T) $\measuredangle \alpha + \measuredangle \beta$ = ?

Resp. 90°

38.

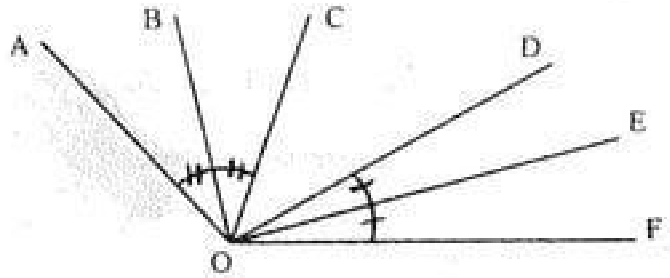


H) $\widehat{\alpha} = 40°$
$\widehat{\beta} = 120°$

T) $\measuredangle COA$ =?

Resp. 80°

39.

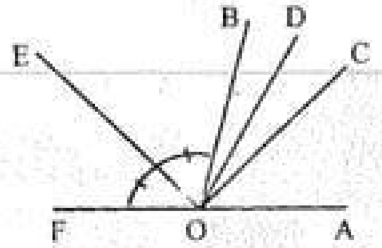


H) ∡ AOD = 100°
∡ COF = 60°

T) ∡ BOE =?

Resp. 80°

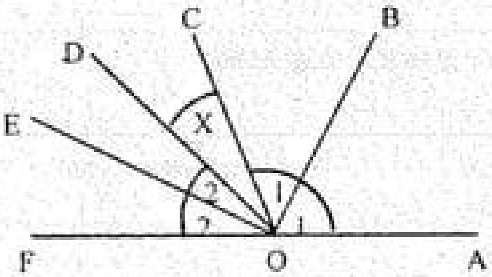
40.



H) ∡ COA = ∡ COB
∡ EOB = 56°
∡ DOA = ∡ EOF

T) ∡ DOC =? Resp. 22°

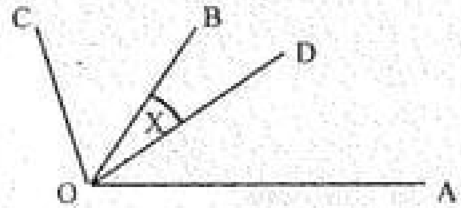
41.



H) ∡ EOB = 5 π/9 rad.

T) ∡ X =? Resp. 20°

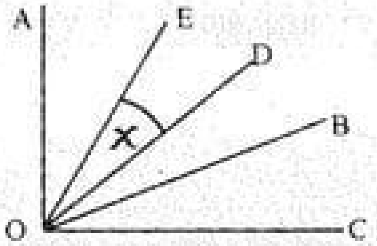
42.



H) ∡ AOB - ∡ BOC = π/6 rad
∡ DOA = ∡ DOC

T) ∡ X =? Resp. 15°

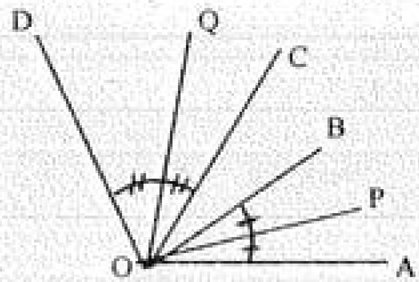
43.



H) ∡ AOE = ∡ EOB
∡ AOD = ∡ DOC
∡ AOC - ∡ AOB = π/9 rad

T) ∡ X =? Resp. 10°

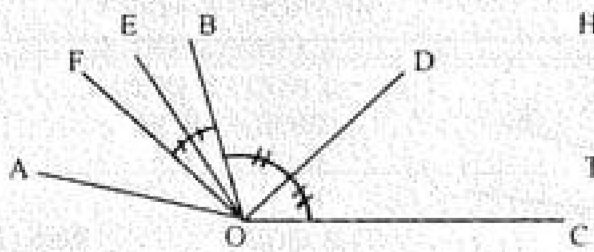
44.



H) ∡ AOC = 5 π/18 rad
∡ BOD = π/2 rad

T) ∡ POQ =? Resp. 70°

45.

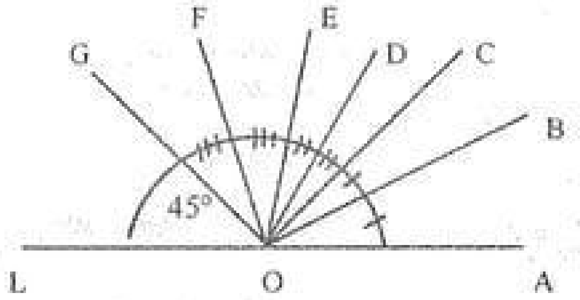


H) ∡ FOB = ∡ AOF
∡ EOF = 15°
∡ BOC - ∡AOB = 2 π/9 rad

T) ∡ FOD =? Resp. 80°

46. Se tienen los rayos $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OT}$. El ángulo formado por las bisectrices de los ángulos ∡ POT y ∡ POQ disminuido en ¼ del complemento de un ∡ X es igual a 4°. Determinar el ∡ X si la diferencia entre los ángulos ∡ POT y ∡ POQ es igual a 20°. Resp. 82°

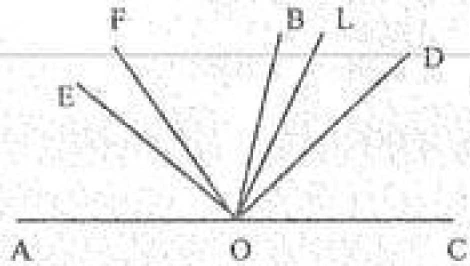
47.



H) $\overrightarrow{OF}$ bisectriz ∡ COL

T) ∡ COE =? Resp. 45°

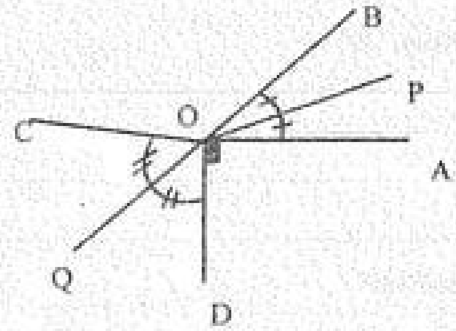
48.



H) ∡ DOC = ∡ DOB
∡ BOE = ∡ EOA
∡ AOF = ∡ FOD
∡ EOL = ∡LOC

T) ∡ FOL =? Resp. 45°

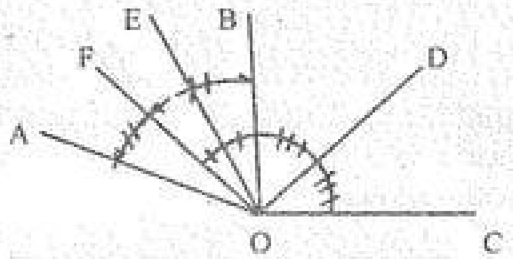
49.



H) ∡ DOA = ∡ BOC = 2 ∡ AOB

T) ∡ POQ =? Resp. 180° y 22,5°
∡ POA =?

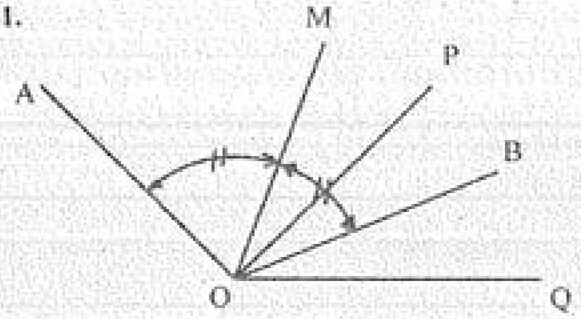
50.



H) ∡ 1 = 15°
∡ BOC - ∡ AOB = 2 π/9 rad

T) ∡ FOD =? Resp. 80°

51.

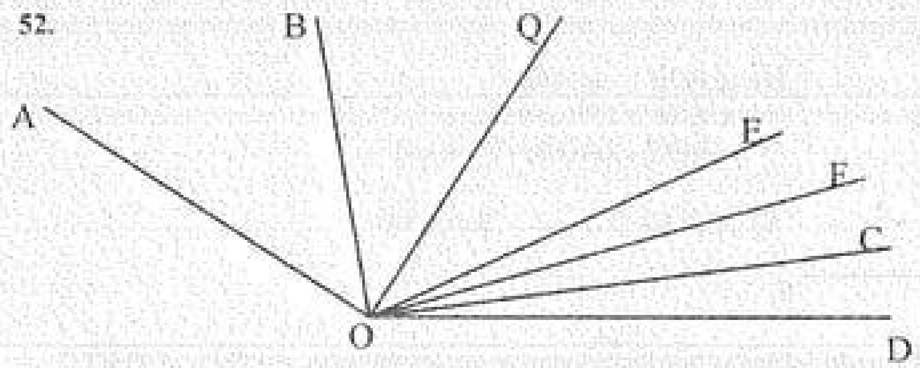


H) ∡ MOP = 20° ∡ MOQ = 80°

$$\frac{\measuredangle AOP}{\measuredangle POB} = \frac{\measuredangle AOQ}{\measuredangle BOQ}$$

T) ∡ MOB =? Resp. 40°

52.



H) ∡AOB =∡ AOF/ 3
∡ COD =∡FOD/ 3
∡ AOQ =∡ QOC
∡BOE = ∡EOD
∡AOD = 150°

T) ∡ QOE =? Resp. 25°

3.17 EJERCICIOS RESUELTOS

5.

D) $180^\circ - \measuredangle 1 + 15^\circ = 4(\measuredangle 1 - 15^\circ)$

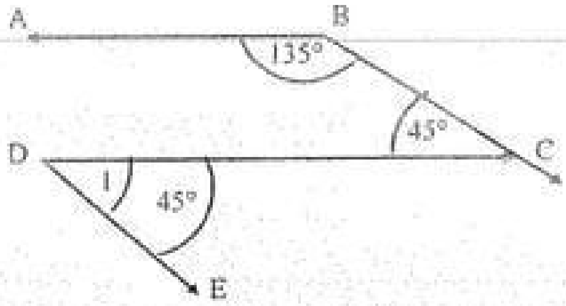
$\therefore \ \measuredangle 1 = 51^\circ$

$\measuredangle 2 = 129^\circ$

6. D) $\measuredangle 1 - (180^\circ - \measuredangle 1) = 3(90^\circ - \measuredangle 1)$

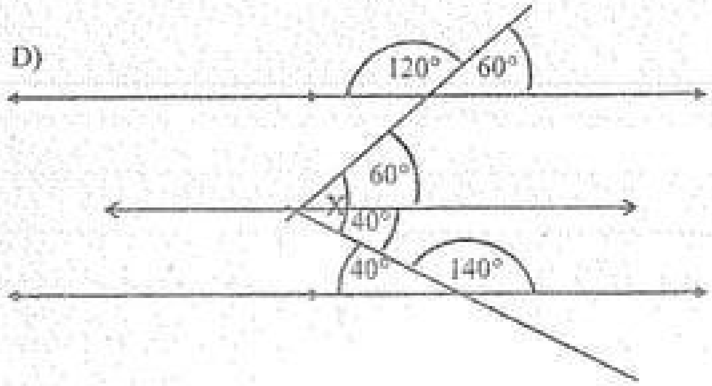
$\therefore \measuredangle 1 = 90^\circ$

32. D)



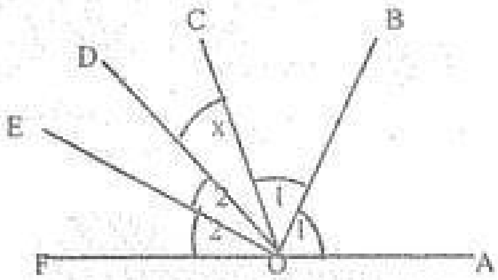
$\therefore \measuredangle 1 = 45^\circ$

36. D)



$\therefore \measuredangle X = 100^\circ$

41.



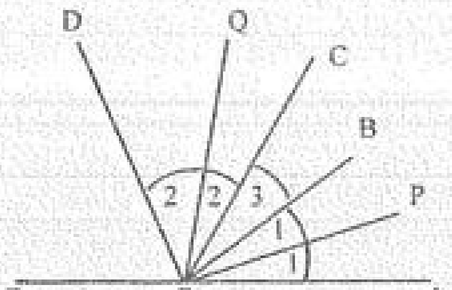
D) $2\measuredangle 1 + \measuredangle X + 2\measuredangle 2 = 180^\circ$ (1)

$\measuredangle 1 + \measuredangle X + \measuredangle 2 = 100^\circ$ (2)

(1) – 2 (2)

$\therefore \measuredangle X = 20^\circ$

44.



D) $2\measuredangle 2 + \measuredangle 3 = 90^\circ$ (1)

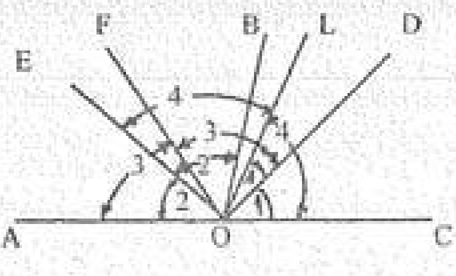
$2\measuredangle 1 + \measuredangle 3 = 50^\circ$ (2)

$\measuredangle 1 + \measuredangle 2 + \measuredangle 3 = \measuredangle POQ$ (3)

(3) en [(1) + (2)]

$\measuredangle POQ = 70^\circ$

48.



D) $\measuredangle 1 + \measuredangle 2 = 90^\circ$ (1)

$2\measuredangle 3 + \measuredangle 1 = 180^\circ$ (2)

$2\measuredangle 4 + \measuredangle 2 = 180^\circ$ (3)

(1) en [(2) + (3)]

$\therefore \ \measuredangle 3 + \measuredangle 4 = 135^\circ$ (4)

$\measuredangle 3 + \measuredangle 4 + \measuredangle FOL = 180^\circ$ (5)

(4) en (5)

$\therefore \measuredangle FOL = 45^\circ$

UNIDAD 4

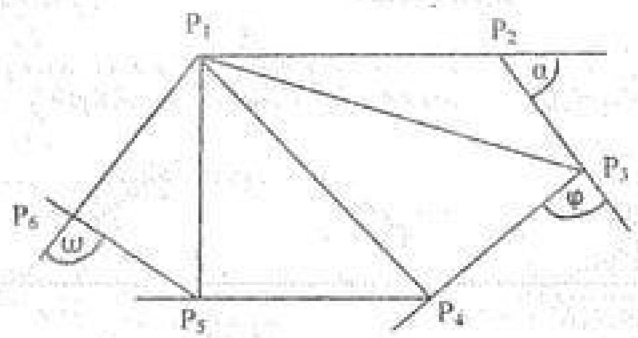
4. POLÍGONOS

4.1. DEFINICIÓN.

$P_1, P_2, P_3 \ldots\ldots\ldots\ldots P_n$ son n puntos coplanares distintos ($n \geq 3$) y si al formar con estos puntos n segmentos, cumplen las siguientes condiciones :

1. Ningún par de segmentos se intersecan excepto en los puntos extremos.
2. Ningún par de segmentos con extremos comunes son colineales.

La figura geométrica formada es un polígono.



4.2. ELEMENTOS

1.- VÉRTICES. Son los n puntos coplanares dados. $P_1, P_2, P_3 \ldots\ldots\ldots\ldots P_n$

2.- LADOS. Son los segmentos que unen los puntos coplanares dados.

$\overline{P_1P_2},\ \overline{P_2P_3},\ \overline{P_3P_4},\ \overline{P_4P_5} \ldots\ldots\ldots\ldots$

PERÍMETRO. (**P**). Es igual a la suma de las longitudes de los lados del polígono.

$$\mathbb{P} = P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

3.- DIAGONALES. Son los segmentos que unen dos vértices no consecutivos del polígono.

$\overline{P_1P_3},\ \overline{P_1P_4},\ \overline{P_1P_5} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

4.- ÁNGULOS INTERNOS. Son los ángulos formados por dos lados del polígono.

$\widehat{P_1P_2P_3},\ \widehat{P_2P_3P_4},\ \widehat{P_3P_4P_5} \ldots\ldots\ldots\ldots$

5.- ÁNGULOS EXTERNOS. Son los ángulos formados por un lado y la prolongación de otro lado consecutivo.

$\measuredangle \alpha,\ \measuredangle \varphi,\ \measuredangle \omega \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

4.3. DENOMINACIÓN

Por las letras de los n puntos siguiendo un mismo sentido: Polígono $P_1\ P_2\ P_3 \ldots\ldots\ldots P_n$

4.4. CLASIFICACIÓN

1.- POR EL NÚMERO DE LADOS. Los polígonos pueden ser :

Triángulo	(3 lados)
Cuadrilátero	(4 lados)
Pentágono	(5 lados)
Hexágono	(6 lados)
Heptágono	(7 lados)
....	....

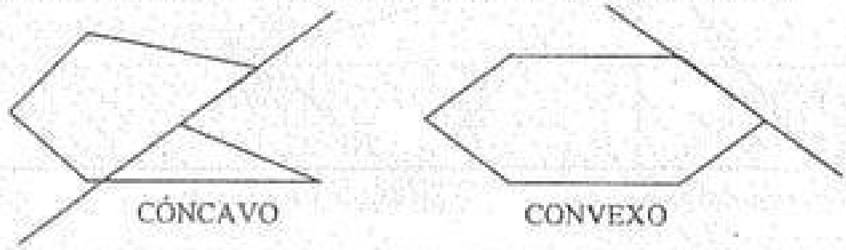
2.- POR SUS ELEMENTOS. Los polígonos pueden ser:

EQUIANGULAR. Es el polígono que tiene todos sus ángulos internos congruentes.

EQUILÁTERO. Es el polígono que tiene todos sus lados congruentes.

POLÍGONO REGULAR. Es aquel que a la vez es equilátero y equiángular.

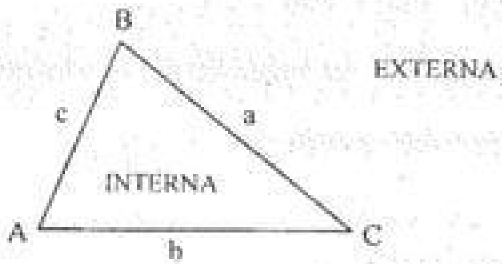
3.- CÓNCAVOS Y CONVEXOS. Si todos los puntos de un polígono están a un mismo lado de una recta que contienen a cualquiera de sus lados, el polígono es convexo, de lo contrario es cóncavo.



4.5. TRIÁNGULO

Es la figura geométrica formada por tres segmentos, que unen tres puntos no colineales.

Todo triángulo determina en su plano dos subconjuntos: la región interna y la región externa del triángulo.



Cada lado se opone a un vértice. Los lados se representan con la letra minúscula de su vértice opuesto: $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$

4.5.1. DENOMINACION

Por los vértices: ΔABC

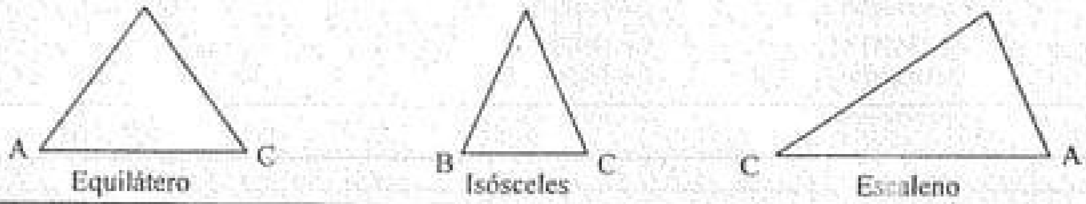
4.5.2. CLASIFICACIÓN

1.- POR SUS LADOS. Los triángulos pueden ser :

EQUILÁTERO. Si sus tres lados son congruentes. $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{AC}$

ISÓSCELES. Si dos de sus lados son congruentes. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

ESCALENO. Si sus tres lados no son congruentes.



2.- POR SUS ÁNGULOS. Los triángulos pueden ser:

EQUIÁNGULO. Si sus tres ángulos internos son congruentes. $\widehat{A} \cong \widehat{B} \cong \widehat{C}$

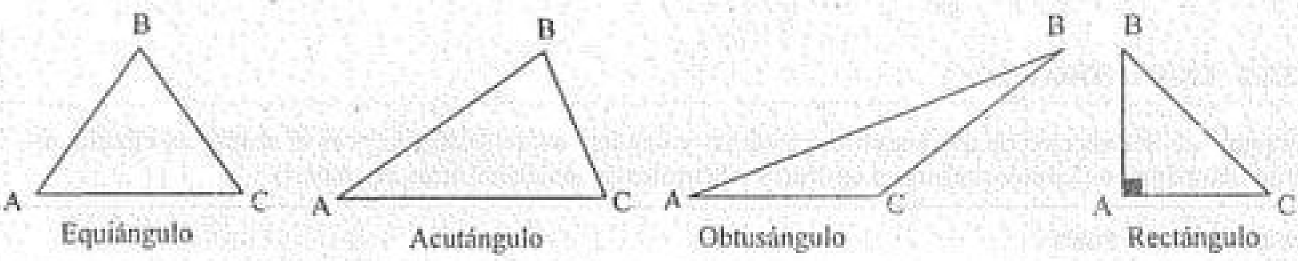
ACUTÁNGULO. Si sus tres ángulos internos son agudos.

OBTUSÁNGULO. Si uno de sus ángulos internos es obtuso.

$$\pi/2 \text{ rad} < \widehat{C} < \pi \text{ rad}$$

RECTÁNGULO. Si uno de sus ángulos internos es recto. $\widehat{A} = \pi/2$ rad

Los lados que forman el ángulo recto se llaman catetos (AB y AC) y el lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa (BC).



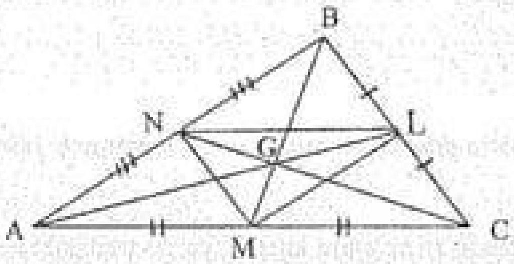
4.5.3. LÍNEAS Y PUNTOS FUNDAMENTALES

4.5.3.1. BASE

La base de un triángulo es cualquiera de sus tres lados.

4.5.3.2. MEDIANA

Es el segmento que une un vértice del triángulo y el punto medio del lado opuesto.



$\overline{AL} = m_a$

$\overline{BM} = m_b$ G Baricentro

$\overline{CN} = m_c$

4.5.3.2.1 BARICENTRO (G)

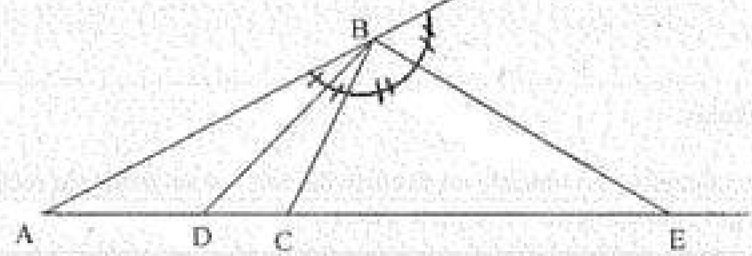
Es el punto de intersección de las tres medianas, y es el centro de gravedad del triángulo.

El baricentro siempre está ubicado en la parte interna de un triángulo.

El baricentro forma en cada mediana dos segmentos, uno doble del otro; el del vértice es el doble del otro: AG = 2GL ; BG = 2GM ; CG = 2GN.

4.5.3.3. BISECTRIZ

Es el segmento que divide al ángulo interno o externo de un triángulo en dos ángulos de igual medida.



$\overline{BD}$ bisectriz interna

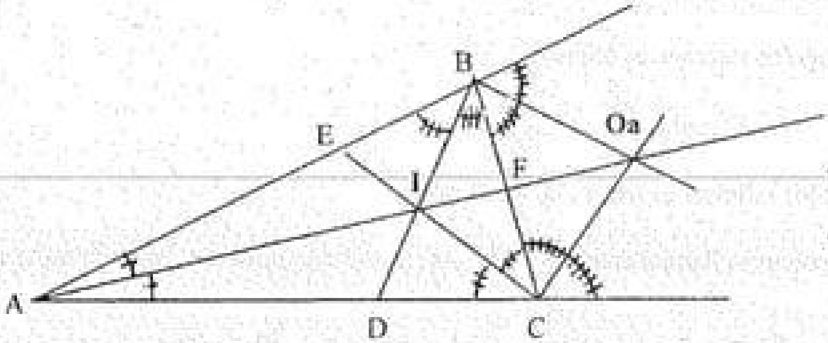
$\overline{BE}$ bisectriz externa

$\widehat{DBE} = 90°$

4.5.3.3.1. INCENTRO (I)

Es el punto de intersección de las tres bisectrices internas y es el centro del circulo inscrito en el triángulo (circulo tangente a sus tres lados).

El incentro siempre está ubicado en la parte interna de un triángulo.



$\overline{AF}$ = Va
$\overline{BD}$ = Vb
$\overline{CE}$ = Vc

I Incentro

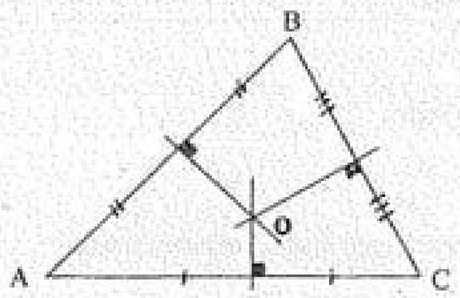
.Oa Ex-centro relativo al lado a
. Ob Ex-centro relativo al lado b
.Oc Ex-centro relativo al lado c

4.5.3.3.2 EX-CENTRO (Oa)

Es el punto de intersección de dos bisectrices externas y una interna del triángulo, y es el centro del circulo ex-inscrito del triángulo (círculo tangente a un lado y a la prolongación de los otros dos lados).

4.5.3.4. MEDIATRIZ

Es la recta perpendicular trazada en el punto medio de un lado del triángulo.



. O Circuncentro

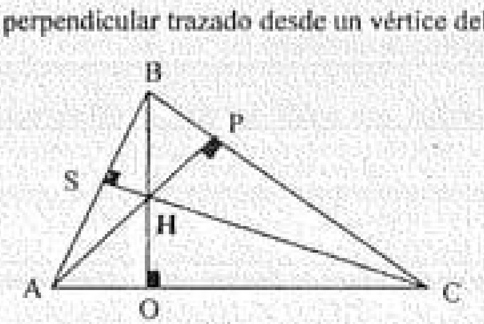
4.5.3.4.1. CIRCUNCENTRO (O)

Es el punto de intersección de las tres mediatrices, y es el centro del circulo circunscrito al triángulo (circulo que pasa por los tres vértices del triángulo).

El circuncentro en un triángulo acutángulo está ubicado en su parte interna; en un triángulo rectángulo en el punto medio de la hipotenusa; y en un triángulo obtusángulo en su parte externa.

4.5.3.5. ALTURA

Es el segmento perpendicular trazado desde un vértice del triángulo al lado opuesto o a su prolongación.



$\overline{AP}$ = ha
$\overline{BQ}$ = hb
$\overline{CS}$ = hc

. H Ortocentro

4.5.3.5.1. ORTOCENTRO (H)

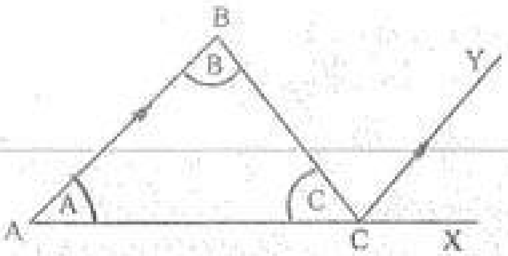
Es el punto de intersección de las tres alturas.

El ortocentro en un triángulo acutángulo está ubicado en su parte interna; en un triángulo rectángulo en el vértice del ángulo recto; y en un triángulo obtusángulo en su parte externa.

4.5.4. ÁNGULOS EN UN TRIÁNGULO

TEOREMA # 1

En un triángulo, la suma de las medidas de los ángulos internos es igual a 180° o π rad.



H) Δ ABC escaleno

T) $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° = \pi$ rad

D) $\overline{CY} \parallel \overline{AB}$ (contrucción)

$\widehat{XCY} = \hat{A}$

$\widehat{YCB} = \hat{B}$

$\widehat{XCY} + \widehat{YCB} = \widehat{BCX} = \hat{A} + \hat{B}$

$\widehat{BCX} + \hat{C} = 180° = \pi$ rad

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° = \pi$ rad ///.

COROLARIOS

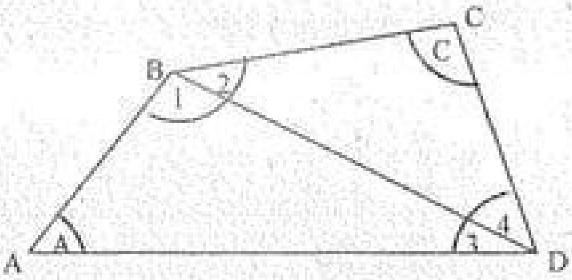
1.- Un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos internos no adyacentes, y por lo tanto mayor que cada uno de ellos.

2.- Un triángulo no puede tener más de un ángulo recto ni más de un ángulo obtuso.

3.- En un triángulo rectángulo, los ángulos agudos son complementarios.

TEOREMA # 2

La suma de los ángulos internos de un cuadrilátero es igual a 360° o 2π rad..



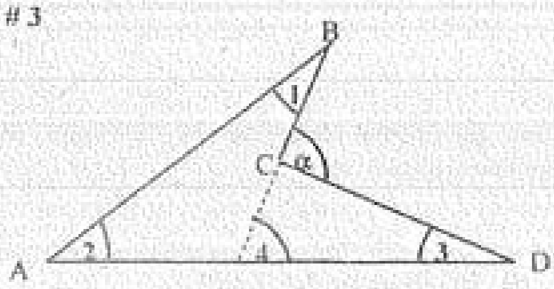
T) $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360° = 2\pi$ rad.

D) $\hat{A} + \hat{1} + \hat{3} = 180° = \pi$ rad.

$\hat{2} + \hat{C} + \hat{4} = 180° = \pi$ rad.

$\therefore\ \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360° = 2\pi$ rad.

TEOREMA # 3



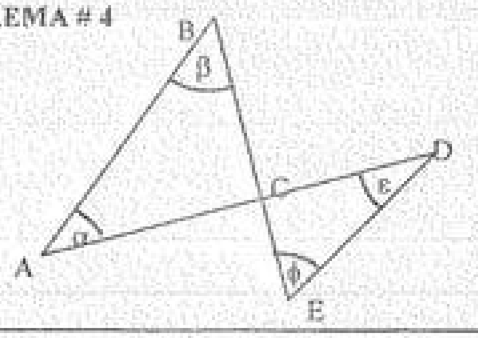
T) $\hat{\alpha} = \hat{1} + \hat{2} + \hat{3}$

D) $\hat{\alpha} = \hat{4} + \hat{3}$

$\hat{4} = \hat{1} + \hat{2}$

$\therefore\ \hat{\alpha} = \hat{1} + \hat{2} + \hat{3}$

TEOREMA # 4



T) $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = \hat{\phi} + \hat{\varepsilon}$

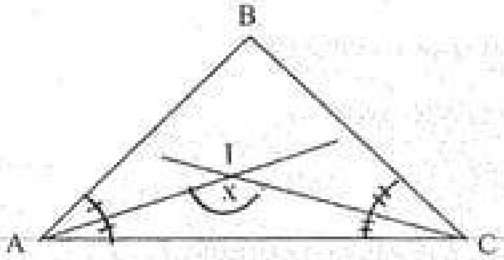
D) $\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \widehat{ACB} = 180°$

$\hat{\phi} + \hat{\varepsilon} + \widehat{ACB} = 180°$

$\therefore\ \hat{\alpha} + \hat{\beta} = \hat{\phi} + \hat{\varepsilon}$

TEOREMA # 5

El ángulo formado por dos bisectrices internas de un triángulo es igual a $\pi/2$ rad más la mitad de la medida del ángulo interno no bisecado.



H) I Incentro del Δ ABC

T) $\hat{X} = \pi/2 + \hat{B}/2$

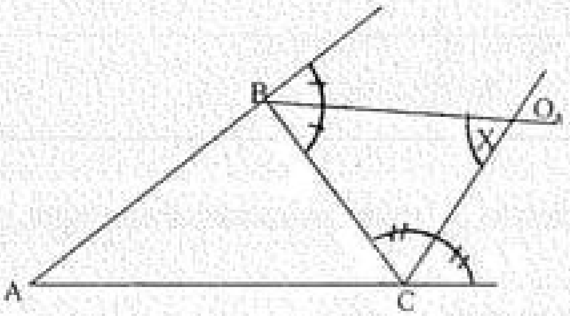
D) $\hat{X} = \pi - \hat{A}/2 - \hat{C}/2$

$\hat{A}/2 + \hat{B}/2 + \hat{C}/2 = \pi/2$

$\therefore\ \hat{X} = \pi/2 + \hat{B}/2$

TEOREMA # 6

El ángulo formado por dos bisectrices externas de un triángulo, es igual a $\pi/2$ rad disminuido en la mitad del ángulo interno en el tercer vértice.



H) O_a ex-centro del Δ ABC

T) $\hat{X} = \pi/2 - \hat{A}/2$

D) $\hat{X} = \pi - \hat{1} - \hat{2}$

$\hat{2} = \hat{A}/2 + \hat{B}/2$

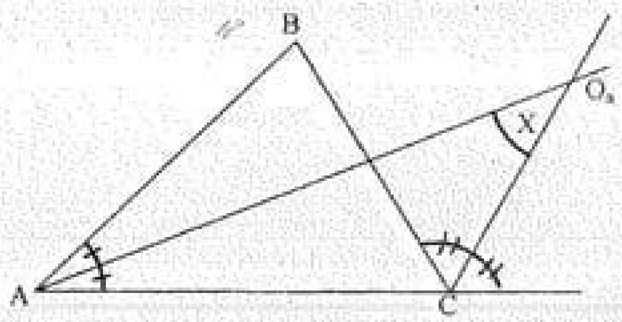
$\hat{1} = \hat{A}/2 + \hat{C}/2$

$\hat{A}/2 + \hat{B}/2 + \hat{C}/2 = \pi/2$

$\therefore\ \hat{X} = \pi/2 - \hat{A}/2$

TEOREMA # 7

El ángulo formado por las bisectrices interna y externa de dos vértices diferentes de un triángulo, es igual a la mitad de la medida del ángulo interno en el tercer vértice.



H) O_a ex-centro Δ ABC

T) $\hat{X} = \hat{B}/2$

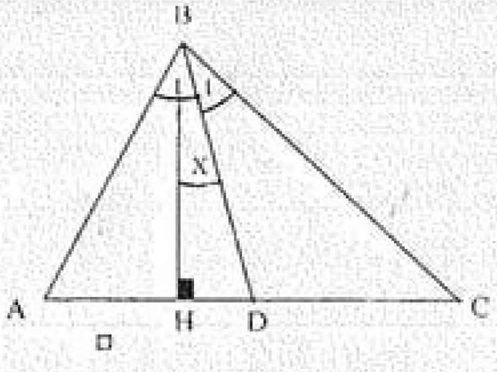
D) $\hat{X} = \hat{2} - \hat{1}$

$\hat{2} = \hat{1} + \hat{B}/2$

$\therefore\ \hat{X} = \hat{B}/2$

TEOREMA # 8

El ángulo formado por la bisectriz interna y la altura del mismo vértice de un triángulo, es igual a la semidiferencia de las medidas de los ángulos internos en los otros dos vértices.



H) $\overline{BD}$ Bisectriz del Δ ABC

$\overline{BH}$ Altura del Δ ABC

T) $\hat{X} = \dfrac{\hat{A} - \hat{C}}{2}$

D) $\hat{1} - \hat{X} + \hat{A} = \pi/2$

$\hat{1} + \hat{X} + \hat{C} = \pi/2$

$\therefore\ \hat{X} = \dfrac{\hat{A} - \hat{C}}{2}$

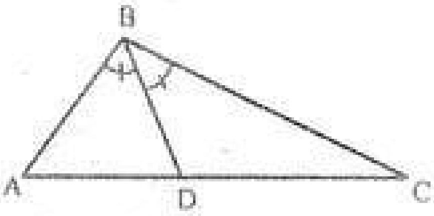
4.5.5. EJERCICIOS

1.

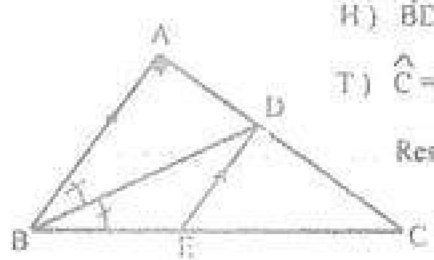
H) $\widehat{A} = 50°$

$\widehat{B} = 100°$

T) $\widehat{BDC} = ?$ Resp. 100°



2.

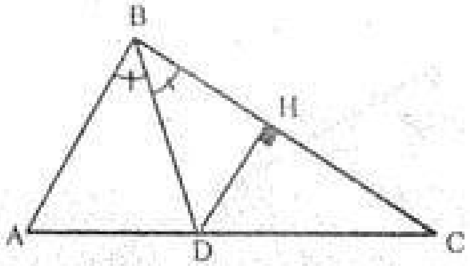


H) $\widehat{BDE} = 25°$

T) $\widehat{C} = ?$

Resp. 40°

3.



H) $\widehat{HDC} = 50°$

$\widehat{B} = 80°$

T) $\widehat{A} = ?$ Resp. 60°

4.

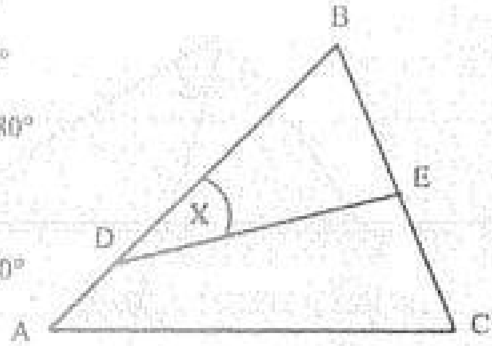
H) $\widehat{A} = 50°$

$\widehat{C} = 70°$

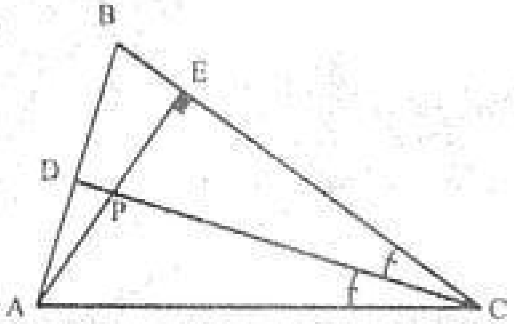
$\widehat{BED} = 80°$

T) $\widehat{X} = ?$

Resp. 40°



5.

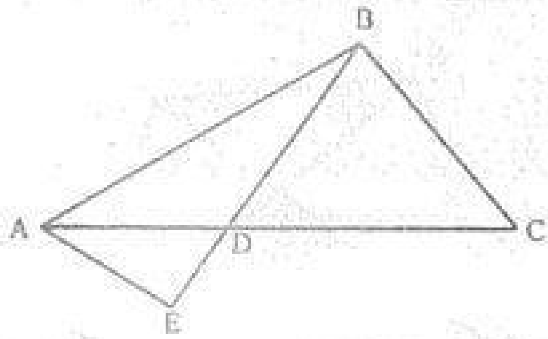


H) $\widehat{A} = 16\pi / 45$ rad

$\widehat{B} = 21\pi / 90$ rad

T) $\widehat{APC} = ?$ Resp. 127°

6.



H) $\widehat{C} = 50°$ $\widehat{BDC} = 60°$

$\widehat{EAB} = 70°$ $\widehat{BAC} = 30°$

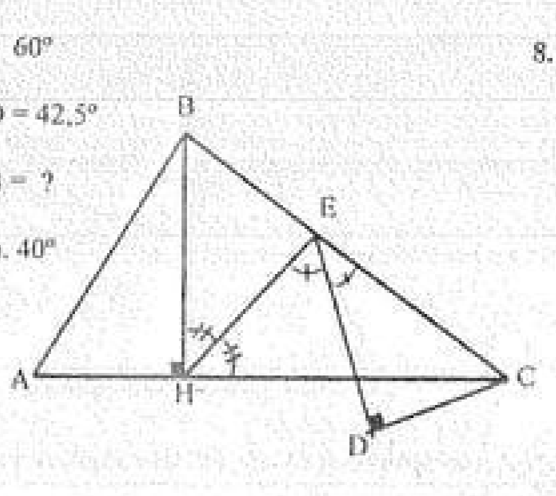
T) $\widehat{E} = ?$ Resp. 80°

7. H) $\widehat{A} = 60°$

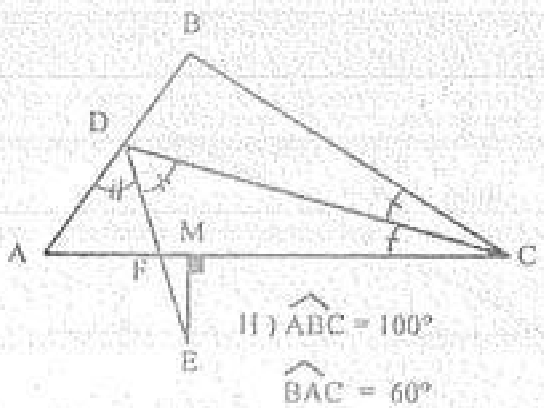
$\widehat{BCD} = 42{,}5°$

T) $\widehat{ACB} = ?$

Resp. 40°



8.

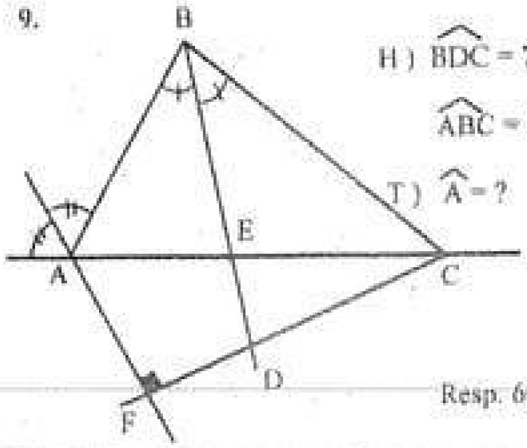


H) $\widehat{ABC} = 100°$

$\widehat{BAC} = 60°$

T) $\widehat{FEM} = ?$ Resp. 25°

9.



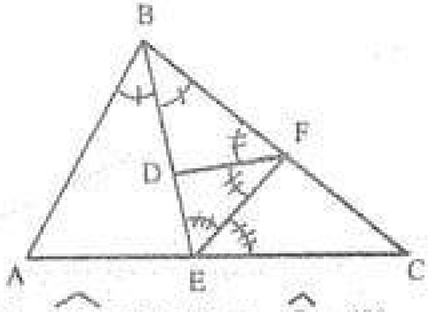
H) $\widehat{BDC} = 70°$

$\widehat{ABC} = 80°$

T) $\widehat{A} = ?$

Resp. 60°

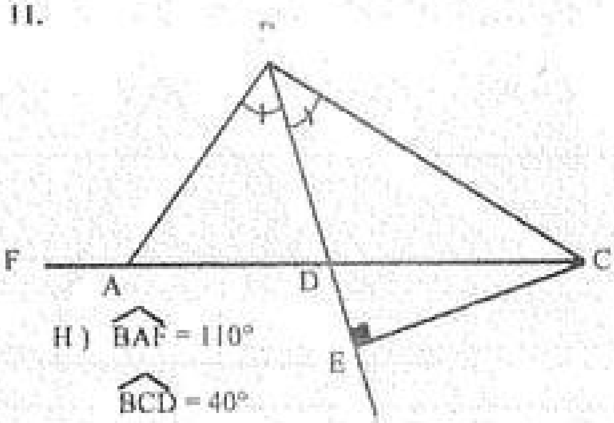
10.



H) $\widehat{EDF} = 81{,}25°$ y $\widehat{C} = 40°$

T) $\widehat{A} = ?$ Resp. 70°

11.

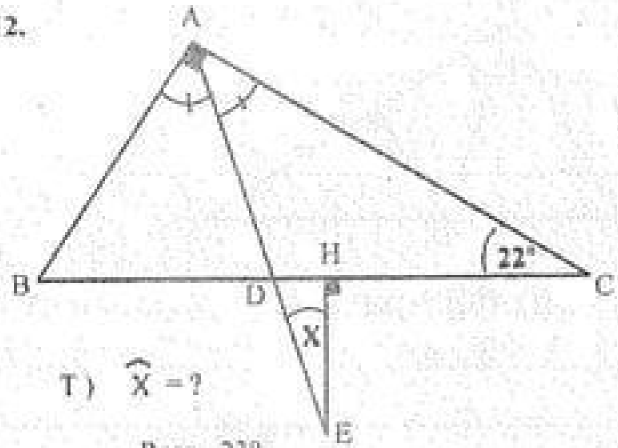


H) $\widehat{BAF} = 110°$

$\widehat{BCD} = 40°$

T) $\widehat{DCE} = ?$ Resp. 15°

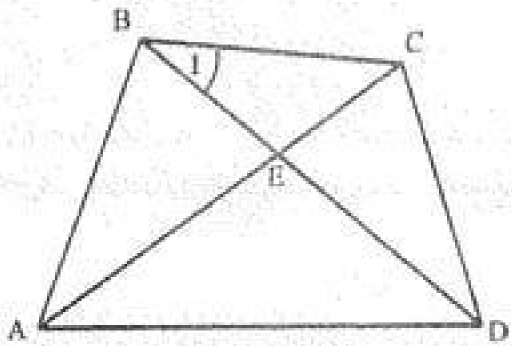
12.



T) $\widehat{X} = ?$

Resp. 23°

13.

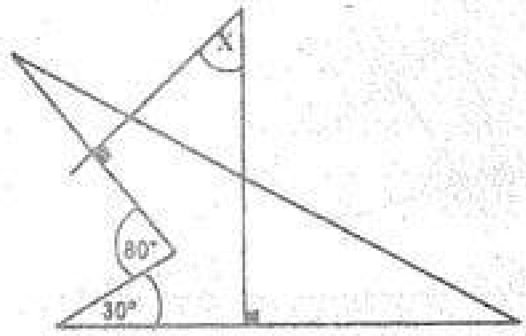


H) $\widehat{1} = 70°$, $\widehat{CDB} = 30°$

$\widehat{BDA} = 50°$, $\widehat{CAD} = 60°$

T) $\widehat{BCA} = ?$ Resp. 40°

14.



T) $\widehat{X} = ?$

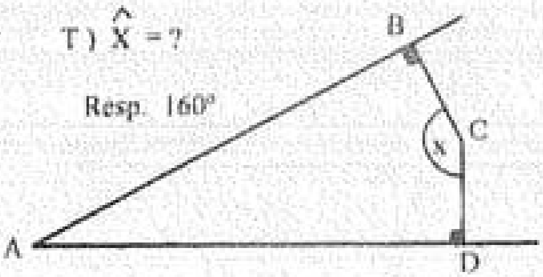
Resp. 50°

15.

H) $\widehat{A} = 20°$

T) $\widehat{X} = ?$

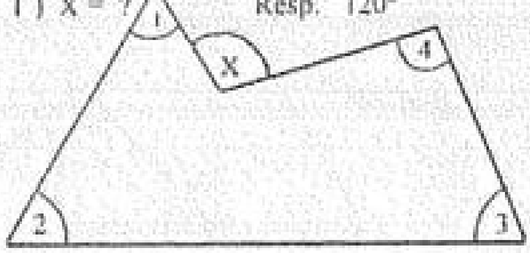
Resp. 160°



16.

H) $\widehat{1} + \widehat{2} + \widehat{3} + \widehat{4} = 300°$

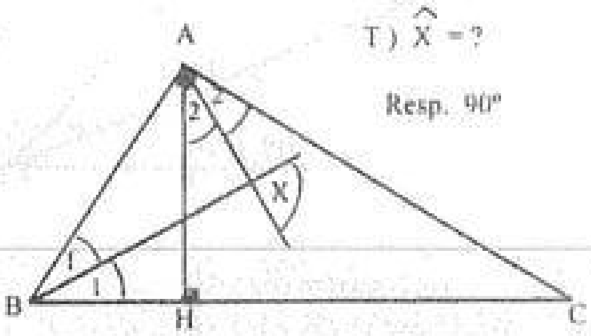
T) $\widehat{X} = ?$ Resp. 120°



17. En un triángulo ABC escaleno, $\measuredangle B = 50°$ y su bisectriz forma con el lado BC dos ángulos que difieren en 20°. Calcular los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{C}$. Resp. 55°, 75°

18. En un triángulo ABC: $\widehat{A} = 35°$ y $\widehat{B} = 50°$. Calcular el ángulo formado por la altura del vértice B y la bisectriz del vértice C. Resp. 42,5°

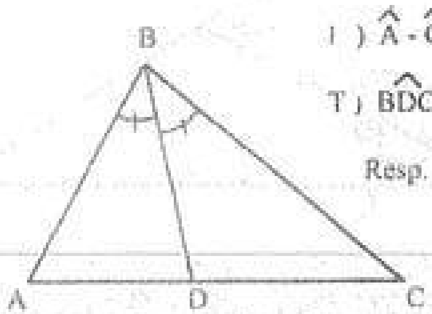
19.



T) $\widehat{X} = ?$

Resp. 90°

20.

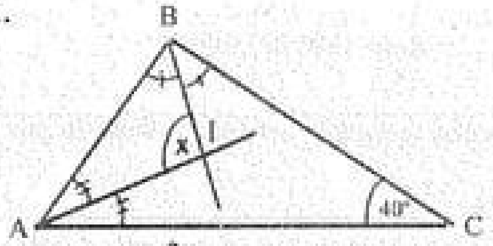


H) $\widehat{A} - \widehat{C} = 24°$

T) $\widehat{BDC} = ?$

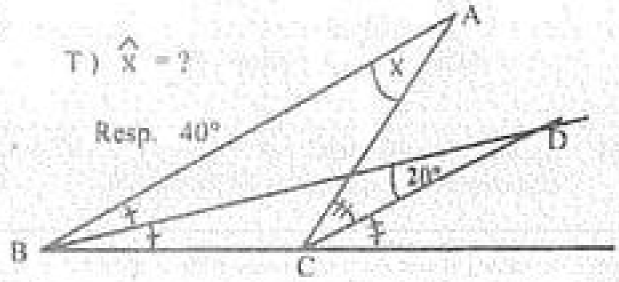
Resp. 102°

21.



T) $\widehat{X} = ?$ Resp. 110°

22.

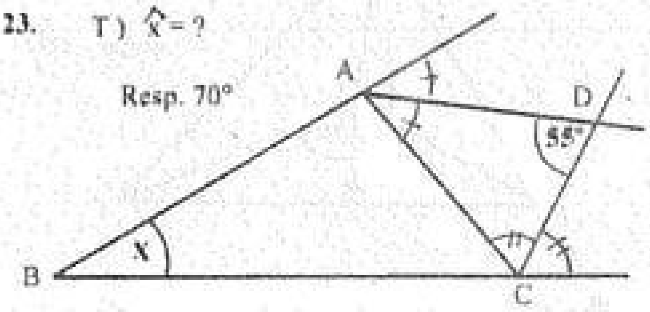


T) $\widehat{X} = ?$

Resp. 40°

23. T) $\widehat{X} = ?$

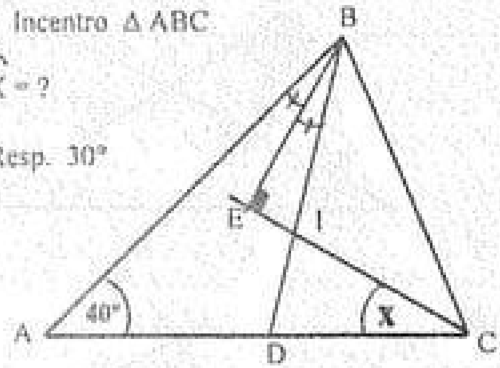
Resp. 70°



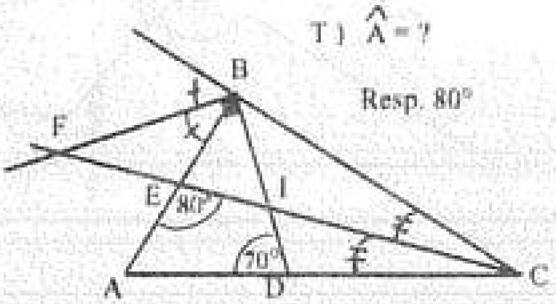
24. H) I Incentro Δ ABC

T) $\widehat{X} = ?$

Resp. 30°



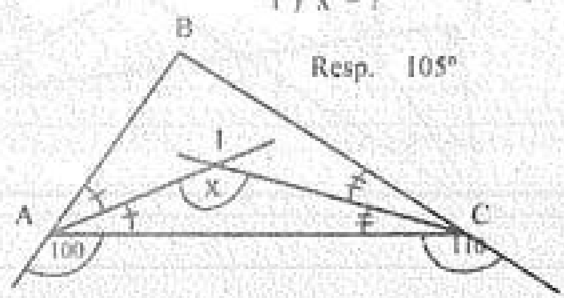
25.



T) $\widehat{A} = ?$

Resp. 80°

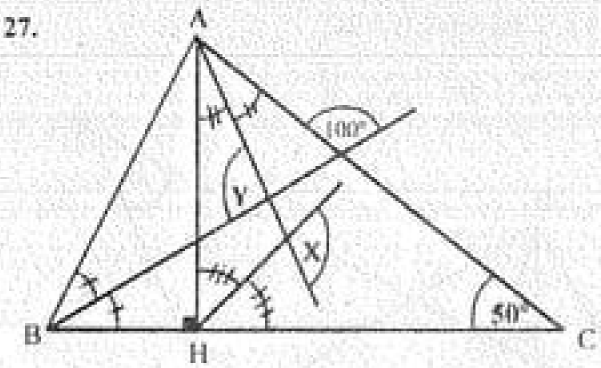
26.



T) $\widehat{X} = ?$

Resp. 105°

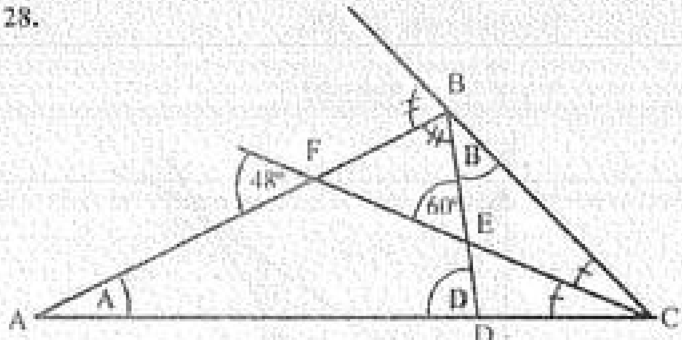
27.



T) $\widehat{X} = ?$ Resp. 115°

$\widehat{Y} = ?$ Resp. 100°

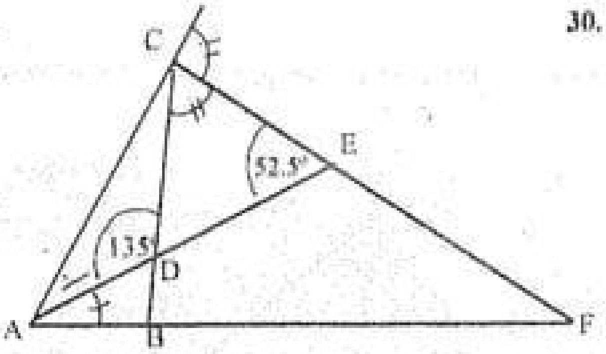
28.



T) $\widehat{A} = ?$ $\widehat{B} = ?$; $\widehat{D} = ?$

Resp. 24°, 36°, 84°

29.

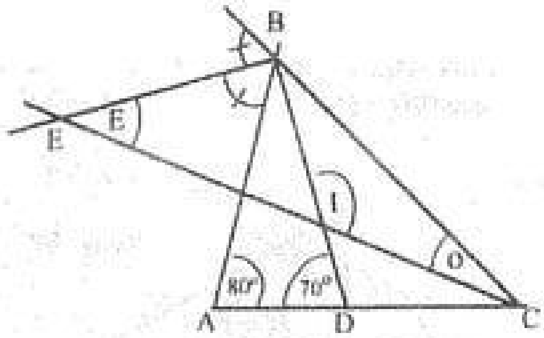


T) $\widehat{BAC} = ?$ Resp. 60°

$\widehat{ABC} = ?$ Resp. 105

$\widehat{ACB} = ?$ Resp. 15°

30.



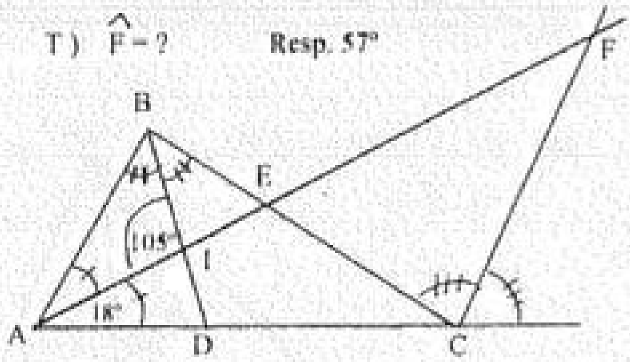
H) I incentro del Δ ABC

T) $\widehat{I} = ?$; $\widehat{E} = ?$; $\widehat{O} = ?$

Resp. 130°, 40°, 20°

31. En un triángulo ABC: $\widehat{A} = 23°$ y $\widehat{C} = 34°$ y Ortocentro H, hallar la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos $\widehat{BCH}$ y $\widehat{BAH}$. Resp. 90°

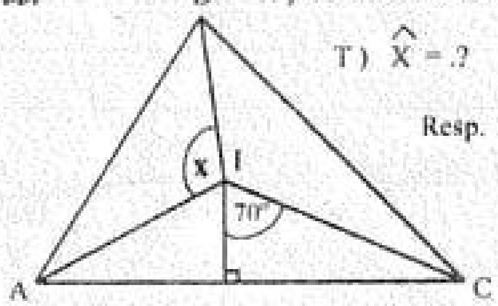
32. T) $\widehat{F} = ?$ Resp. 57°



33. H) . I Incentro Δ ABC

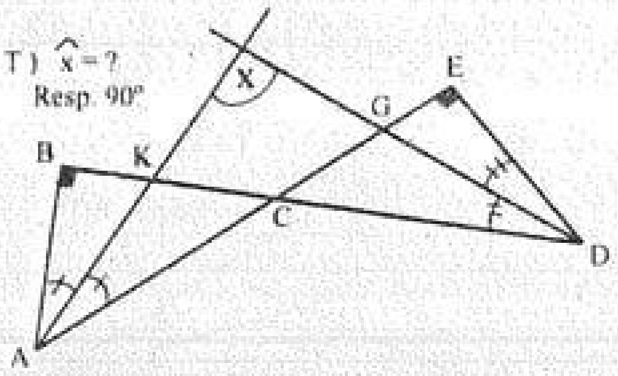
T) $\widehat{X} = ?$

Resp. 110°



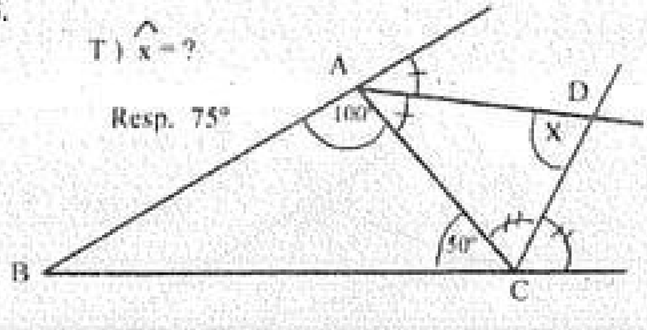
34. T) $\widehat{x} = ?$

Resp. 90°



35. T) $\widehat{x} = ?$

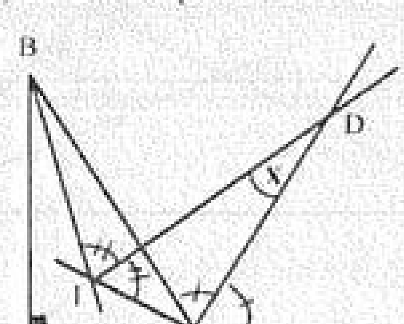
Resp. 75°



36.

H) . I Incentro Δ ABC

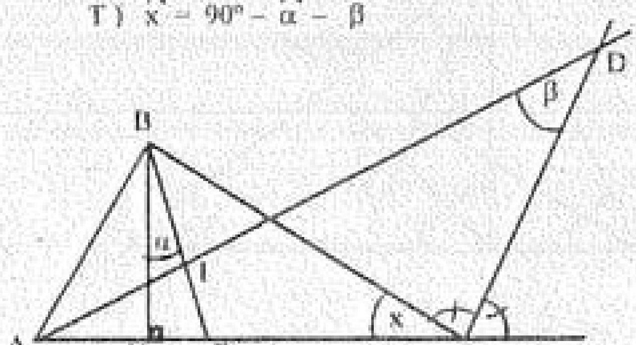
T) $\widehat{X} = ?$ Resp. 22.5°



37.

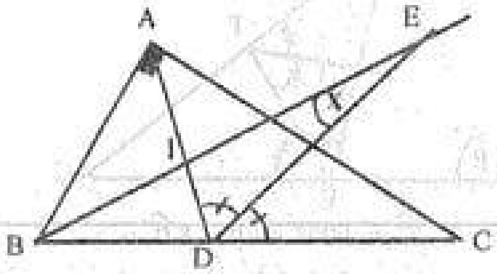
H) . I Incentro Δ ABC

T) $\widehat{x} = 90° - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta}$



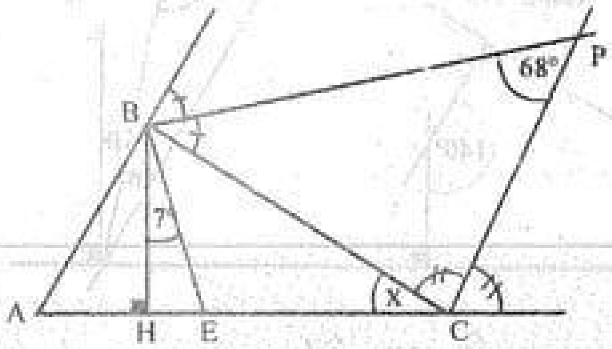
38. H) . I Incentro Δ ABC

T) $\widehat{X} = ?$ Resp. 22.5°



39. H) $\widehat{ABE} = \widehat{EBC}$

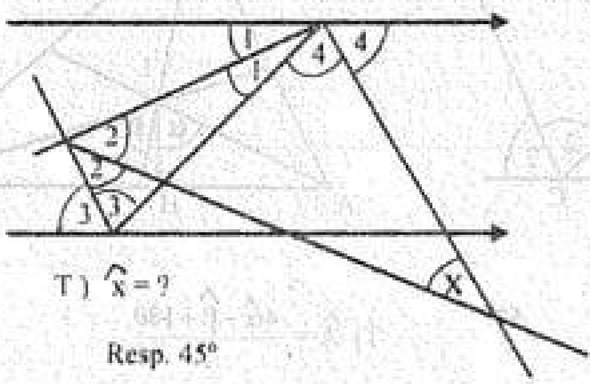
T) $\widehat{x} = ?$ Resp. 30°



40. En un triángulo obtusángulo ABC (C > 90°), si P es el pie de la altura h_a, Q pie de la altura de h_b y H es el ortocentro, demostrar que el ángulo $\widehat{PHQ}$ es igual a la suma de los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$.

41. En un triángulo ABC, obtusángulo ($\widehat{A} > 90°$), H es el ortocentro. Demostrar que las bisectrices de los ángulos $\widehat{HBA}$ y $\widehat{HCA}$ son perpendiculares entre sí.

42.

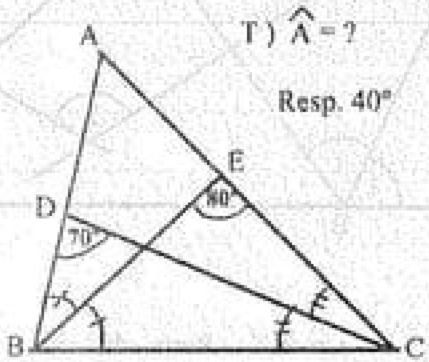


T) $\widehat{x} = ?$

Resp. 45°

43. T) $\widehat{A} = ?$

Resp. 40°

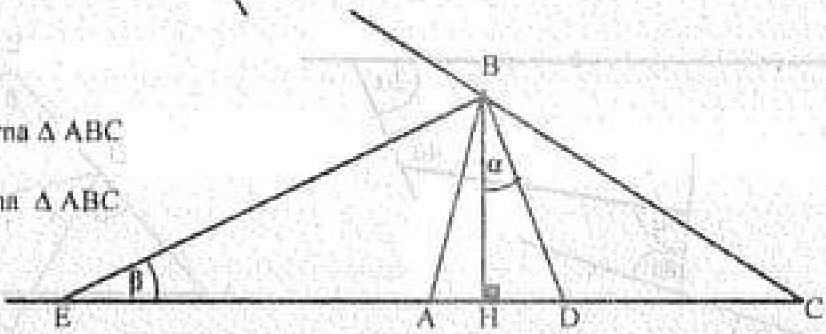


44.

H) $\overline{BE}$ Bisectriz externa Δ ABC

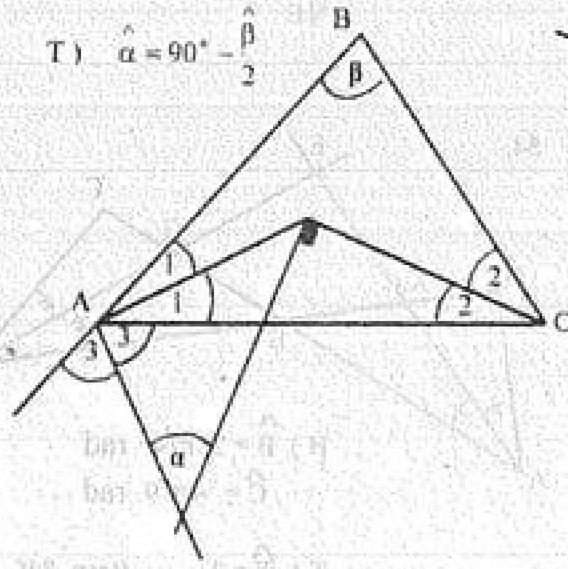
$\overline{BD}$ Bisectriz interna Δ ABC

T) $\widehat{\alpha} = \widehat{\beta}$



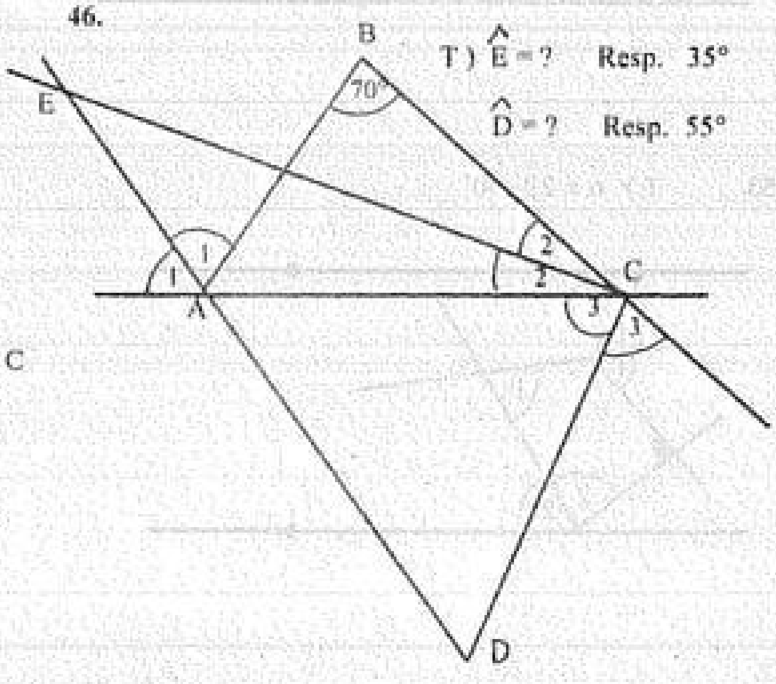
45.

T) $\widehat{\alpha} = 90° - \frac{\widehat{\beta}}{2}$



46. T) $\widehat{E} = ?$ Resp. 35°

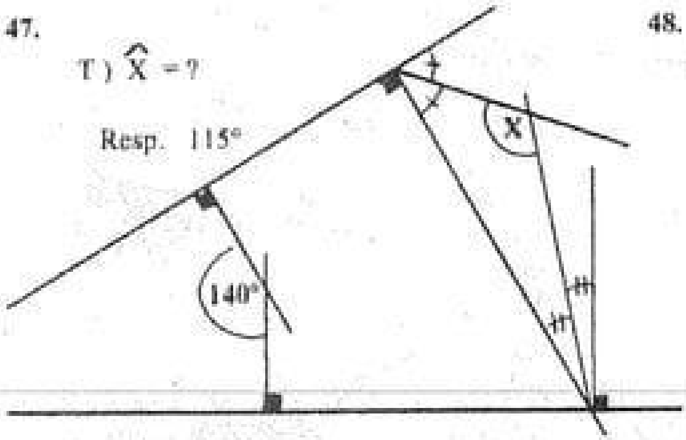
$\widehat{D} = ?$ Resp. 55°



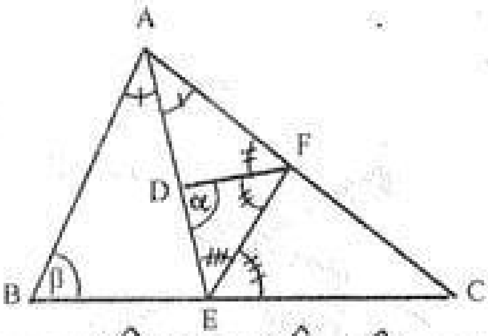
47.

T) $\widehat{X} = ?$

Resp. 115°

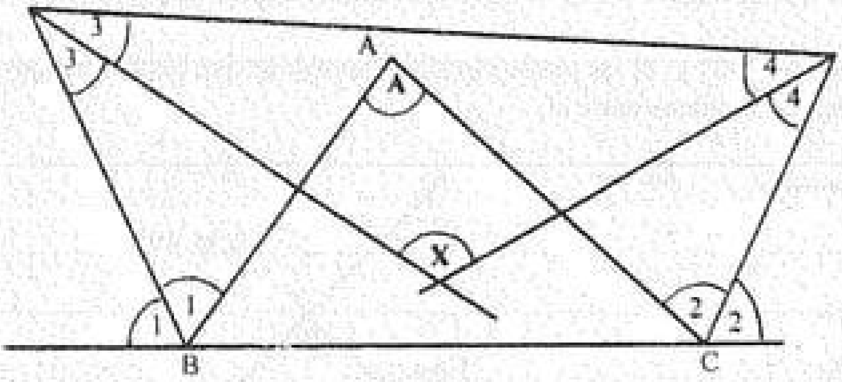


48.



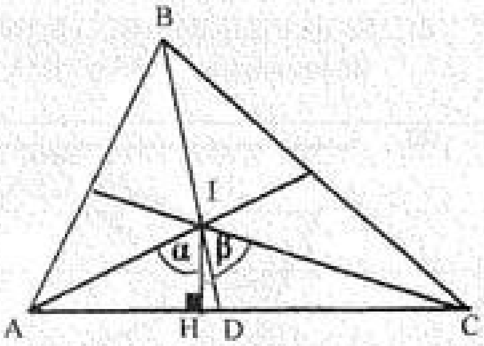
T) $\widehat{C} = 900° - 3\,\widehat{\beta} - 8\,\widehat{\alpha}$

49. T) $\widehat{X} = 135° - \widehat{A}/4$

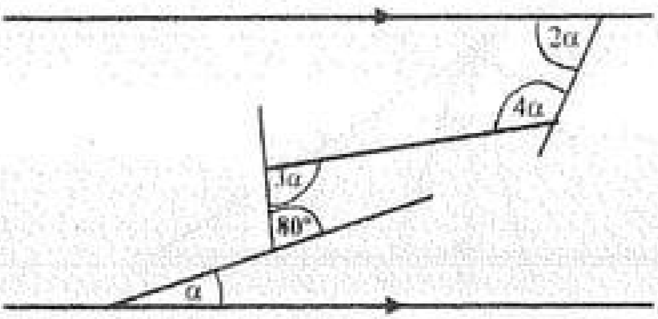


50. H) . I Incentro Δ ABC

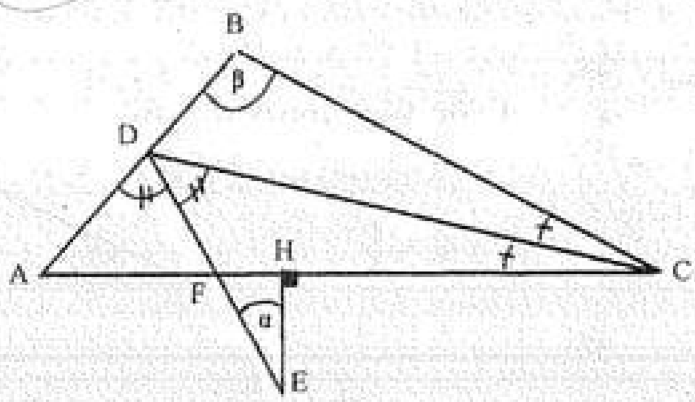
T) $\widehat{\alpha} = \widehat{\beta}$



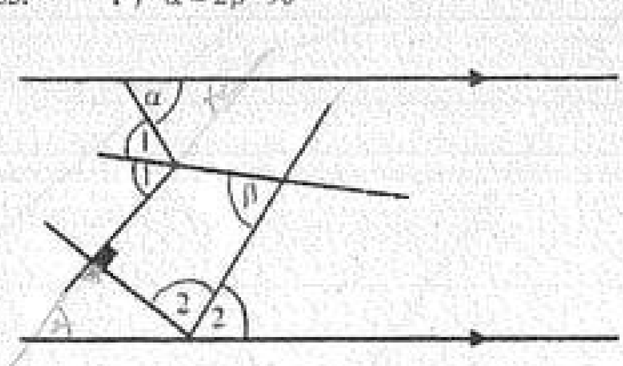
51. T) $\widehat{\alpha} = ?$ Resp. 40°



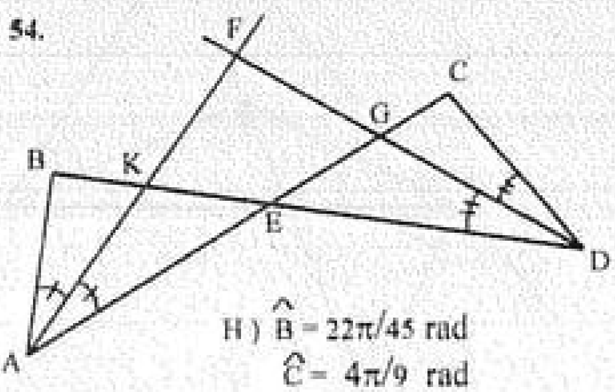
52. T) $\widehat{A} = \dfrac{4\widehat{\alpha} - \widehat{\beta} + 180}{3}$



53. T) $\widehat{\alpha} = 2\widehat{\beta} - 90°$



54.

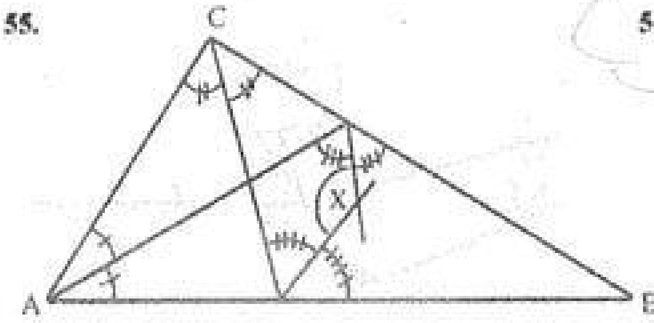


H) $\widehat{B} = 22\pi/45$ rad

$\widehat{C} = 4\pi/9$ rad

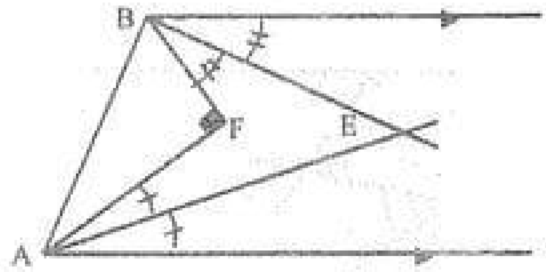
T) $\widehat{F} = ?$ Resp. 84°

55.



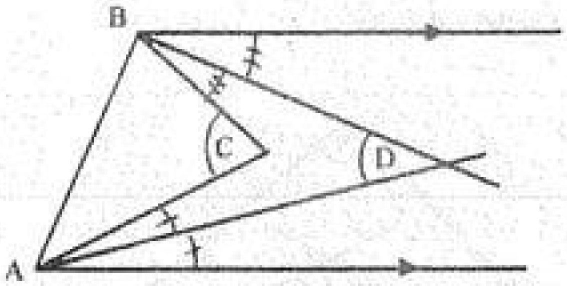
T) $\widehat{X} = 135° + \widehat{B}/4$

56.



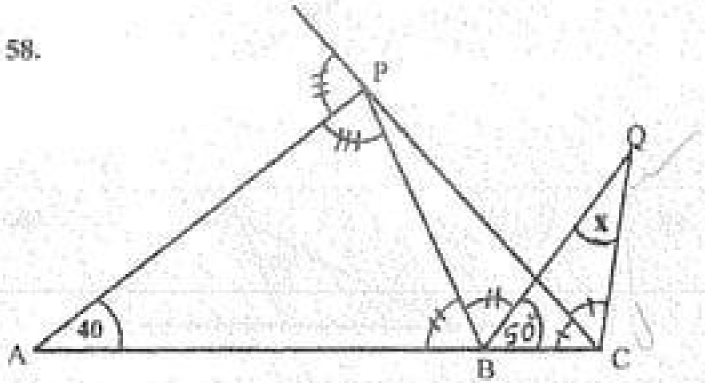
T) $\widehat{E} = ?$ Resp. 45°

57.



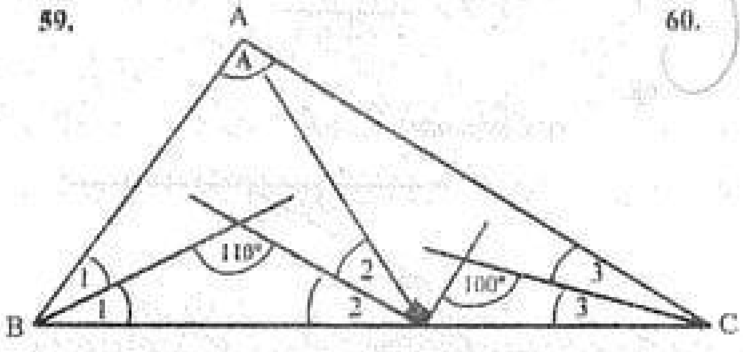
T) $\widehat{D} = \widehat{C}/2$

58.



T) $\widehat{X} = ?$ Resp. 60°

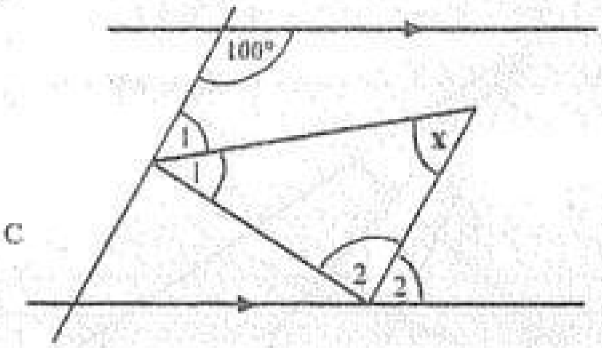
59.



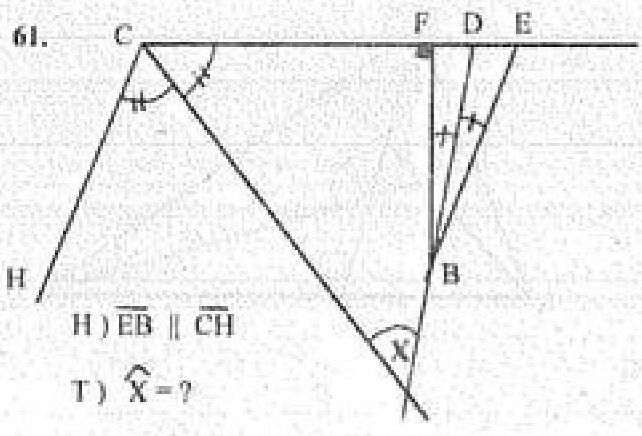
T) $\widehat{A} = ?$ Resp. 60°

60.

T) $\widehat{X} = ?$ Resp. 50°



61.

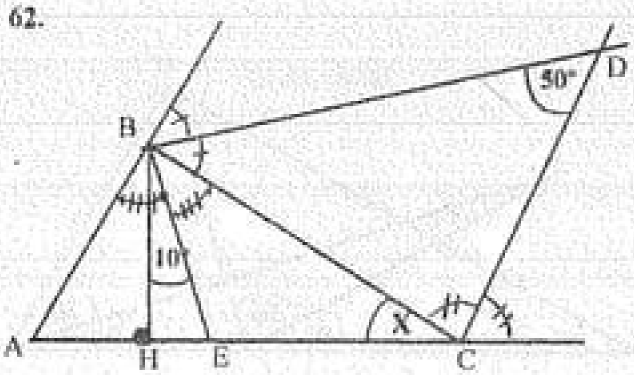


H) $\overline{EB} \parallel \overline{CH}$

T) $\widehat{X} = ?$

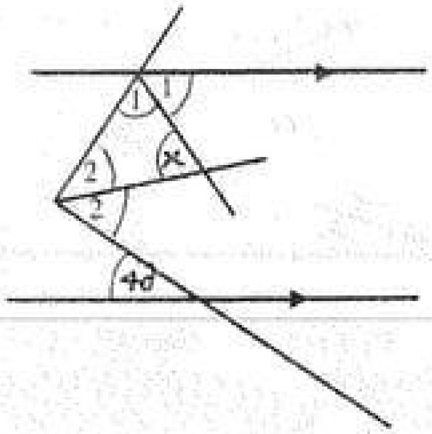
Resp. 45°

62.

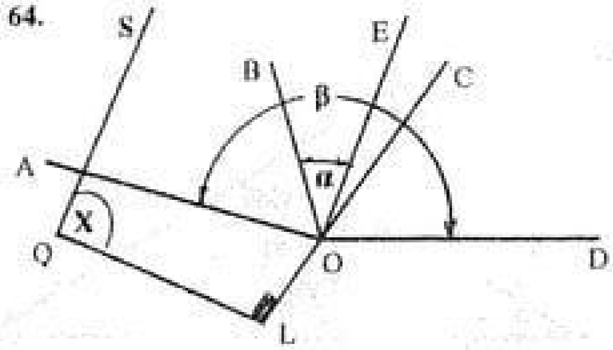


T) $\widehat{X} = ?$ Resp. 60°

63. T) $\hat{X} = ?$ Resp. 70°



64.

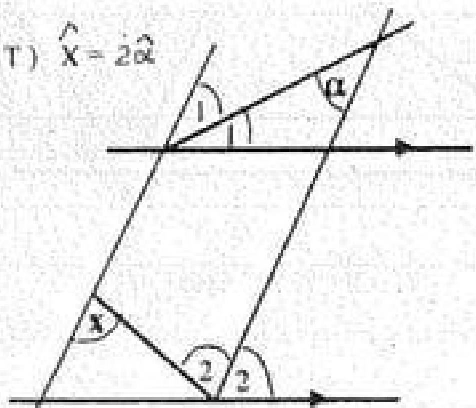


H) $\widehat{AOE} = \widehat{EOD}$

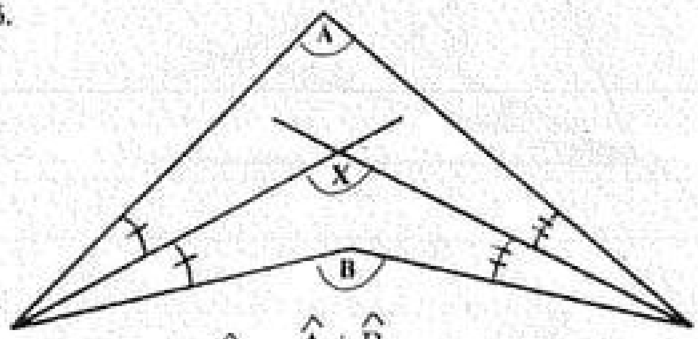
$\widehat{AOB} = \widehat{BOC}$ y $\overline{QS} \parallel \overline{OE}$

T) $\hat{X} = 90° + \hat{\beta}/2 - 2\hat{\alpha}$

65. T) $\hat{X} = 2\hat{\alpha}$



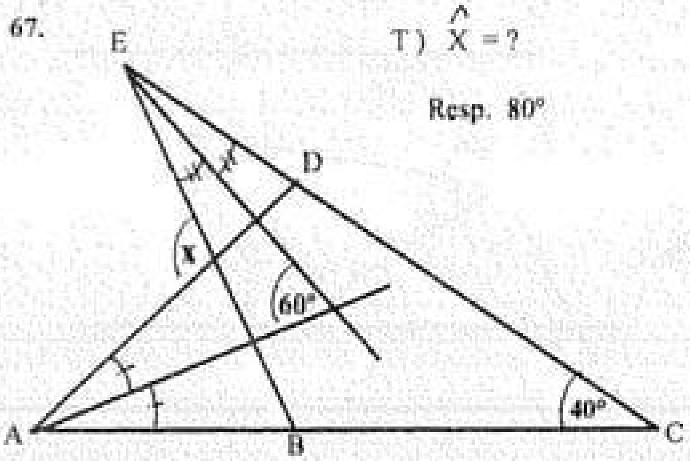
66.



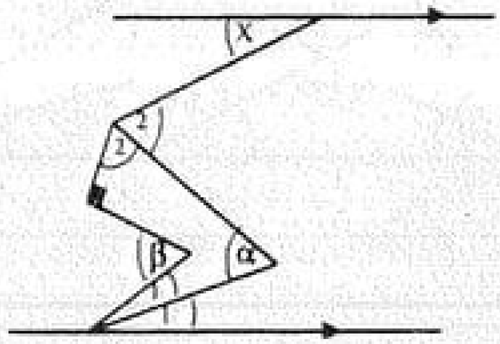
T) $\hat{X} = \dfrac{\hat{A} + \hat{B}}{2}$

67. T) $\hat{X} = ?$

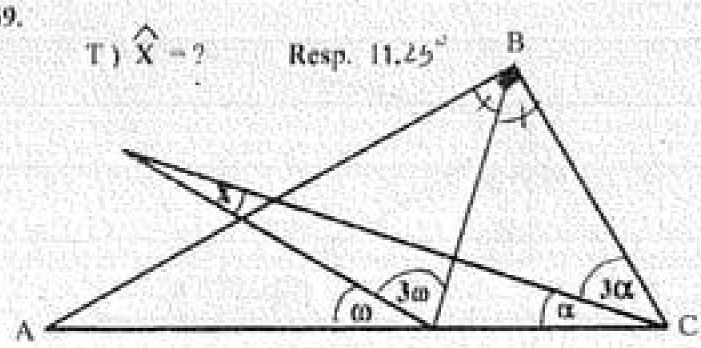
Resp. 80°



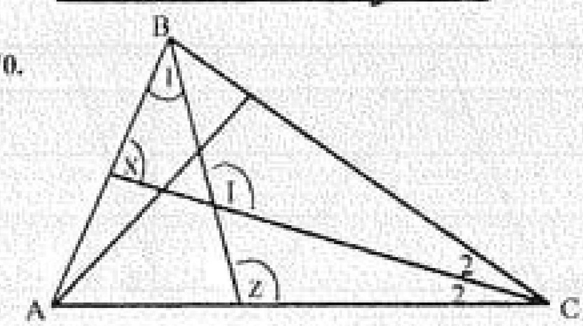
68. T) $\hat{X} = 90° + \hat{\beta} - 2\hat{\alpha}$



69. T) $\hat{X} = ?$ Resp. 11.25°



70.

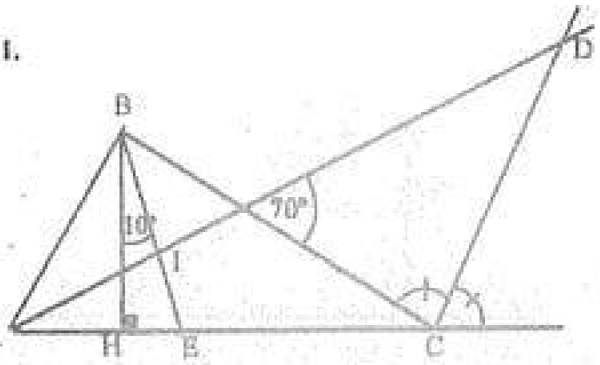


H) I Incentro Δ ABC

$\hat{X} + \hat{Z} = 195°$

T) $\hat{I} = ?$ Resp. 125°

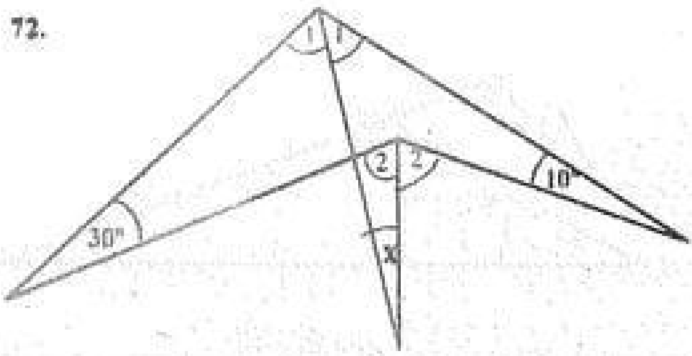
71.



H) .I Incentro Δ ABC

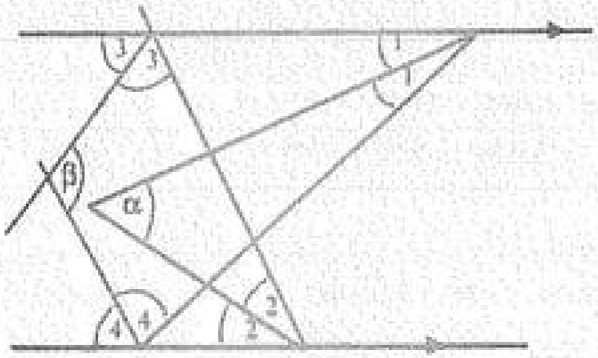
T) $\hat{A}$ = .? Resp. 60°
$\hat{B}$ = .? Resp. 80°
$\hat{C}$ = .? Resp. 40°

72.

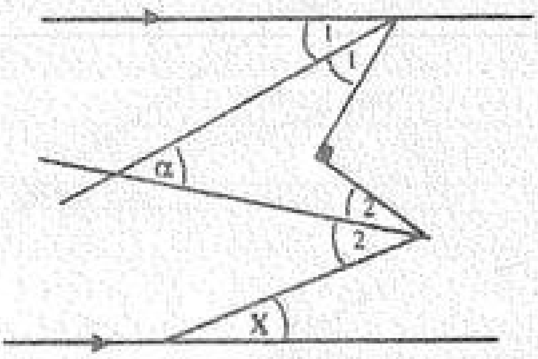


T) $\hat{X}$ = ? Resp. 10°

73. T) $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180°$

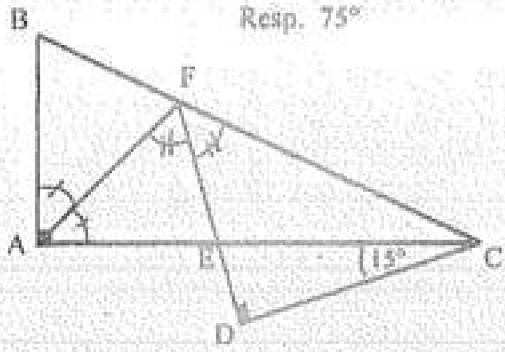


74. T) $\hat{X} = 90° - 2\,\hat{\alpha}$



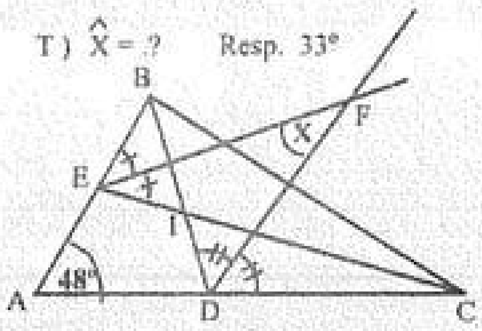
75. T) $\hat{B}$ = ?

Resp. 75°

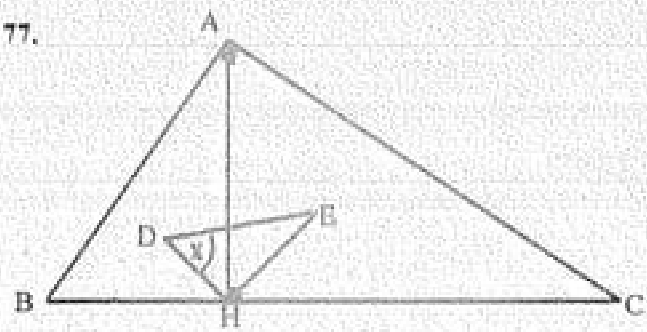


76. H) .I incentro Δ ABC

T) $\hat{X}$ = .? Resp. 33°



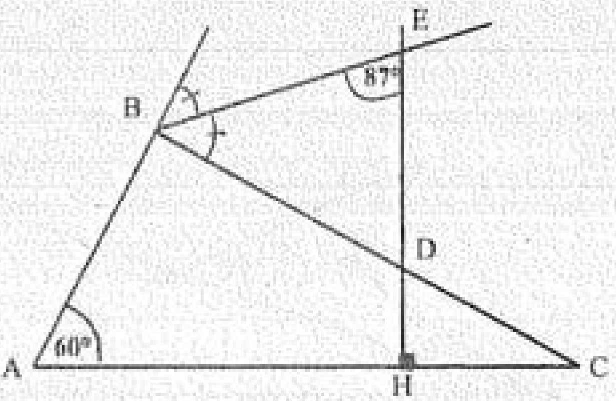
77.



H) .D Incentro Δ ABH
.E Incentro Δ AHC

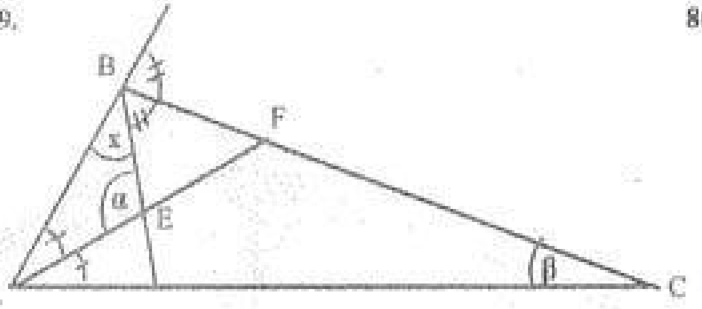
T) $\hat{X} = \hat{B}$

78.



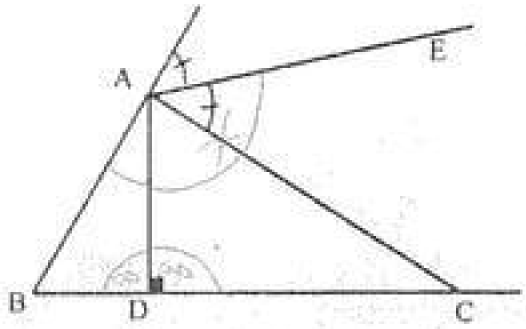
T) $\hat{C}$ = ? Resp. 54°

79.



T) $\hat{X} = \dfrac{540 + 2\hat{\beta} - 4\hat{\alpha}}{3}$

80.

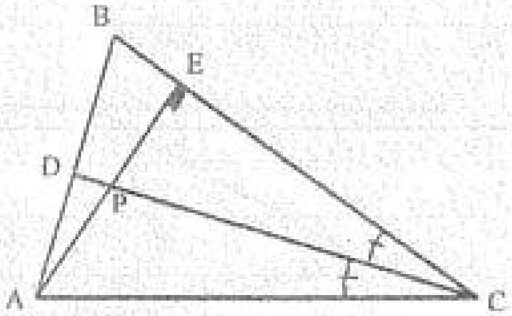


H) $\hat{B} - \hat{C} = 15°$

T) $\widehat{EAD} = ?$ Resp. 97.5°

4.5.5.1 EJERCICIOS RESUELTOS

5.



D) $\Delta ABC: \ \hat{A} = 64°$

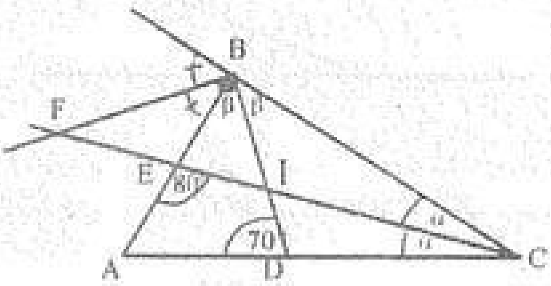
$\hat{B} = 42°$

$\therefore \hat{C} = 74°$ y $\hat{1} = 37°$

$\Delta EAC: \ \widehat{EAC} = 16°$

$\Delta APC: \ \widehat{APC} = 127°$

25.



D) $70° = 2\hat{\alpha} + \hat{\beta}$

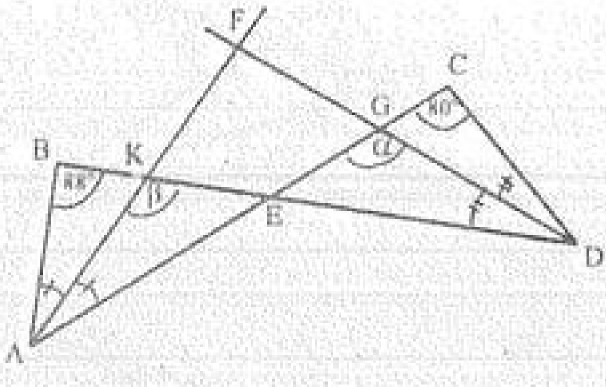
$80° = \hat{\alpha} + 2\hat{\beta}$

$\therefore \hat{\alpha} + \hat{\beta} = 50°$

$\Delta FBI: \ \hat{F} = \hat{A}/2 = 180° - 90° - (\hat{\alpha} + \hat{\beta})$

$\therefore \hat{A} = 80°$

54.



D) $\hat{\alpha} = \hat{C} + \hat{D}/2 = \hat{F} + \hat{A}/2$ (1)

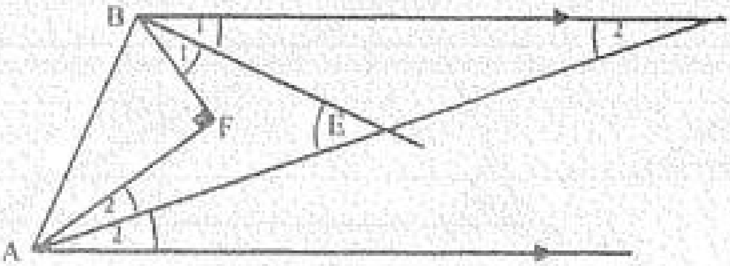
$\hat{\beta} = \hat{B} + \hat{A}/2 = \hat{F} + \hat{D}/2$ (2)

$\hat{B} + \hat{C} = 2\hat{F}$ (1) + (2)

$\hat{F} = (\hat{B} + \hat{C})/2$

$\therefore \hat{F} = 84°$

56.

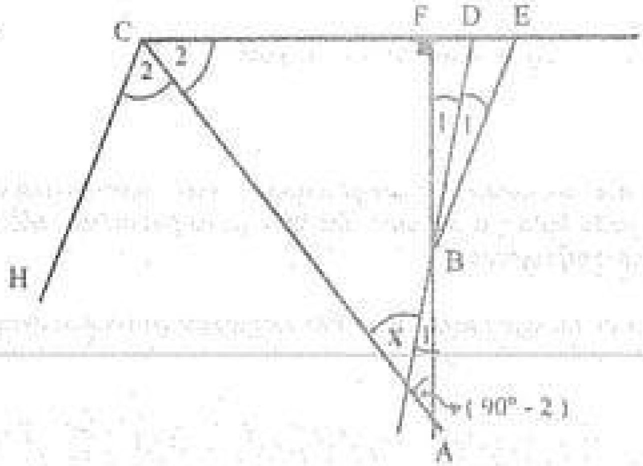


D) $90° = \hat{1} + \hat{E} + \hat{2}$ (1)

$\hat{E} = \hat{1} + \hat{2}$ (2)

$\therefore \hat{E} = 45°$ (2) en (1)

61.



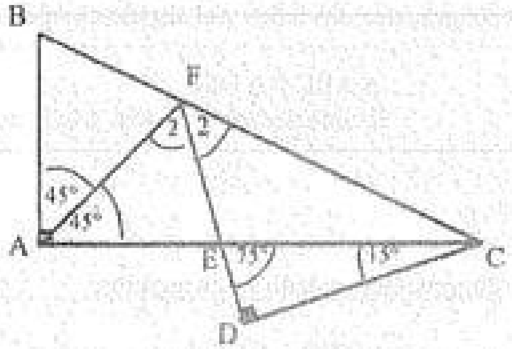
D) $\hat{E} = 180° - 2\hat{2} = 90° - 2\hat{1}$

$90° = 2(\hat{2} - \hat{1})$

$45° = \hat{2} - \hat{1}$

$\therefore \hat{X} = \hat{1} + (90° - \hat{2}) = 45°$

75.



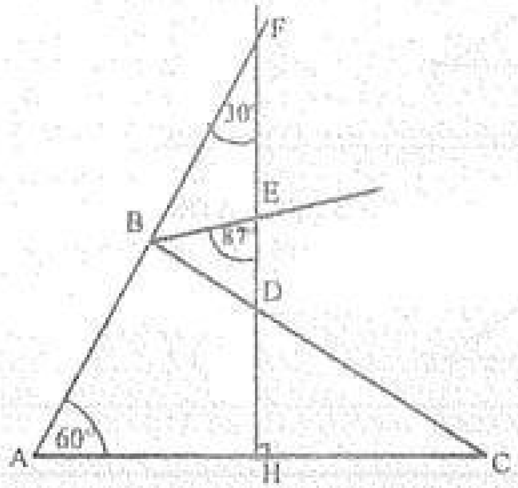
D) ΔAEF : $\hat{2} = 180° - 75° - 45°$

$\hat{2} = 60°$

$2\,\hat{2} = 120° = \hat{B} + 45°$

$\therefore \hat{B} = 75°$

78.



D) $87° = \hat{1} + 30°$

$\hat{1} = 57°$

$2\,\hat{1} = 114° = 60° + \hat{C}$

$\therefore \hat{C} = 54°$

4.5.6. CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

Si dos triángulos son congruentes tienen todos sus elementos respectivamente congruentes.

Se denota este hecho escribiendo $\Delta\, ABC \cong \Delta\, FED$

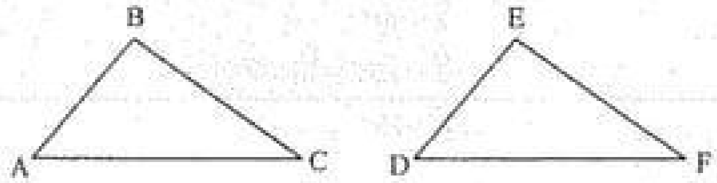
Para todo par de triángulos congruentes, la relación entre sus elementos congruentes es una correspondencia biunívoca. Entonces, en dos triángulos congruentes, a cada lado (o ángulo) del uno corresponde un lado (o ángulo) congruente en el otro, llamados correspondientes congruentes.

Se demuestra que dos triángulos son congruentes para concluir que todos los demás elementos correspondientes son congruentes.

4.5.6.1. POSTULADOS DE CONGRUENCIA

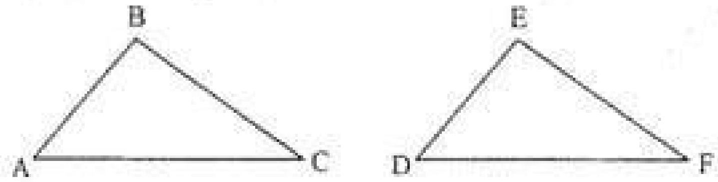
4.5.6.1.1. TRIÁNGULOS ESCALENOS

1. Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente congruentes dos lados y el ángulo comprendido.



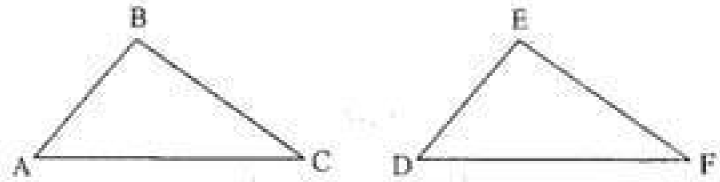
$\Delta\, ABC \cong \Delta\, DEF$
Es una correspondencia (L.A.L.).

2. Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente congruentes un lado y dos ángulos.



$\Delta\, ABC \cong \Delta\, DEF$
Es una correspondencia (A.L.A).

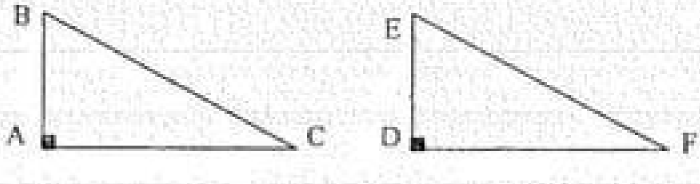
3. Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente congruentes sus tres lados.



$\Delta\, ABC \cong \Delta\, DEF$
Es una correspondencia (L.L.L).

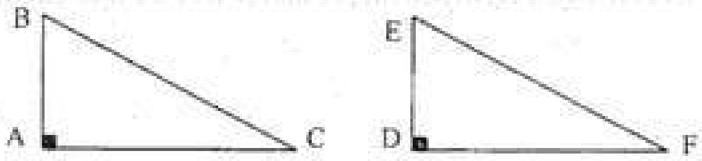
4.5.6.1.2. TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

1. Dos triángulos rectángulos son congruentes si tienen los catetos respectivamente congruentes.



$\Delta\, ABC \cong \Delta\, DEF$
Es una correspondencia (C.C).

2. Dos triángulos rectángulos son congruentes si tienen la hipotenusa y un ángulo agudo respectivamente congruentes.

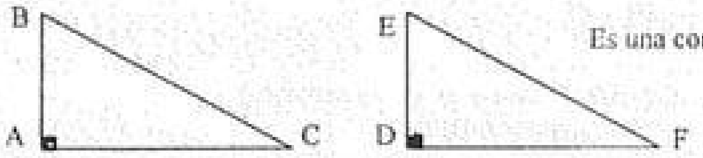


$\Delta\, ABC \cong \Delta\, DEF$
Es una correspondencia (H.A).

3. Dos triángulos rectángulos son congruentes si tienen un cateto y un ángulo agudo respectivamente congruentes.

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$
Es una correspondencia (C.A).

4. Dos triángulos rectángulos son congruentes si tienen la hipotenusa y un cateto respectivamente congruentes.

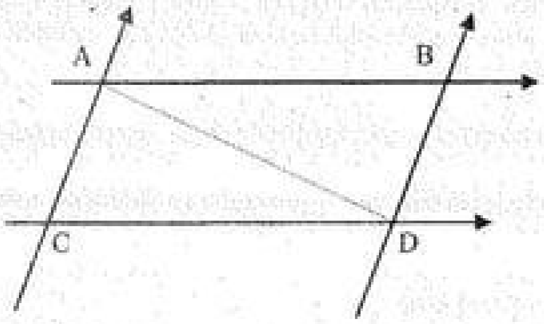


$\Delta ABC \cong \Delta DEF$
Es una correspondencia (H.C).

4.5.6.2. PROPIEDADES DE PARALELAS

TEOREMA # 1

Los segmentos de rectas paralelas y limitados por otro par de rectas paralelas son congruentes.



H) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
$\overline{AC} \parallel \overline{BD}$

T) $AB = CD$
$AC = BD$

D) $\Delta ACD \wedge \Delta ABD$

$C\widehat{A}D \cong A\widehat{D}B$ (A)
$\overline{AD} \cong \overline{AD}$ (L)
$C\widehat{D}A \cong B\widehat{A}D$ (A)

$\therefore\ \Delta ACD \cong \Delta ABD$ (A.L.A.)

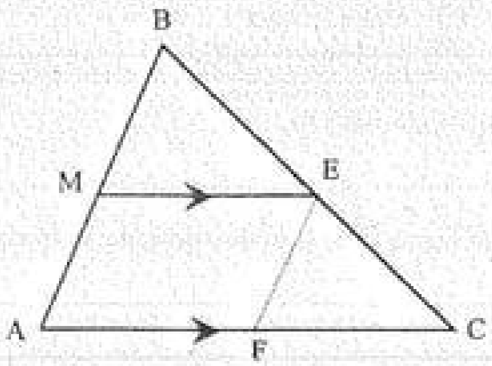
$\Rightarrow$ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$
$\overline{AC} \cong \overline{BD}$ ///.

COROLARIO

Dos rectas paralelas son equidistantes en toda su extensión.

TEOREMA # 2

La recta que biseca a un lado de un triángulo y es paralela a otro lado, biseca también al tercer lado.



H) $BM = MA$ T) $BE = EC$
$ME \parallel AC$

D) $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$ (construcción)
$\therefore BM = MA = EF$
$\Delta MBE \wedge \Delta FEC$

$\widehat{B} = \widehat{FEC}$ (A)
$BM = EF$ (L)
$\widehat{A} = \widehat{BME} = \widehat{EFC}$ (A)

$\therefore\ \Delta MBE \cong \Delta CFE$ (A.L.A) $\Rightarrow$ $BE = EC$ ///.

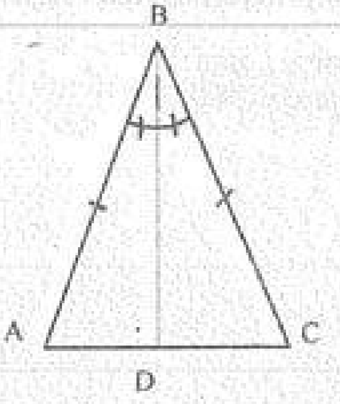
COROLARIO

El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado e igual a su mitad.

4.5.6.3. TRIÁNGULO ISÓSCELES Y EQUILÁTERO

TEOREMA # 1

Si dos lados de un mismo triángulo son congruentes entre sí, los ángulos opuestos a dichos lados también son congruentes.



H) Δ ABC isósceles (AB = BC)

T) $\hat{A} \cong \hat{C}$

D) BD Bisectriz B (construcción)

Δ ABD $\wedge$ Δ DBC

AB $\cong$ BC (L)

ABD $\cong$ DBC (A)

BD = BD (L)

$\therefore$ Δ ABD $\cong$ Δ DBC (L.A.L) $\Rightarrow$ A $\cong$ C ///.

COROLARIOS.

1. Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos a estos ángulos son también congruentes.

2. La bisectriz del ángulo desigual de un triángulo isósceles, es también mediana, altura y mediatriz de dicho triángulo; y reciprocamente, un triángulo en el cual una línea fundamental es también otra línea fundamental, el triángulo es isósceles.

3. En un triángulo isósceles todos sus puntos fundamentales pertenecen a la mediatriz de su lado desigual.

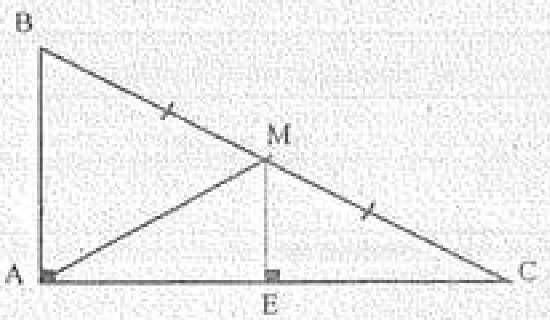
4. Todo triángulo equilátero es equiángulo; y reciprocamente, todo triángulo equiángulo es también equilátero.

5. En un triángulo equilátero las bisectrices, medianas, alturas y mediatrices de los tres vértices son congruentes. El incentro, baricentro, ortocentro y circuncentro son el mismo punto.

4.5.6.4. TRIÁNGULO RECTÁNGULO

TEOREMA # 1

El punto medio de la hipotenusa equidista de los tres vértices del triángulo rectángulo.



H) BM = MC

T) BM = AM = MC

D) $\overline{ME}$ // $\overline{AB}$ (construcción)

$\therefore$ AE = EC

$\therefore$ $\overline{ME}$ Altura Δ AMC

$\overline{ME}$ Mediana Δ AMC

$\therefore$ Δ AMC es Isósceles

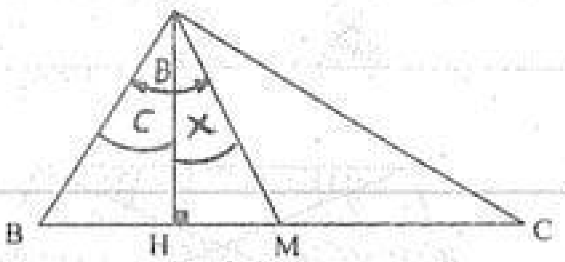
$\Rightarrow$ AM = MC ///.

COROLARIO

Si una mediana de un triángulo es igual a los dos segmentos que forma en el lado del triángulo, el triángulo es rectángulo.

TEOREMA # 2

El ángulo formado por la altura y la mediana relativas a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la diferencia de los ángulos agudos.



H) $\overline{AH}$ Altura Δ ABC
$\overline{AM}$ Mediana Δ ABC

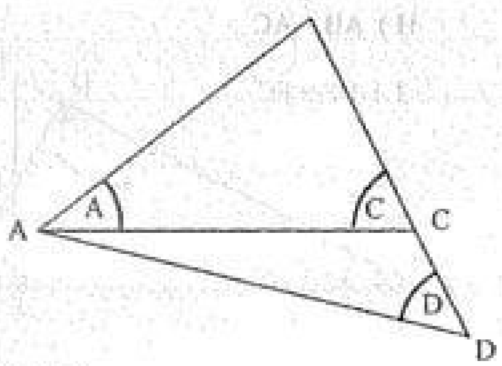
T) $\widehat{X} = \widehat{B} - \widehat{C}$

D) AM = BM = MC
$B\widehat{A}H = \widehat{C}$
$B\widehat{A}M = \widehat{B}$
$\therefore \widehat{X} = \widehat{B} - \widehat{C}$ ///.

.7. DESIGUALDADES

TEOREMA # 1

Si dos lados de un triángulo no son congruentes, los ángulos opuestos a ellos tampoco lo son y el ángulo de mayor medida se opone al lado mayor; y reciprocamente.



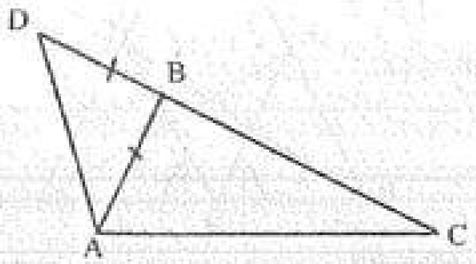
H) AB > BC   T) $\widehat{C} > \widehat{A}$

D) AB = BD (construcción)
$\therefore \Delta$ ABD isósceles

$\widehat{D} = D\widehat{A}C + \widehat{A}$
$\Rightarrow \widehat{D} > \widehat{A}$
$\widehat{C} = D\widehat{A}C + \widehat{D}$
$\Rightarrow \widehat{C} > \widehat{D}$
$\therefore \widehat{C} > \widehat{A}$ ///.

TEOREMA # 2

En cualquier triángulo la suma de las longitudes de dos lados cualesquiera es mayor que la longitud del tercer lado.

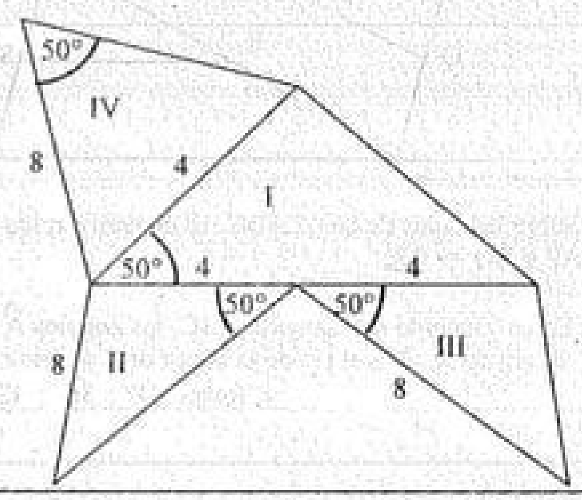


H) Δ ABC Escaleno   T) AB + BC > AC

D) AB = BD (construcción)
$\therefore \widehat{D} \cong B\widehat{A}D$
$\Rightarrow D\widehat{A}C > \widehat{D}$
$\Rightarrow$ DC > AC
BD + BC > AC
$\therefore$ AB + BC > AC ///.

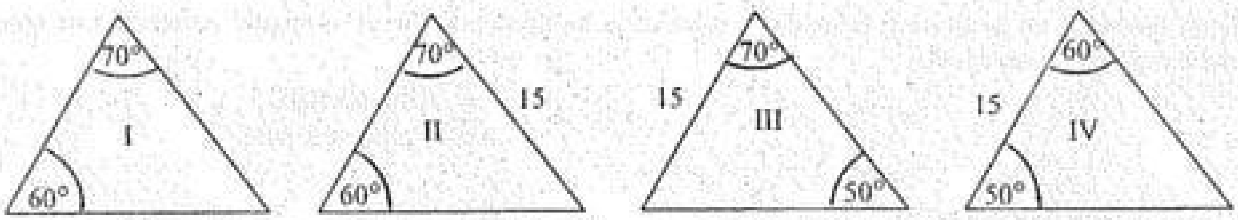
4.5.8. EJERCICIOS

1. Indique que par de triángulos son congruentes



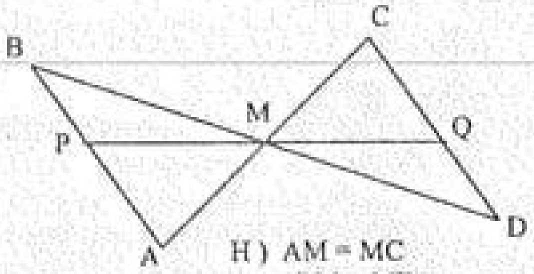
Resp. I ≅ III

2. Indique qué par de triángulos son congruentes



Resp. I ≅ IV

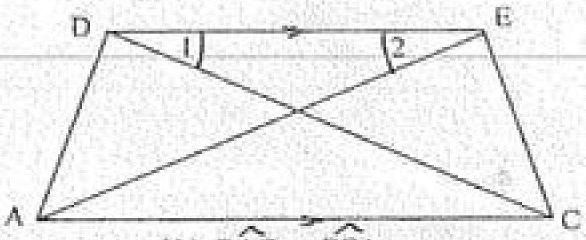
3.



H) AM = MC
BM = MD

T) PM = MQ

4.



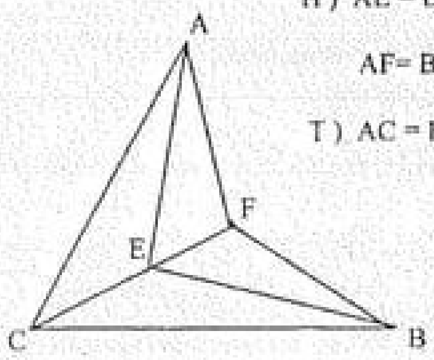
H) $D\widehat{A}C = E\widehat{C}A$
AD = EC

T) $\widehat{1} = \widehat{2}$

5.

H) AE = BE
AF= BF

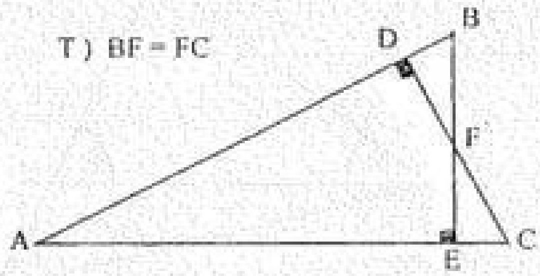
T) AC = BC



6.

H) AB = AC

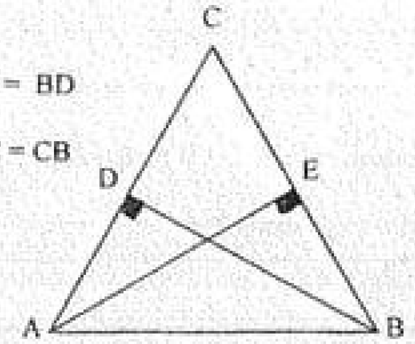
T) BF = FC



7.

H) AE = BD

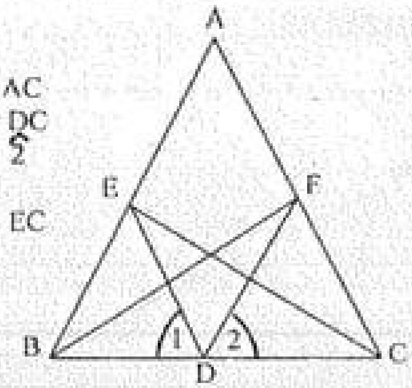
T) AC = CB



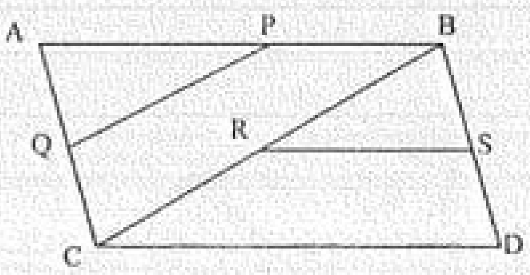
8.

H) AB = AC
BD = DC
$\widehat{1} = \widehat{2}$

T) BF = EC



9.



H) AP = PB
AQ = QC
BR = RC
BS = SD
$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
AB = CD

T) Δ APQ ≅ Δ BRS

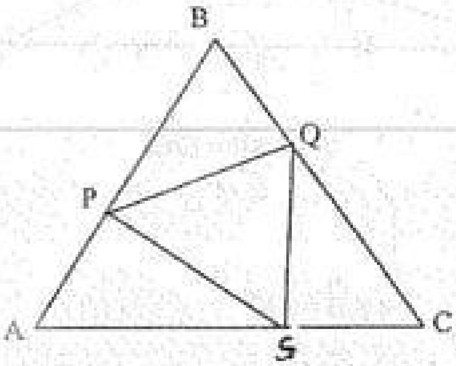
10. Sobre los lados de un Δ ABC se construyen los triángulos equiláteros BPC, CQA y ARB. Demostrar que: AP = BQ = CR.

11. En un triángulo obtusángulo ABC, los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$ están en la razón 2/3, el ángulo $P\widehat{H}Q$ = 60°, P es pie la altura de A, Q es el pie de la altura de B y H es el ortocentro. Hallar los ángulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$. ($\widehat{C} > 90°$)
Resp. 24° ; 36° ; 120°

12. En el triángulo escaleno ABC, el ángulo $\hat{B}$ mide 110° y O es el circuncentro. ¿Cuánto mide el ángulo $A\hat{O}C$?. Resp. 140°

13. En un triángulo ABC : AB = AC ; $\hat{A}$ = 120° ; I su incentro ; O su Circuncentro y E su Excentro relativo a la bisectriz interna del ángulo $\hat{B}$. Hallar la medida del ángulo $I\hat{E}O$.
Resp. 30°

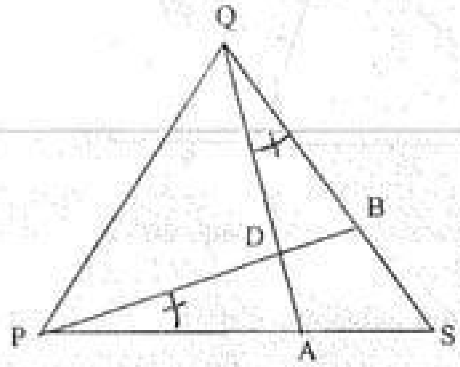
14.



H) Δ ABC ∧ Δ PQS Equiláteros

T) Δ APS ≅ Δ BPQ ≅ Δ CSQ

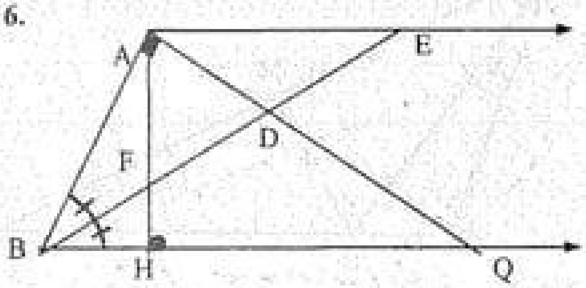
15.



H) Δ PQS Equilátero

T) PA = QB

16.



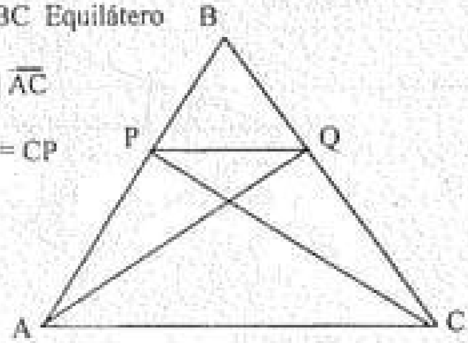
T) BF = ED

17.

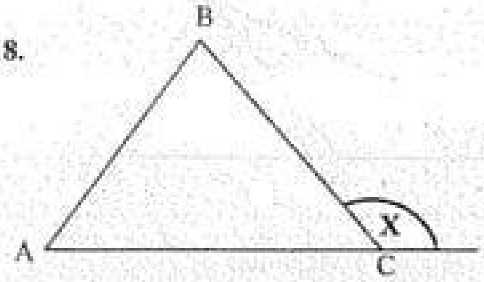
H) Δ ABC Equilátero

$\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$

T) AQ = CP



18.

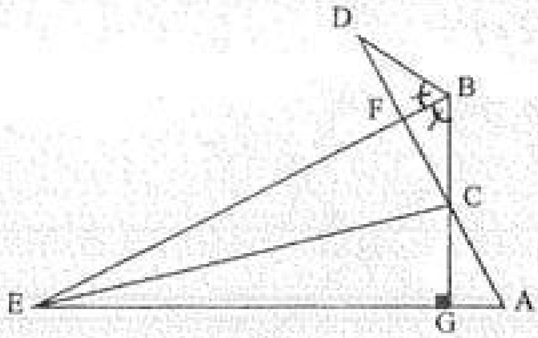


H) AB = BC

$\hat{B}$ = 50°

T) $\hat{X}$ =.? Resp. 115°

19.

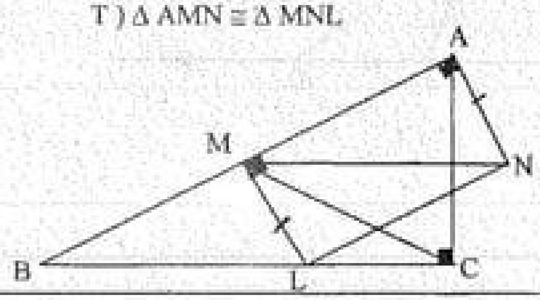


H) BD = BC = CA

T) $\overline{EC}$ Bisectriz $F\hat{E}G$

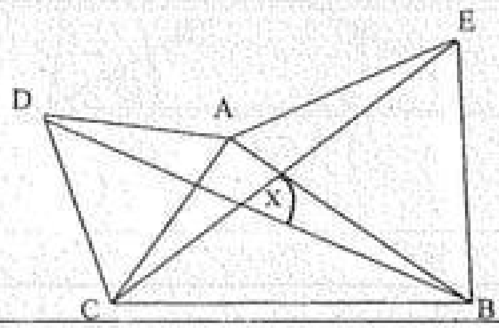
20. H) $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$
AM = MB
ML = AN

T) Δ AMN ≅ Δ MNL

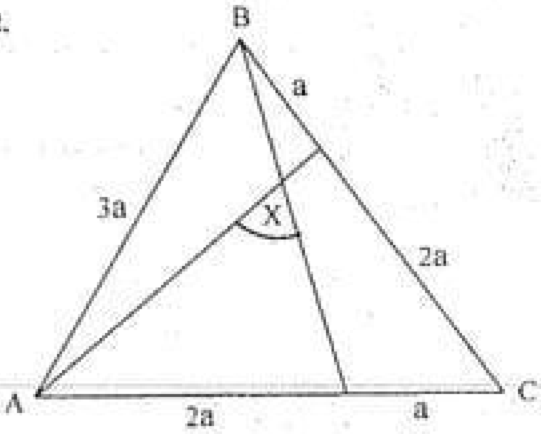


21. H) Δ ACD y Δ AEB Equiláteros

T) $\hat{X}$ = ? Resp. 60°

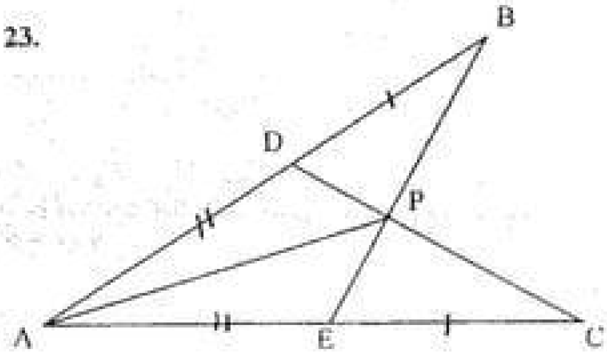


22.



T) $\hat{X}$ = ? Resp. 60°

23.



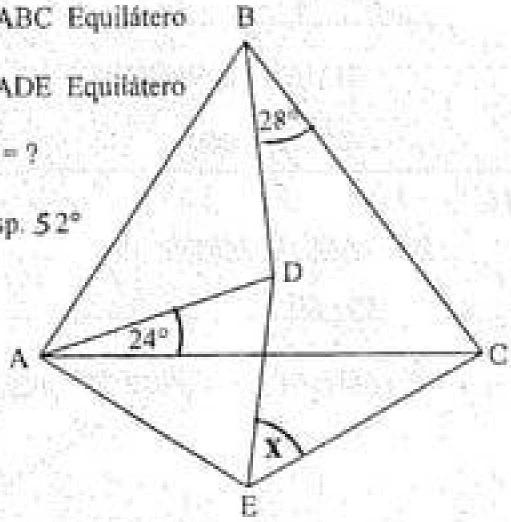
T) $\widehat{DAP} = \widehat{EAP}$

24. H) Δ ABC Equilátero

Δ ADE Equilátero

T) $\hat{X}$ = ?

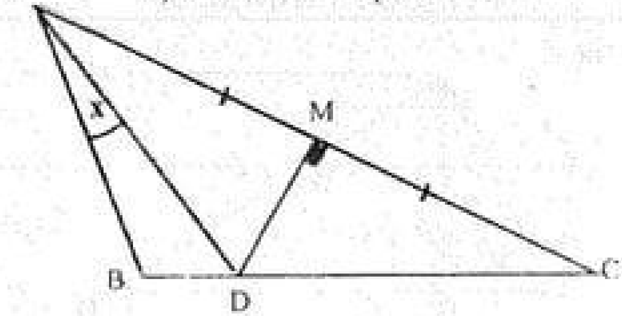
Resp. 52°



25. H) $\hat{B}$ = 100°

$\hat{C}$ = 30°

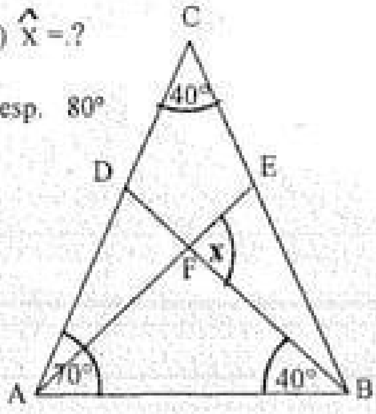
T) $\hat{X}$ = ? Resp. 20°



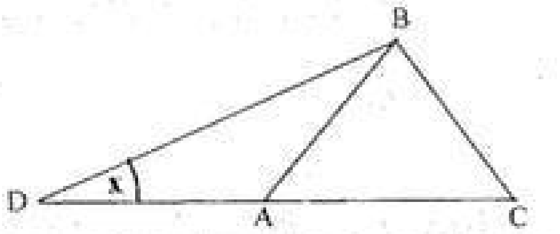
26. H) DC = CE

T) $\hat{X}$ = ?

Resp. 80°



27.



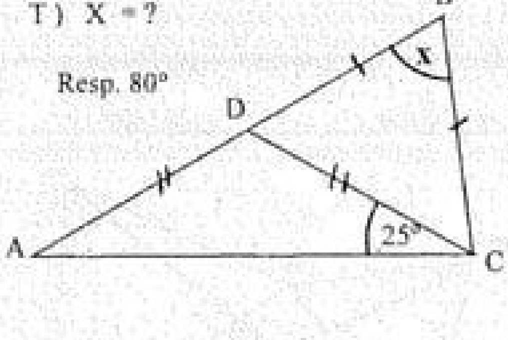
H) AB = BC = AD

$\hat{X}$ = 40°

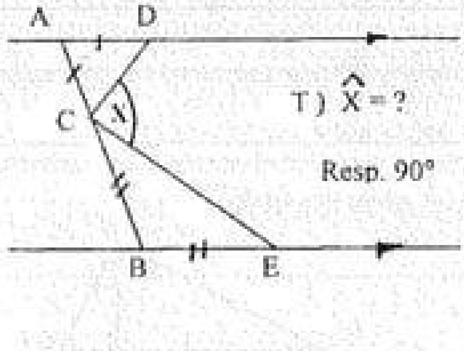
T) $\hat{C}$ = ? Resp. 80°

28. T) $\hat{X}$ = ?

Resp. 80°



29.



T) $\hat{X}$ = ?

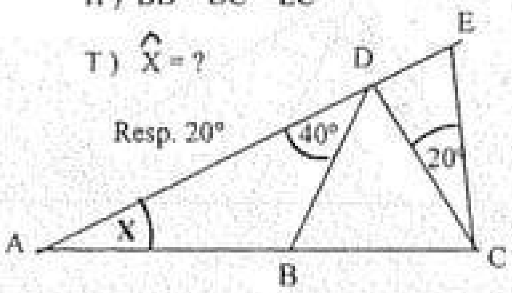
Resp. 90°

30.

H) BD = DC = EC

T) $\widehat{X}$ = ?

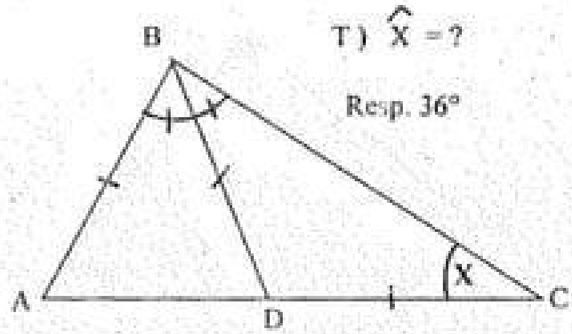
Resp. 20°



31.

T) $\widehat{X}$ = ?

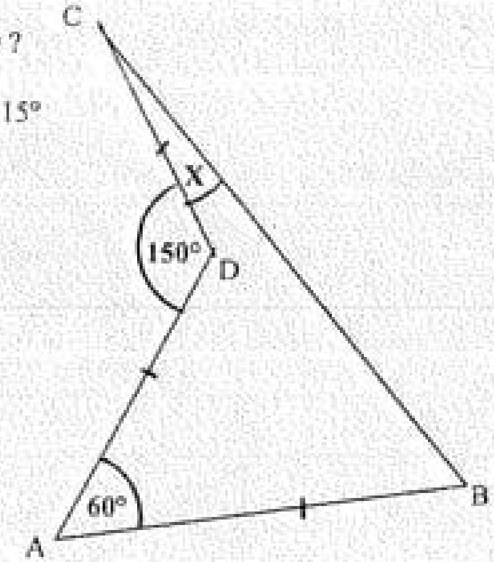
Resp. 36°



32.

T) $\widehat{X}$ = ?

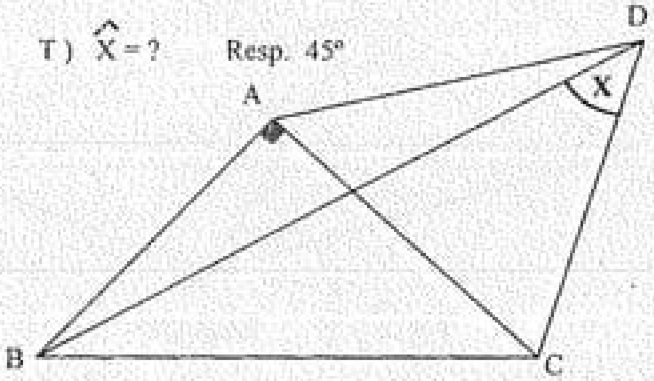
Resp. 15°



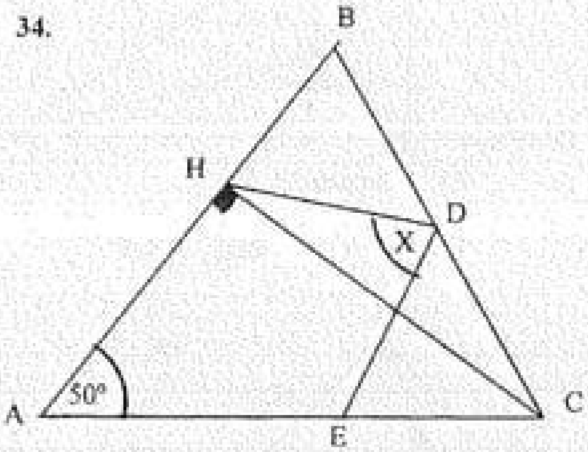
33.

H) AB = AC = AD

T) $\widehat{X}$ = ? Resp. 45°



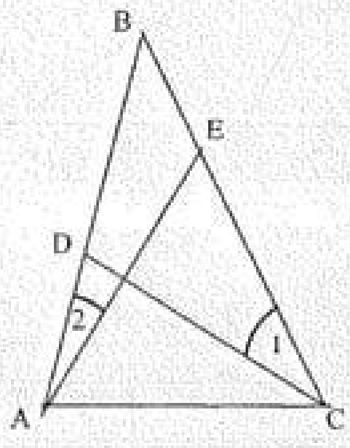
34.



H) DC = DE = DH

T) $\widehat{X}$ = ? Resp. 80°

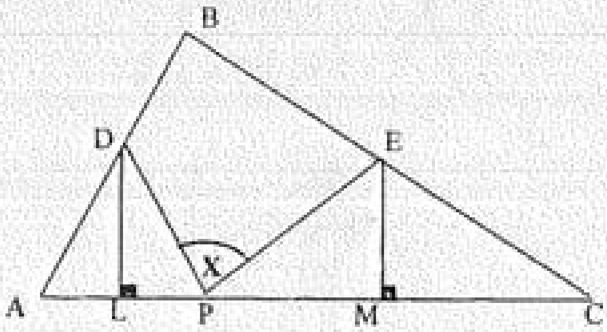
35.



H) CA = CD = CE

T) $\widehat{1} = 2\,\widehat{2}$

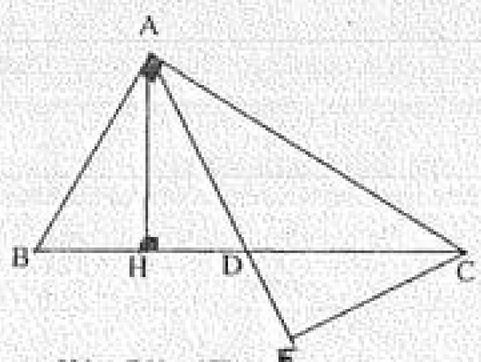
36.



H) AL = LP
PM = MC

T) $\widehat{X} = \widehat{B}$

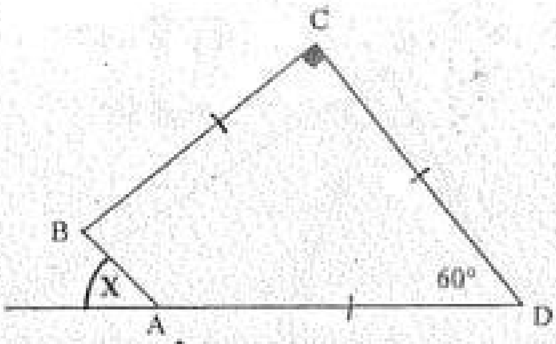
37.



H) BH = HD
$\widehat{ACD} = \widehat{ECD}$

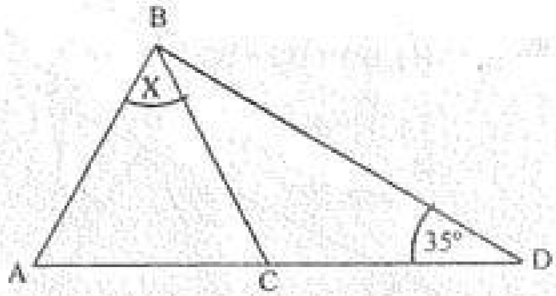
T) $\widehat{E}$ = ? Resp. 90°

38.



T) $\widehat{X} = ?$ Resp. 45°

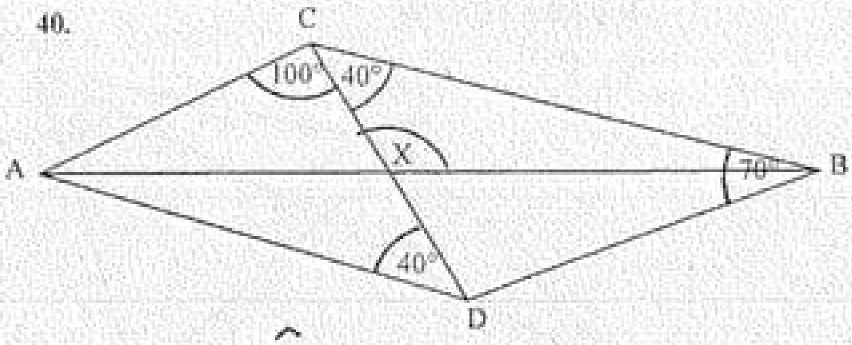
39.



H) CD = BC = AB

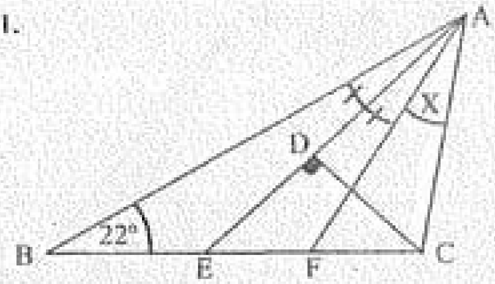
T) $\widehat{X} = ?$ Resp. 40°

40.



T) $\widehat{X} = ?$ Resp. 120°

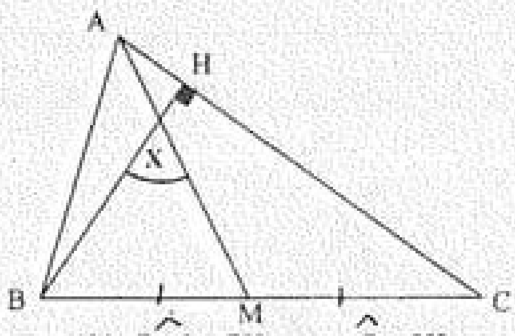
41.



H) AD = DE

T) $\widehat{X} = ?$ Resp. 22°

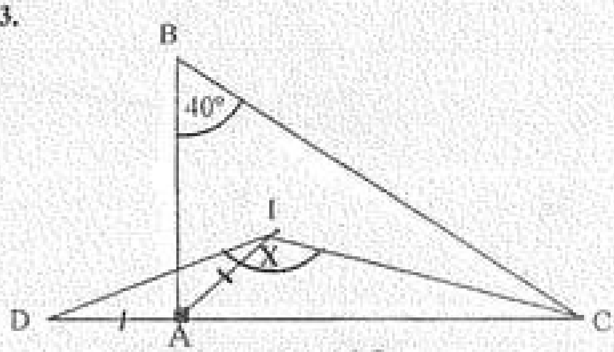
42.



H) $\widehat{BAC} = 70°$ y $\widehat{C} = 55°$

T) $\widehat{X} = ?$ Resp. 55°

43.



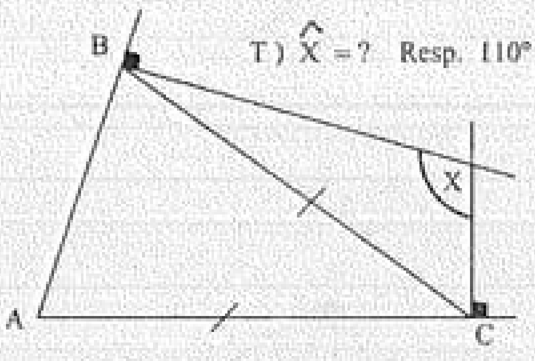
H) I Incentro Δ ABC

T) $\widehat{X} = ?$ Resp. 132.5°

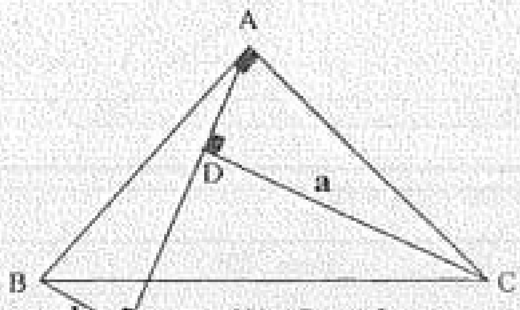
44.

H) $\widehat{A} = 70°$

T) $\widehat{X} = ?$ Resp. 110°



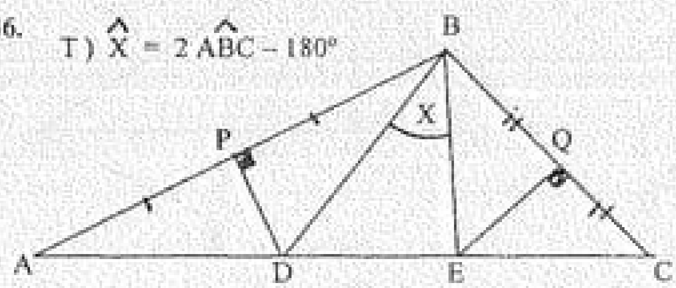
45.



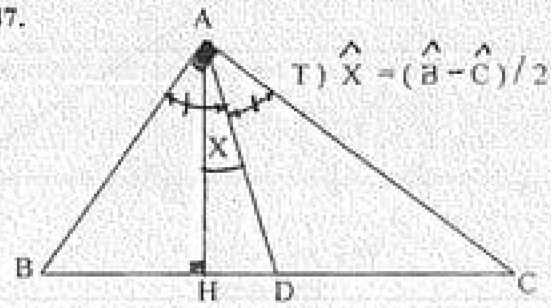
H) AB = AC

T) DE = a - b

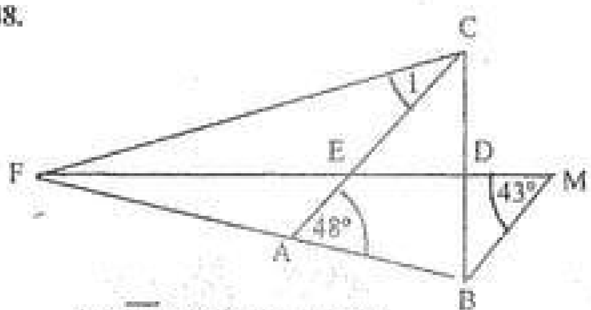
46. T) $\widehat{X} = 2\,\widehat{ABC} - 180°$



47. T) $\widehat{X} = (\widehat{B} - \widehat{C})/2$



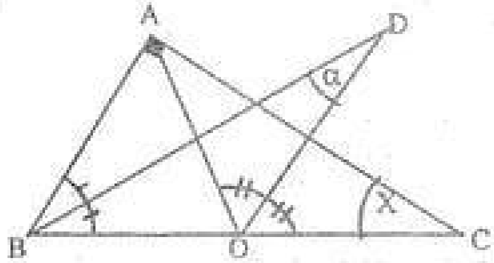
48.



H) $\overline{DE}$ Mediatriz Δ ABC
$\overline{BM} \parallel \overline{AC}$

T) $\hat{1}$ = ? Resp. 38°

49.

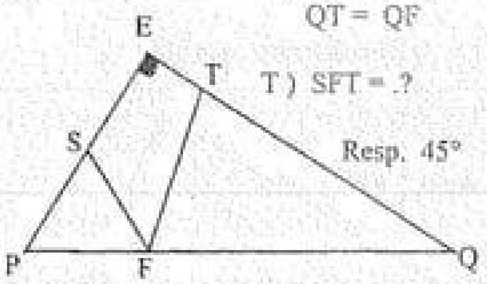


H) .O Circuncentro Δ ABC

T) $\hat{X} = 90° - 2\hat{\alpha}$

50.

H) PS = PF
QT = QF

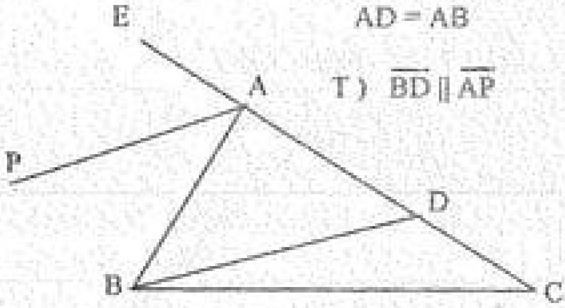


T) SFT = ?

Resp. 45°

51.

H) $\overline{AP}$ Bisectriz $\widehat{EAB}$
AD = AB



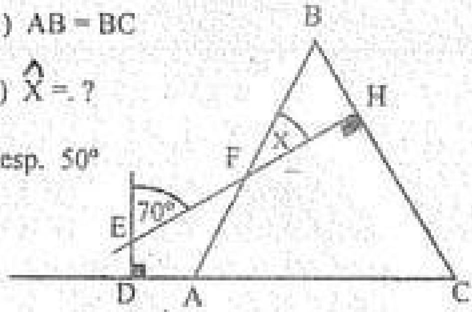
T) $\overline{BD} \parallel \overline{AP}$

52.

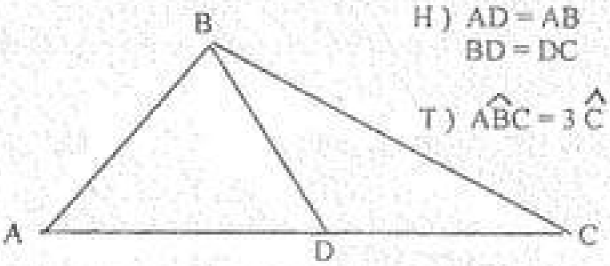
H) AB = BC

T) $\hat{X}$ = ?

Resp. 50°



53.



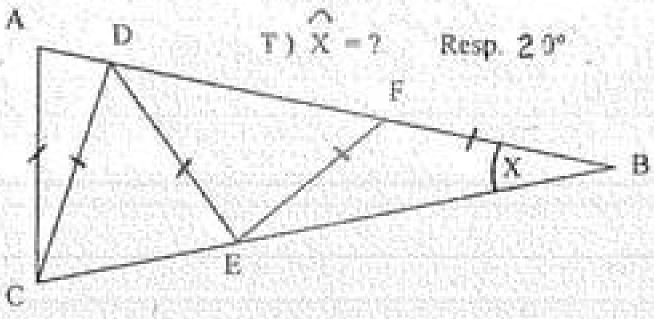
H) AD = AB
BD = DC

T) $\widehat{ABC} = 3\hat{C}$

54.

H) AB = BC

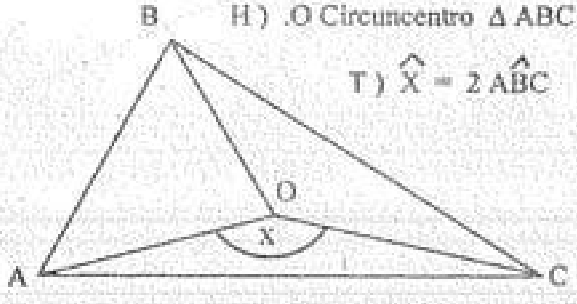
T) $\hat{X}$ = ? Resp. 20°



55.

H) .O Circuncentro Δ ABC

T) $\hat{X} = 2\widehat{ABC}$

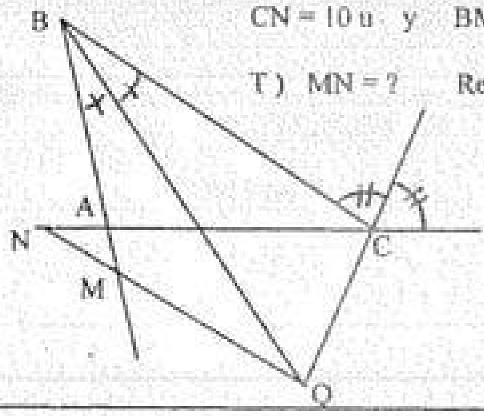


56.

H) $\overline{NQ} \parallel \overline{BC}$

CN = 10 u y BM = 8 u

T) MN = ? Resp. 2u

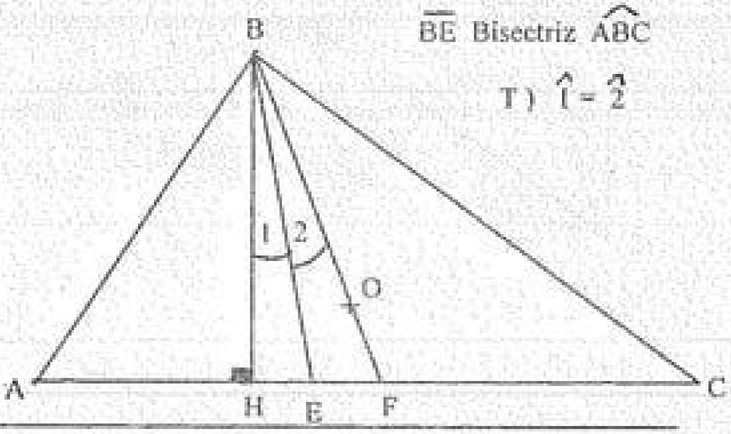


57.

H) . O Circuncentro Δ ABC

$\overline{BE}$ Bisectriz $\widehat{ABC}$

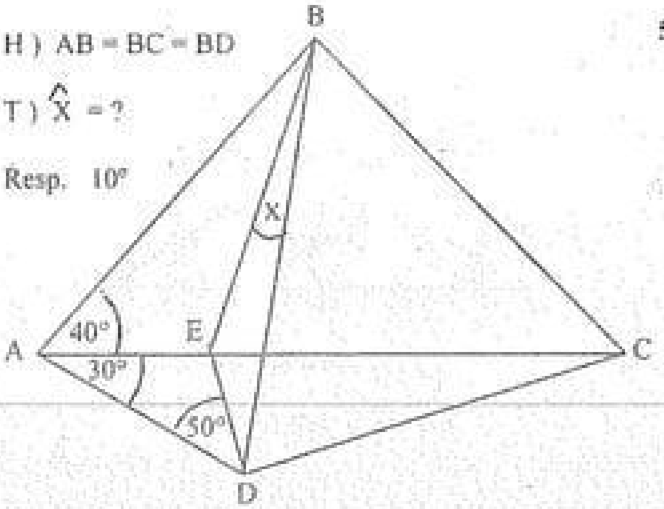
T) $\hat{1} = \hat{2}$



58. H) AB = BC = BD

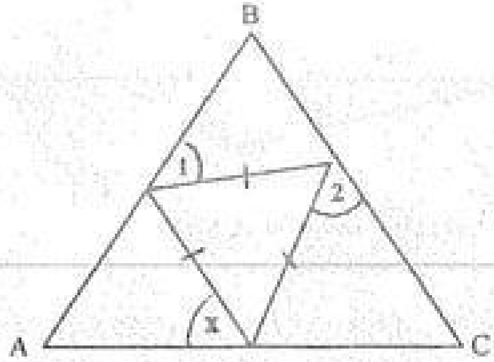
T) $\widehat{X}$ = ?

Resp. 10º

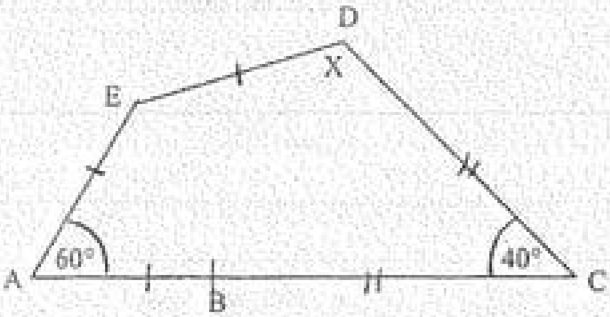


59. H) AB = BC

T) $\widehat{X} = (\hat{1} + \hat{2})/2$



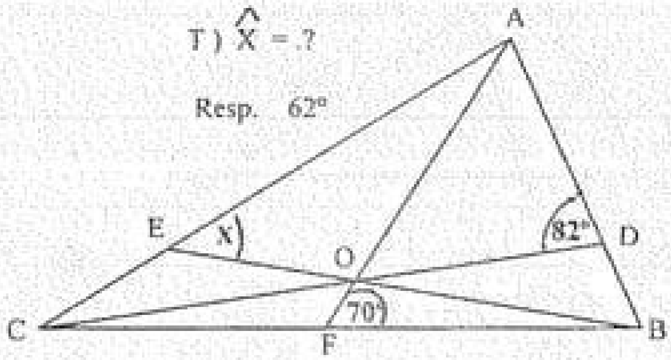
60. T) $\widehat{X}$ = ? Resp. 120º



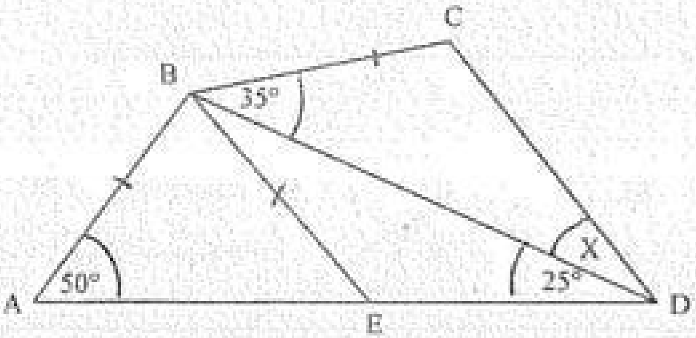
61. H) .O Circuncentro Δ ABC

T) $\widehat{X}$ = .?

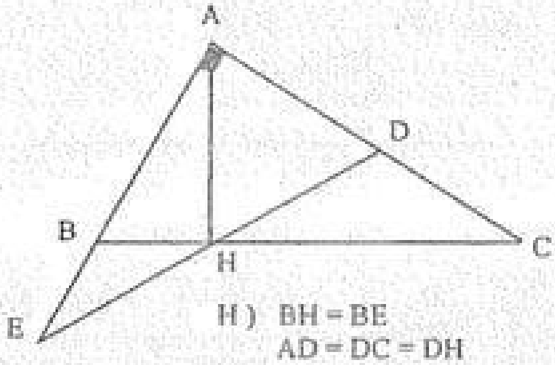
Resp. 62º



62. T) $\widehat{X}$ = ? Resp. 30º



63.

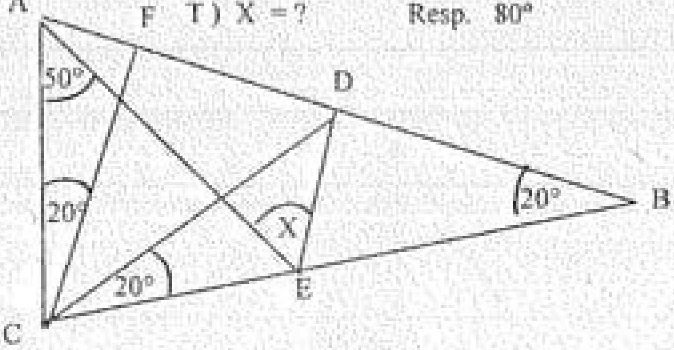


H) BH = BE
AD = DC = DH

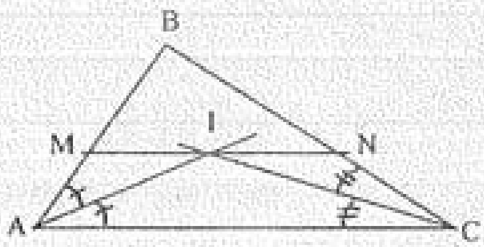
T) $\widehat{B} = 2\widehat{C}$

64. H) AB = BC

T) $\widehat{X}$ = ? Resp. 80º



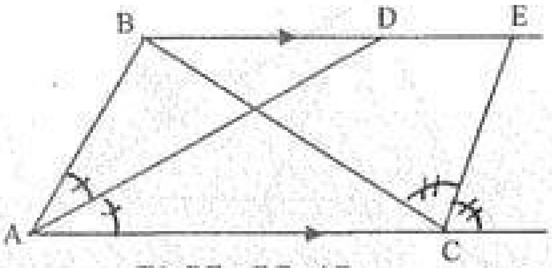
65.



H) $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$

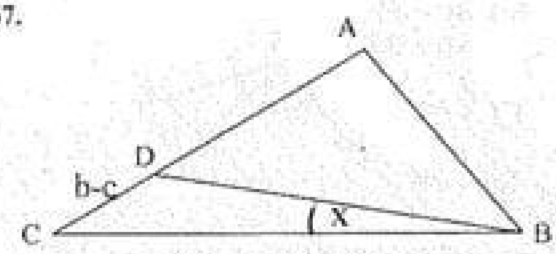
T) MN = AM + NC

66.



T) DE = BC - AB

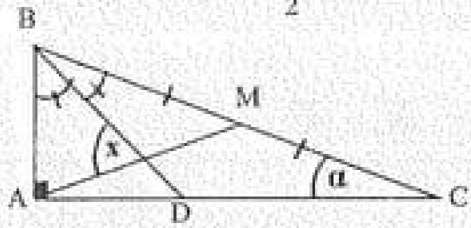
67.



T) $\widehat{X} = (\widehat{ABC} - \widehat{C})/2$

68.

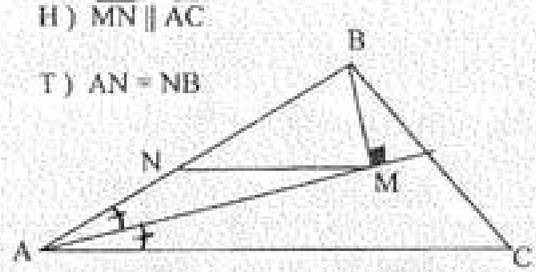
T) $\widehat{X} = \dfrac{90 + 3\widehat{\alpha}}{2}$



69.

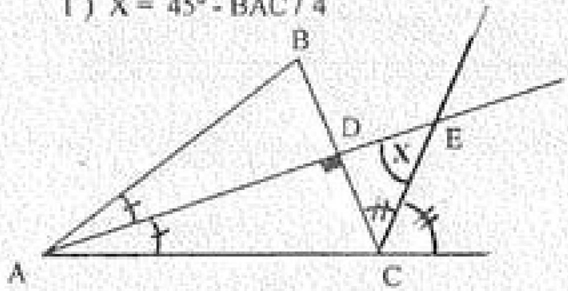
H) $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$

T) AN = NB



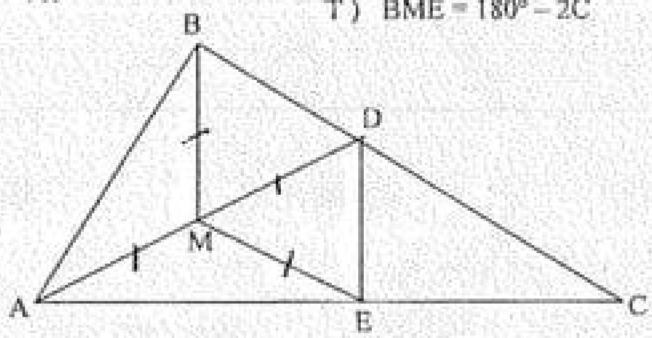
70.

T) $\widehat{X} = 45° - \widehat{BAC}/4$



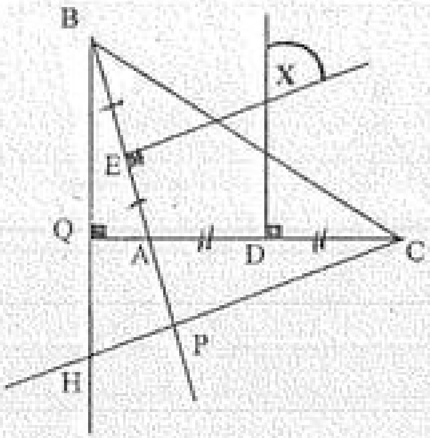
71.

T) $\widehat{BME} = 180° - 2\widehat{C}$

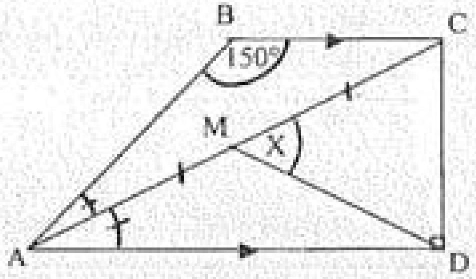


72. H) . H Ortocentro Δ ABC

T) $\widehat{X} = \widehat{H}$



73.



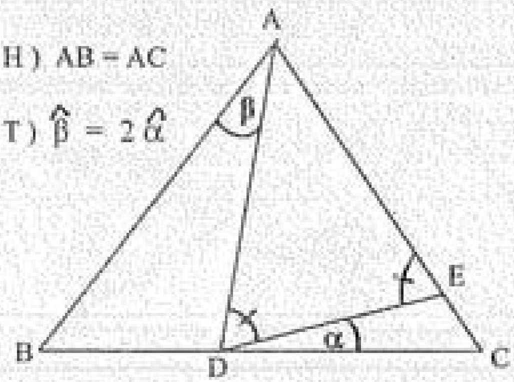
T) $\widehat{X} = ?$

Resp. 30°

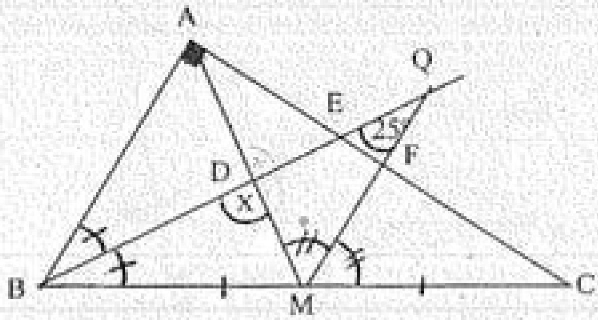
74.

H) AB = AC

T) $\widehat{\beta} = 2\,\widehat{\alpha}$



75. T) $\widehat{X} = .?$ Resp. 75°

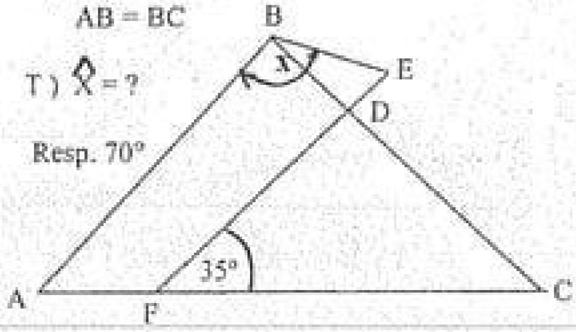


76.

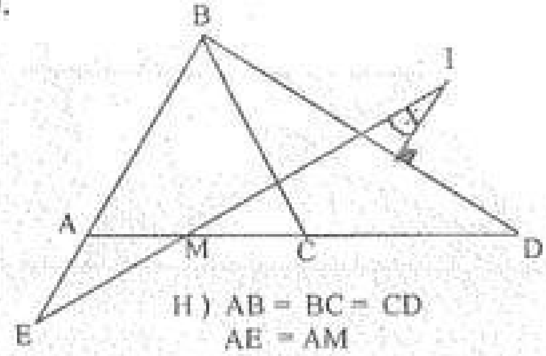
H) BD = BE
AB = BC

T) $\hat{X}$ = ?

Resp. 70°



77.



H) AB = BC = CD
AE = AM
$\widehat{AEM}$ = 43°

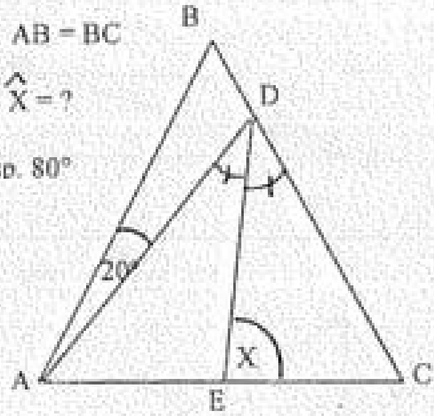
T) $\hat{X}$ = ?

Resp. 4°

78. H) AB = BC

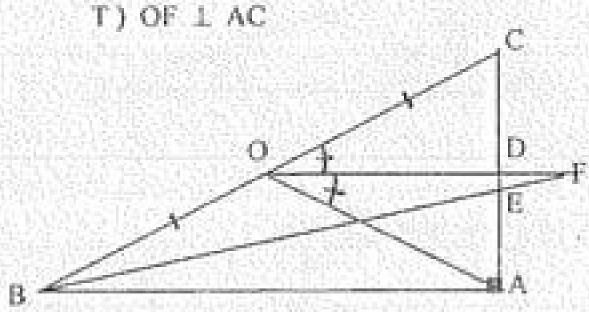
T) $\hat{X}$ = ?

Resp. 80°



79.

T) $\overline{OF} \perp \overline{AC}$

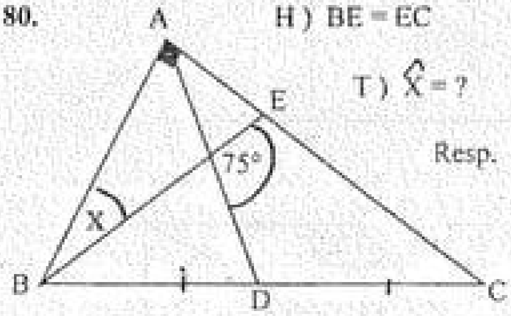


80.

H) BE = EC

T) $\hat{X}$ = ?

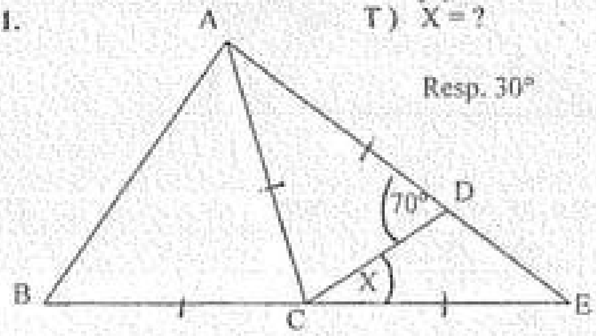
Resp. 40°



81.

T) $\hat{X}$ = ?

Resp. 30°

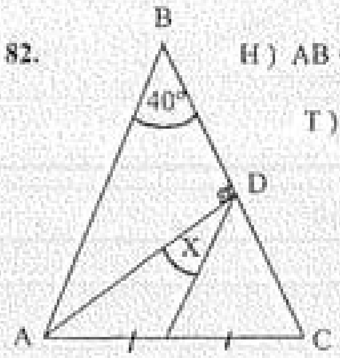


82.

H) AB = BC

T) $\hat{X}$ = ?

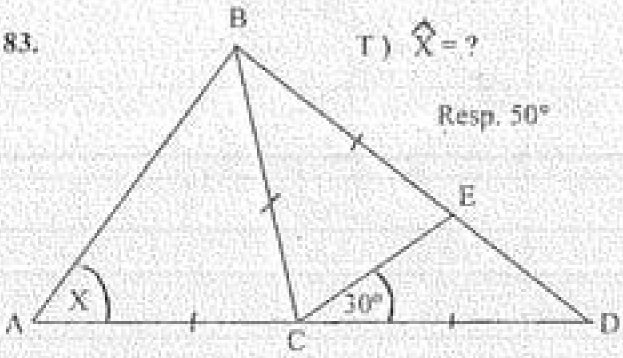
Resp. 20°



83.

T) $\hat{X}$ = ?

Resp. 50°

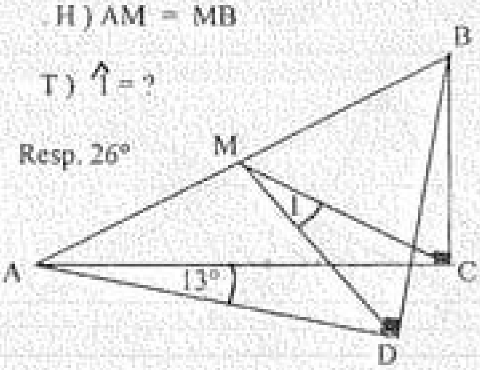


84.

H) AM = MB

T) $\hat{I}$ = ?

Resp. 26°

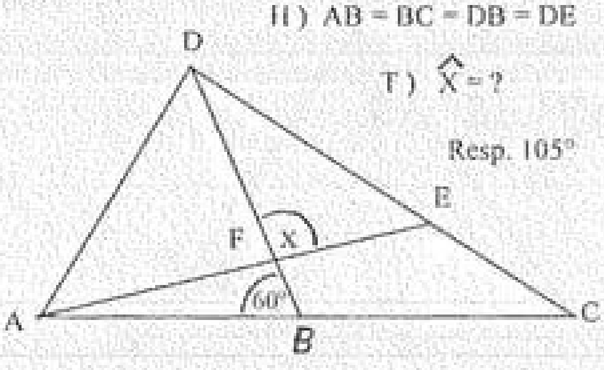


85.

H) AB = BC = DB = DE

T) $\hat{X}$ = ?

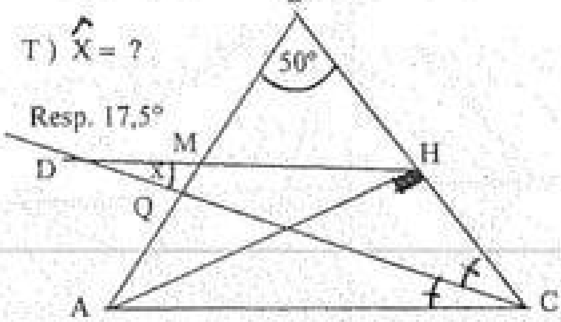
Resp. 105°



86. H) AB = BC
AM = MB

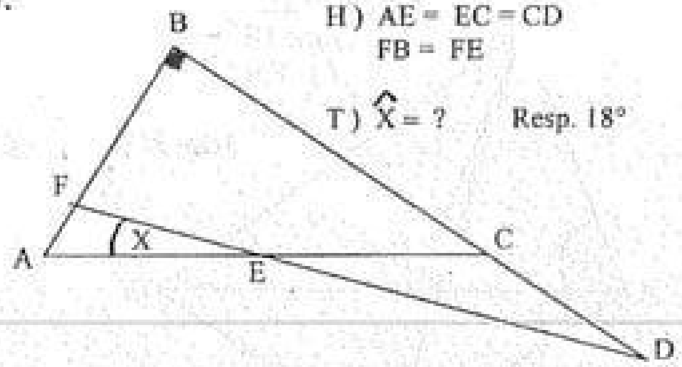
T) $\widehat{X}$ = ?

Resp. 17,5°

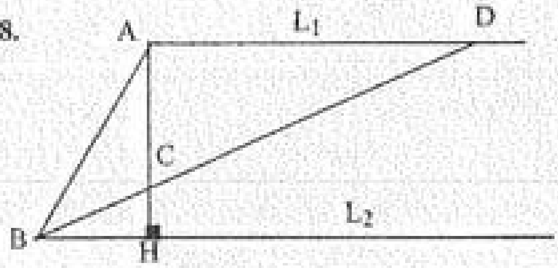


87. H) AE = EC = CD
FB = FE

T) $\widehat{X}$ = ? Resp. 18°



88.



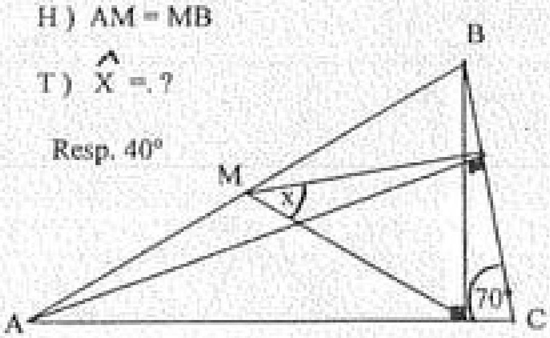
H) $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$ y CD = 2 AB

T) $\widehat{CBH} = \widehat{ABC}/2$

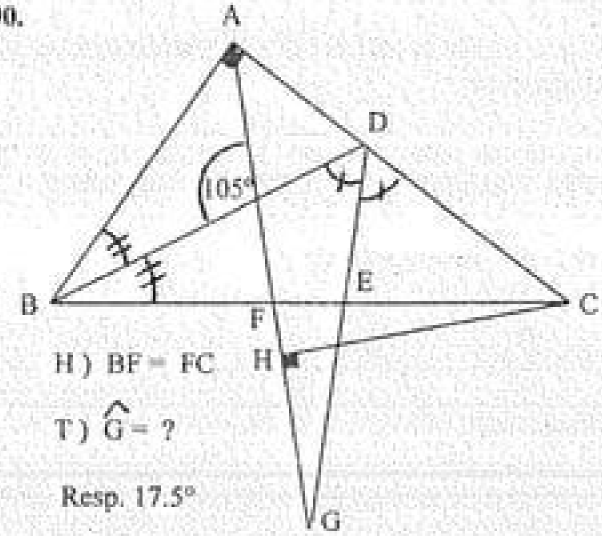
89. H) AM = MB

T) $\widehat{X}$ = ?

Resp. 40°



90.

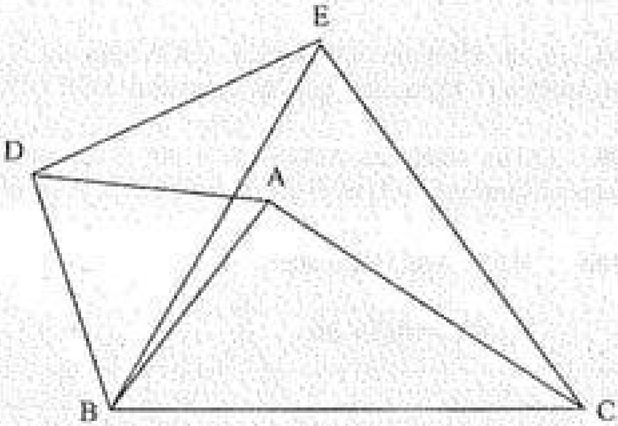


H) BF = FC

T) $\widehat{G}$ = ?

Resp. 17.5°

91.



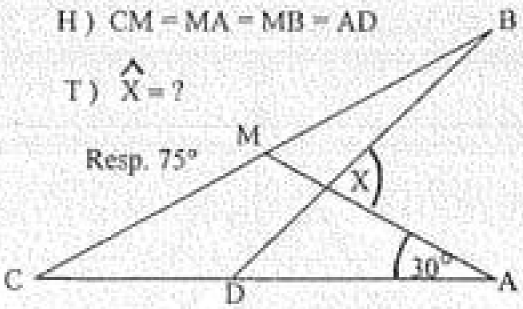
H) H) Δ ABD ∧ Δ BEC Equiláteros

T) DE = AC

92. H) CM = MA = MB = AD

T) $\widehat{X}$ = ?

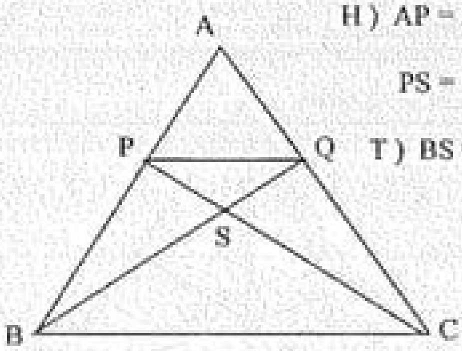
Resp. 75°



93. H) AP = AQ

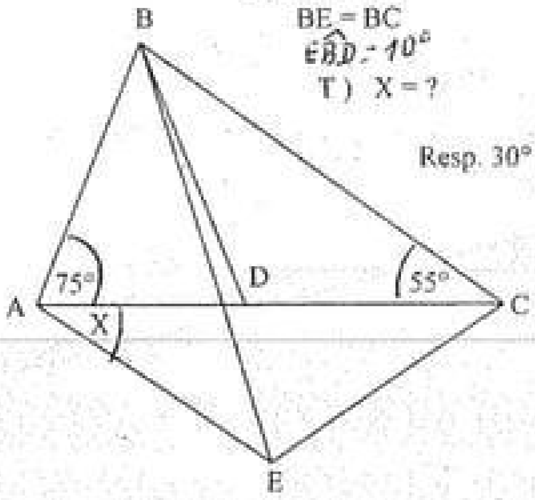
PS = SQ

T) BS = SC



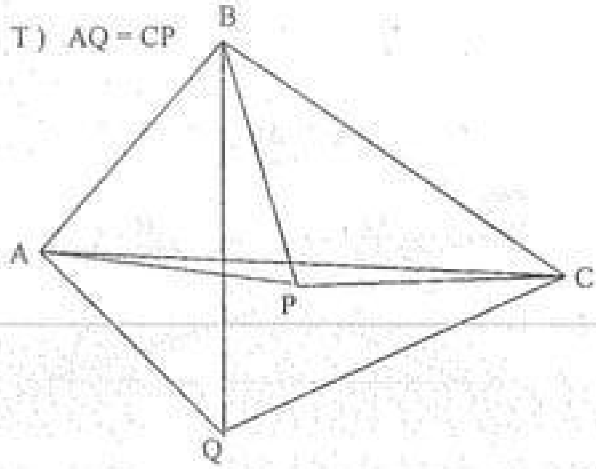
94. H) AB = BD
BE = BC
$\widehat{EBD} = 10^\circ$
T) X = ?

Resp. 30°



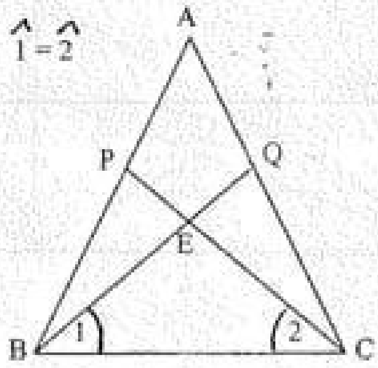
95. H) Δ ABP $\wedge$ Δ BCQ Equiláteros

T) AQ = CP



96. H) AP = AQ
PB = QC

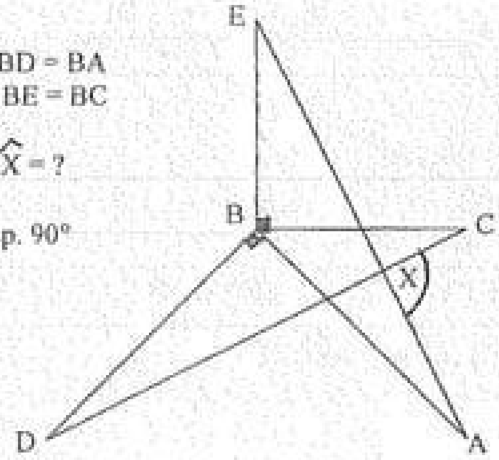
T) $\hat{1} = \hat{2}$



97. H) BD = BA
BE = BC

T) $\hat{X}$ = ?

Resp. 90°

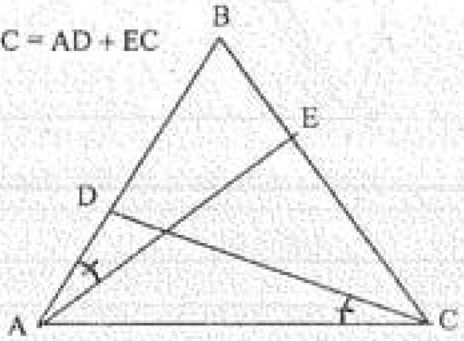


98. En un triángulo obtusángulo ABC el ángulo $\hat{A}$ mide 45° y se trazan la alturas $\overline{AP}$ y $\overline{CQ}$ cortándose en el ortocentro H. Demostrar que los triángulos AQH y CQB son congruentes.

99. En un triángulo ABC ($\hat{B} > 90°$) los puntos medios de los lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$ son L, M y N respectivamente. Si D es el pie de la altura de A demostrar que los triángulos LMN y DMN son congruentes.

100. H) Δ ABC Equilátero

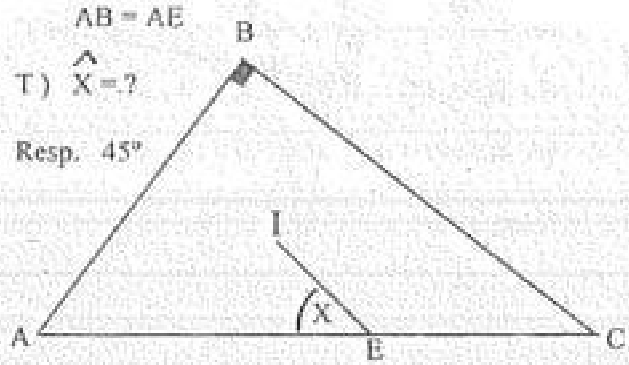
T) AC = AD + EC



101. H) . I Incentro Δ ABC
AB = AE

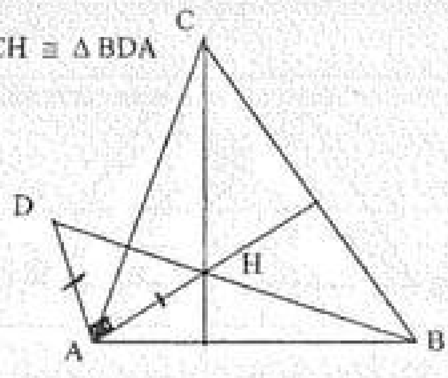
T) $\hat{X}$ = ?

Resp. 45°



102. H) . H Ortocentro Δ ABC

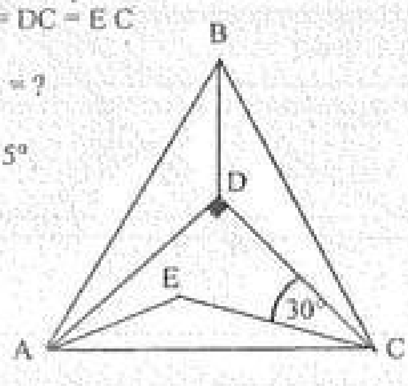
T) Δ ACH $\cong$ Δ BDA



103. H) Δ ABC Equilátero
AD = DC = E C

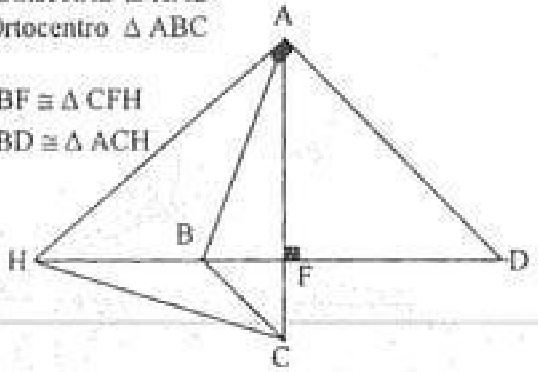
T) $\widehat{DAE}$ = ?

Resp. 15°



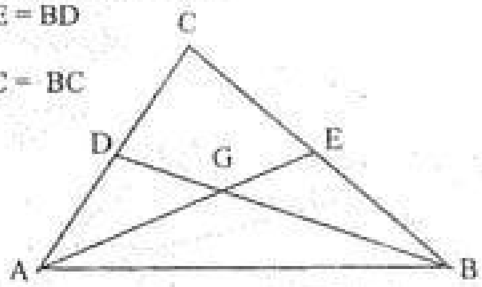
104. H) AF Bbisectriz Δ HAD
.H Ortocentro Δ ABC

T₁) Δ ABF $\cong$ Δ CFH
T₂) Δ ABD $\cong$ Δ ACH



105. H) . G Baricentro Δ ABC
AE = BD

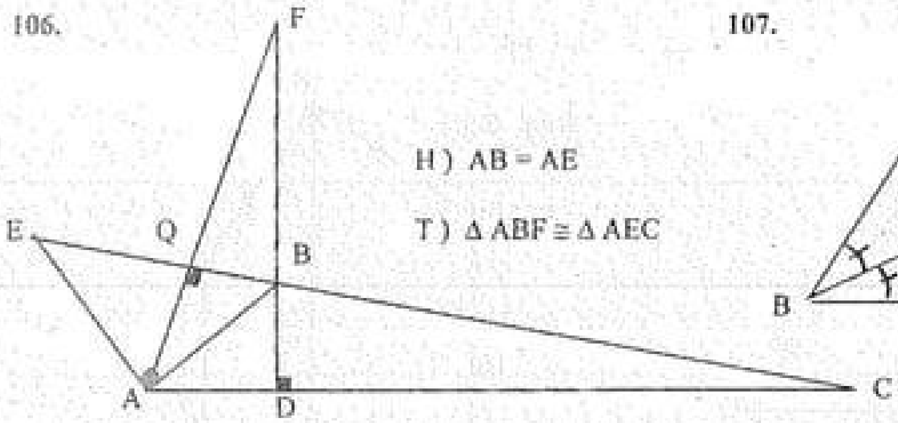
T) AC = BC



106.

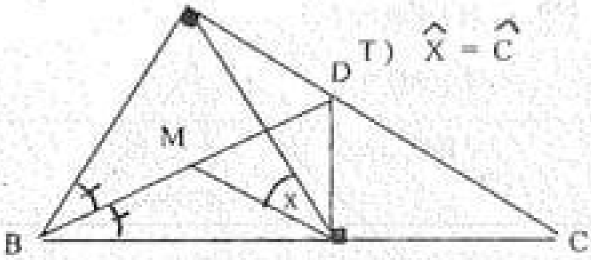
H) AB = AE

T) Δ ABF $\cong$ Δ AEC



107. H) MB = MD

T) $\widehat{X} = \widehat{C}$



108. En un triángulo isósceles, la suma de las perpendiculares trazadas desde un punto cualquiera de la base a los lados congruentes, es igual a una altura lateral.

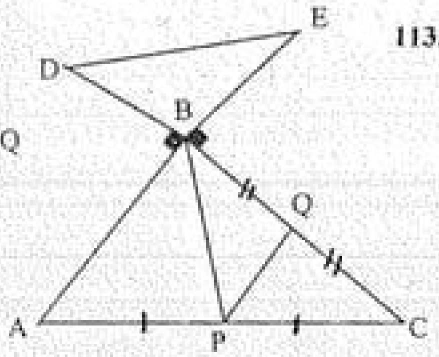
109. Si el triángulo ABC es equilátero y P un punto interior del triángulo; desde P se trazan $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$ y $\overline{PS}$ perpendiculares a los lados. Demostrar que: PQ + PR + PS es una línea fundamental.

110. Demostrar que la diferencia de las perpendiculares trazadas a los lados de un triángulo isósceles y a su prolongación desde la prolongación de su base, es una altura lateral.

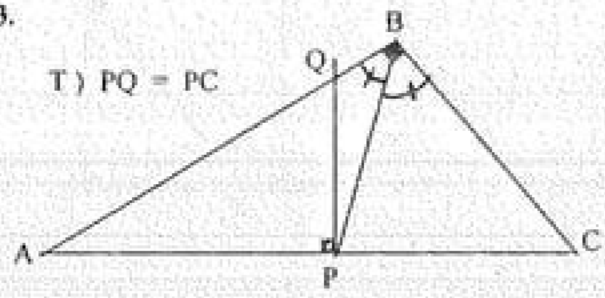
111. Si desde un punto exterior a un triángulo equilátero, se trazan perpendiculares a los tres lados, el exceso de la suma de dos de dichas perpendiculares sobre la tercera es una línea fundamental.

112. H) AB = 2 BD
BC = 2 BE

T) Δ DEB $\cong$ Δ BPQ

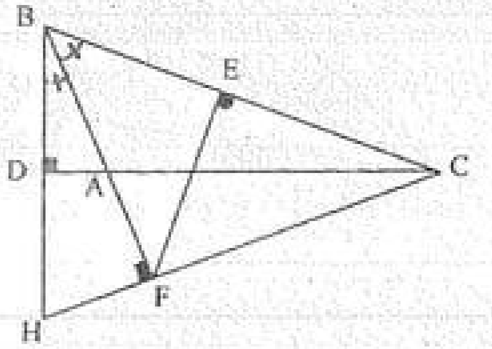


113. T) PQ = PC



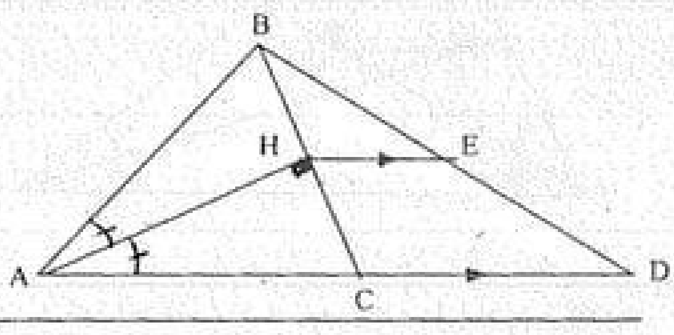
114. H) FE = 6.

T) DC = ? Resp. 12 *u*.



115. H) CD = 8.

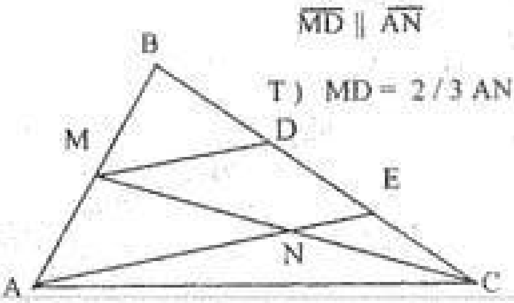
T) HE = ? Resp. 4.



116.

H) AM = MB
$MN = NC$
$\overline{MD} \parallel \overline{AN}$

T) $MD = 2/3\ AN$

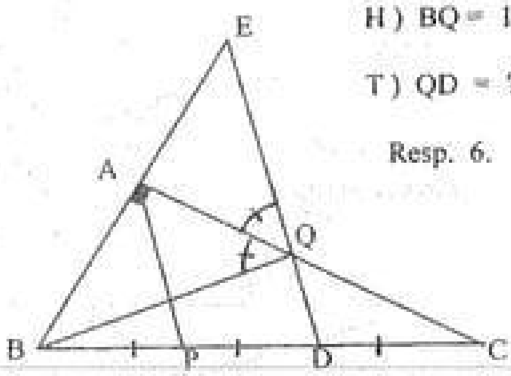


117.

H) BQ = 18.

T) QD = ?

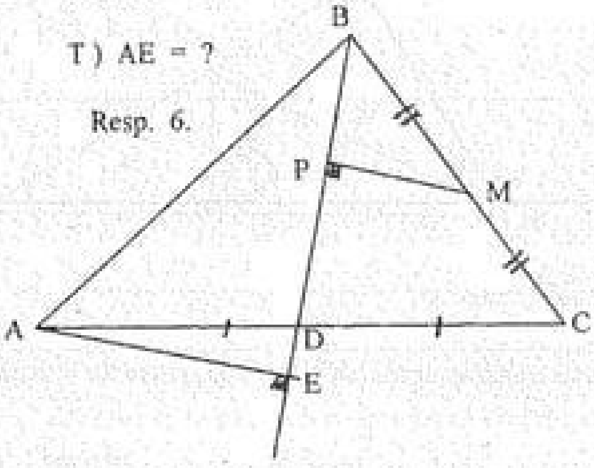
Resp. 6.



118. H) PM = 3.

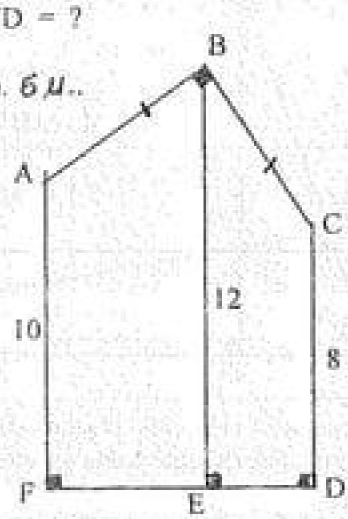
T) AE = ?

Resp. 6.



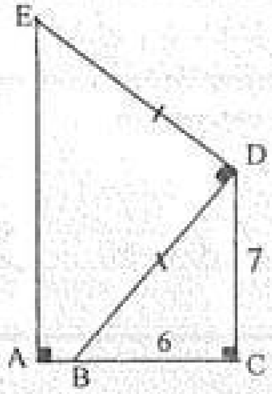
119. T) FD = ?

Resp. 6 u..



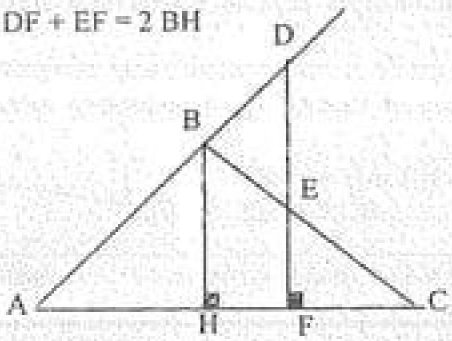
120. T) AE = ?

Resp. 13.



121. H) AB = BC

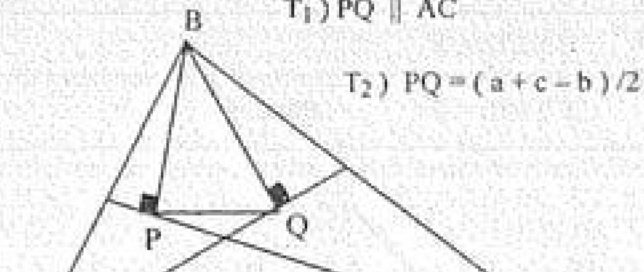
T) DF + EF = 2 BH



122.

T_1) $\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$

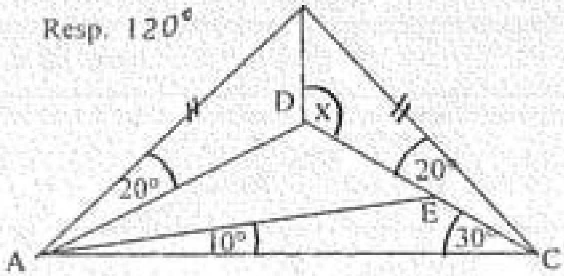
T_2) $PQ = (a + c - b)/2$



123.

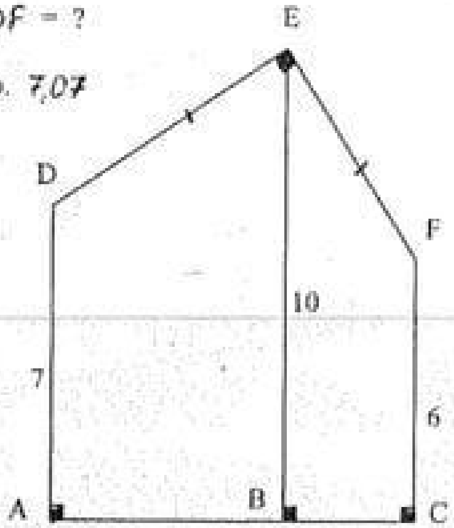
T) $\widehat{x}$ = ?

Resp. 120°



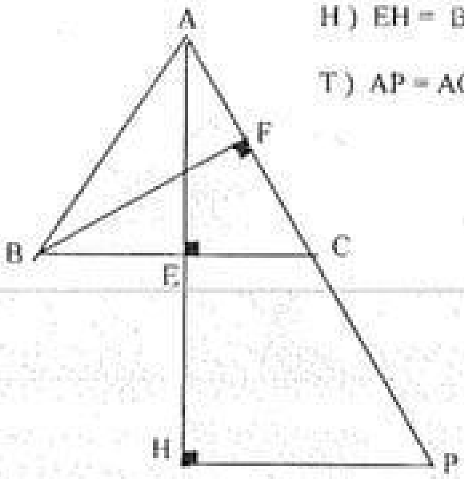
124. T) DF = ?

Resp. 7,07



125. H) $EH = BF$

T) $AP = AC + BC$



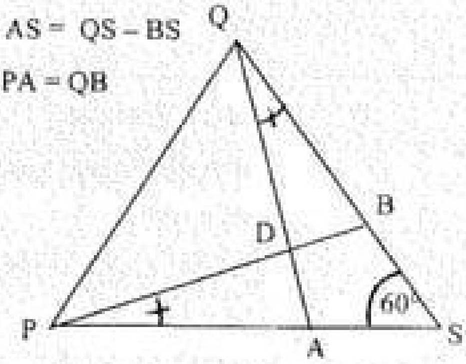
4.5.8.1 EJERCICIOS RESUELTOS

15. D) $\Delta AQS \cong \Delta PBS$ (A.L.A.) D)

$\therefore\ AS = BS$

$PS - AS = QS - BS$

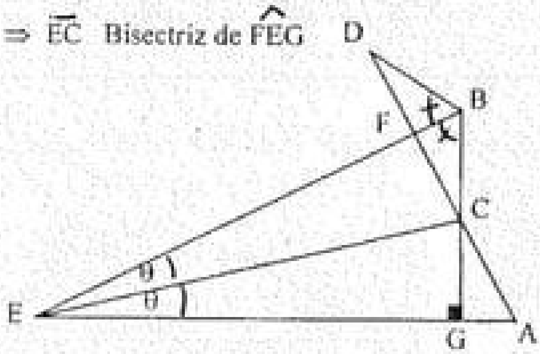
$\Rightarrow PA = QB$



19. $\Delta EFC \cong \Delta\ EGC$ (A.L.A.)

$\therefore\ \hat{\theta} = \hat{\theta}$

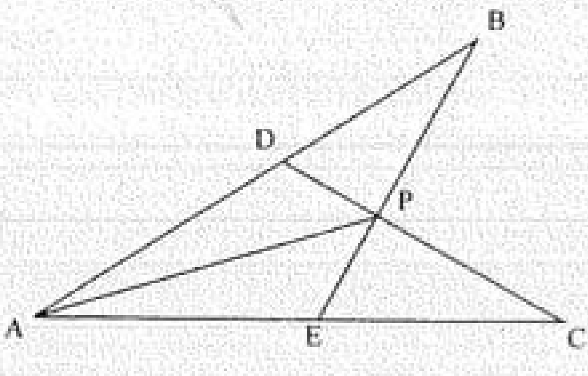
$\Rightarrow \overrightarrow{EC}$ Bisectriz de $\widehat{FEG}$



23. D) $\Delta ABE \cong \Delta ADC$ (L.A.L.) $\therefore\ \hat{B} = \hat{C}$

$\Delta DBP \cong \Delta EPC$ (A.L.A.) $\therefore\ BP = CP$

$\Delta ABP \cong \Delta ACP$ (L.A.L.) $\therefore\ \widehat{BAP} = \widehat{CAP}$

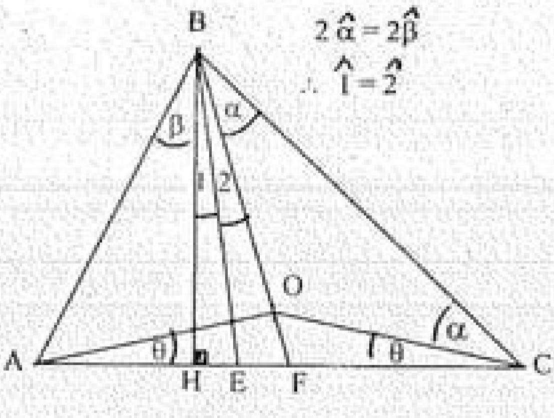


57. D) ΔCBH y ΔHBA Rectángulos

$\hat{1} + \hat{2} + 2\hat{\alpha} + \hat{\theta} = \hat{\beta} + \hat{\theta} + (\hat{1} + \hat{2} + \hat{\beta})$

$2\hat{\alpha} = 2\hat{\beta}$

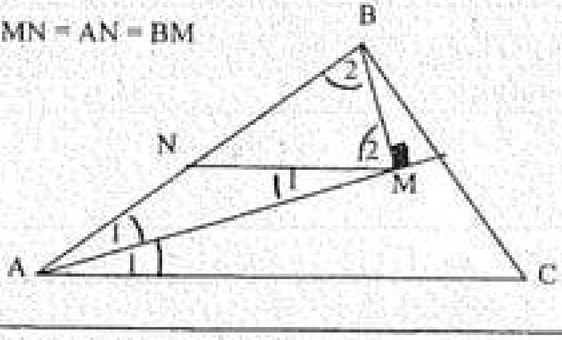
$\therefore\ \hat{1} = \hat{2}$



69. D) $\hat{1} + \hat{2} = 90°$

ΔANM y ΔBNM Isósceles

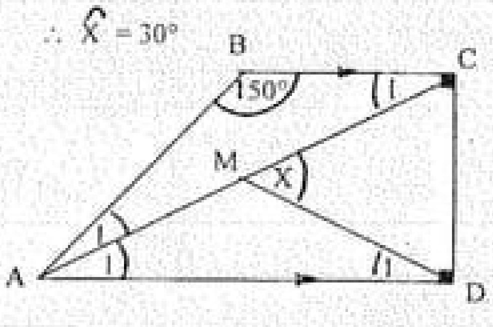
$MN = AN = BM$



73. D) $MA = MC = MD$

$\hat{1} = 15°$

$\therefore\ \hat{X} = 30°$



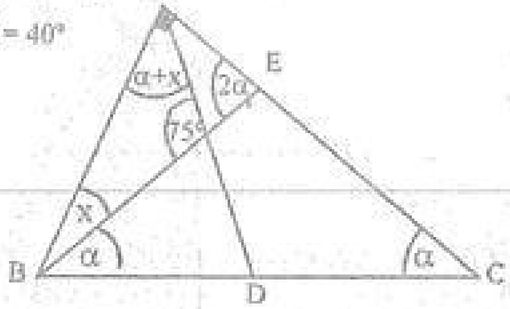
80. D) Δ BEC y Δ ABD Isósceles

$2\hat{\alpha} + \hat{x} = 90°$

$\hat{\alpha} + 2\hat{x} + 75° = 180°$

$\hat{\alpha} + \hat{x} = 65°$

$\therefore\ \hat{x} = 40°$

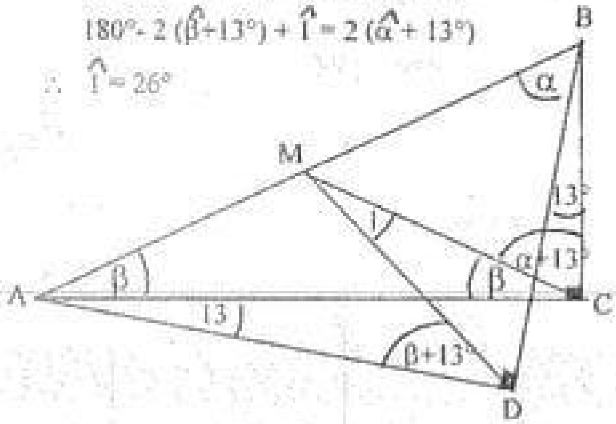


84. D) $\hat{\alpha} + \hat{\beta} + 13° = 90°$

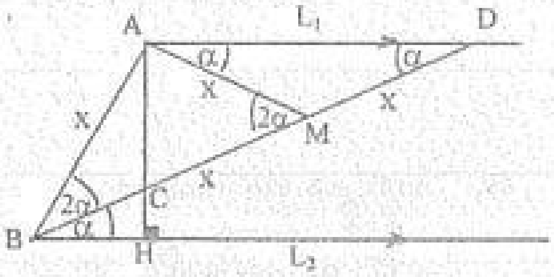
$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 77°$ y en el Δ AMC

$180° - 2(\hat{\beta} + 13°) + \hat{1} = 2(\hat{\alpha} + 13°)$

$\therefore\ \hat{1} = 26°$



88.



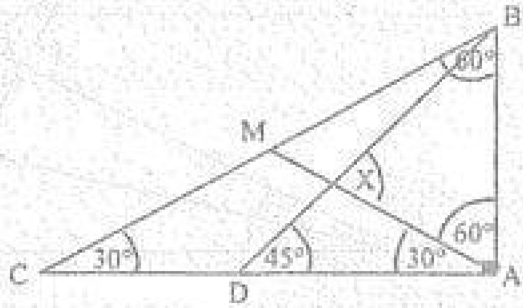
D) .M punto medio de CD (Construcción)

AM = CM = MD = AB = x

Δ ABM Equilátero $\therefore\ 2\hat{\alpha} = 60°$

$\widehat{CBH} = \widehat{ABH}/3$

92.



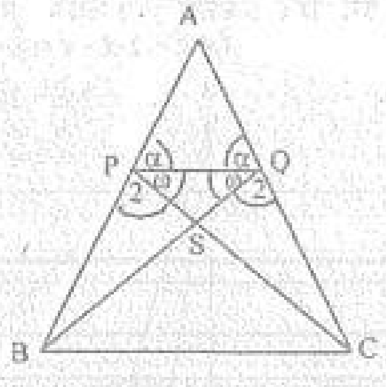
D) Δ ABC Rectángulo

Δ BDA Rectángulo isósceles

$\widehat{BDA} = 45°$

$\therefore\ \hat{x} = 45° + 30° = 75°$

93.



D) $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}$

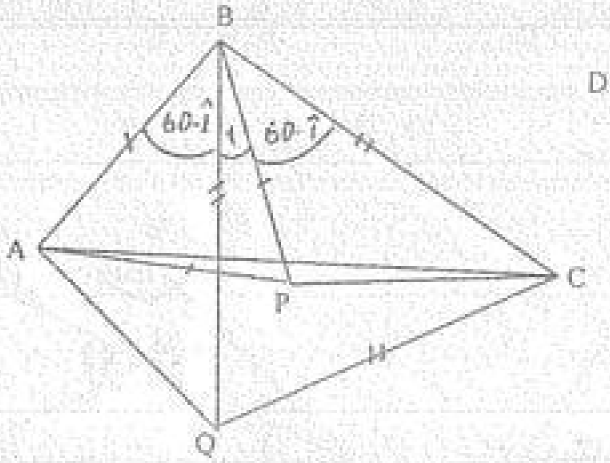
$\hat{\omega} = \hat{\omega}$

$\hat{2} = \hat{2}$

$\therefore\ \Delta PSB \cong \Delta QSC$ (A.L.A.)

$\Rightarrow$ BS = SC

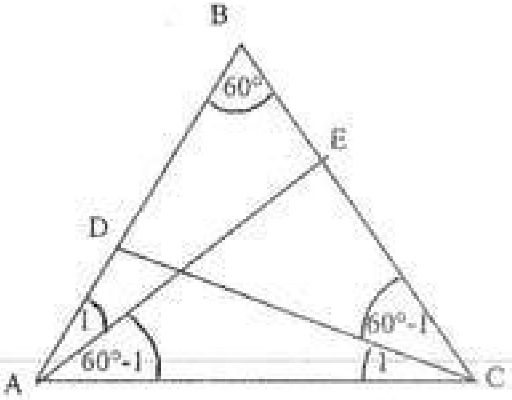
95.



D) $\Delta ABQ \cong \Delta PBC$ (L.A.L.)

$\therefore$ AQ ≅ CP

100.



D) Δ ABE $\cong \Delta$ ADC (A.L.A.)

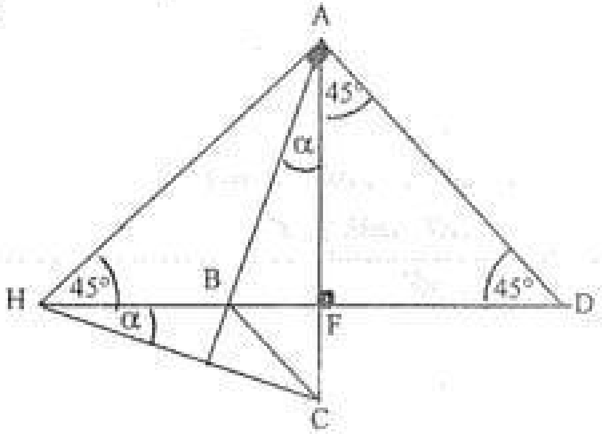
$\therefore$ BE = AD

BD = EC

AC = AB = AD + DB

$\Rightarrow$ AC = AD + EC

104.



D) .F Circuncentro del Δ ADH

HF = FD = AF

$\hat{\alpha} \cong \hat{\alpha}$ Complementarios

Δ ABF $\cong \Delta$ CFH (ángulo, cateto)

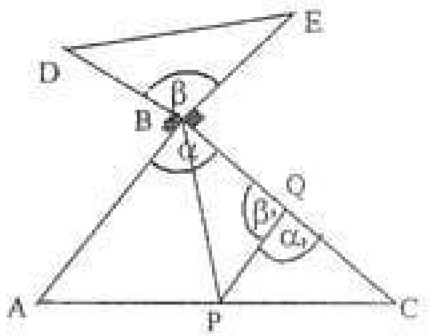
AB = CH

AD = AH

$45° + \hat{\alpha} = 45° + \hat{\alpha}$

$\therefore$ Δ ABD $\cong \Delta$ ACH (L.A.L.)

112.



D) $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$ $\therefore$ $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_1$

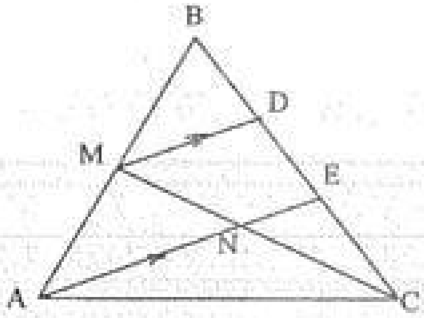
PQ = AB/2 $\therefore$ PQ = BD

BQ = BC/2 $\therefore$ BQ = BE

$\hat{\beta} = \hat{\beta}_1$ (suplementos de α y α_1)

$\therefore$ Δ DEB $\cong \Delta$ BPQ (L.A.L.)

116.

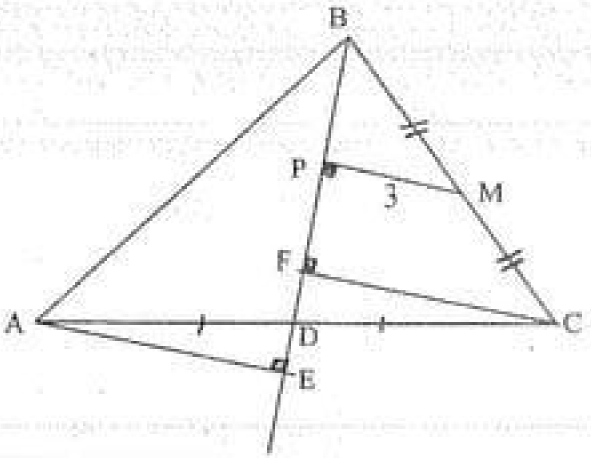


D) MD = (AN + NE)/2

MD = AN/2 + ½ (MD/2)

MD = 2/3 (AN)

118.

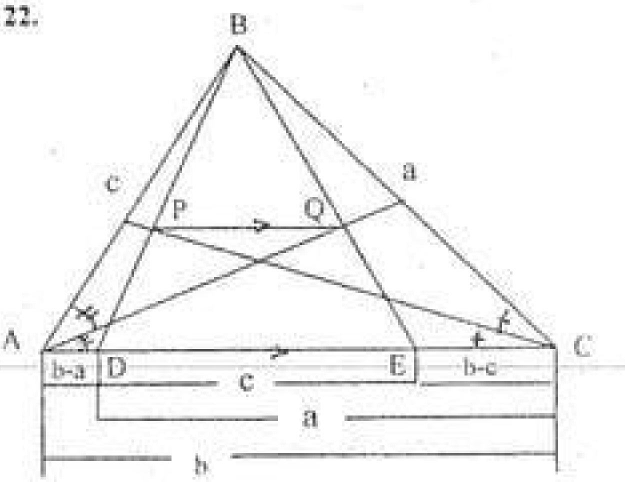


D) CF = 2 PM = 6

Δ AED $\cong \Delta$ CDF (A.L.A.)

$\therefore$ CF = AE = 6

122.



D) Δ ABE y Δ CBD Isósceles

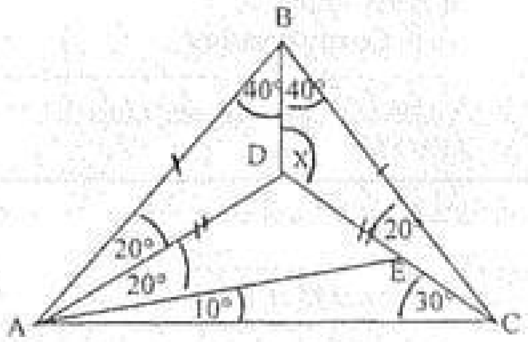
P punto medio de BD

Q punto medio de BE $\therefore \overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{AC}$

$PQ = \frac{1}{2}(DE) = \frac{1}{2}(b - b + a - b + c)$

$PQ = \frac{1}{2}(a + c - b)$

123.



D) AD = DC

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta CBD$ (L.A.L.)

$\widehat{ABD} = \widehat{DBC} = 40°$

$\Rightarrow \widehat{x} = 120°$

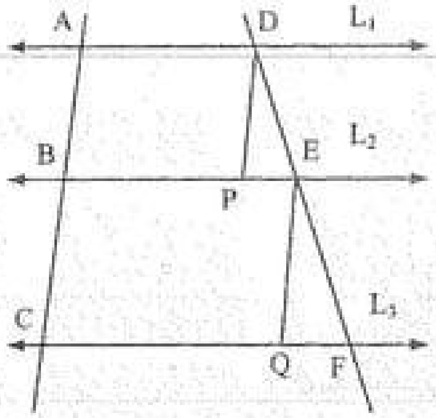
4.5.9. SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

TEOREMA # 1

Si tres o más rectas paralelas determinan segmentos congruentes en una transversal, determinan segmentos congruentes en cualquier otra transversal.

H) $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2} \parallel \overleftrightarrow{L_3}$ T) $DE = EF$

$AB = BC$



D) $\overline{DP} \parallel \overline{AB}$ (construcción)

$\overline{EQ} \parallel \overline{BC}$ (construcción)

$\therefore \overline{DP} \parallel \overline{EQ}$

$\Delta PDE \wedge \Delta QEF$

$AB = BC = DP = EQ$ (L)

$PDE = QEF$ (A)

$PED = QFE$ (A)

$\therefore \Delta PDE \cong \Delta QEF$ (A.L.A.)

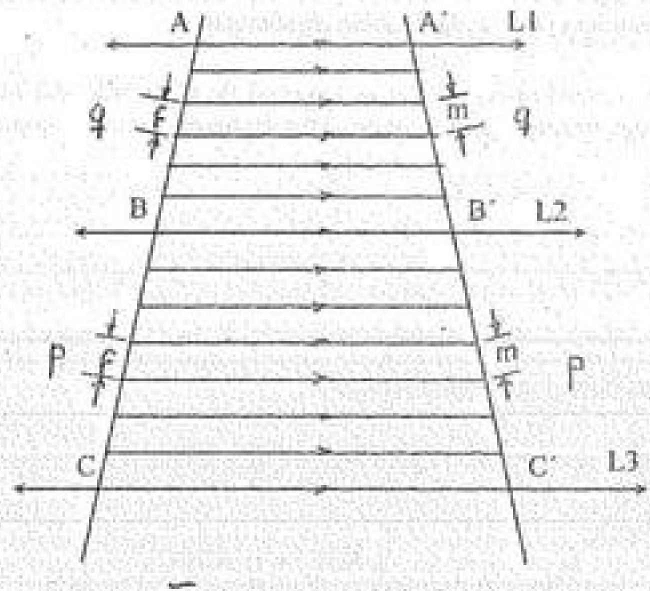
$\Rightarrow DE = EF$ ///.

COROLARIO

Si se divide un lado de un triángulo en partes congruentes y por los puntos de división se trazan paralelas a otro lado, el tercer lado queda dividido en igual número de partes congruentes.

TEOREMA # 2 TEOREMA BÁSICO DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Los segmentos de dos transversales interceptados entre paralelas, son proporcionales.



H) $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2} \parallel \overleftrightarrow{L_3}$

T) $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A'B'}{B'C'}$

D) 1. Dividimos $\overline{AB}$ en q segmentos de igual longitud (f) y $\overline{BC}$ en p segmentos de igual longitud (f).

2. Por los puntos de división trazamos paralelas a $\overleftrightarrow{L_3}$

3. Se obtienen q segmentos de longitud (m) en $\overline{A'B'}$ y p segmentos de longitud m en $\overline{B'C'}$.

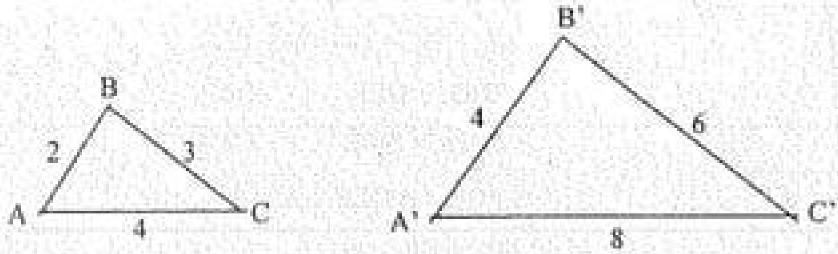
4. $f = \dfrac{AB}{q} = \dfrac{BC}{p} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{q}{p}$

$$m = \frac{A'B'}{q} = \frac{B'C'}{p} \quad \Rightarrow \quad \frac{A'B'}{B'C'} = \frac{q}{p} \qquad \text{(que igualando)}$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \qquad ///.$$

La definición de semejanza exige dos condiciones :

1. Los ángulos correspondientes deben ser congruentes, y
2. Los lados correspondientes deben ser proporcionales.



Si los ángulos correspondientes son congruentes: $\hat{A} \cong \hat{A}'$

$\hat{B} \cong \hat{B}'$

$\hat{C} \cong \hat{C}'$

y los lados correspondientes son proporcionales : $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{1}{2}$, entonces decimos que la correspondencia es una semejanza, y se escribe $\Delta\, ABC \approx \Delta\, A'B'C'$

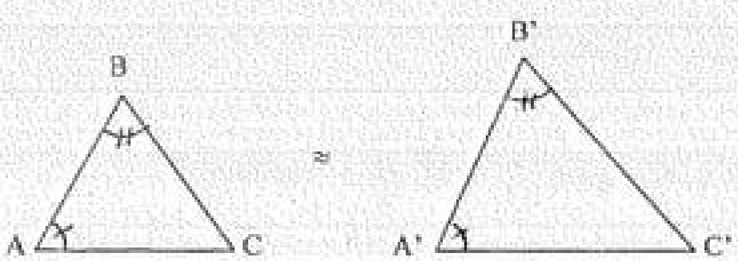
La razón de dos lados correspondientes cualesquiera (1/2) es la relación de semejanza.

Desde luego esta correspondencia no es una congruencia porque la longitud de cada lado del segundo triángulo es dos veces la del lado correspondiente del primero, por lo tanto, dos triángulos serán congruentes cuando su razón de semejanza sea igual a la unidad.

4.5.9.1. POSTULADOS DE SEMEJANZA

4.5.9.1.1. TRIÁNGULOS ESCALENOS

1. Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos homólogos congruentes.

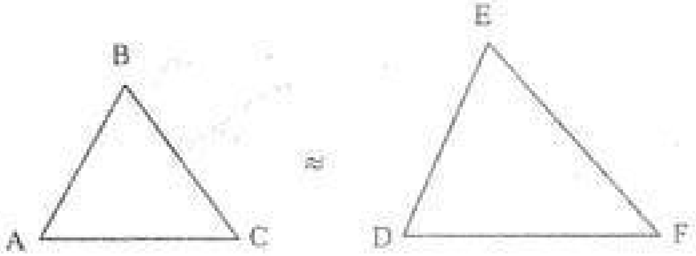


$\Delta\, ABC \approx \Delta\, A'B'C'$

2. Toda recta paralela a uno de los lados de un triángulo, da origen a otro triángulo semejante con el primero.

3. Dos triángulos son semejantes si tienen lados respectivamente paralelos o perpendiculares.

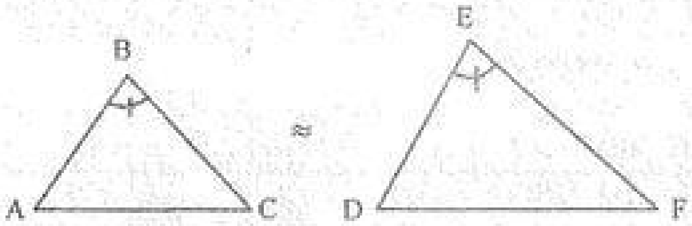
4. Si los lados correspondientes de dos triángulos son respectivamente proporcionales, los dos triángulos son semejantes.



Si : $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

$\therefore\ \Delta\ ABC \approx \Delta\ DEF$

5. Si en dos triángulos, dos lados homólogos son proporcionales y los ángulos comprendidos son congruentes, los triángulos son semejantes.



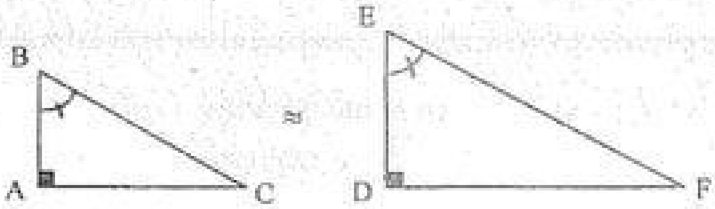
Si : $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$

$B \cong E$

$\therefore\ \Delta\ ABC \approx \Delta\ DEF$

4.5.9.1.2. TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

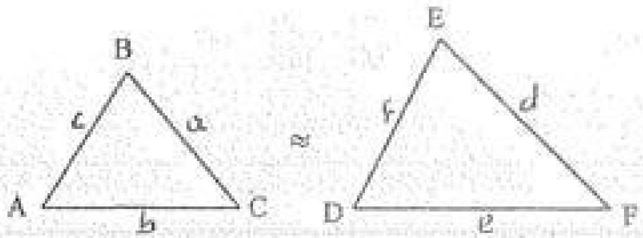
1. Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen un ángulo agudo correspondiente congruente.



$\Delta\ ABC \approx \Delta\ DEF$

TEOREMA # 1

Los perímetros de dos triángulos semejantes, están en la misma relación que los lados homólogos.



H) $\Delta\ ABC \approx \Delta\ DEF$

T) $\frac{P}{P'} = \frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$

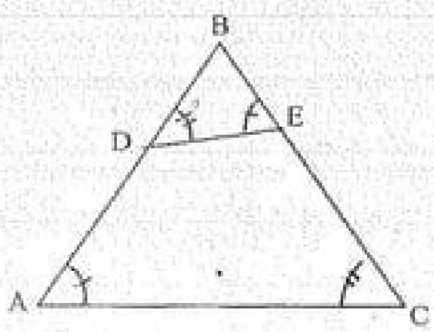
D) $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = \frac{a+b+c}{d+e+f}$ $\therefore$ $\frac{P}{P'} = \frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$ ///.

4.5.9.2 ANTIPARALELAS

Si : $\hat{A} \cong \hat{E}$

$\hat{C} \cong \hat{D}$

$\therefore$ $\overline{DE}$ es antiparalela del lado $\overline{AC}$



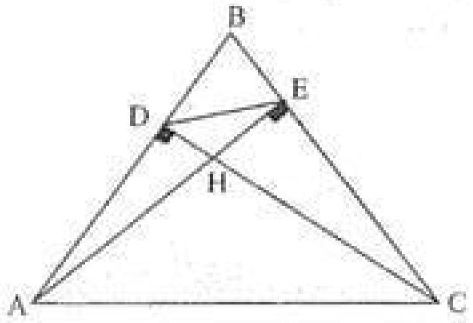
TEOREMA # 1

El segmento que une los pies de dos alturas de un triángulo es antiparalela de un lado.

H) Δ ABC Escaleno

. H su Ortocentro

T) $\overline{DE}$ Antiparalela del lado $\overline{AC}$



D) $\Delta ABE \wedge \Delta DBC$ (rectángulos y $\widehat{B}$ común)

$\therefore ABE \approx \Delta DBC \quad \Rightarrow \quad \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{BE}{BD}=\dfrac{AE}{DC} \quad ; \quad \therefore \dfrac{AB}{BE}=\dfrac{BC}{BD}$

$\Delta ABC \wedge \Delta DBE$ ($\dfrac{AB}{BE}=\dfrac{BC}{BD}$ y $\widehat{B}$ común)

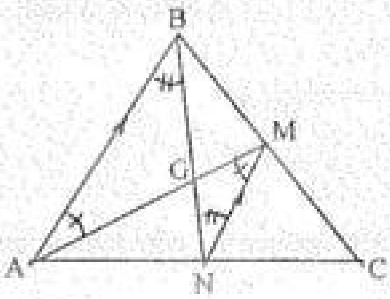
$\therefore \Delta ABC \approx \Delta DBE \quad \Rightarrow \quad \dfrac{AB}{BE}=\dfrac{BC}{BD}=\dfrac{AC}{DE} \quad ; \quad \therefore B\widehat{A}C = B\widehat{E}D$

$B\widehat{C}A = B\widehat{D}E$

$\Rightarrow \overline{DE}$ es antiparalela del lado $\overline{AC}$

4.5.9.3. PROPIEDAD DEL BARICENTRO

El Baricentro divide a cada una de las medianas en dos segmentos, tales que el uno es el doble del otro.



H) Δ ABC Escaleno

. G su Baricentro

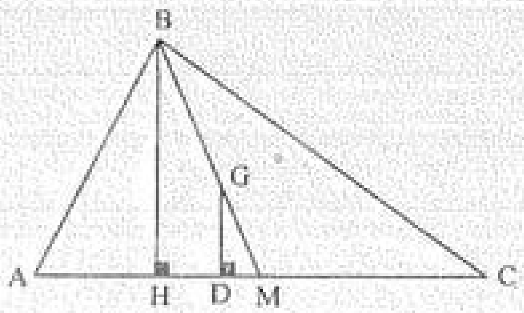
T) AG = 2 GM

D) $\overline{MN} \parallel \overline{AB} \quad \therefore \Delta ABG \approx \Delta MNG \quad \Rightarrow \quad \dfrac{AB}{MN}=\dfrac{BG}{NG}=\dfrac{AG}{MG}=2$

$\therefore AG = 2\,MG$

TEOREMA # 1.

La longitud del segmento perpendicular trazado desde el Baricentro de un triángulo a uno de sus lados, es igual a la tercera parte de la altura relativa al mismo lado.



H) Δ ABC Escaleno

. G su Baricentro

T) GD = BH/ 3

D) $\Delta BHM \approx \Delta GDM \quad \Rightarrow \quad \dfrac{BH}{GD}=\dfrac{BM}{GM}=\dfrac{HM}{DM}=3$

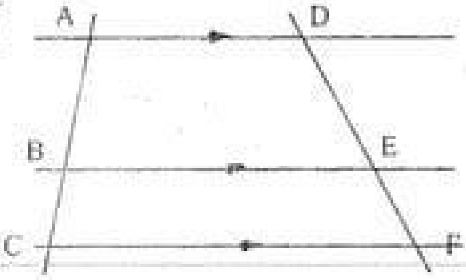
$\therefore \quad GD = BH/3$

4.5.9.4. EJERCICIOS

1. H) AB = 2 BC
DF = 24 u

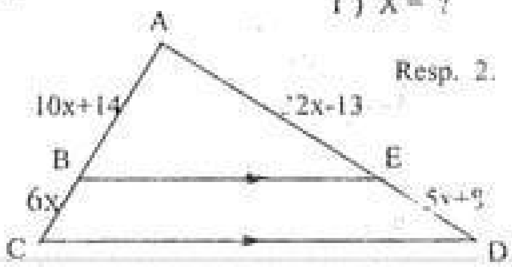
T) DE = ?

Resp. 16 u



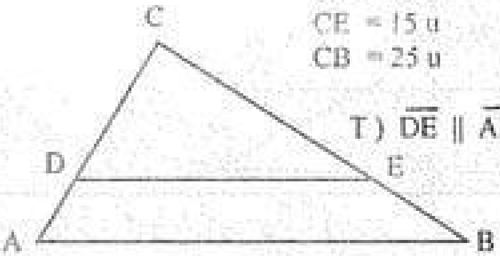
2. T) X = ?

Resp. 2.



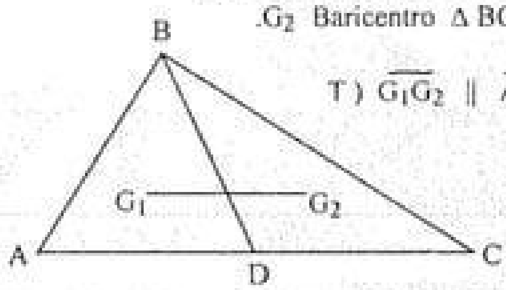
3. H) CD = 12 u
DA = 8 u
CE = 15 u
CB = 25 u

T) $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$



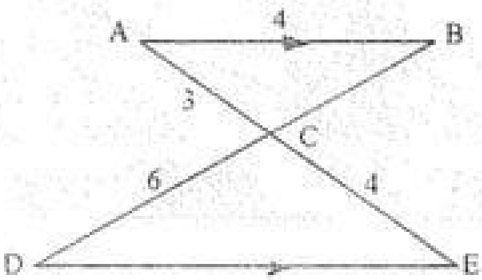
4. H) G_1 Baricentro Δ ABD
G_2 Baricentro Δ BCD

T) $\overleftrightarrow{G_1G_2} \parallel \overleftrightarrow{AC}$



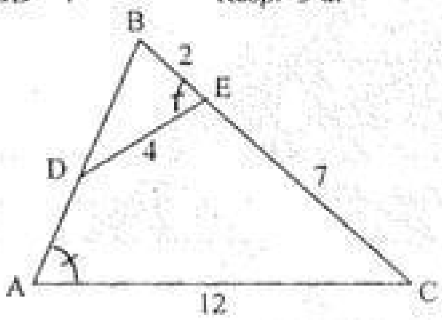
5. T_1) BC = ? Resp. 4,50 u.

T_2) DE = ? Resp. 5,33 u.

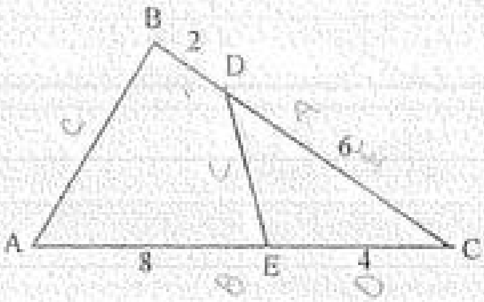


6. T_1) AB = ? Resp. 6 u.

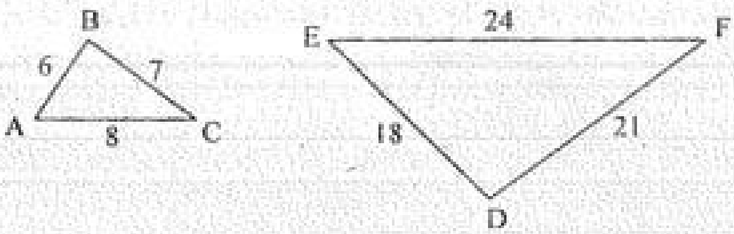
T_2) BD = ? Resp. 3 u.



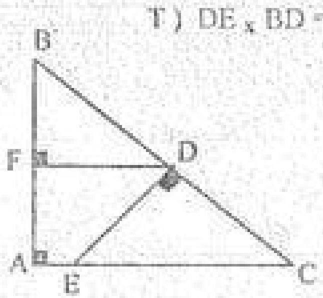
7. T) Δ ABC $\approx$ Δ DEC



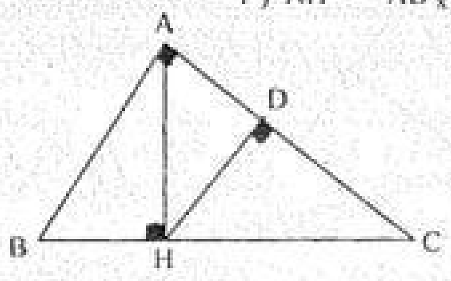
8. T) Δ ABC $\approx$ Δ DEF



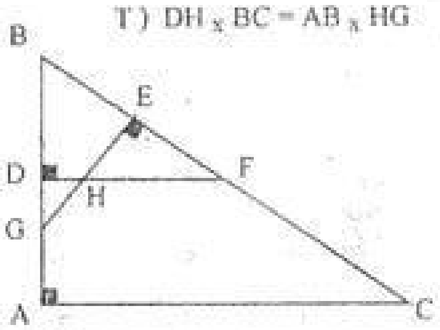
9. T) DE x BD = EC x BF



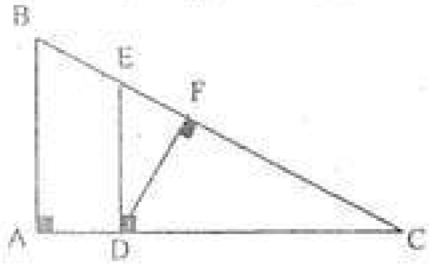
10. T) AH^2 = AB x HD



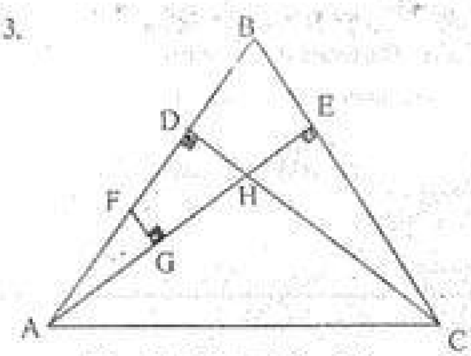
11. T) DH x BC = AB x HG



12. T) BC x DF = DE x AC

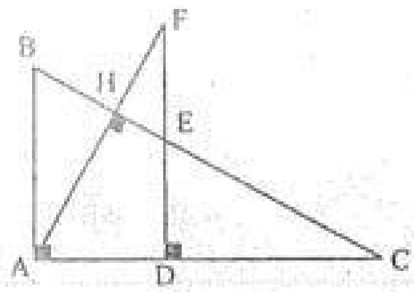


13.



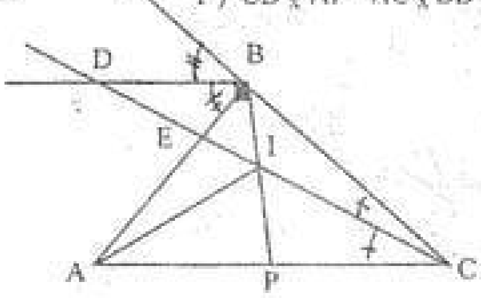
T) AF x HE = HC x FG

14.

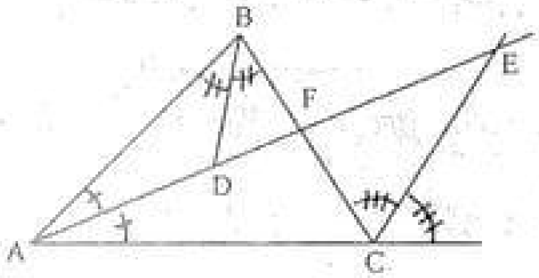


T) AB x EF = HE x BC

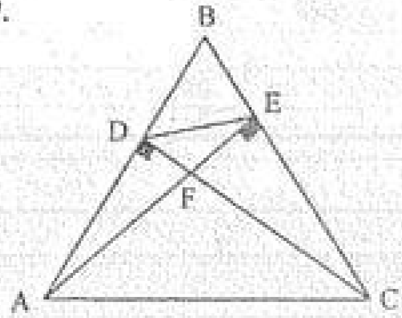
15. T) CD x AI = AC x BD



16. T) AE x AD = AC x AB

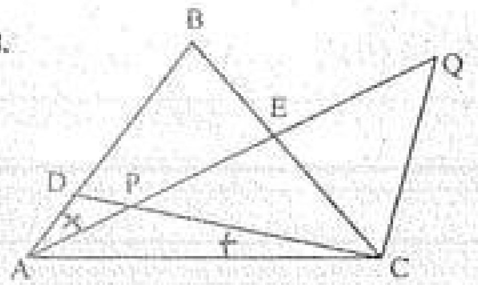


17.



T) DE x CF = AC x EF

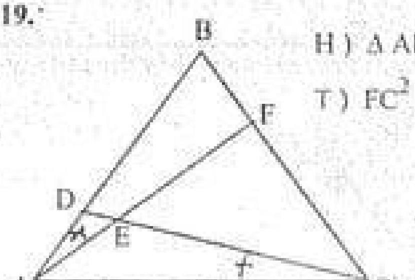
18.



H) Δ ABC Equilátero y CP = CQ

T) EQ x DA = EC x DP

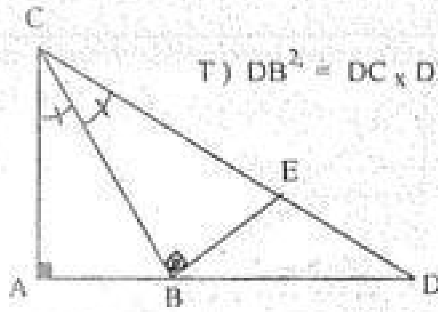
19.



H) Δ ABC Equilátero

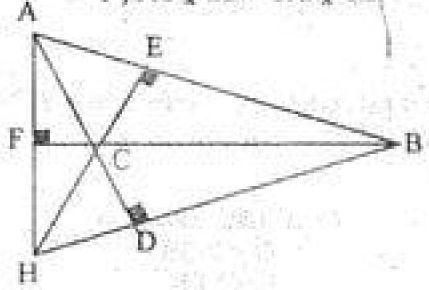
T) FC^2 = AF x EF

20.

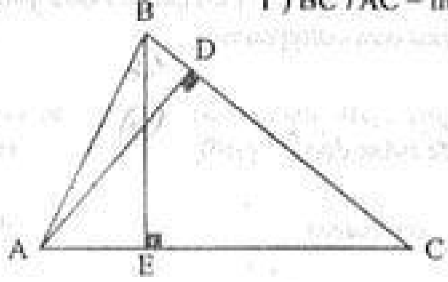


T) DB^2 = DC x DE

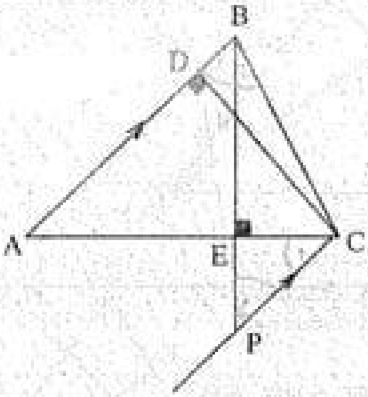
21. T) AC x CD = HC x CE



22. T) BC / AC = hb / ha

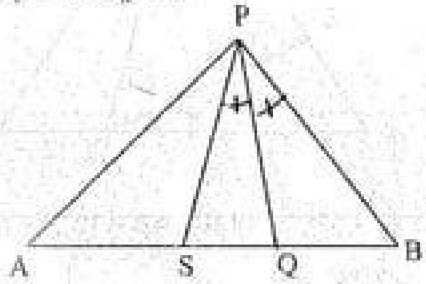


23. T) EC x BH = DH x CP



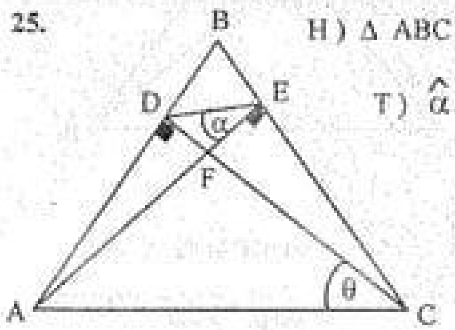
24. H) AP = AQ

T) AQ^2 = AB x AS



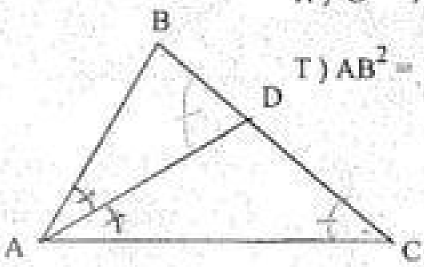
25. H) Δ ABC Escaleno

T) $\hat{\alpha} = \hat{\theta}$



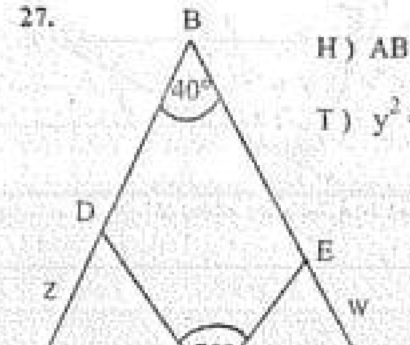
26. H) $\hat{C} = \hat{A} / 2$

T) AB^2 = BC x BD



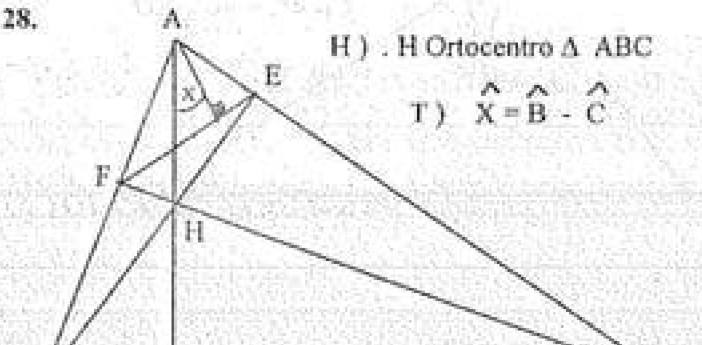
27. H) AB = BC

T) y^2 = z x w



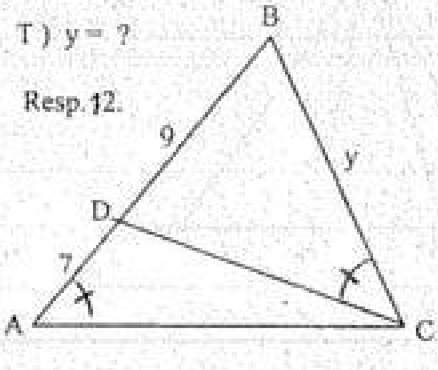
28. H) . H Ortocentro Δ ABC

T) $\hat{X} = \hat{B} - \hat{C}$



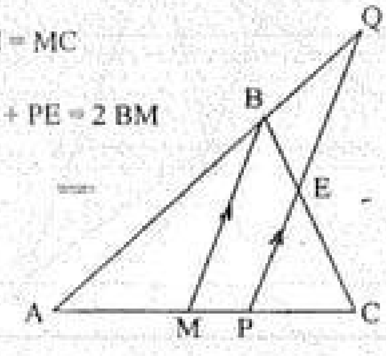
29. T) y = ?

Resp. 12.



30. H) AM = MC

T) PQ + PE = 2 BM



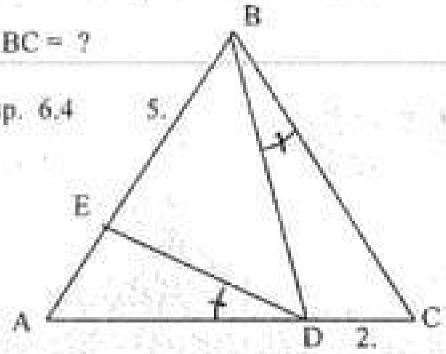
31. Demostrar que las paralelas trazadas a dos lados de un triángulo por el baricentro, dividen al tercer lado en tres segmentos congruentes.

32. En el triángulo ABC las alturas $\overline{AP}$ y $\overline{CS}$ se cortan en el punto H. Si AB = AC, AH= 9 m y HP = 3 m. Hallar las medidas de CH y HS. Resp. 6,60 u.; 4,03 u.

33. H) Δ ABC Equilátero

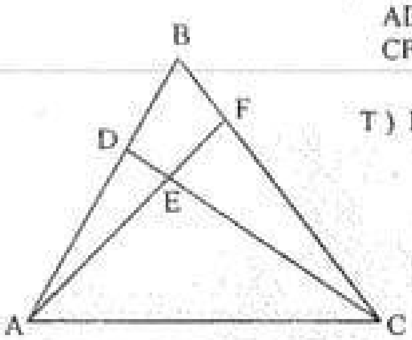
T) BC = ?

Resp. 6.4



34. H) Δ ABC Escaleno
AD = 2 DB
CF = 2 FB

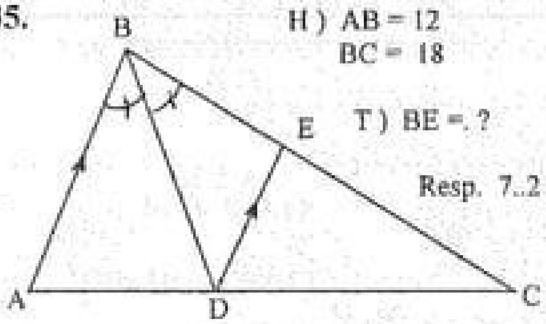
T) DE x EA = EC x EF



35. H) AB = 12
BC = 18

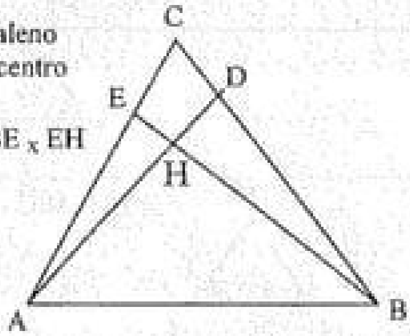
T) BE = ?

Resp. 7.2



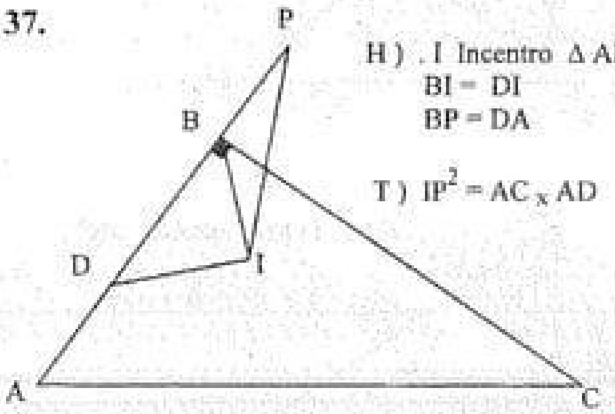
36. H) Δ ABC Escaleno
. H su Ortocentro

T) AE x EC = BE x EH



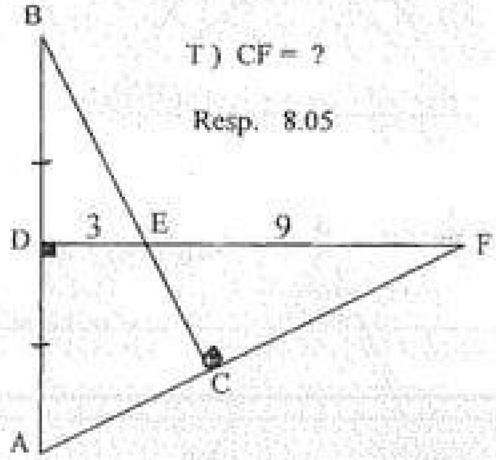
37. H) . I Incentro Δ ABC
BI = DI
BP = DA

T) $IP^2 = AC \times AD$

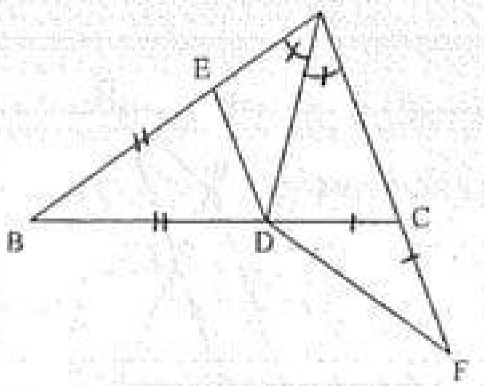


38. T) CF = ?

Resp. 8.05

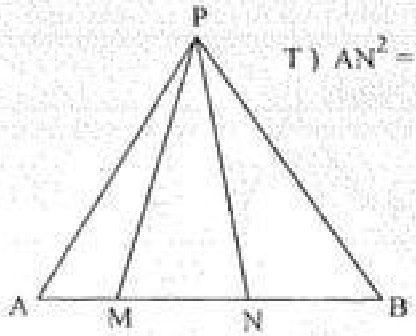


39. T) DE x AF = DF x AD



40. H) $\overline{PN}$ Bisectriz MPB
AP = AN

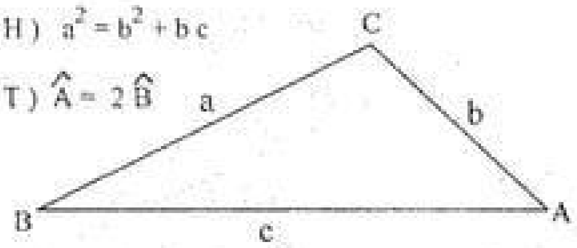
T) $AN^2 = AB \times AM$



41.

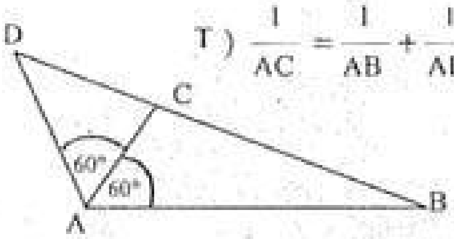
H) $a^2 = b^2 + b\,c$

T) $\hat{A} = 2\,\hat{B}$



42.

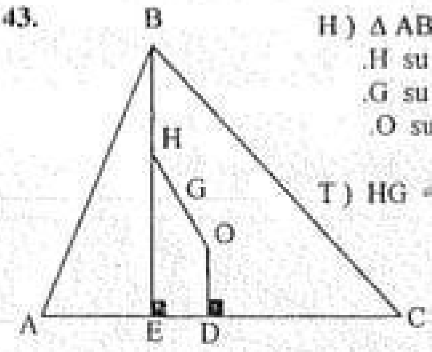
T) $\dfrac{1}{AC} = \dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AD}$



43.

H) Δ ABC Escaleno
.H su Ortocentro
.G su Baricentro
.O su Circuncentro

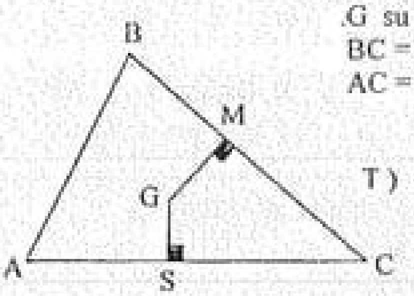
T) HG = 2 GO



44.

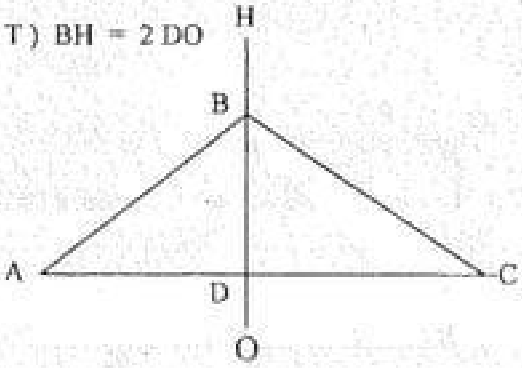
H) Δ ABC Escaleno
.G su Baricentro
BC = a
AC = b

T) $\dfrac{GS}{GM} = \dfrac{a}{b}$



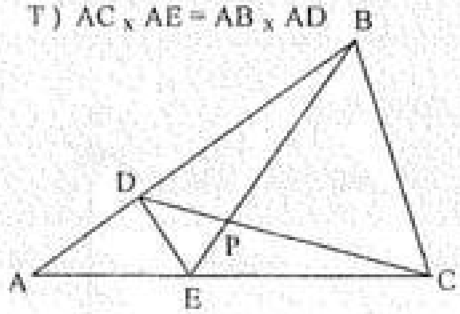
45. H) .H Ortocentro Δ ABC
.O Circuncentro Δ ABC

T) BH = 2 DO

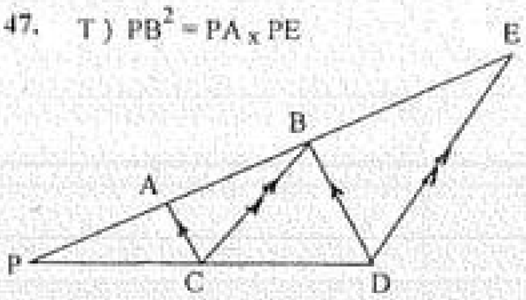


46. H) $DP \times PC = PE \times BP$

T) $AC \times AE = AB \times AD$

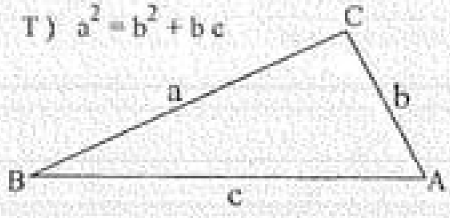


47. T) $PB^2 = PA \times PE$



48. H) $\hat{A} = 2\,\hat{B}$

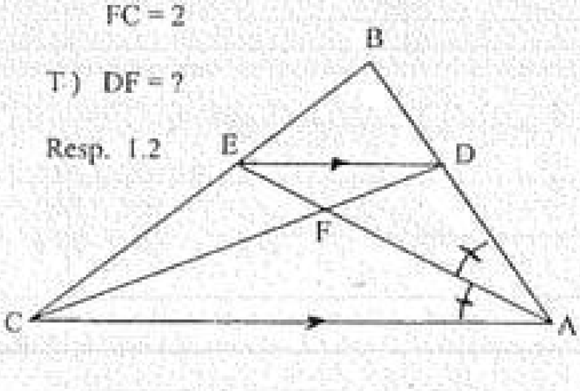
T) $a^2 = b^2 + b\,c$



49. H) AB = 6
AC = 4
FC = 2

T) DF = ?

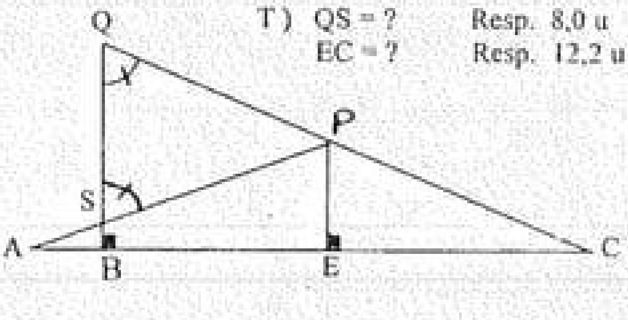
Resp. 1.2



50.

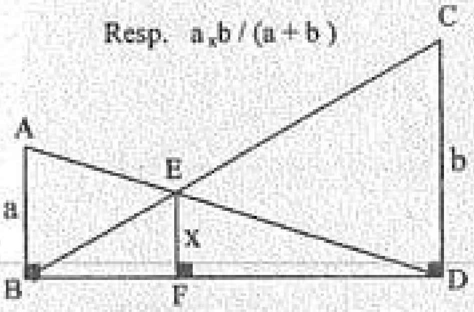
H) QC = 22
AS = 6
PE = 7

T) QS = ? Resp. 8,0 u
EC = ? Resp. 12,2 u



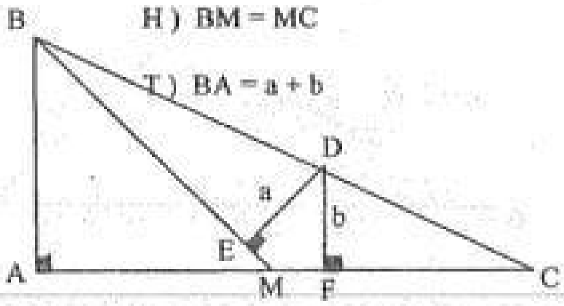
51. T) $X = f(a, b)$?

Resp. $a \times b / (a + b)$



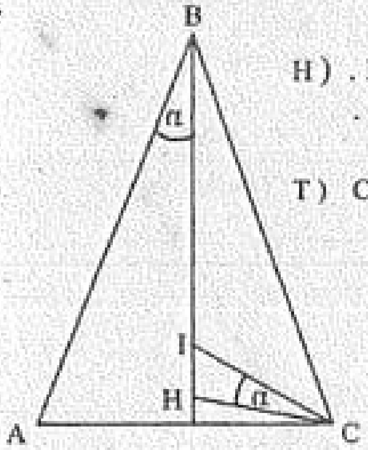
52. H) $BM = MC$

T) $BA = a + b$



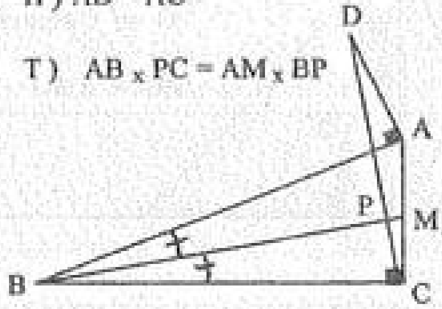
53. H) . H Ortocentro Δ ABC
. I Incentro Δ ABC

T) $CH^2 = BH \times IH$



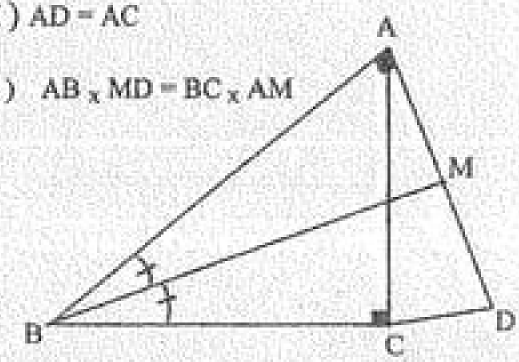
54. H) $AD = AC$

T) $AB \times PC = AM \times BP$



55. H) $AD = AC$

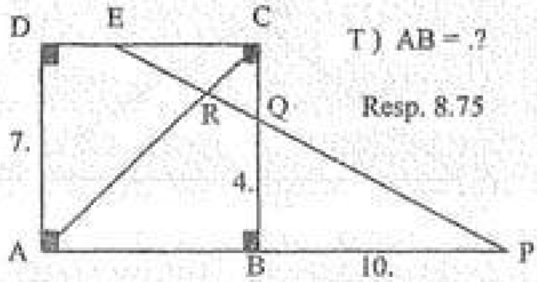
T) $AB \times MD = BC \times AM$



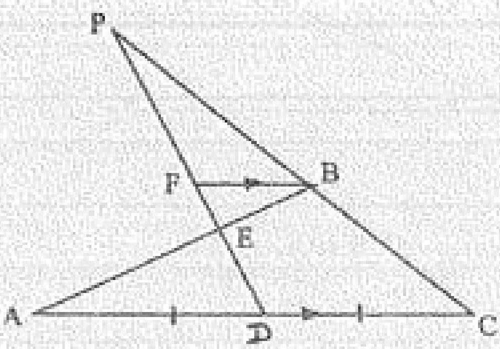
56. H) $\frac{CR}{RA} = \frac{2}{5}$

T) $AB = .?$

Resp. 8.75

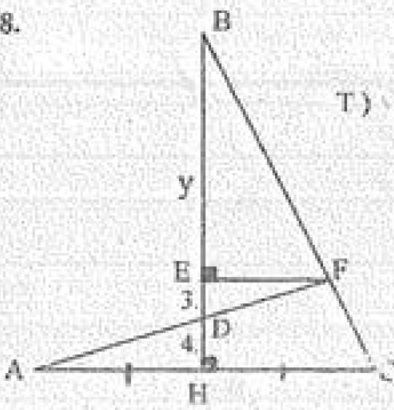


57. T) $DE \times PF = EF \times DP$

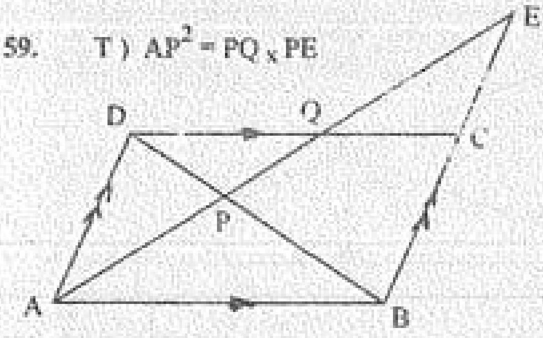


58. T) $y = .?$

Resp. 21

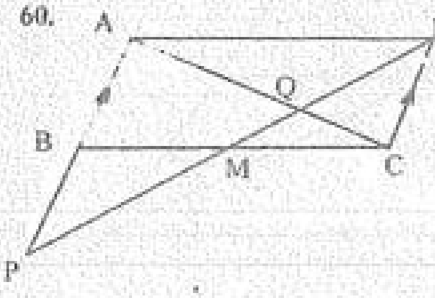


59. T) $AP^2 = PQ \times PE$



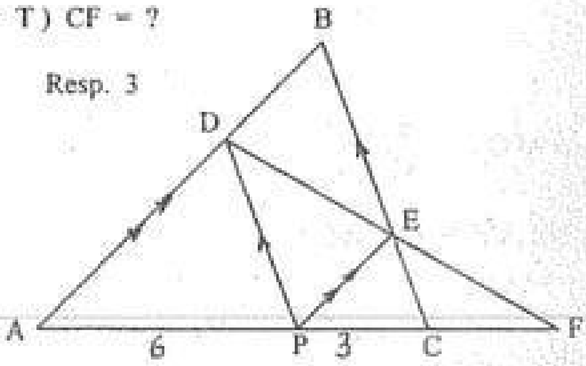
60. H) $\overline{AN} \parallel \overline{BC}$
$BM = MC$
$QN = 20$ u

T) $MP = ?$ Resp. 48 u

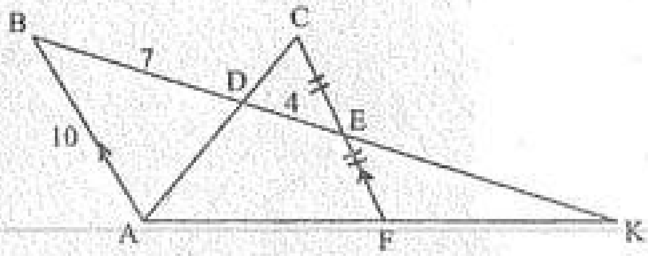


61. T) CF = ?

Resp. 3

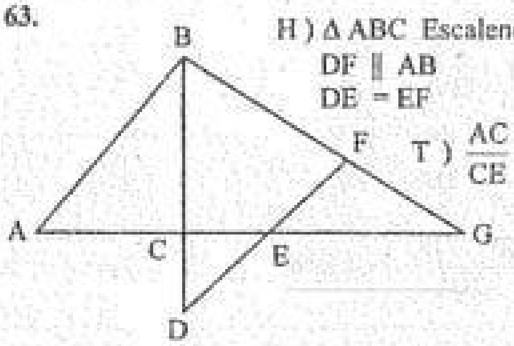


62. T) EK = ? Resp. 14.64



63. H) Δ ABC Escaleno
DF ∥ AB
DE = EF

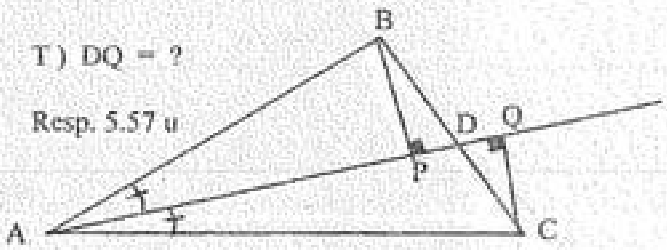
T) $\frac{AC}{CE} = \frac{AG}{EG}$



64. H) AP = 10 u
PD = 3 u

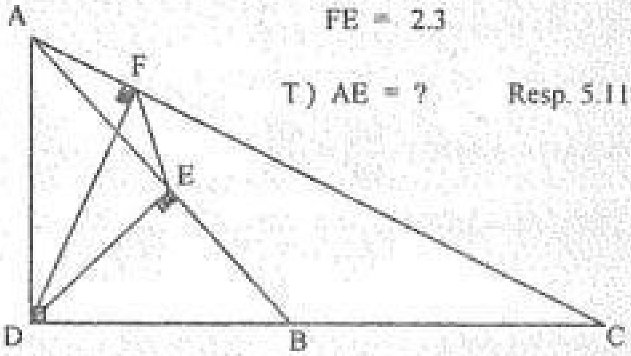
T) DQ = ?

Resp. 5.57 u



65. H) AC = 10
BC = 4.5
FE = 2.3

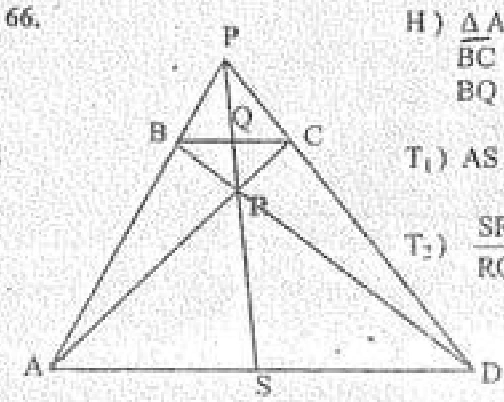
T) AE = ? Resp. 5.11



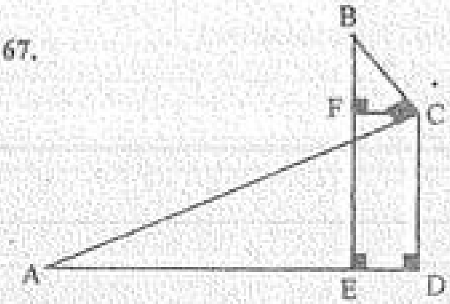
66. H) Δ APD Escaleno
$\overline{BC} \parallel \overline{AD}$
BQ = QC

T_1) AS = SD

T_2) $\frac{SR}{RQ} = \frac{SP}{PQ}$

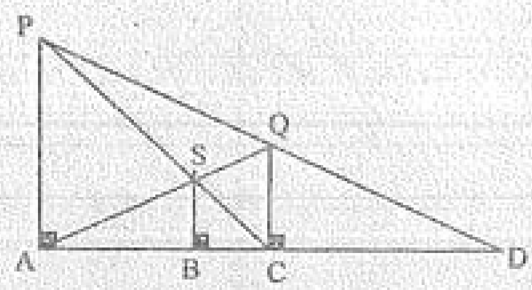


67.



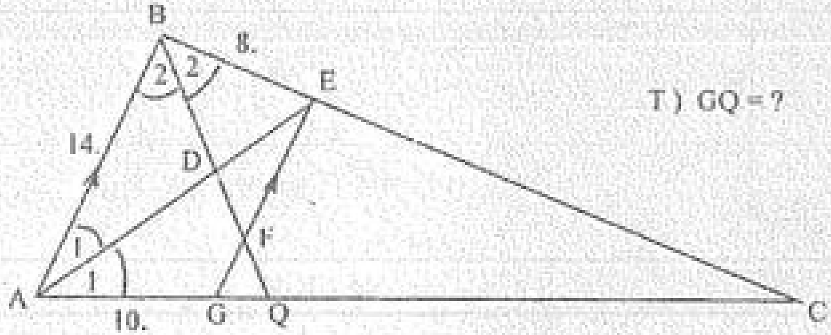
T) $\frac{BE}{AB} = \frac{AD}{AC} \times \frac{BC}{AB} + \frac{CD}{AC} \times \frac{AC}{AB}$

68.



T) $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$

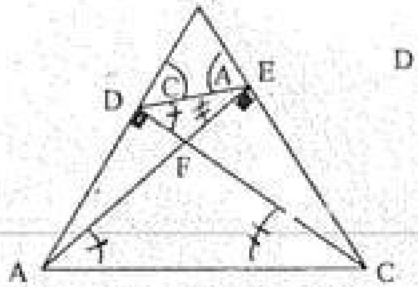
69.



T) GQ = ? Resp. 5/3

4.5.9.4.1. EJERCICIOS RESUELTOS

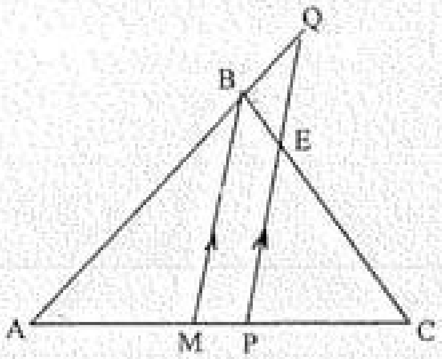
17.



D) (Δ DFE $\approx \Delta$ AFC) $\dfrac{DE}{AC} = \dfrac{EF}{CF}$

$\therefore$ DE $_x$ CF = AC $_x$ EF

30.

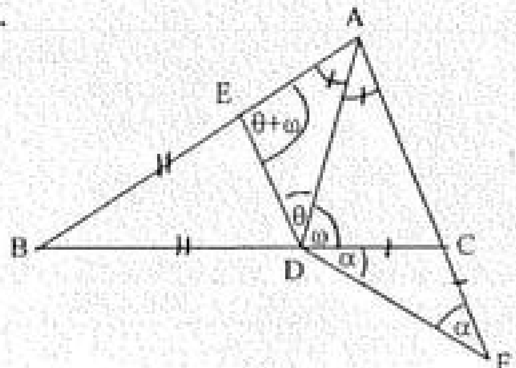


D) (Δ AQP $\approx \Delta$ ABM) $\dfrac{PQ}{BM} = \dfrac{AP}{AM}$

(Δ PEC $\approx \Delta$ BMC) $\dfrac{PE}{BM} = \dfrac{PC}{MC}$

$$PQ + PE = BM_x \frac{AP + PC}{AB/2} = 2\,BM$$

39.



D) Δ BDE isósceles $\therefore \hat{\theta} + \hat{\omega} = \hat{\theta} + \hat{\omega}$

Δ EAD y Δ ADF

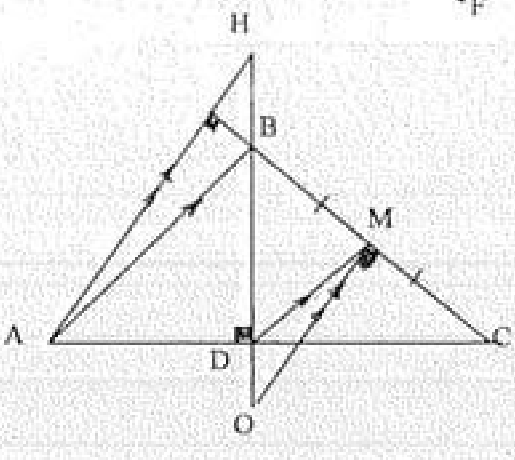
$180° - \hat{\theta} - \hat{\theta} - \hat{\omega} = 180° - \hat{\omega} - \hat{\alpha} - \hat{\alpha}$

$\therefore \hat{\alpha} = \hat{\theta}$

(Δ EAD $\approx \Delta$ ADF) $\dfrac{DE}{DF} = \dfrac{AD}{AF}$

$\therefore$ DE $_x$ AF = DF $_x$ AD

45.



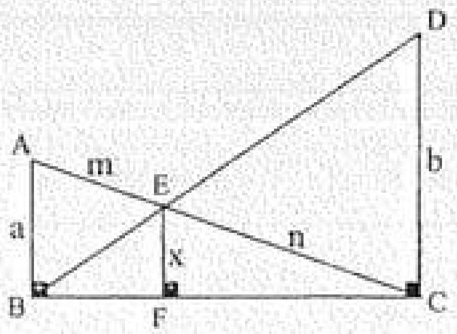
D) DM = ½ (AB)

Δ ABH $\approx \Delta$ DOM (lados paralelos)

$\dfrac{DO}{BH} = \dfrac{DM}{AB} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore$ DO = ½ BN

51.



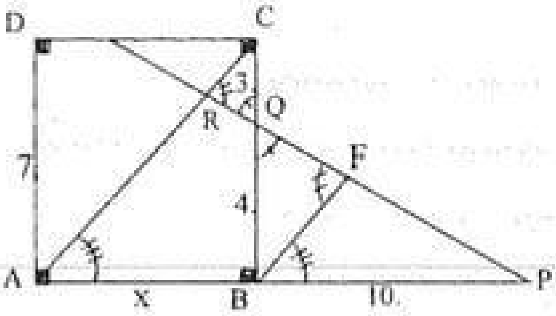
D) (Δ ABC $\approx \Delta$ EFC) $\dfrac{x}{a} = \dfrac{n}{m+n}$

(Δ ABE $\approx \Delta$ EDC) $\dfrac{b}{a} = \dfrac{n}{m}$

$\Rightarrow \dfrac{b}{a+b} = \dfrac{n}{m+n}$

$\therefore \dfrac{x}{a} = \dfrac{b}{a+b} \Rightarrow x = \dfrac{a\,b}{a+b}$

56.



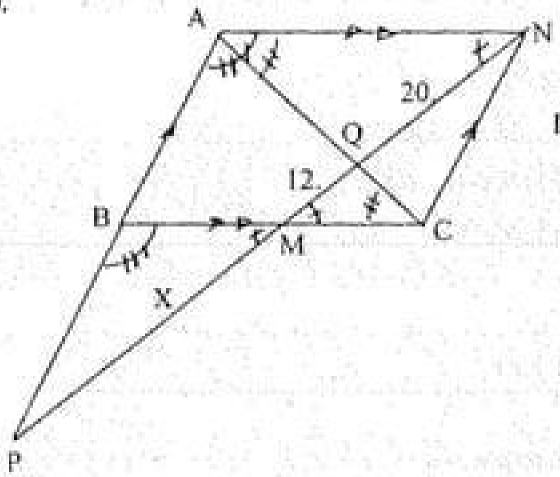
D) ($\Delta RCQ \approx \Delta QBF$) $\dfrac{CR}{BF} = \dfrac{3}{4}$

($\Delta ARP \approx \Delta BFP$) $\dfrac{AR}{BF} = \dfrac{x+10}{10}$

dividiendo $\dfrac{CR}{AR} = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{10}{x+10} = \dfrac{2}{5}$

$\therefore \quad X = 8.75$ u

60.

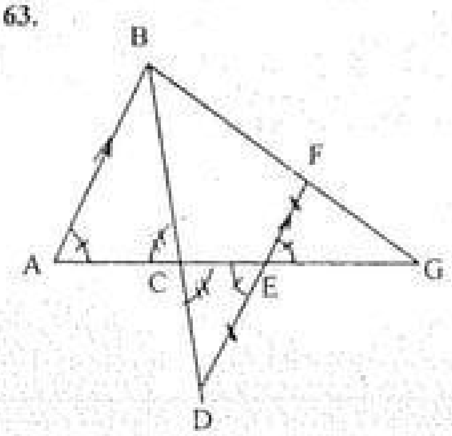


D) ($\Delta MQC \approx \Delta AQN$) $\dfrac{MC}{AN} = \dfrac{12}{20}$

($\Delta PAN \approx \Delta PBM$) $\dfrac{BM}{AN} = \dfrac{x}{32+x}$

$\therefore \quad \dfrac{12}{20} = \dfrac{x}{32+x} \quad \Rightarrow \quad x = 48$ u

63.

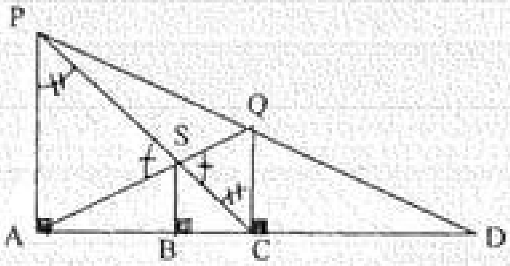


D) ($\Delta ABC \approx \Delta CDE$) $\dfrac{AC}{CE} = \dfrac{AB}{ED}$

($\Delta ABG \approx \Delta EFG$) $\dfrac{AG}{EG} = \dfrac{AB}{EF}$

$\therefore \quad \dfrac{AC}{CE} = \dfrac{AG}{EG}$

68.



D) ($\Delta APS \approx \Delta SQC$) $\dfrac{AP}{CQ} = \dfrac{AS}{SQ}$

(THALES) $\dfrac{AS}{SQ} = \dfrac{AB}{BC}$

($\Delta APD \approx \Delta CQD$) $\dfrac{AP}{CQ} = \dfrac{AD}{CD}$

$\therefore \quad \dfrac{AP}{CQ} = \dfrac{AS}{SQ} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{CD}$

4.5.10. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

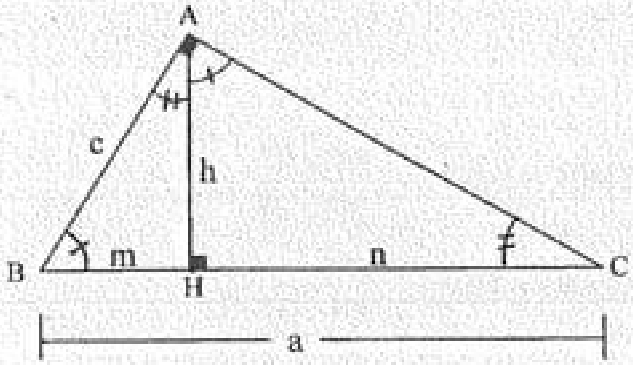
4.5.10.1. RELACIONES MÉTRICAS

1. Un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección en la hipotenusa.

2. La altura relativa a la hipotenusa es media proporcional entre los segmentos que determina en la hipotenusa.

3. El producto de los catetos es igual al producto entre la hipotenusa y su altura relativa.

4. El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



H) Δ ABC Rectángulo

T_1) $b^2 = a \times n$

T_2) $h^2 = m \times n$

T_3) $b \times c = a \times h$

T_4) $a^2 = b^2 + c^2$

D_1) $\Delta ABC \approx \Delta CAH$: $\frac{n}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow b^2 = a \times n$

D_2) $\Delta ABH \approx \Delta CAH$: $\frac{m}{h} = \frac{h}{n} \Rightarrow h^2 = m \times n$

D_3) $\Delta ABC \approx \Delta ABH$: $\frac{c}{a} = \frac{h}{b} \Rightarrow b \times c = a \times h$

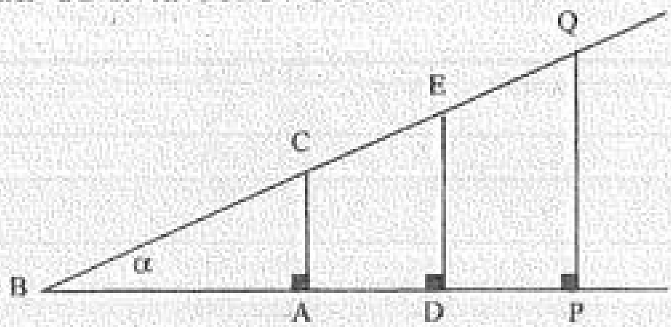
D_4) $b^2 = a \times n$

$c^2 = a \times m$

$\therefore\ b^2 + c^2 = a \times (m + n) = a^2 \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$

4.5.10.2. RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS

4.5.10.2.1. DE UN ANGULO AGUDO

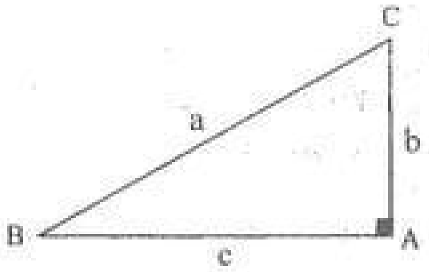


$$\frac{AC}{BC} = \frac{DE}{BE} = \frac{PQ}{BQ} = \cdots\cdots = \text{Sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{BE} = \frac{BP}{BQ} = \cdots\cdots = \text{Cos } \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{DE}{BD} = \frac{PQ}{BP} = \cdots\cdots = \text{Tan } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

4.5.10.2.2. DE ANGULOS COMPLEMENTARIOS



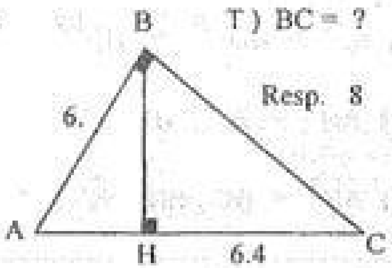
$$\text{Sen}\,\hat{B} = \frac{b}{a} = \text{Cos}\ \hat{C} = \text{Cos}\ (90° - \hat{B})$$

$$\text{Cos}\,\hat{B} = \frac{c}{a} = \text{Sen}\ \hat{C} = \text{Sen}\ (90° - \hat{B})$$

4.5.10.3. EJERCICIOS

1. T) BC = ?

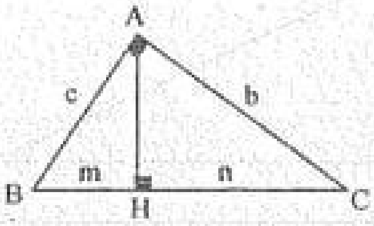
Resp. 8



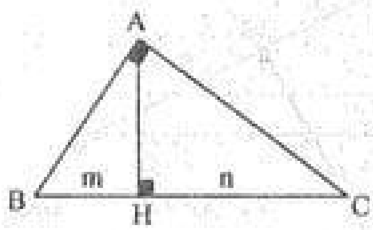
2. H) $\frac{m}{n} = \frac{9}{16}$

T) $\frac{c}{b} = ?$

Resp. 3/4



3.



H) $\frac{m}{n} = \frac{9}{16}$

$b \times c = 8$

T) BC = ? Resp. 4,08

4. Resolver un triángulo rectángulo ABC ($\hat{A} = 90°$) dados:

a) $\hat{B} = 37°$, $p = 137$ u. Resp. $a = 114{,}15$ u.

b) $c - b = 7{,}60$ u., $B = 42°$ Resp. $b = 68{,}7$ u.

c) $p = 12$ u., $h_a = 4{,}80$ u. Resp. $a = 10$ u.

d) $a = 10$ u., $v_a = 3{,}40$ u. Resp. $b = 4{,}38$ u.

5. ¿ Cuál es la relación numérica entre los catetos de un triángulo rectángulo para que las medianas m_a y m_b se corten en un ángulo recto? ($\hat{A} = 90°$) Resp. $\sqrt{2}/2$

6. Si en un triángulo dos medianas se cortan perpendicularmente, demostrar que la suma de los cuadrados de sus longitudes es igual al cuadrado de la longitud de la tercera mediana.

7. Calcular la distancia del ortocentro al baricentro en un triángulo rectángulo, si el valor de la hipotenusa es 25 m. Resp. 25 / 3 m.

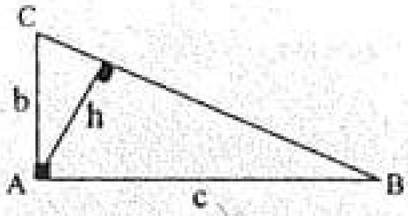
8. Calcular el valor de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, sabiendo que la altura relativa al ángulo recto, divide a la hipotenusa en dos segmentos, el uno es el triple del otro. Resp. 30° ; 60°

9. Demostrar que el Δ ABC es triángulo rectángulo si la altura y la mediana trazadas desde el vértice $\hat{B}$ divide al B en tres partes congruentes.

10. Los lados de un triángulo de son 8u, 10u y 11u que se lo quiere convertir a triángulo rectángulo, aumentando o disminuyendo dichos lados una misma cantidad. ¿ Cuál es esa cantidad. ? Resp. 4,55 u.

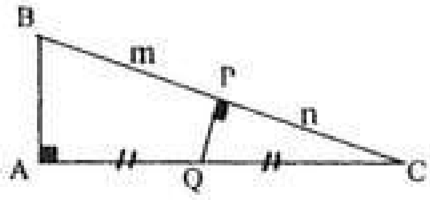
11. Una persona camina 4 Km al Norte, 6 Km al Este y 7 Km al Norte. ¿ A que distancia está del punto de partida. ? Resp. 12.52 Km

12.



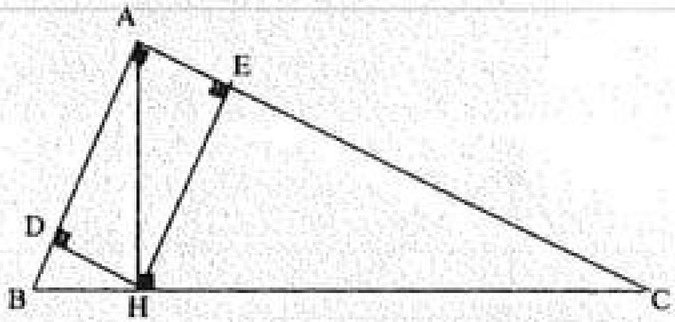
T) $\dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} = \dfrac{1}{h^2}$

13.



T) $m^2 - n^2 = AB^2$

14.



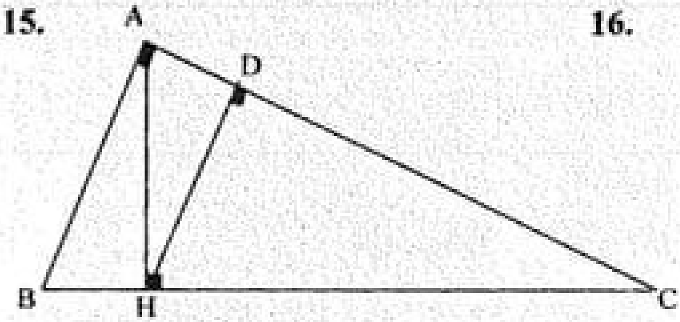
T_1) $\dfrac{b^3}{c^3} = \dfrac{EC}{BD}$

T_2) $a^{2/3} = BD^{2/3} + CE^{2/3}$

T_3) $AH^3 = BC \cdot AD \cdot AE$

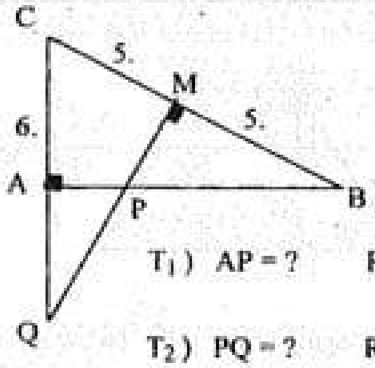
T_4) $AH^3 = BC \cdot BD \cdot EC$

15.



T) $DC = b^3 / a^2$

16.



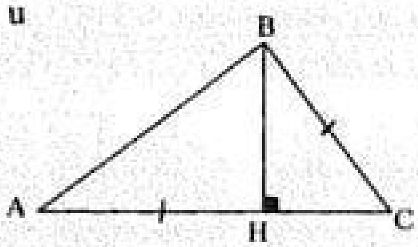
T_1) AP = ? Resp. 1.75 u.

T_2) PQ = ? Resp. 2.92 u

17. H) $BH = \sqrt{3}$ u
$AC = 3$ u

T) AB = ?

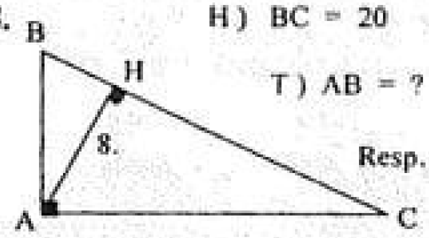
Resp. $\sqrt{7}$ u



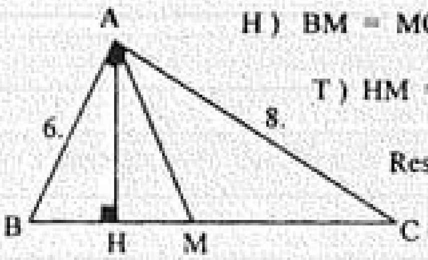
18. H) BC = 20

T) AB = ?

Resp. 8.94



19.



H) BM = MC

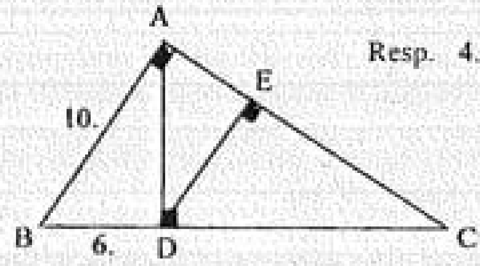
T) HM = ?

Resp. 1.4

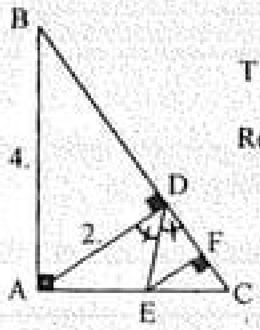
20.

T) AE = ?

Resp. 4.8



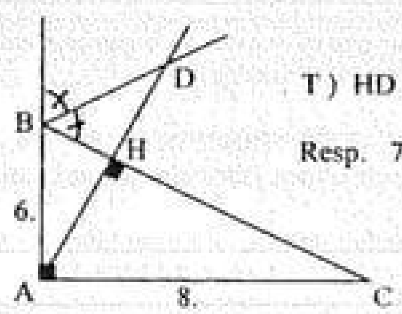
21.



T) EF = ?

Resp. 0.75

22.



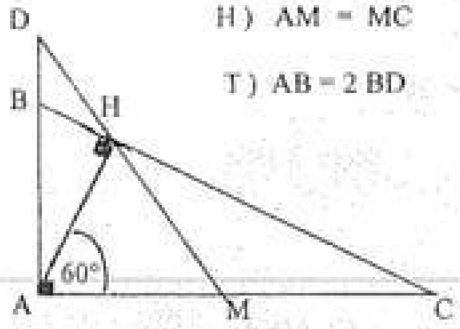
T) HD = ?

Resp. 7.2

23.

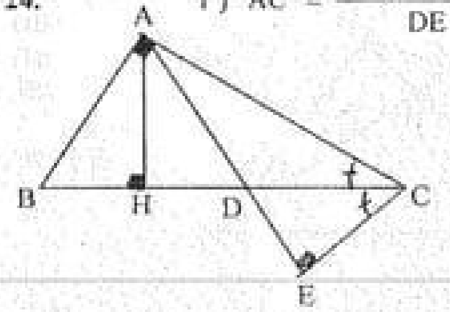
H) AM = MC

T) AB = 2 BD



24.

T) $AC^2 = \dfrac{AB \times DC \times HC}{DE}$

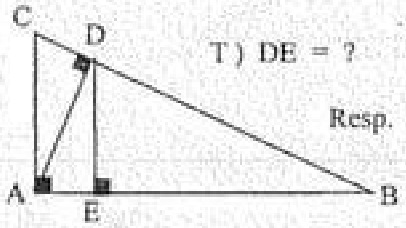


25.

H) CB = 40 u
AB = 32 u

T) DE = ?

Resp. 15.36 u

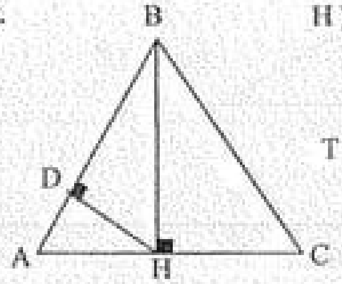


26.

H) AB = BC
AC = 30 u
BH = 20 u

T) HD = ?

Resp. 12 u



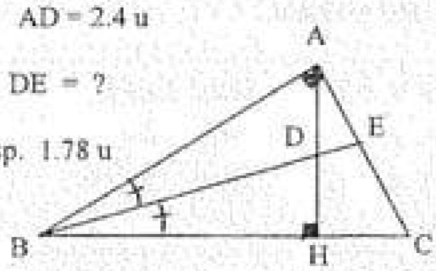
27. En un triángulo isósceles ABC el $\hat{A}$ mide 110° y BA = 10 u. Hallar la distancia entre el ortocentro y el circuncentro del triángulo ABC. Resp. 14.7 u

28. Las medianas $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$ de un triángulo escaleno ABC son perpendiculares entre sí; miden 12u y 9u, respectivamente. Calcular los lados del triángulo. Resp. AB = 10 u.; BC = 14,4 u.; AC = 17.08 u.

29. H) AB = 6 u
AD = 2.4 u

T) DE = ?

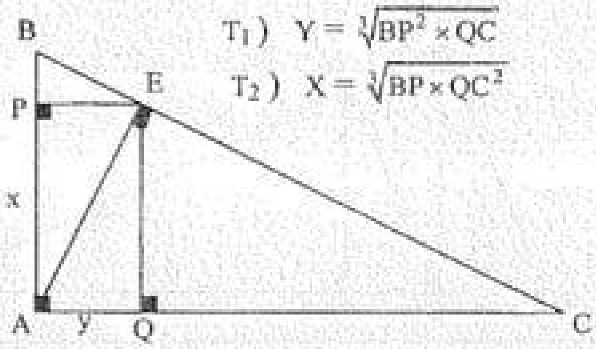
Resp. 1.78 u



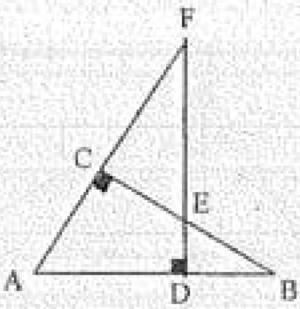
30.

T₁) $Y = \sqrt[3]{BP^2 \times QC}$

T₂) $X = \sqrt[3]{BP \times QC^2}$



31.

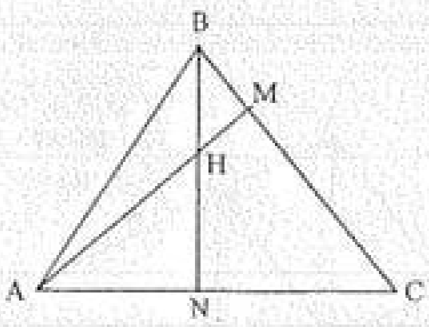


H) AB = 10 u.
DE = 0.75 u.
EF = 11.25 u.

T_1) AC = ? Resp. 6 u.

T_2) BC = ? Resp. 8 u.

32.

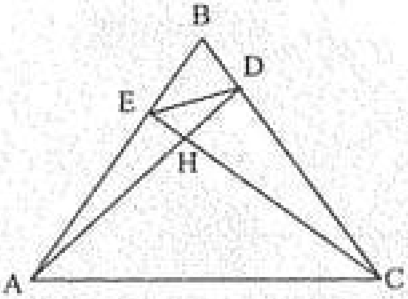


H) H Ortocentro Δ ABC
MC = 3 u.
NC = 2 u.
AC + BC = 14 u.

T_1) AH = ? Resp. 6.85 u.

T_2) BH = ? Resp. 2.78 u.

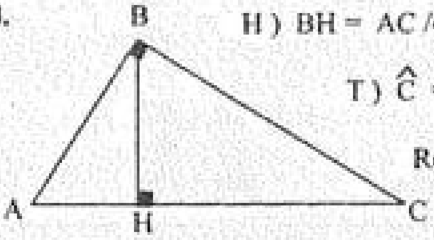
33.



H) .H Ortocentro Δ ABC
BD = 2 u.
BE = 3 u.
AB + BC = 20 u.

T) DE = ? Resp. 3.16 u.

34.



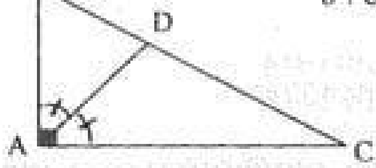
H) BH = AC /4

T) $\hat{C}$ = ?

Resp. 15°

35.

T) $AD = \dfrac{b \times c\,\sqrt{2}}{b + c}$

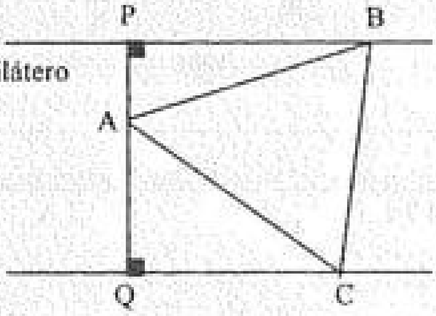


36.

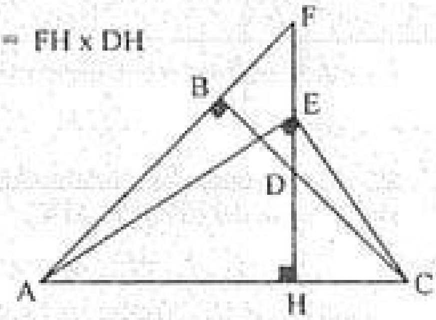
H) Δ ABC Equilátero
AP = 3 u.
AQ = 7 u.

T) AB = ?

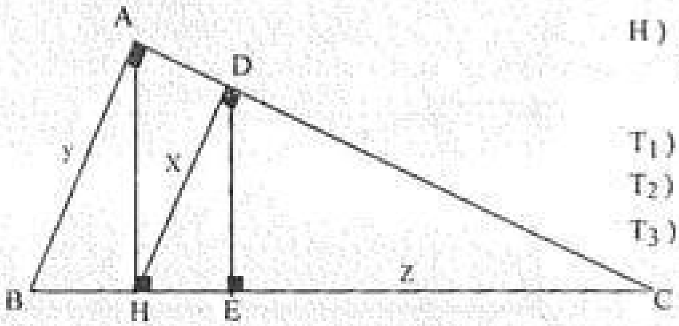
Resp. 11.84 u



37. T) $EH^2 = FH \times DH$



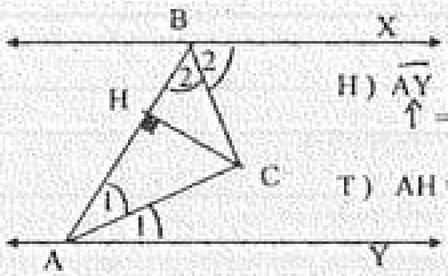
38.



H) BH = 7.2 u.
HC = 12,8 u.

T_1) x = ? Resp. 7.68 u.
T_2) y = ? Resp. 12 u.
T_3) z = ? Resp. 8.19 u.

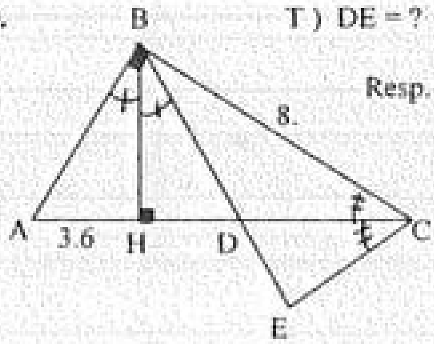
39.



H) $\overline{AY} \parallel \overline{BX}$
$\hat{1}$ = 30°

T) AH = 3 BH

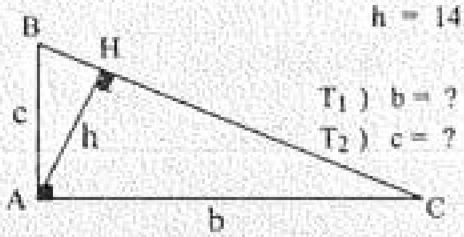
40.



T) DE = ?

Resp. 1.68 u

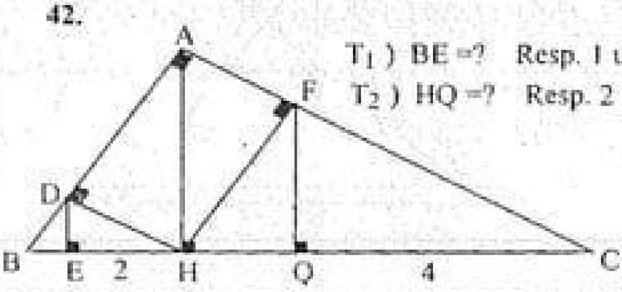
41.



H) BC + b + c = 72 u.
h = 14.4 u.

T_1) b = ? Resp. 24 u.
T_2) c = ? Resp. 18 u.

42.

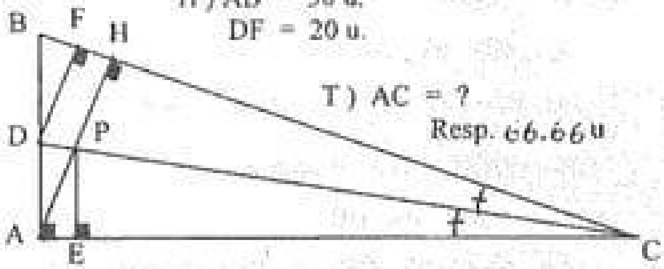


T_1) BE =? Resp. 1 u.
T_2) HQ =? Resp. 2 u.

43.

H) AB = 50 u.
DF = 20 u.

T) AC = ?
Resp. 66.66 u

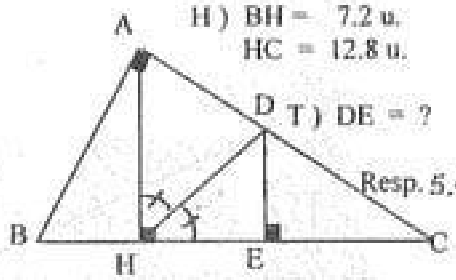


44.

H) BH = 7.2 u.
HC = 12.8 u.

T) DE = ?

Resp. 5.48 u

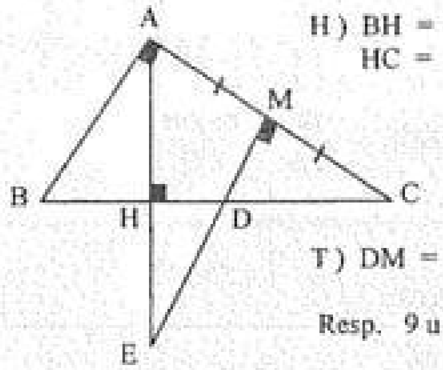


45.

H) BH = 10.8 u.
HC = 19.2 u.

T) DM = ?

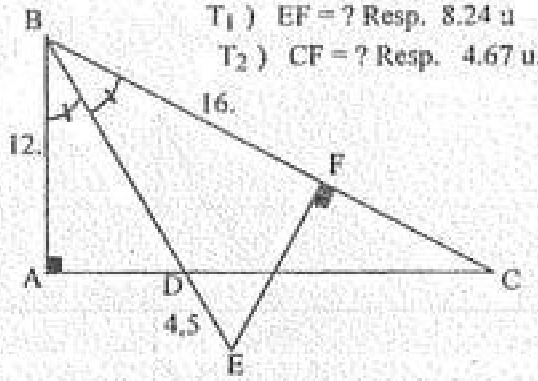
Resp. 9 u



46.

T_1) EF = ? Resp. 8.24 u

T_2) CF = ? Resp. 4.67 u.

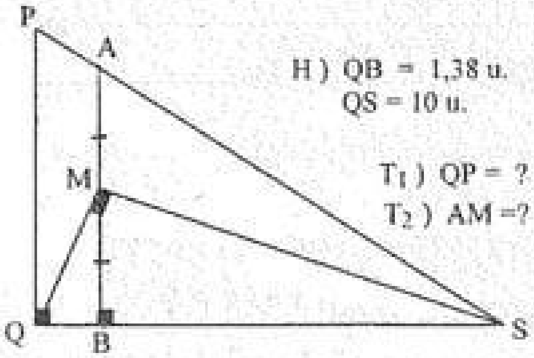


47.

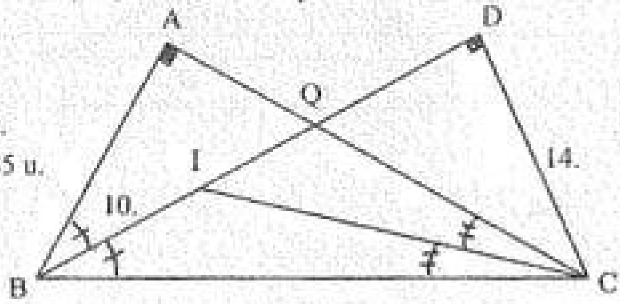
H) QB = 1,38 u.
QS = 10 u.

T_1) QP = ? Resp. 8 u.

T_2) AM =? Resp. 3,45 u.



48. T) QC =.? Resp. 16.21

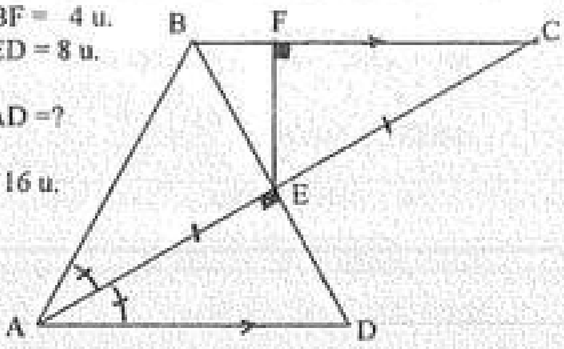


49.

H) BF = 4 u.
ED = 8 u.

T) AD =?

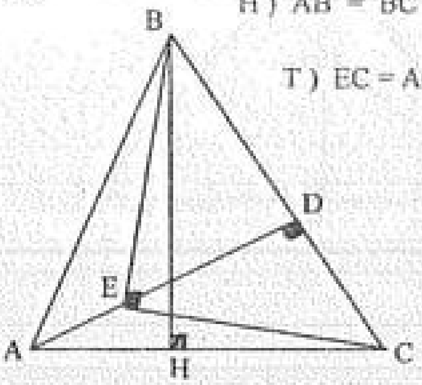
Resp. 16 u.



50.

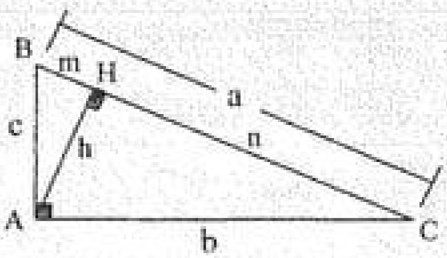
H) AB = BC .

T) EC = AC $\sqrt{2}/2$



4.5.10.3.1. EJERCICIOS RESUELTOS

12.

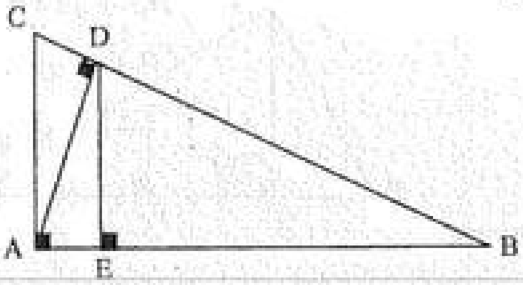


D) $b^2 = a.n$
$c^2 = a.m$
$h^2 = m.n$

$$h^2 = \frac{b^2}{a} \times \frac{c^2}{a} = \frac{b^2 \times c^2}{b^2 + c^2}$$

$$\therefore \ \frac{1}{h^2} = \frac{b^2 + c^2}{b^2 \times c^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}$$

25.



D) $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 24$ u.

$AC \times AB = BC \times AD$

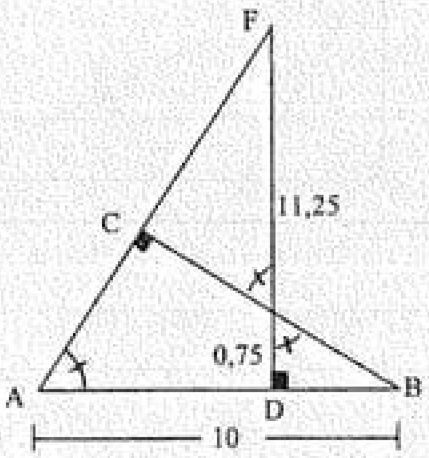
$24 \times 32 = 40 \times AD \quad \therefore AD = 19{,}2$ u.

$DB = \sqrt{AB^2 - AD^2} = 25{,}6$ u.

$AD \times DB = AB \times DE$

$19{,}2 \times 25{,}6 = 32 \times DE \quad \therefore DE = 15{,}36$ u.

31.



D) $\Delta AFD \approx \Delta BDE$: $\dfrac{12}{DB} = \dfrac{10 - DB}{0{,}75}$

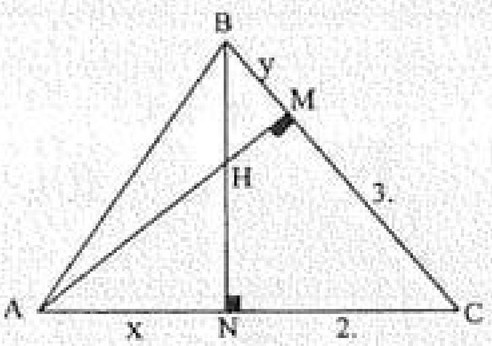
$\Rightarrow DB = 1$u.

$Tg\,\hat{1} = \dfrac{1}{0{,}75} \quad \Rightarrow \hat{1} = 53{,}13°$

$Cos\,\hat{1} = \dfrac{AC}{10} \quad \Rightarrow AC = 6$ u.

$CB = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ u.

32.



D) $(x + 2) + (y + 3) = 14 \quad \therefore x + y = 9$

$\Delta ACM \approx \Delta BCN$: $\dfrac{x + 2}{y + 3} = \dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow x = 6{,}4$ u. ; $y = 2{,}6$ u.

$BN = \sqrt{BC^2 - NC^2} = 5{,}2$ u.

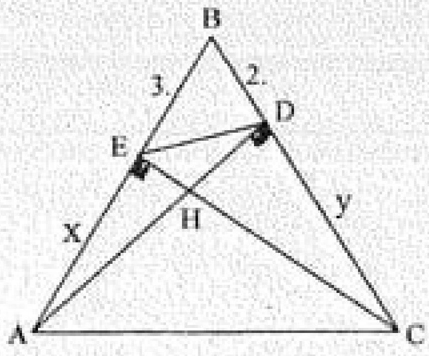
$\Delta AHN \approx \Delta BCN$: $\dfrac{AH}{5{,}6} = \dfrac{6{,}4}{5{,}2}$

$\Rightarrow AH = 6{,}85$ u.

$HN = \sqrt{AH^2 - X^2} = 2{,}56$ u.

$\therefore BH = BN - HN = 2{,}78$ u

33.



D) $\Delta ABC \approx \Delta EBD$: $\dfrac{2}{3 + x} = \dfrac{3}{2 + y} = \dfrac{DE}{AC}$

$(x + 3) + (y + 2) = 20$

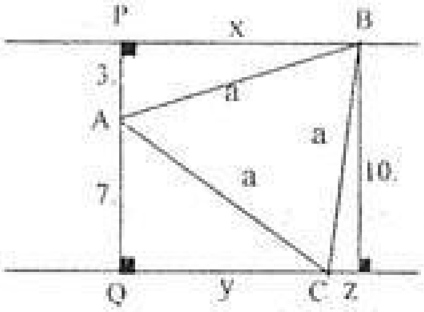
$\Rightarrow x = 5$ u. ; $y = 10$ u.

$EC = \sqrt{BC^2 - BE^2} = 11{,}62$ u.

$AC = \sqrt{EC^2 + X^2} = 12{,}64$ u.

$\therefore DE = \dfrac{2\,AC}{8} = 3{,}16$ u.

36.



D) $x^2 = a^2 - 3^2$

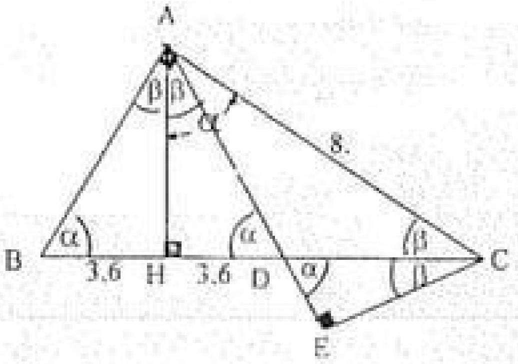
$y^2 = a^2 - 7^2$

$z^2 = a^2 - 10^2$

$x = y + z$

$\therefore\ a = 10{,}26$ u.

40.



D) En el ΔABC :

$8^2 = (7{,}2 + DC) \times (3{,}6 + DC)$

$\therefore\ DC = 2{,}8$ u.

$\Delta\, CED \approx \Delta\, ABC : \quad \dfrac{x}{10} = \dfrac{CE}{8}$

$CE = 2{,}24$ u.

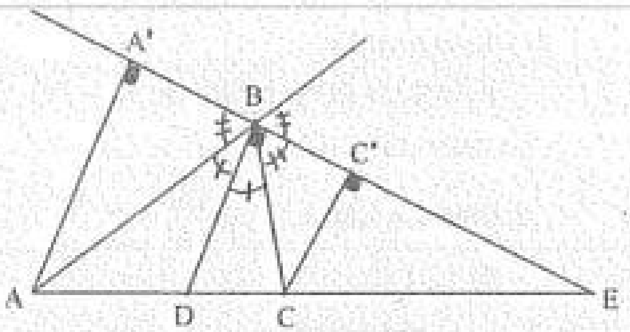
$DE = \sqrt{2{,}8^2 + 2{,}24^2} = 1{,}68$ u.

4.5.11. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS ESCALENOS

4.5.11.1. RELACIONES MÉTRICAS

4.5.11.1.1. PROPIEDAD DE LAS BISECTRICES

En todo triángulo, la bisectriz de un ángulo interno o externo divide al lado opuesto en partes proporcionales a los otros dos lados del triángulo.



H) Δ ABC Escaleno

$\overleftrightarrow{BD}$ Bisectriz Interna

$\overleftrightarrow{BE}$ Bisectriz Externa

T_1) $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{DC}$

T_2) $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AE}{CE}$

D) $\overleftrightarrow{AA'} \wedge \overleftrightarrow{CC'} \perp \overleftrightarrow{BE}$ (Construcción)

$$\therefore \overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{BD} \parallel \overleftrightarrow{CC'} \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$$

$$\widehat{ABA'} = \widehat{CBC'}$$

$$\therefore \Delta AA'B \approx \Delta CC'B \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{BC} = \frac{AA}{CC}$$

$$\therefore \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \quad \text{Bisectriz Interna}$$

$$\Delta AA'E \approx \Delta CCE \Rightarrow \frac{AE}{CE} = \frac{AA}{CC} = \frac{AE}{CE}$$

$$\therefore \frac{AE}{CE} = \frac{AB}{BC} \quad \text{Bisectriz Externa}$$

COROLARIO

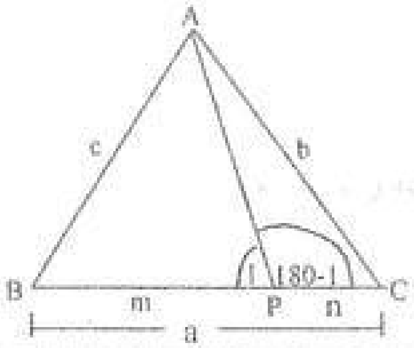
Las bisectrices interna y externa en un mismo vértice de un triángulo, divide armónicamente al lado opuesto en la razón de los otros dos lados del triángulo.

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{CE} = \frac{AB}{BC}$$

4.5.11.1.2. TEOREMA DE STEWART

El cuadrado de la longitud del segmento que une el vértice de un triángulo con un punto interior cualquiera del lado opuesto, multiplicado por dicho lado, es igual a la suma de los productos de las longitudes de los segmentos determinados multiplicado por el cuadrado de las longitudes de los lados no consecutivos, menos el producto de dichos segmentos por el lado en el que están contenidos.

$$T)\ AP^2 \times a = m \times b^2 + n \times c^2 - m \times n \times a$$



D) Δ ABP : $c^2 = m^2 + AP^2 - 2\,m\,AP\,\mathrm{Cos}\,\hat{1}$

Δ APC : $b^2 = n^2 + AP^2 + 2\,n\,AP\,\mathrm{Cos}\,(180° - \hat{1})$

$\mathrm{Cos}\,(180° - \hat{1}) = -\,\mathrm{Cos}\,\hat{1}$

$$\therefore \quad \frac{m^2 + AP^2 - c^2}{2\,m\,AP} = \frac{b^2 - n^2 - AP^2}{2\,n\,AP}$$

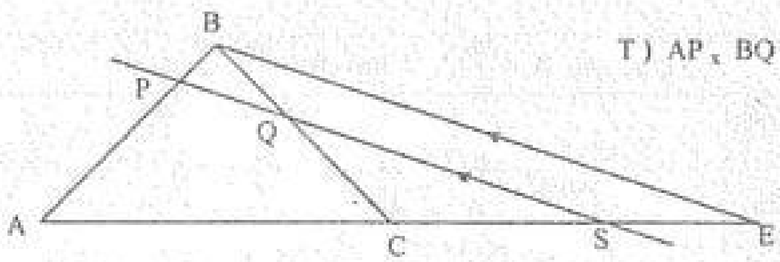
$$n_x m^2 + n_x AP^2 - n_x c^2 = m_x b^2 - m_x n^2 - m_x AP^2$$

$$AP^2 (m + n) = m_x b^2 + n_x c^2 - m_x n (m + n)$$

$$\therefore \; AP^2{}_x a = m_x b^2 + n_x c^2 - m_x n_x a$$

4.5.11.1.3. TEOREMA DE MENELAO

Si una transversal determina sobre los lados de un triángulo seis segmentos, el producto de tres de ellos que no tengan extremos comunes es igual al producto de los otros tres.



T) $AP_x\, BQ_x\, CS = PB_x\, QC_x\, AS$

D) $\overline{BE} \parallel \overline{PS}$ (Construcción)

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AS}{SE} \qquad \therefore \qquad SE = \frac{BQ_x\, CS}{QC} = \frac{AS_x\, PB}{AP}$$

$$\frac{BQ}{QC} = \frac{SE}{CS}$$

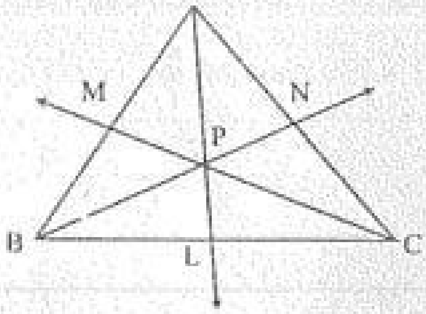
$$\Rightarrow \quad AP \times BQ \times SC = PB \times CQ \times AS$$

COROLARIO

Si tres puntos en los lados de un triángulo determinan seis segmentos que cumplen el teorema de Menelao, los tres puntos son colineales.

4.5.11.1.4. TEOREMA DE CEVA

Si desde los vértices de un triángulo se trazan rayos que pasan por un punto interior, se obtienen seis segmentos sobre los lados del triángulo tal que, el producto de los tres segmentos que no tengan extremos comunes es igual al producto de los otros tres.



T) AM x BL x NC = MB x LC x AN

D) Δ ABL , CM transversal : AM x BC x PL = MB x LC x AP

Δ ACL , BN transversal : AN x BC x PL = NC x BL x AP

$$\therefore \frac{AM \times BC \times PL}{AN \times BC \times PL} = \frac{MB \times LC \times AP}{NC \times BL \times AP} \Rightarrow AM \times BL \times NC = MB \times LC \times AN$$

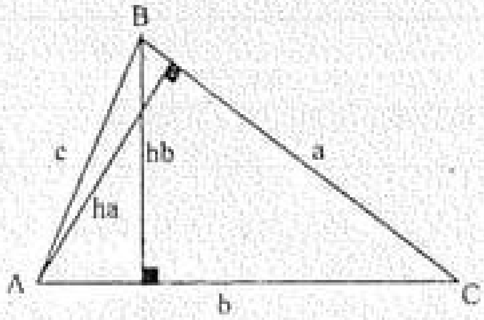
COROLARIO

Si desde los vértices de un triángulo se trazan rayos que determinen en los lados, seis segmentos que cumplen el teorema de Ceva, los rayos son concurrentes.

4.5.11.2. RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS

4.5.11.2.1. LEY DE SENOS

Los lados de un triángulo son proporcionales a las funciones seno de los ángulos opuestos.



T) $\frac{a}{\text{Sen A}} = \frac{b}{\text{Sen B}} = \frac{c}{\text{Sen C}}$

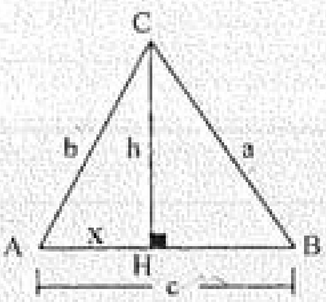
D) $\text{Sen A} = \frac{hb}{c}$; $\text{Sen B} = \frac{ha}{c}$;

$\text{Sen C} = \frac{h_b}{a} = \frac{ha}{b}$

$\therefore \frac{a}{\text{Sen A}} = \frac{b}{\text{Sen B}} = \frac{c}{\text{Sen C}}$

4.5.11.2.2. LEY DE COSENOS

El cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de dichos lados, por el coseno del ángulo que forman.



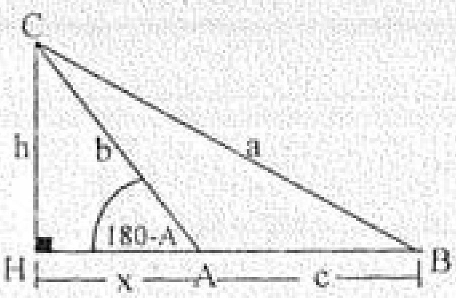
T) $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\text{Cos A}$

D) Δ BCH : $h^2 = a^2 - (c \pm x)^2$

Δ ACH : $h^2 = b^2 - x^2$

$h^2 = a^2 - (c \pm x)^2 = b^2 - x^2$

$\therefore a^2 = b^2 + c^2 \pm 2\,c\,x$



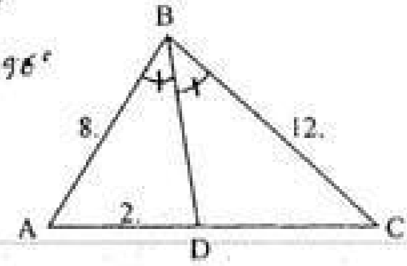
$\text{Cos A} = \frac{x}{b} = -\text{Cos}(180° - \hat{A}) = -\frac{x}{b}$

$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\text{Cos}\,\hat{A}$

4.5.11.3. EJERCICIOS

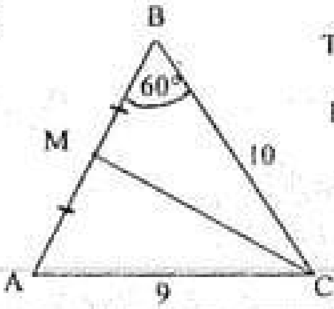
1. T) $\hat{C}=?$

Resp. 28.96°



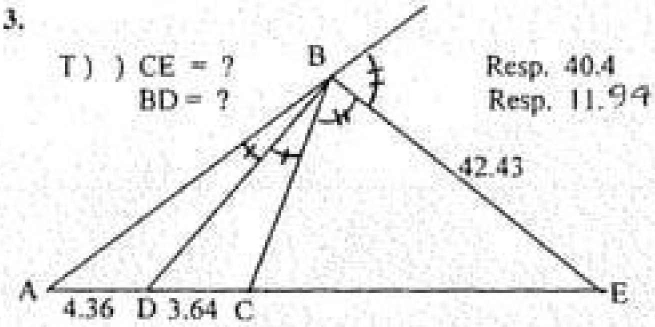
2. T) MC = ?

Resp. 3.75
9.42

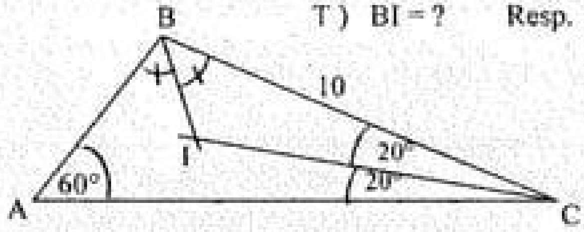


3. T)) CE = ?
BD = ?

Resp. 40.4
Resp. 11.94

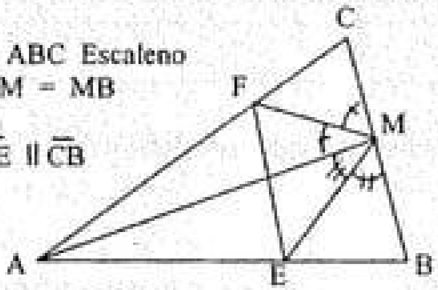


4. T) BI = ? Resp. 3.95



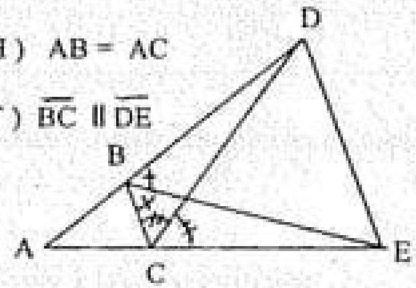
5. H) Δ ABC Escaleno
CM = MB

T) $\overline{FE} \parallel \overline{CB}$



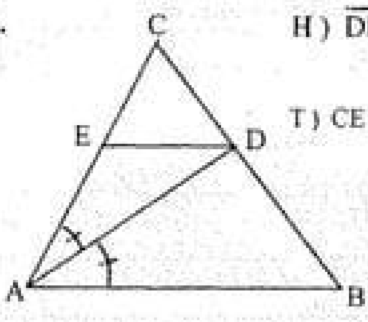
6. H) AB = AC

T) $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$

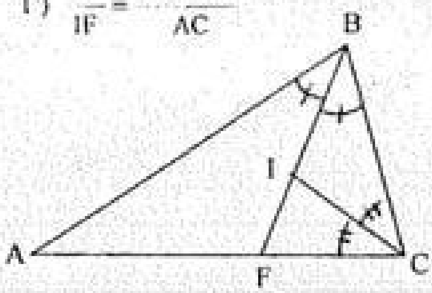


7. H) $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$

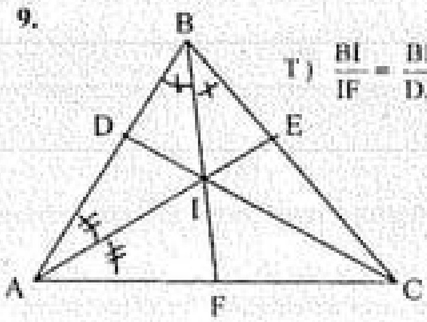
T) $CE = \dfrac{AC^2}{AC+AB}$



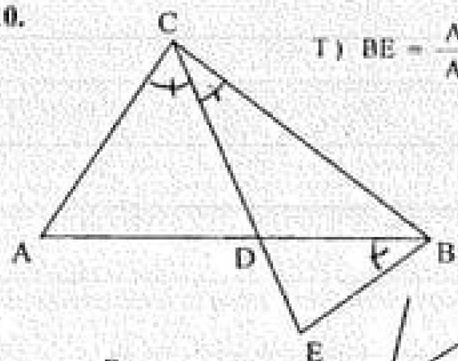
8. T) $\dfrac{BI}{IF} = \dfrac{AB+BC}{AC}$



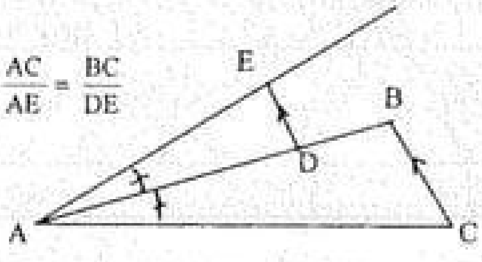
9. T) $\dfrac{BI}{IF} = \dfrac{BD}{DA} + \dfrac{BE}{EC}$



10. T) $BE = \dfrac{AB \times CE}{AC+BC}$

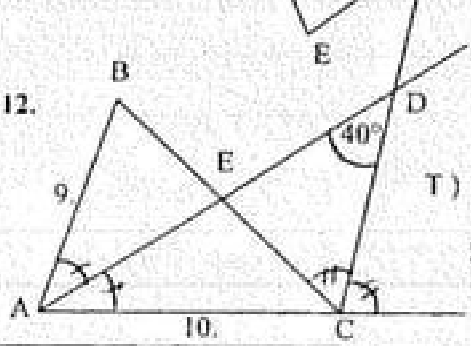


11. T) $\dfrac{AC}{AE} = \dfrac{BC}{DE}$



12. T) DE = ?

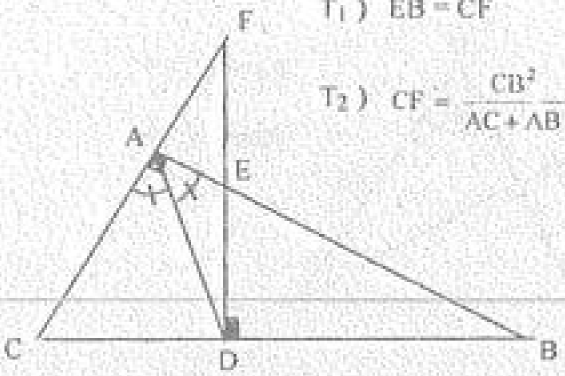
Resp. 4.33



13.

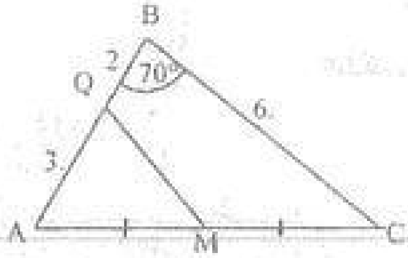
T_1) $EB = CF$

T_2) $CF = \dfrac{CB^2}{AC + AB}$

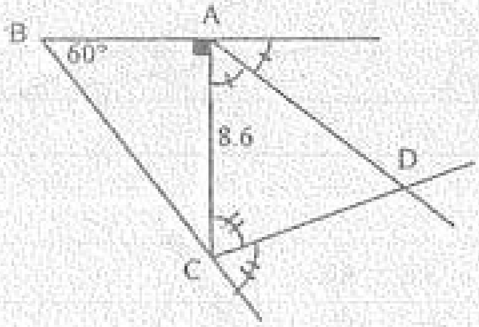


14.

T) QM = ? Resp. 3.21

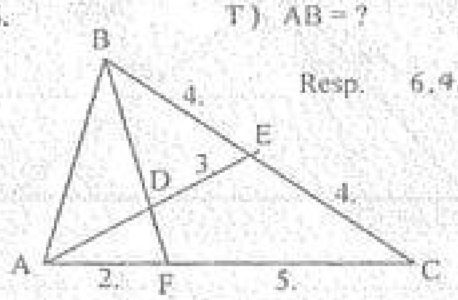


15. T) AD = ? Resp. 9.6



16. T) AB = ?

Resp. 6.93

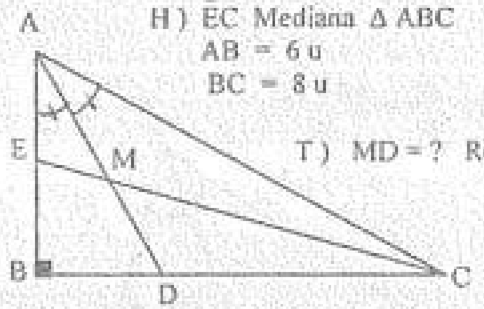


17. Los lados de un triángulo son: a = 20 u.; b = 16 u. y c = 14 u. Calcular la distancia entre el vértice A y su Ortocentro. Resp. 2,04 u.

18.

H) $\overline{EC}$ Mediana Δ ABC
AB = 6 u
BC = 8 u

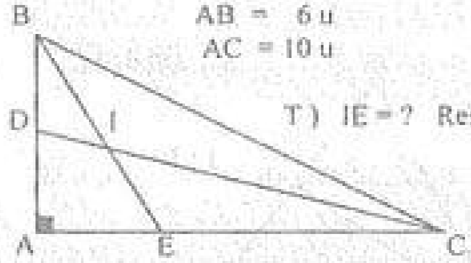
T) MD = ? Resp. 2.58



19.

H) I Incentro Δ ABC
AB = 6 u
AC = 10 u

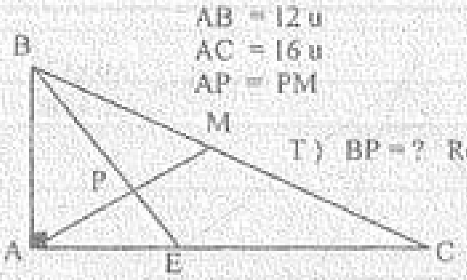
T) IE = ? Resp. 2.49



20.

H) AM Mediana Δ ABC
AB = 12 u
AC = 16 u
AP = PM

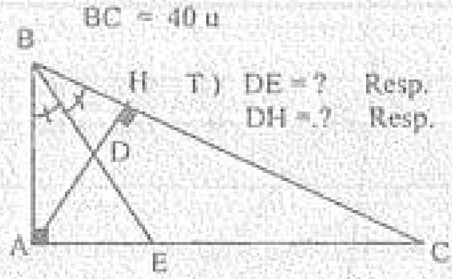
T) BP = ? Resp. 9.85 u



21.

H) AB = 24 u
BC = 40 u

T) DE = ? Resp. 10.73 u
DH = ? Resp. 7.2 u

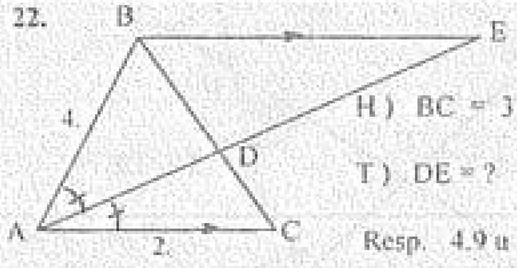


22.

H) BC = 3 u

T) DE = ?

Resp. 4.9 u

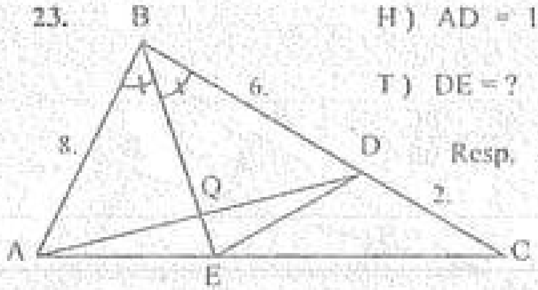


23.

H) AD = 10 u

T) DE = ?

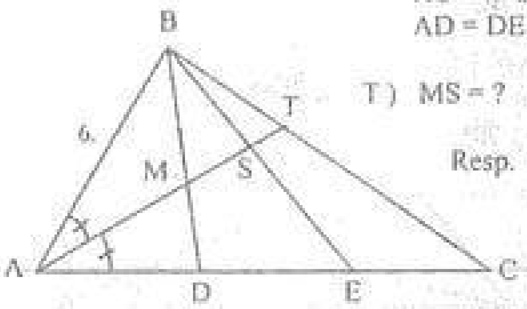
Resp. 4.47 u



24. H) BC = 8 u
AC = 9 u
AD = DE = EC

T) MS = ?

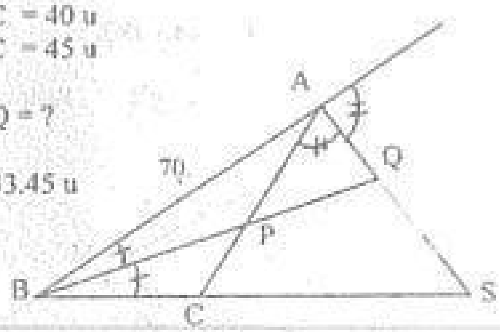
Resp. 1.69 u



25. H) BC = 40 u
AC = 45 u

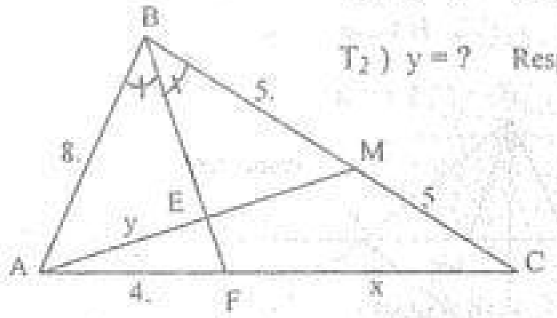
T) PQ = ?

Resp. 33.45 u

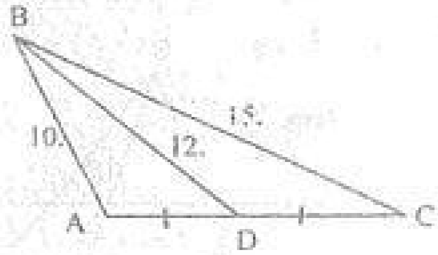


26. T_1) x = ? Resp. 5 u

T_2) y = ? Resp. 4.24 u



27. T) $\hat{A}$ = ? Resp. 107.26

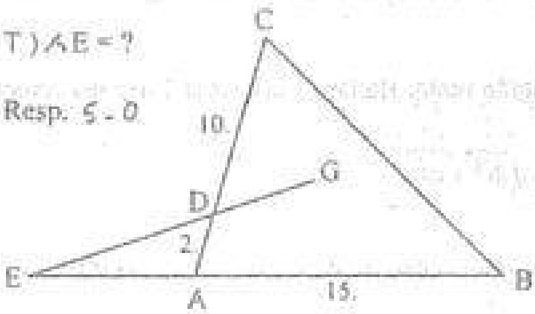


28. En el Δ ABC las alturas $\overline{AP}$ y $\overline{CS}$ se cortan en el punto H. Si AB = AC, AH = 9 m. y HP = 3 m. , hallar las medidas de CH y HS. Resp. 6.72 m. ; 4.02 m.

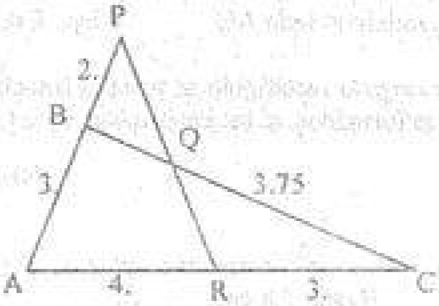
29. H) . G Baricentro Δ ABC

T) ∡E = ?

Resp. 5 . 0

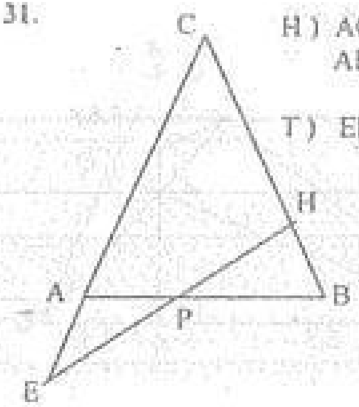


30. T) BQ = ? Resp. 2



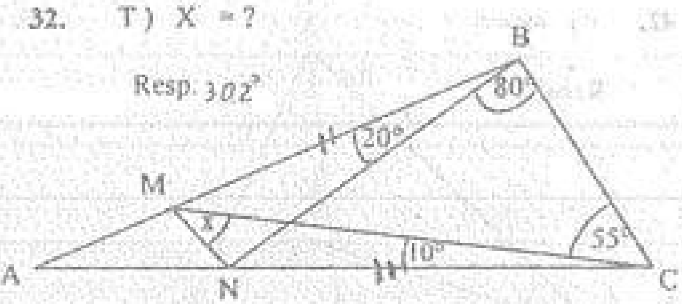
31. H) AC = CB
AE = BH

T) EP = PH

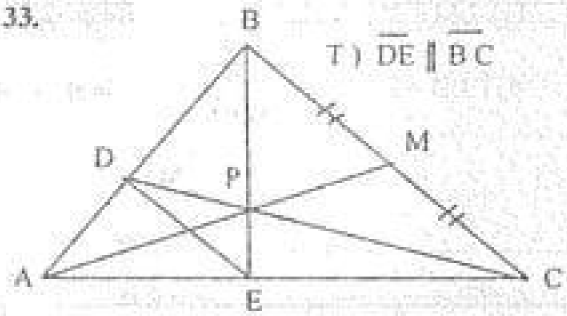


32. T) $\hat{X}$ = ?

Resp. 302°

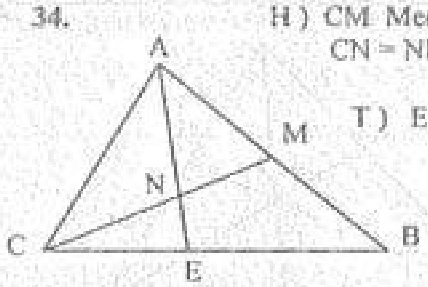


33. T) $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$



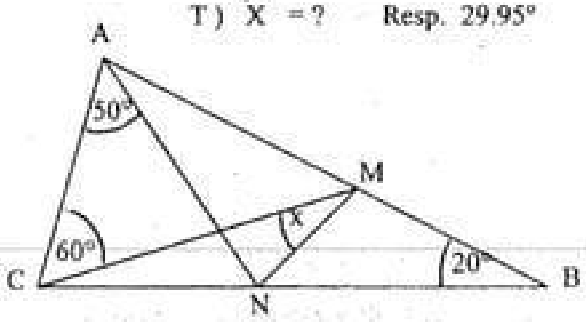
34. H) $\overline{CM}$ Mediana Δ ABC
CN = NM

T) EB = 2 EC



35. H) AB = BC

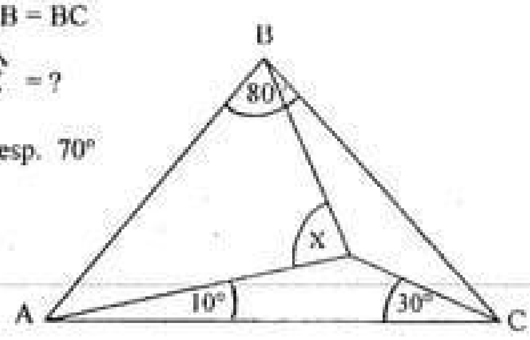
T) $\hat{X}$ = ? Resp. 29.95°



36. H) AB = BC

T) $\hat{X}$ = ?

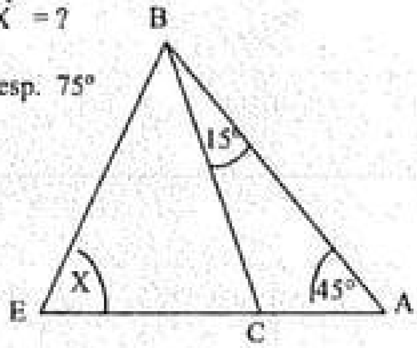
Resp. 70°



37. H) CE = 2 AC

T) $\hat{X}$ = ?

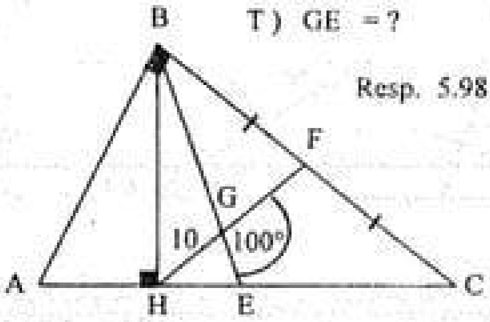
Resp. 75°



38. H) AE = E C

T) GE = ?

Resp. 5.98



39. Los lados de un Δ ABC miden: a = 9 u., b = 10 u. y c = 14 u. Hallar la medida del segmento trazado por su Incentro y paralelo al lado AB. Resp. 8 u.

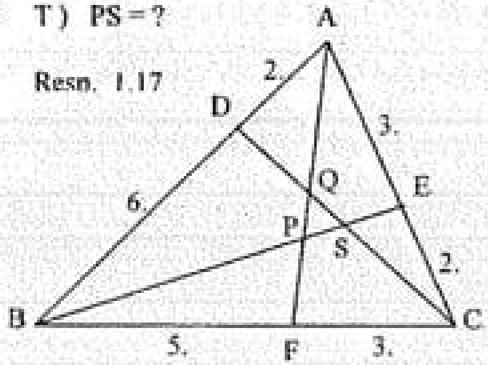
40. En un triángulo rectángulo se traza la bisectriz del ángulo recto. Hallar la distancia entre los ortocentros de los triángulos formados, si los catetos son b y c (b > c).

Resp. $\dfrac{b-c}{b+c}\sqrt{b^2+c^2}$

41. En el Δ ABC , $\overline{AD}$ es bisectriz del ∡A, AD = 8 cm., AB = 7 cm. y AC = 11,2 cm. Encontrar la longitud de BC. Resp. 7,8 cm.

42. T) PS = ?

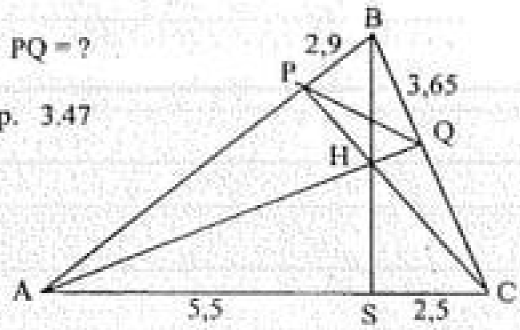
Resp. 1.17



43. H) . H Ortocentro Δ ABC

T) PQ = ?

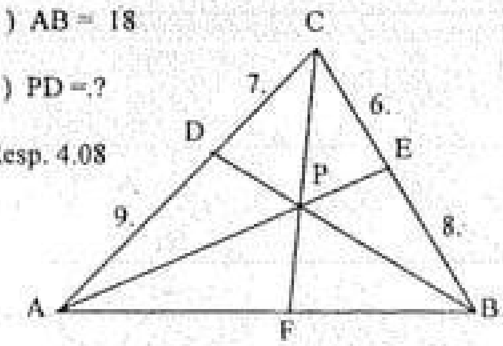
Resp. 3.47



44. H) AB = 18

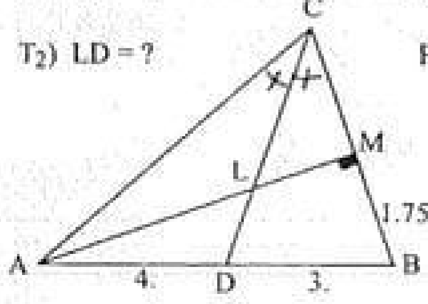
T) PD = ?

Resp. 4.08



45. T_1) LM = ? Resp. 2,35

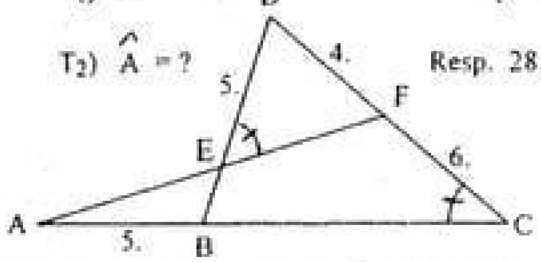
T_2) LD = ? Resp. 1,14 u



46.

$T_1)$ $BE = ?$ Resp. 3

$T_2)$ $\hat{A} = ?$ Resp. 28.23°

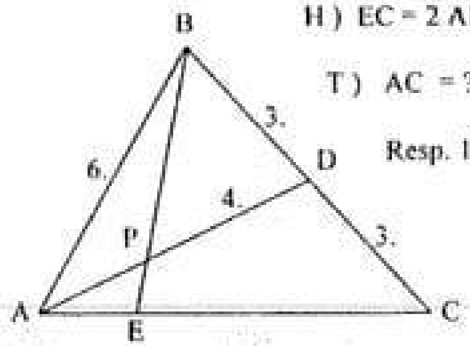


47.

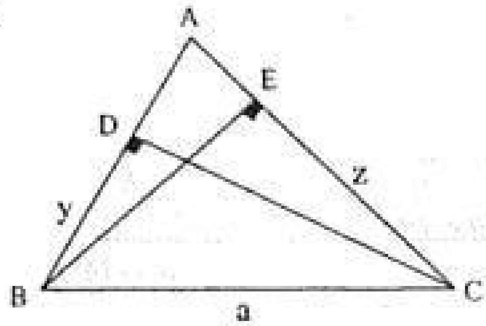
H) $EC = 2\,AE$

T) $AC = ?$

Resp. 10.48



48.



T) $a^2 = y \cdot AB + z \cdot AC$

49.

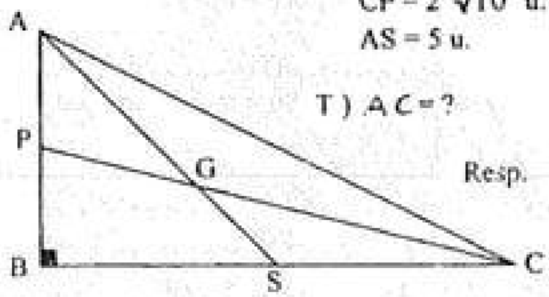
H) . G Baricentro Δ ABC

$CP = 2\sqrt{10}$ u.

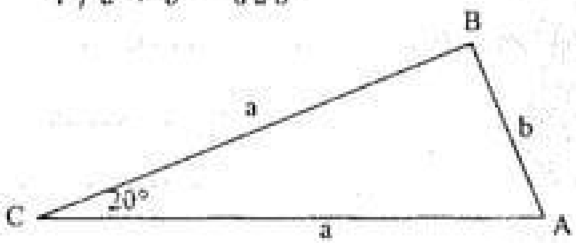
$AS = 5$ u.

T) $AC = ?$

Resp. 7.21 u



50. T) $a^3 + b^3 = 8\,a\,b^2$



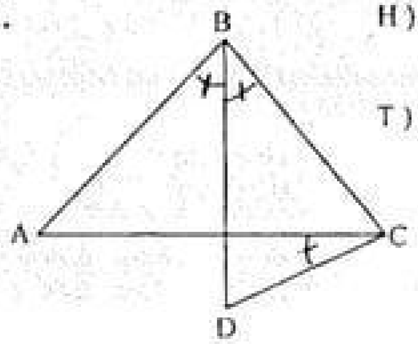
51.

H) $AB + BC = 16$ u

$BD = AC = 8$ u

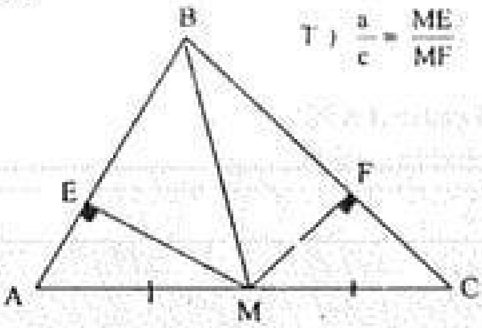
T) $DC = ?$

Resp. 4 u



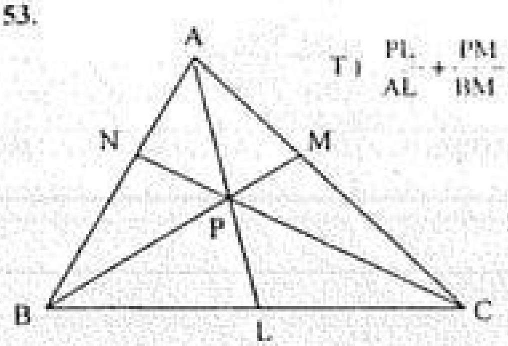
52.

T) $\frac{a}{c} = \frac{ME}{MF}$



53.

T) $\frac{PL}{AL} + \frac{PM}{BM} + \frac{PN}{CN} = 1$

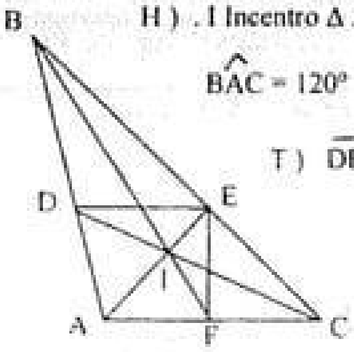


54.

H) . I Incentro Δ ABC

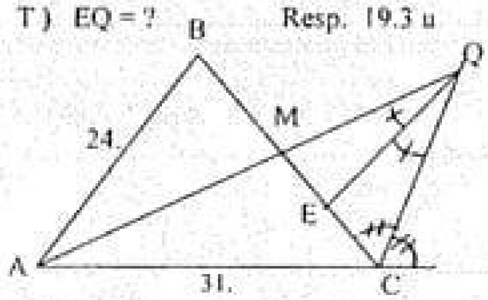
$B\hat{A}C = 120°$

T) $\overline{DE} \perp \overline{EF}$

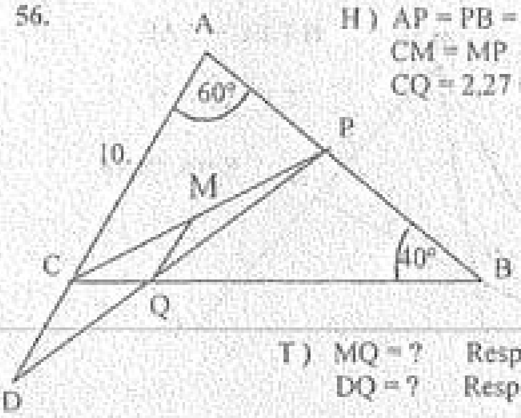


55. H) $BM = MC = 14$.

T) $EQ = ?$ Resp. 19.3 u



56.



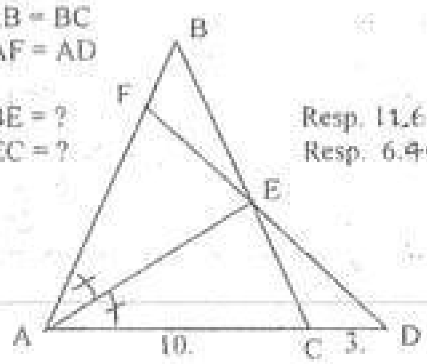
H) AP = PB = 5 u
CM = MP
CQ = 2,27 u.

T) MQ = ? Resp. 1,65 u
DQ = ? Resp. 4,48 u

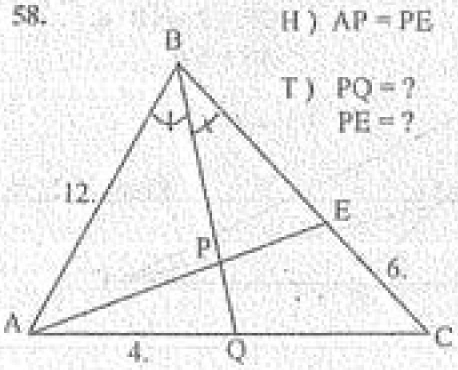
57.

H) AB = BC
AF = AD

T) BE = ? Resp. 11.6
EC = ? Resp. 6.44



58.



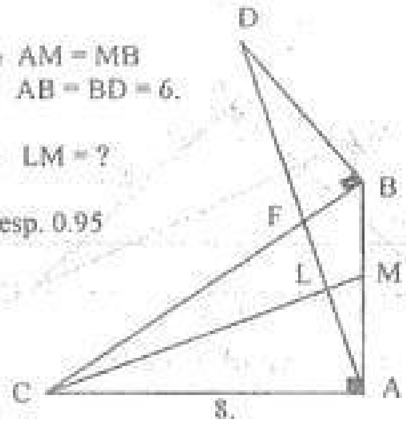
H) AP = PE

T) PQ = ? Resp. 2.3
PE = ? Resp. 3.3

59. H) AM = MB
AB = BD = 6.

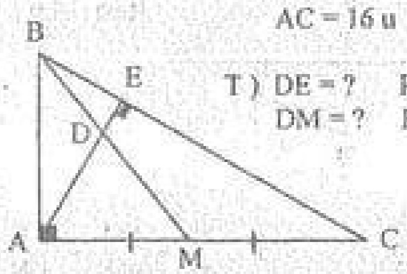
T) LM = ?

Resp. 0.95



60. Si se sabe que los lados del Δ ABC satisfacen la relación: $AC.AB = BC^2 - AC^2$. Demostrar que: $\hat{A} = 2\ \hat{B}$.

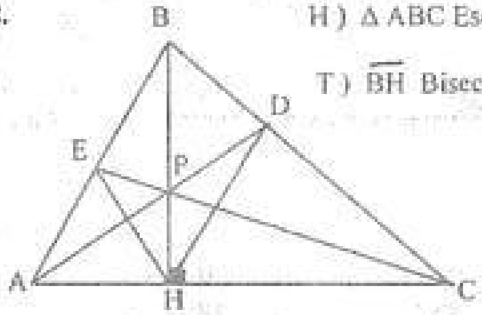
61.



H) AB = 12 u
AC = 16 u

T) DE = ? Resp. 2.54 u
DM = ? Resp. 6.78 u

62.



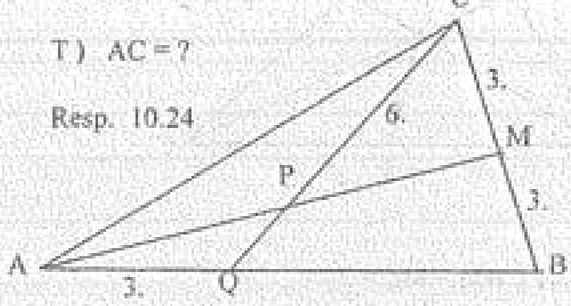
H) Δ ABC Escaleno

T) $\overline{BH}$ Bisectriz $\widehat{DHE}$

63. H) AP = PM

T) AC = ?

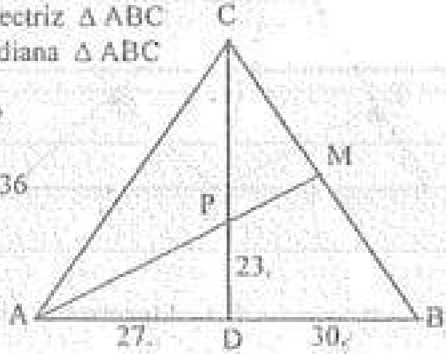
Resp. 10.24



64. H) CD Bisectriz Δ ABC
AM Mediana Δ ABC

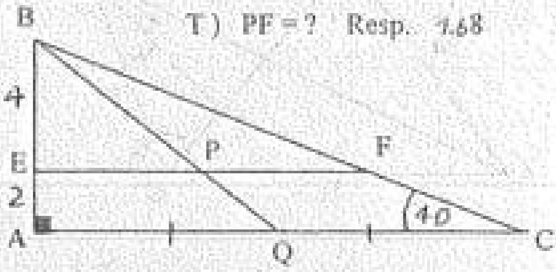
T) PM = ?

Resp. 18.36

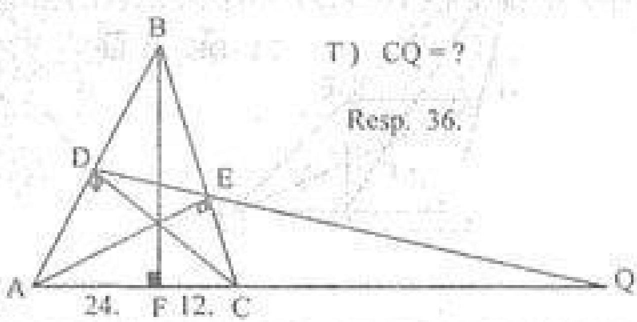


65. H) EF ∥ AC

T) PF = ? Resp. 1.68



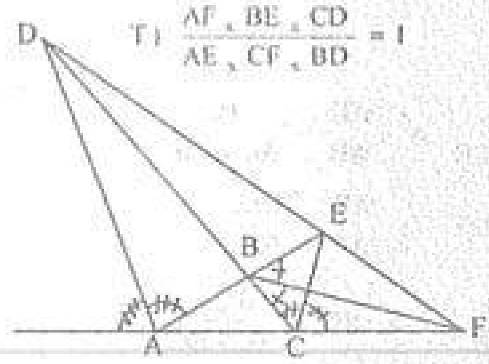
66.



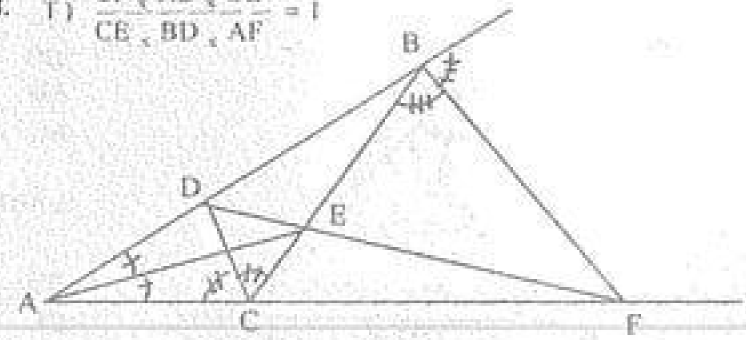
T) CQ = ?

Resp. 36.

67. T) $\dfrac{AF \times BE \times CD}{AE \times CF \times BD} = 1$

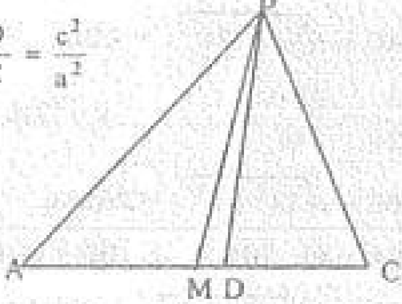


68. T) $\dfrac{CF \times AD \times BE}{CE \times BD \times AF} = 1$



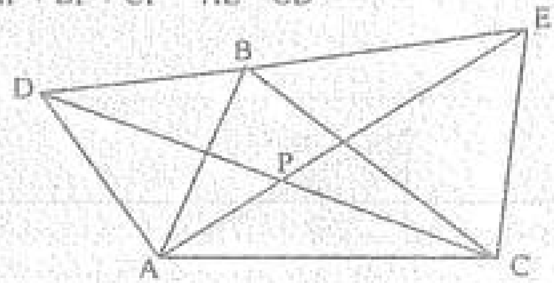
69. H) $\widehat{ABD} = \widehat{MBC}$
$AM = MC$

T) $\dfrac{AM \times AD}{MC \times DC} = \dfrac{c^2}{a^2}$



70. H) Δ ADB y Δ BCE Equiláteros

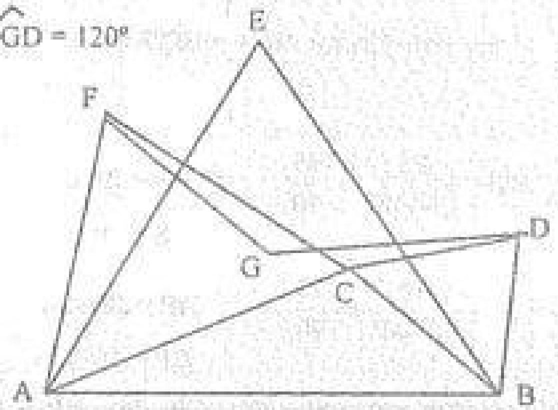
T) AP + BP + CP = AE = CD



71. H) Δs ACF, BCD y ABE Equiláteros
G Baricentro Δ ABE

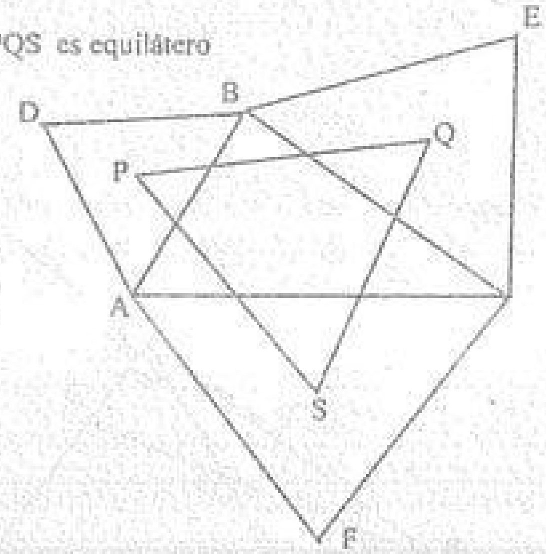
T_1) FG = GD

T_2) $\widehat{FGD} = 120°$



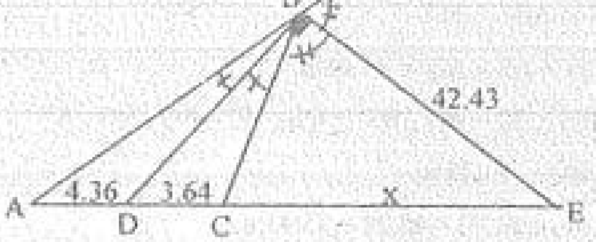
72. H) Δs ABD, BCE y ACF Equiláteros
P, Q y S son sus Baricentros

T) Δ PQS es equilátero



4.5.11.3.1 EJERCICIOS RESUELTOS

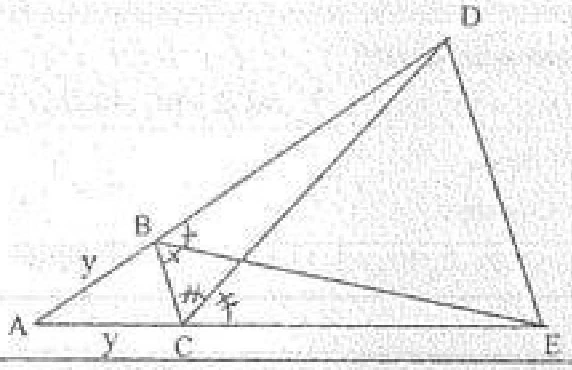
3.



D.) $\dfrac{4{,}36}{3{,}64} = \dfrac{8 + x}{x} \Rightarrow x = 40{,}4$ u.

$BD = \sqrt{44^2 - 42{,}43^2} = 11{,}8$ u.

6.

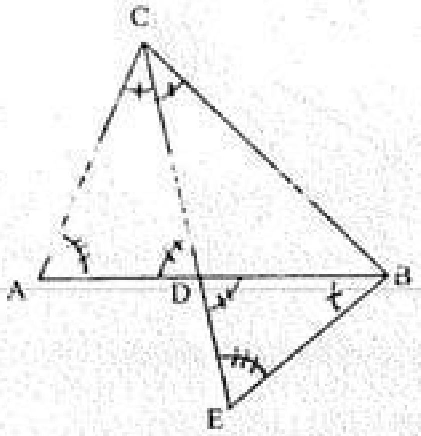


D) $\dfrac{y}{BC} = \dfrac{AE}{CE}$

$\dfrac{y}{BC} = \dfrac{AD}{BD}$

$\therefore \dfrac{AE}{CE} = \dfrac{AD}{BD} \Longrightarrow \overline{BC} \parallel \overline{DE}$

10.



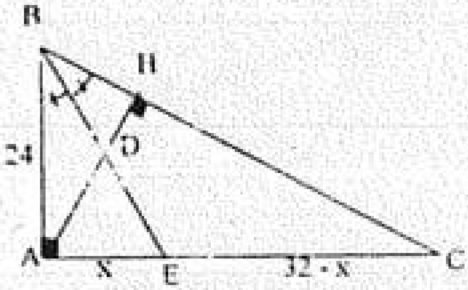
D) $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AC}{CB}$

$\therefore \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AB}{AC + CB}$ y $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AC}{AC + CB}$

$\Delta ACD \approx \Delta BEC$: $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{BE}{CE}$

$\therefore \dfrac{BE}{CE} = \dfrac{AB}{AC + BC} \Rightarrow BE = \dfrac{AB \cdot CE}{AC + BC}$

21.



D) $AC = \sqrt{40^2 - 24^2} = 32$ u.

$\dfrac{x}{24} = \dfrac{32 - x}{40} \quad \therefore \quad x = 12$ u.

$BE = \sqrt{24^2 + x^2} = 26{,}83$ u.

$24^2 = 40 \cdot BH \quad \therefore \quad BH = 14{,}4$ u.

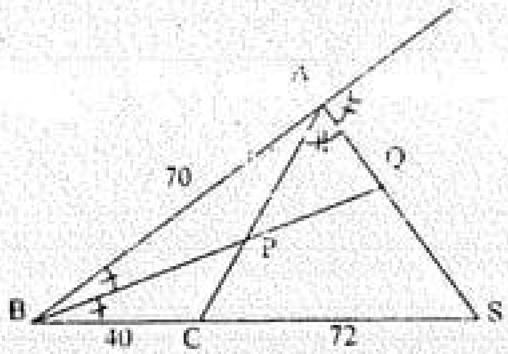
$AH = \sqrt{24^2 - BH^2} = 19{,}2$ u.

$\dfrac{HD}{AH - HD} = \dfrac{BH}{AB} \quad \therefore \quad HD = 7{,}2$ u.

$BD = \sqrt{BH^2 + HD^2} = 16{,}1$ u.

$\Rightarrow DE = 26{,}83 - 16{,}1 = 10{,}73$ u

25.



D) $\dfrac{CS}{CS + 40} = \dfrac{45}{70} \quad \therefore \quad CS = 72$ u.

$AS = 70$ u.

$\dfrac{AP}{45 - AP} = \dfrac{70}{40} \quad \therefore \quad AP = 28{,}63$ u.

$CP = 16{,}36$ u.

$BP^2 \cdot 50 = AP \cdot 40^2 + CP \cdot 70^2 - AP \cdot CP \cdot 50$

$\therefore BP = 48{,}28$ u.

$\dfrac{AQ}{70 - AQ} = \dfrac{70}{112} \quad \therefore \quad AQ = 26{,}92$ u.

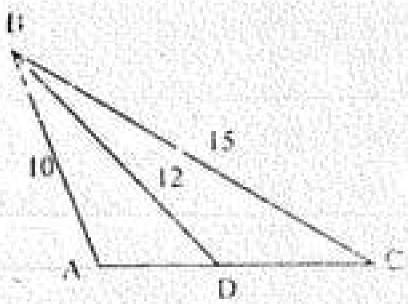
$QS = AS - AQ = 43{,}08$ u.

$BQ^2 \cdot 70 = AQ \cdot BS^2 + QS \cdot 70^2 - AQ \cdot QS \cdot AS$

$\therefore BQ = 81{,}73$ u.

$\Rightarrow PQ = 81{,}73 - 48{,}28 = 33{,}45$ u.

27.



D) Teorema de Stewart :

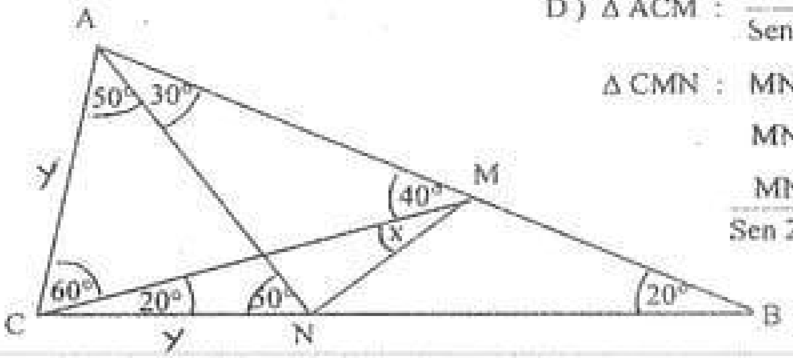
$12^2\, AC = 10^2 \cdot AC/2 + 15^2 \cdot AC/2 - AC \cdot AC/2 \cdot AC/2$

$\therefore AC = 8{,}6$ u.

Ley Cosenos :

$12^2 = 10^2 + 4.3^2 - 2 \cdot 10 \cdot 4.3 \cdot \text{Cos } A \quad \therefore \quad \hat{A} = 107{,}6°$

35.



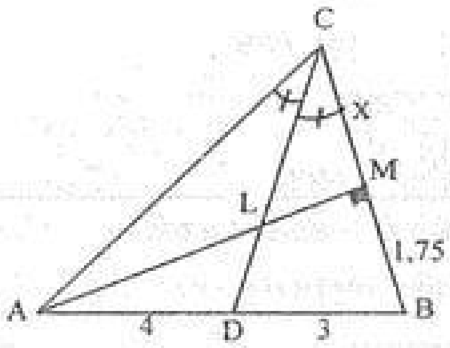
D) $\Delta\, ACM$: $\dfrac{CM}{\text{Sen } 80°} = \dfrac{y}{\text{Sen } 40°}$ $\quad \therefore \quad CM = 1{,}53\ y$

$\Delta\, CMN$: $MN^2 = y^2 + CM^2 - 2 \times y \times CM \times \text{Cos } 20°$

$MN = 0{,}6\ y$

$\dfrac{MN}{\text{Sen } 20°} = \dfrac{y}{\text{Sen } x}$ $\quad \therefore \quad \widehat{x} = 29{,}9°$

45.



D) $AM = \sqrt{7^2 - 1{,}75^2} = 6{,}77 = \sqrt{AC^2 - x^2}$

$\dfrac{4}{3} = \dfrac{AC}{1{,}75 + x}$ $\quad \therefore \quad x = 4{,}25$ u.

$AC = 8$ u. y $AM = 6{,}77$ u.

$CD^2 \times 7 = 4 \times 6^2 + 3 \times 8^2 - 4 \times 3 \times 7$

$CD = 6$ u.

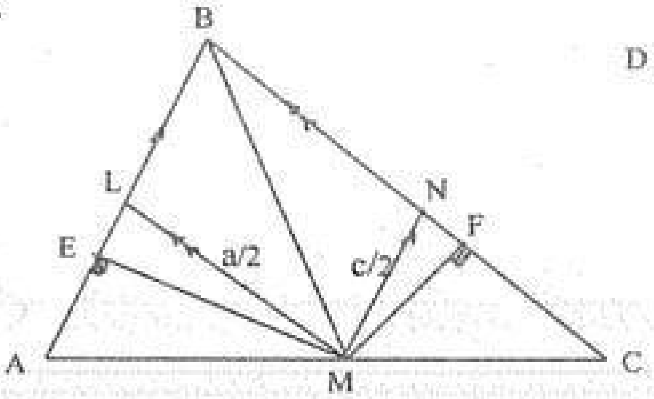
$LM \times 4 \times 6 = (6{,}77 - LM) \times 3 \times 4{,}25$

$\Rightarrow$ $LM = 2{,}35$ u.

$CL = \sqrt{x^2 + LM^2} = 4{,}86$ u.

$\Rightarrow$ $LD = CD - CL = 1{,}14$ u.

52.



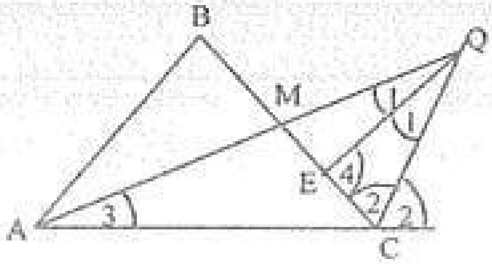
D) L Punto Medio de $\overline{AB}$

N Punto Medio de $\overline{BC}$

$\Delta\, EML \approx \Delta\, FMN$

$\therefore \quad \dfrac{c}{a} = \dfrac{MF}{ME}$

55.



D) $\Delta\, ABC : 24^2 = 28^2 + 31^2 - 2 \times 28 \times 31 \times \text{Cos C}$ $\quad \therefore \quad \widehat{C} = 48°$

$\Delta\, AMC : AM^2 = 31^2 + 14^2 - 2 \times 31 \times 14 \times \text{Cos } 48°$ $\quad \therefore \quad AM = 24$ u.

$14^2 = 24^2 + 31^2 - 2 \times 24 \times 31 \times \text{Cos } \widehat{3}$ $\quad \therefore \quad \widehat{3} = 26°$

$C + 2\,\widehat{2} = 180°$ $\quad \therefore \quad \widehat{2} = 66°$

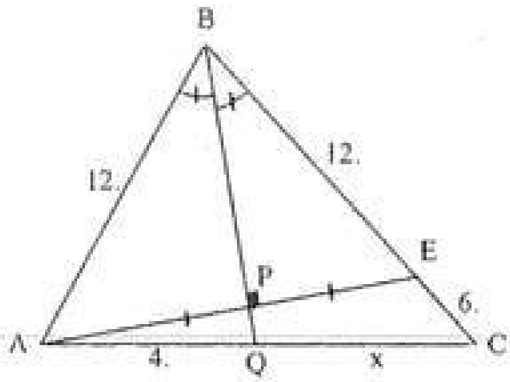
$\widehat{3} + \widehat{C} + \widehat{2} + 2\,\widehat{1} = 180°$ $\quad \therefore \quad \widehat{1} = 20°$

$\widehat{4} + \widehat{2} + \widehat{1} = 180°$ $\quad \therefore \quad \widehat{4} = 94°$

$\dfrac{QC}{\text{Sen } 26°} = \dfrac{31}{\text{Sen } 40°}$ $\quad \therefore \quad QC = 21{,}24$ u.

$\dfrac{EQ}{\text{Sen } 66°} = \dfrac{21{,}14}{\text{Sen } 94°}$ $\quad \therefore \quad EQ = 19{,}3$ u.

58.



D) $\frac{x}{4} = \frac{18}{12}$ $\therefore$ x = 6 u.

$BQ^2 \times 10 = 4 \times 18^2 + 6 \times 12^2 - 4 \times 6 \times 10$

$\therefore$ BQ = 13,85 u.

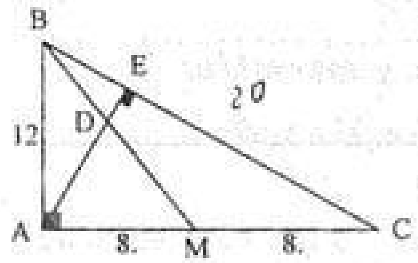
PQ x 12 x 10 = (BQ – PQ) x 6 x 4

$\therefore$ PQ = 2,3 u.

PB = 13,85 – 2,3 = 11,54 u.

PA = PE = $\sqrt{12^2 - PB^2}$ = 3,29 u.

61.



D) BC = $\sqrt{16^2 + 12^2}$ = 20u.

AE x 20 = 16 x 12 $\therefore$ AE = 9,6 u.

BM = $\sqrt{12^2 - 8^2}$ = 8,9 u.

EC = $\sqrt{AC^2 - AE^2}$ = 12,8 u.

Δ BMC : DM x BE x AC = BD x EC x AM

DM x 7,2 x 16 = (8,9 – DM) x 12,8 x 8

$\therefore$ DM = 4,18 u.

Δ AEC : DE x AM x BC = AD x MC x BE

DE x 8 x 20 = (9,6 – DE) x 8 x 7,2

$\Rightarrow$ DE = 2,54 u.

4.5.12. ÁREA DE UN TRIÁNGULO

La palabra área se emplea de dos modos diferentes. Área puede significar una región, por ejemplo: un parque, un terreno, etc. o, es el número asociado a la medida de una región triangular.

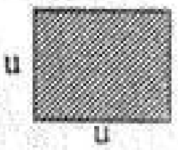
4.5.12.1 REGIÓN TRIANGULAR

Es la unión de un triángulo y su interior.

TRIÁNGULO REGIÓN TRIANGULAR

4.5.12.2 UNIDAD DE ÁREA

Es la región determinada por un cuadrado, que tiene por lado la unidad de longitud.



4.5.12.3 ÁREA DE UNA REGIÓN TRIANGULAR

Es un número que expresa cuantas veces está contenida la unidad de área en la región triangular.

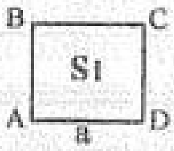
La longitud de un segmento puede medirse directamente usando una regla o una cinta métrica; la medida de un ángulo se obtiene con un graduador o transportador, pero el área de una región triangular no puede medirse, porque en la mayoría de los casos es inexacta, razón por la cual el área de una región se calcula mediante una fórmula.

Con el objetivo de acortar su nombre, se usará área del triángulo como equivalente al área de una región triangular.

4.5.12.4. POSTULADOS

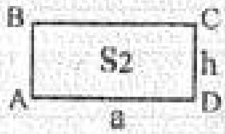
1. Si dos triángulos son congruentes, tienen áreas iguales.
2. Si dos triángulos tienen áreas iguales, son equivalentes.
3. El área de un triángulo es igual a la suma de las áreas de los triángulos en que se pueda descomponer.
4. El área de un cuadrado es igual al cuadrado de su lado.

$$A_{ABCD} = A_1 = a^2$$



5. El área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura.

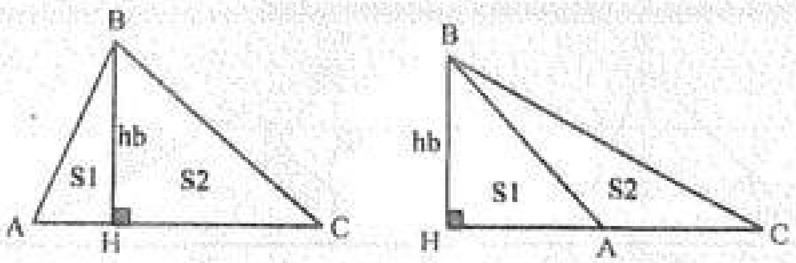
$$A_{ABCD} = A_2 = a \times h$$



4.5.12.5. TEOREMAS

1. El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de su base por su altura correspondiente.

T) $A \Delta ABC = \frac{AC \times hb}{2}$

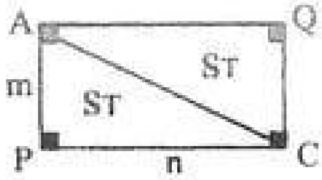


D) APCQ Rectángulo

$A \square APCQ = 2\,A_T$

$m \times n = 2\,A_T$

$A_T = A\,\Delta\,APC = \dfrac{m \times n}{2}$



$$A\,\Delta\,ABC = \frac{HC \times hb}{2} \pm \frac{HA \times hb}{2} \quad \Rightarrow \quad A\,\Delta\,ABC = \frac{AC \times hb}{2}$$

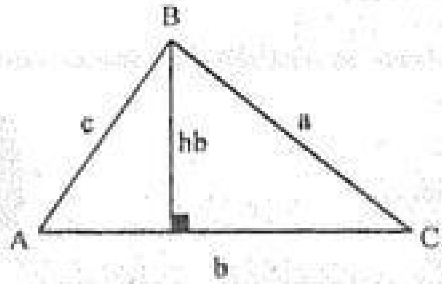
2. El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de dos lados por el seno del ángulo formado por éstos lados.

T) $A\ \Delta\,ABC = \dfrac{b \times c \times \text{Sen } A}{2}$

D) $\text{Sen } A = \dfrac{hb}{c}$

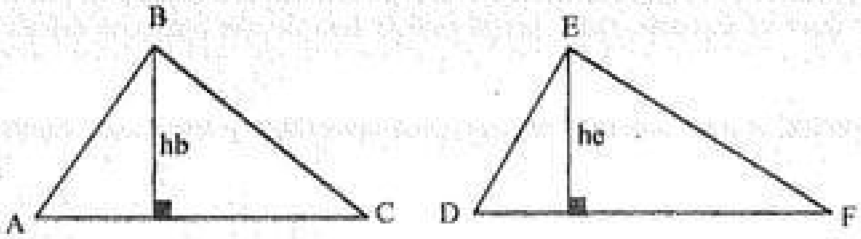
$A\,\Delta\,ABC = \dfrac{b \times hb}{2}$

$\therefore\ A\ \Delta\,ABC = \dfrac{b \times c \times \text{Sen } A}{2}$



4.5.12.6. RELACIONES ENTRE ÁREAS DE TRIÁNGULOS

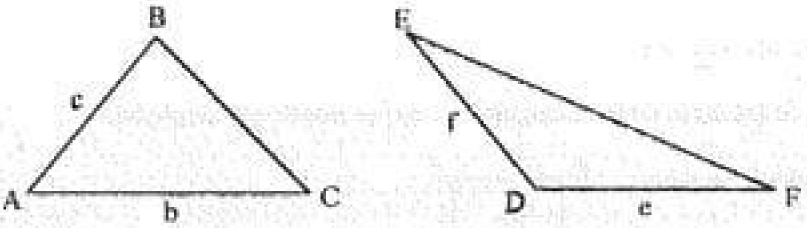
1. Si tienen un lado respectivamente congruente.



Si : $AC = DF$

$\therefore\ \dfrac{A\,\Delta\,ABC}{A\,\Delta\,DEF} = \dfrac{hb}{he}$

2. Si tienen dos lados respectivamente congruentes.

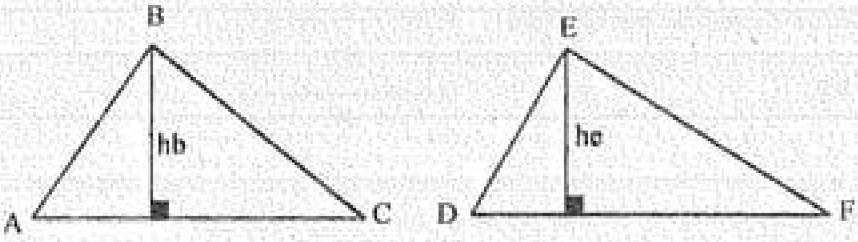


Si : $b = e$
$c = f$

$\therefore\ \dfrac{A\,\Delta\,ABC}{A\,\Delta\,DEF} = \dfrac{\text{Sen } A}{\text{Sen } D}$

3. Si tienen tres lados respectivamente congruentes, son equivalentes. $A_1 = A_2$

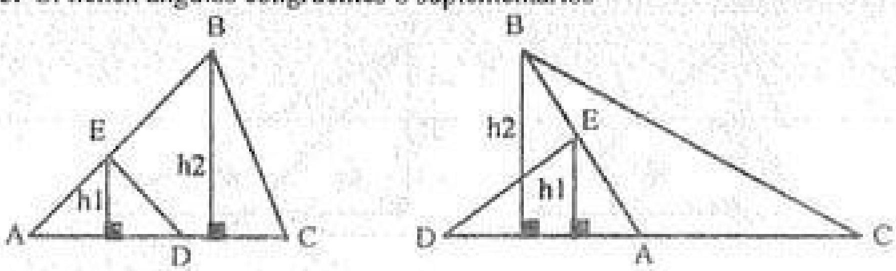
4. Si tienen una altura respectivamente congruente.



Si : $hb = he$

$\therefore\ \dfrac{A\,\Delta\,ABC}{A\,\Delta\,DEF} = \dfrac{AC}{DF}$

5. Si tienen ángulos congruentes o suplementarios



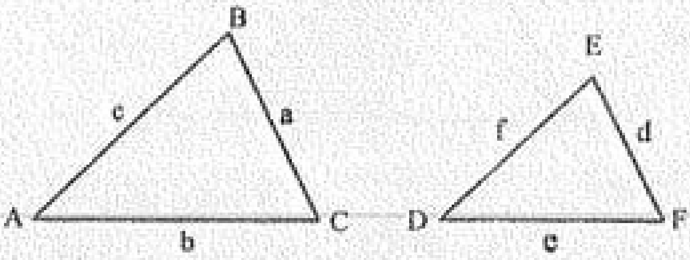
Si : $\widehat{BAC} = \widehat{EAD}$

o $\widehat{BAC} + \widehat{EAD} = 180°$

$\therefore\ \dfrac{h2}{h1} = \dfrac{AB}{AE}$

$$y \quad \frac{A\,\Delta\,ABC}{A\,\Delta\,ADE} = \frac{AC \times h2}{AD \times h1} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{A\,\Delta\,ABC}{A\,\Delta\,AED} = \frac{AC \times AB}{AE \times AD}$$

6. Si tienen dos ángulos respectivamente congruentes.



Si : $A = D$

$B = E$

$\therefore\ \Delta\,ABC \approx \Delta\,DEF$

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$$

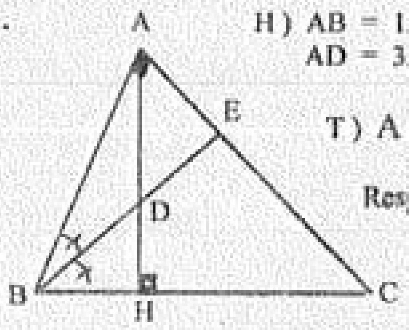
$$\Rightarrow \quad \frac{A\,\Delta\,ABC}{A\,\Delta\,DEF} = \frac{b \times c}{f \times e} = \frac{a^2}{d^2} = \frac{b^2}{e^2} = \ldots\ldots$$

4.5.13. EJERCICIOS

1. H) $AB = 15$ u.
$AD = 3{,}75$ u.

T) $A\,\Delta\,BDH = ?$

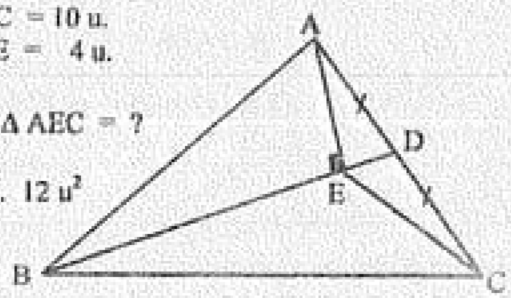
Resp. $21{,}9\ u^2$



2. H) $AC = 10$ u.
$AE = 4$ u.

T) $A\,\Delta\,AEC = ?$

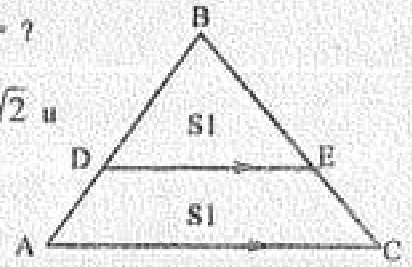
Resp. $12\ u^2$



3. H) $DE = 4$ u.

T) $AC = ?$

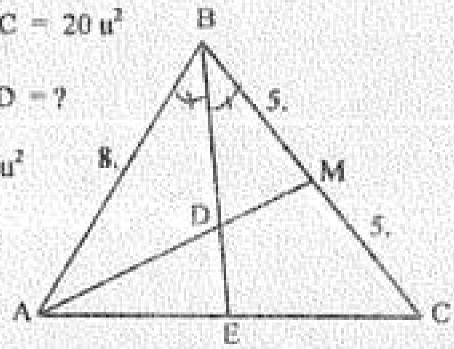
Resp. $4\sqrt{2}$ u



4. H) $A\,\Delta\,ABC = 20\ u^2$

T) $A\,\Delta\,ABD = ?$

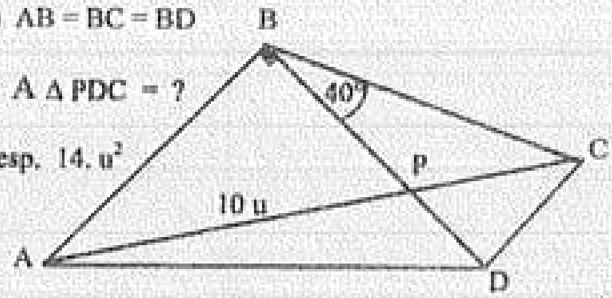
Resp. $6.14\ u^2$



5.
H) $AB = BC = BD$

T) $A\,\Delta\,PDC = ?$

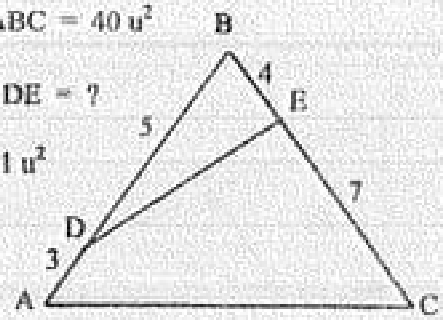
Resp. $14.\ u^2$



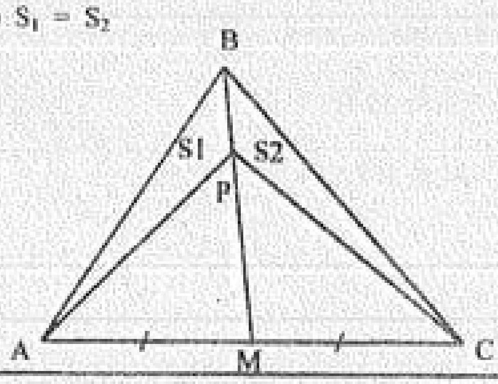
6.
H) $A\,\Delta\,ABC = 40\ u^2$

T) $A\,\Delta\,BDE = ?$

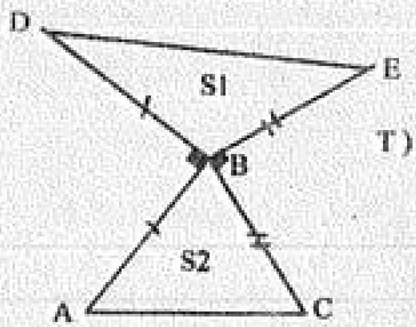
Resp. $9.1\ u^2$



7. T) $S_1 = S_2$



8.

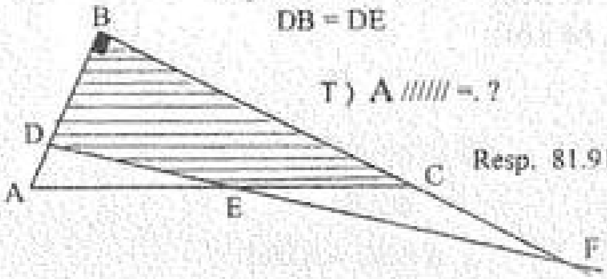


T) $S_1 = S_2$

9. H) AE = EC = CF = 10 m.
DB = DE

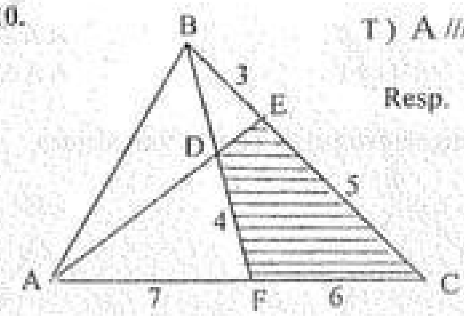
T) A ////// =. ?

Resp. 81.91 m²



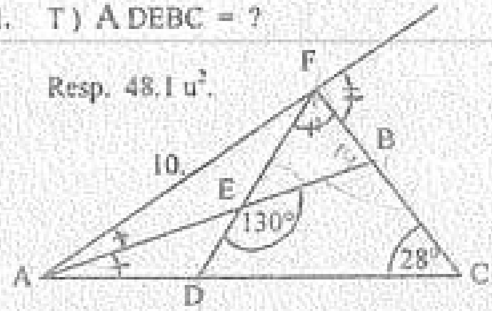
10. T) A ////// =. ?

Resp. 18.38 u².



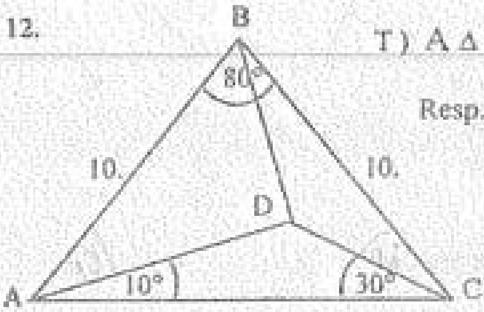
11. T) A DEBC = ?

Resp. 48.1 u².



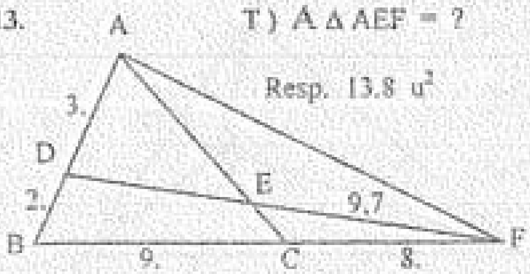
12. T) A △ BDC = ?

Resp. 5,94 u²



13. T) A △ AEF = ?

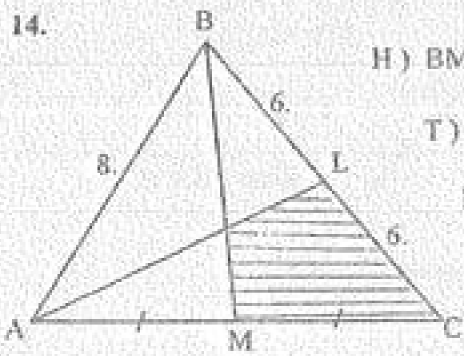
Resp. 13.8 u²



14. H) BM = 9 m.

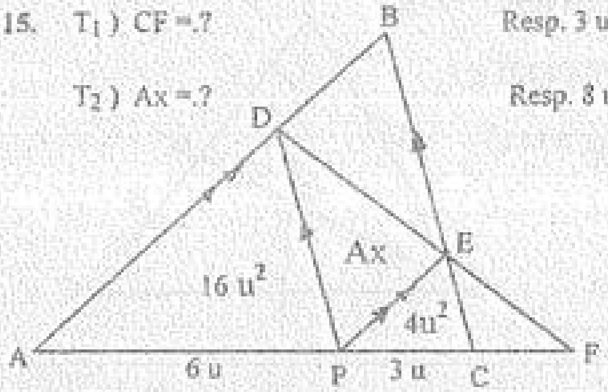
T) A ////// =. ?

Resp. 12.76 m²



15. T₁) CF =.? Resp. 3 u

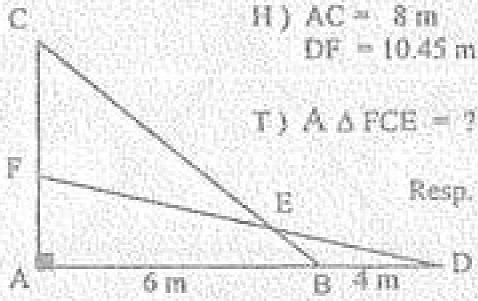
T₂) Ax =.? Resp. 8 u²



16. H) AC = 8 m
DF = 10.45 m

T) A △ FCE = ?

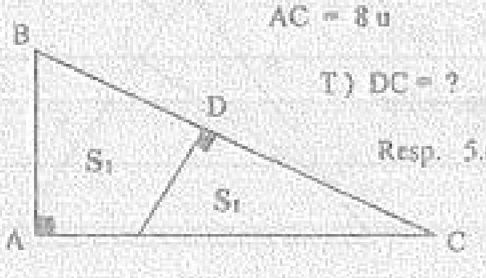
Resp. 12. m²



17. H) AB = 6 u
AC = 8 u

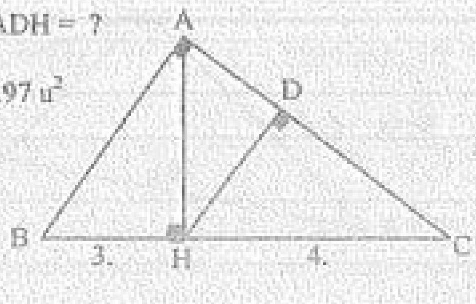
T) DC = ?

Resp. 5.66 u



18. T) A △ ADH = ?

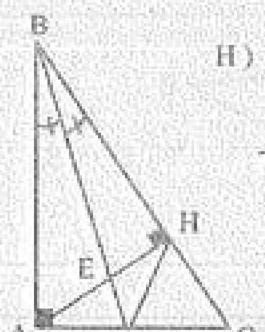
Resp. 2.97 u²



19. H) AB = 8 m
AC = 6 m

T) A △ EDH = ?

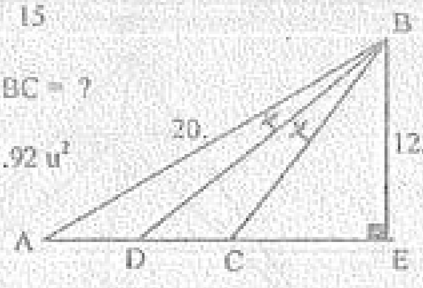
Resp. 1.73 m²



20. H) BD = 15

T) A △ ABC = ?

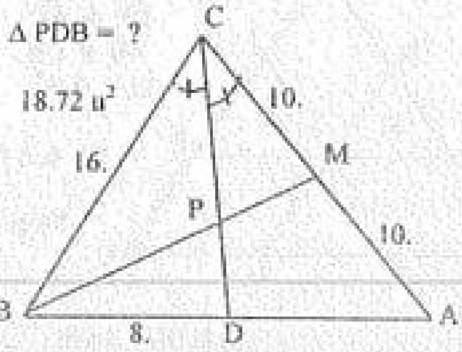
Resp. 119.92 u²



21. En un Δ ABC: AB = 20 u.; BC = 21 u. y la mediana BM = 14,5 u. Si la bisectriz del ángulo $\hat{A}$ corta a la mediana $\overline{BM}$ en E y al lado $\overline{BC}$ en F, hallar el área del cuadrilátero MEFC. Resp. 147 u²

22. T) A Δ PDB = ?

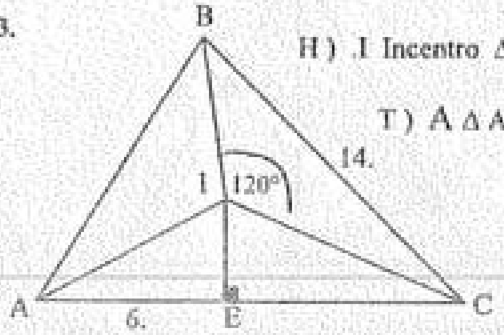
Resp. 18.72 u²



23. H) .I Incentro Δ ABC

T) A Δ ABI = ?

Resp. 24 u²

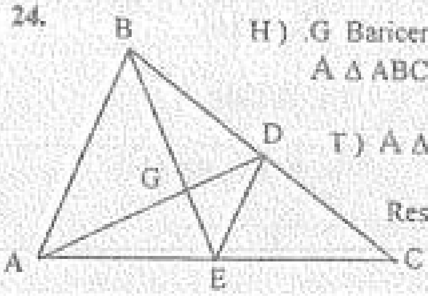


24. H) .G Baricentro Δ ABC

A Δ ABC = 40 u²

T) A Δ GDE = ?

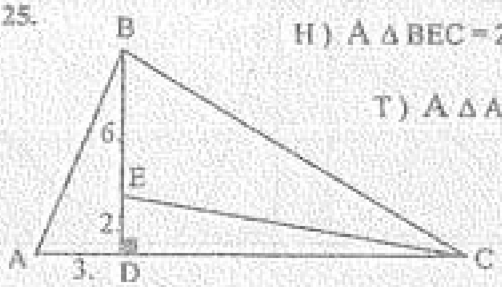
Resp. 3.33 u²



25. H) A Δ BEC = 27 u²

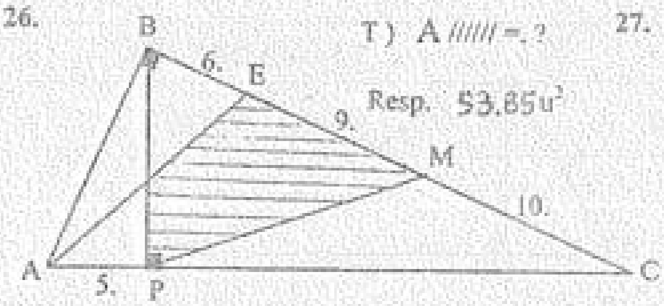
T) A Δ ABC = ?

Resp. 48 u²



26. T) A ////// = ?

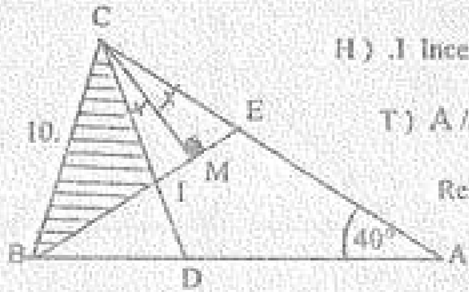
Resp. 53,85 u²



27. H) .I Incentro Δ ABC

T) A ////// = ?

Resp. 17.1 u²



28. La mediana de un triángulo rectángulo es igual a 10 u. y divide al ángulo recto en razón 1: 2. Hallar el área del triángulo. Resp. 86.60 u²

29. Calcular el área de un triángulo rectángulo isósceles cuyo perímetro es de 25 m. Resp. 26,87 m².

30. Hallar la superficie de un triángulo rectángulo, dados su perímetro 40 u. y su altura 10 u. Resp. 80 u²

31. En un Δ ABC: a = 16 u., b = 24 u. y la mediana m_c = 18 u. Si las medianas $\overline{AL}$ y $\overline{CM}$ se cortan en G, hallar el área del cuadrilátero BLGM. Resp. 50,98 u²

32. En un Δ ABC: $\hat{A}$ = 90°, GO = 4 u. y GC = 14 u. Siendo G su Baricentro y O su Circuncentro. Calcular el área del triángulo BGC. Resp. 44,5 u²

33. Construir el Δ ABC conocidos: AC = 14 m., h_a = AP = 6 m. y h_c = CQ = 7 m. Calcular el área del cuadrilátero APQC. Resp. 63,04 u²

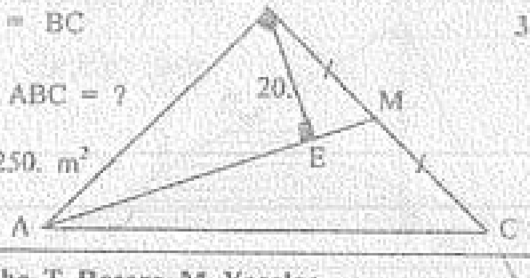
34. La superficie de un triángulo es: $S = a^2 - (b - c)^2$. Hallar el ∢A. Resp. 28°

35. En un triángulo rectángulo ABC: ∢A = 90° Se traza la altura $\overline{AH}$ y la bisectriz $\overline{CD}$, las cuales se cortan en P. Si P dista 15 m. del cateto $\overline{AC}$ y D dista 20 m. de la hipotenusa $\overline{BC}$, si el área del triángulo ABC es 1118 u². Hallar $\overline{AC}$. Resp. 52,36 u

36. H) AB = BC

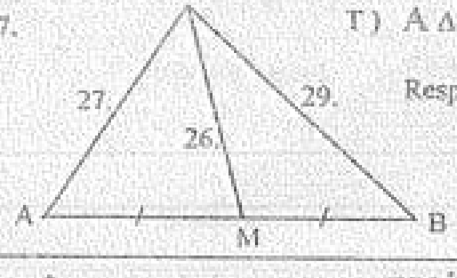
T) A Δ ABC = ?

Resp. 250. m²



37. T) A Δ ABC = ?

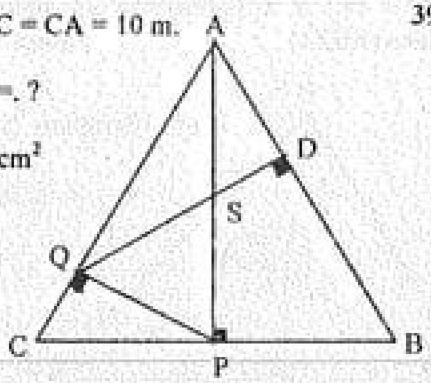
Resp. 270. m²



38. H) AB = BC = CA = 10 m.

T) A PQS =. ?

Resp. 8.12 cm²



39. H) G Baricentro Δ ABC

$\overline{FL} \parallel \overline{AB}$

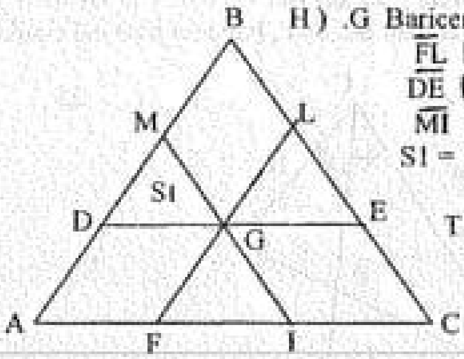
$\overline{DE} \parallel \overline{AC}$

$\overline{MI} \parallel \overline{CB}$

S1 = 9 m²

T) A Δ ABC = ?

Resp. 81. u²



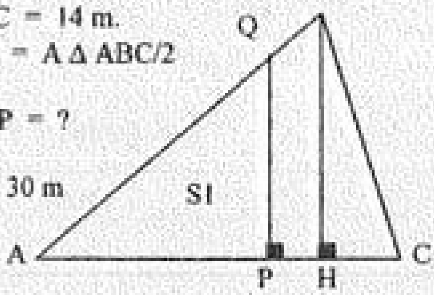
40. H) AH = 36 m..

HC = 14 m.

S_1 = A Δ ABC/2

T) AP = ?

Resp. 30 m



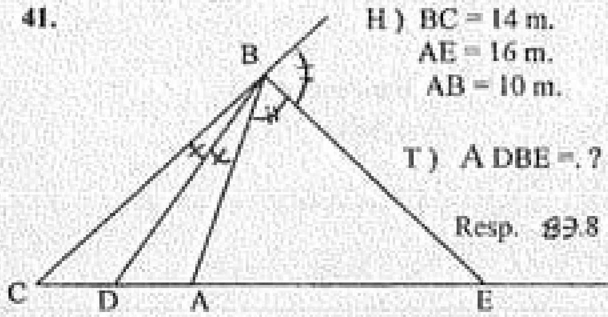
41. H) BC = 14 m.

AE = 16 m.

AB = 10 m.

T) A DBE =. ?

Resp. 89.8 m²



42. H) AB = BC

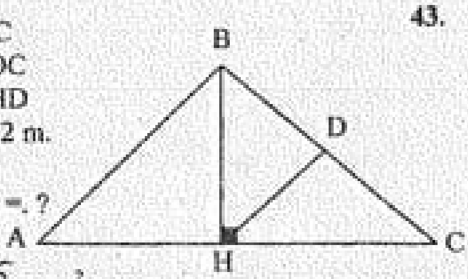
BD = DC

BH = HD

AC = 12 m.

T) A ABC =. ?

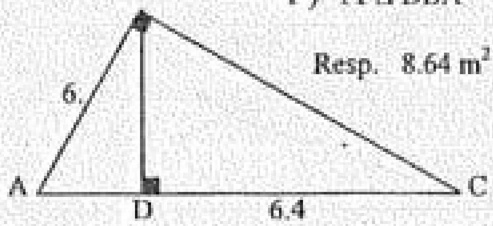
Resp. $12\sqrt{3}$ cm²



43.

T) A Δ DBA = ?

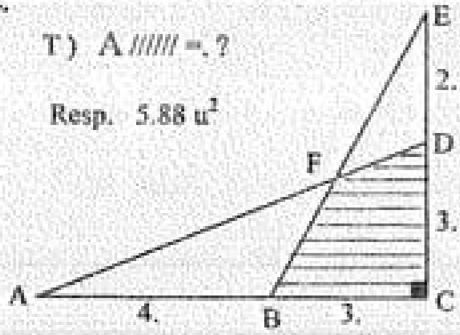
Resp. 8.64 m²



44.

T) A ////// =. ?

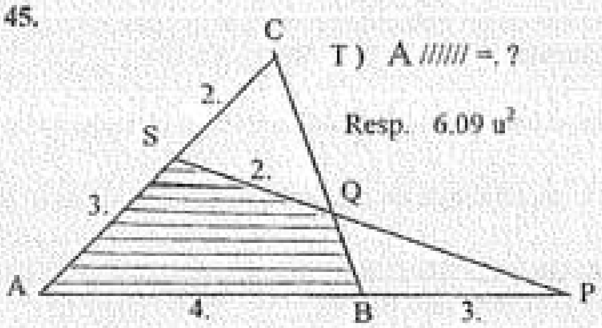
Resp. 5.88 u²



45.

T) A ////// =. ?

Resp. 6.09 u²



46. H) AD = 4.36 m

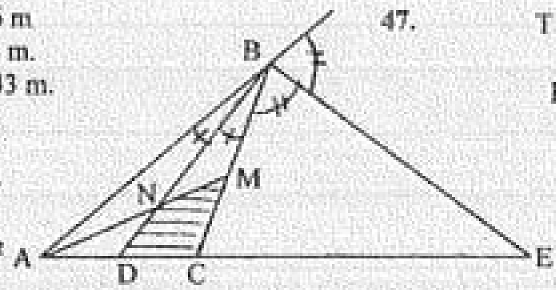
DC = 3.64 m.

BE = 42.43 m.

BM = MC

T) A ////// =. ?

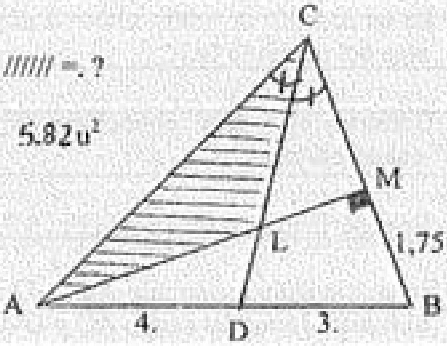
Resp. 14.16 u²



47.

T) A ////// =. ?

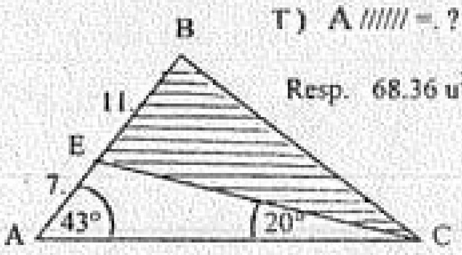
Resp. 5.82 u²



48.

T) A ////// =. ?

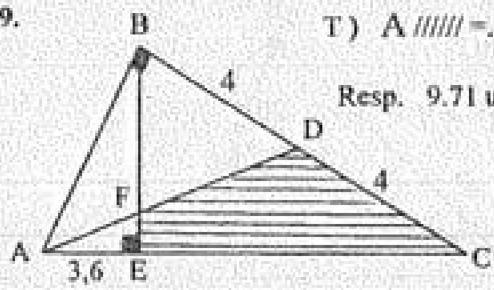
Resp. 68.36 u²



49.

T) A ////// =. ?

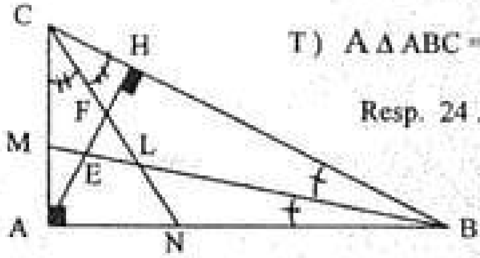
Resp. 9.71 u²



50. H) BC = 10 m.
EF = 1/3 m

T) A Δ ABC = ?

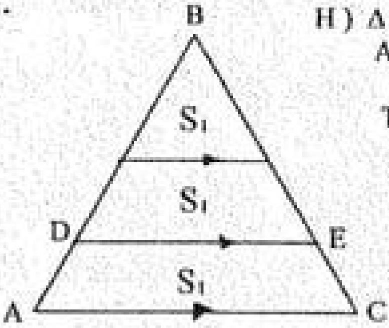
Resp. 24 m²



51. H) Δ ABC Equilátero
AC = 12 u.

T) DE = ?

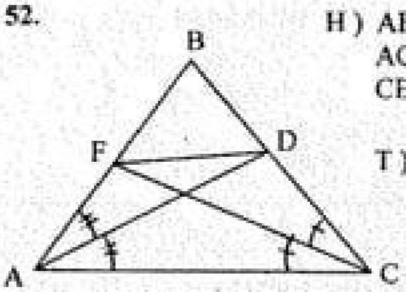
Resp. $4\sqrt{6}$ u.



52. H) AB = 21 m.
AC = 28 m.
CB = 20 m.

T) A Δ AFD = ?

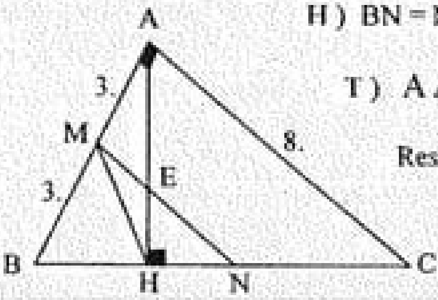
Resp. 52.3 m²



53. H) BN = NC

T) A Δ MHN = ?

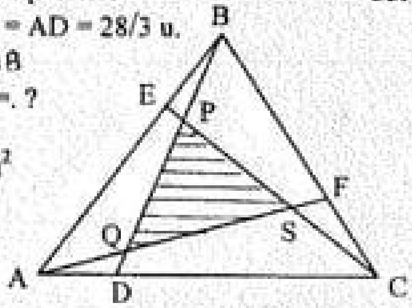
Resp. 1.68 m²



54. H) Δ ABC Equilátero
BE = CF = AD = 28/3 u.
AE = $\frac{2}{3}$ AB

T) A ////// = ?

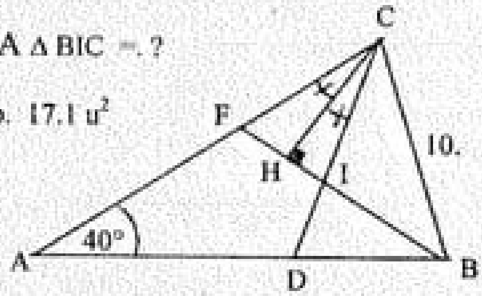
Resp. 46.9 u²



55. H) I Incentro Δ ABC

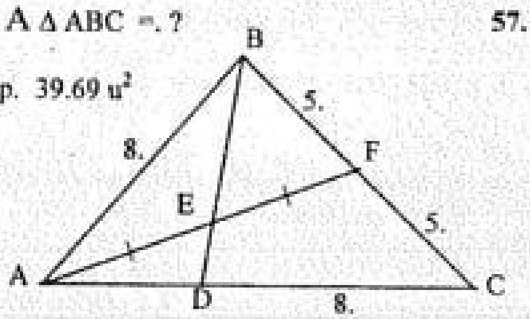
T) A Δ BIC = ?

Resp. 17.1 u²



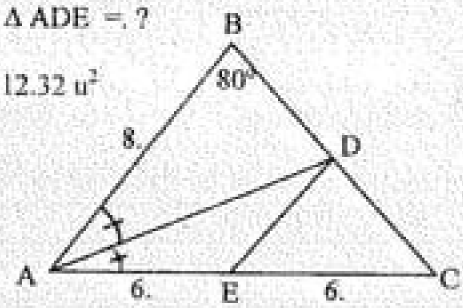
56. T) A Δ ABC = ?

Resp. 39.69 u²



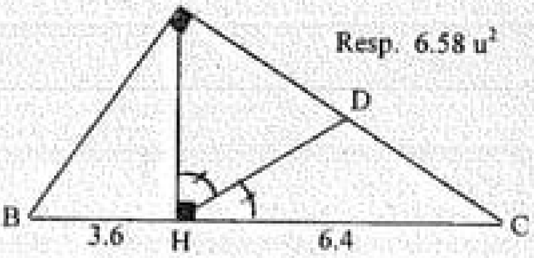
57. T) A Δ ADE = ?

Resp. 12.32 u²



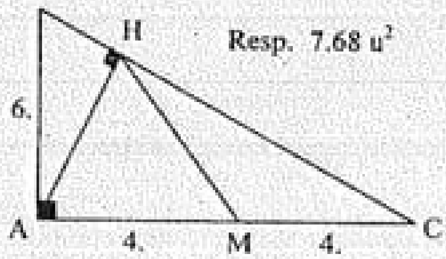
58. T) A Δ AHD = ?

Resp. 6.58 u²



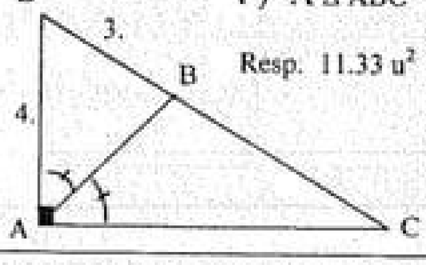
59. T) A Δ HMC = ?

Resp. 7.68 u²



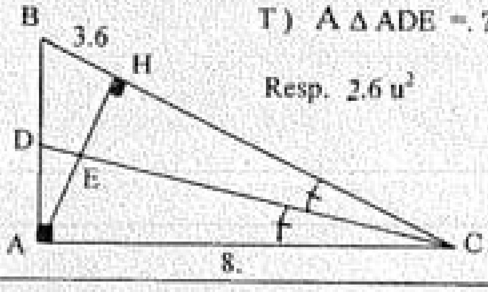
60. T) A Δ ABC = ?

Resp. 11.33 u²

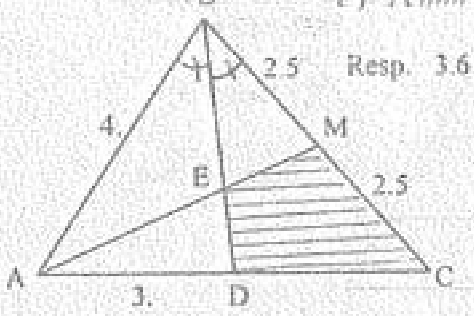


61. T) A Δ ADE = ?

Resp. 2.6 u²



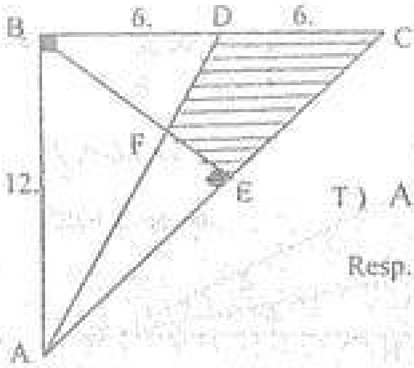
62.



T) A ////// = ?

Resp. 3.61 u^2

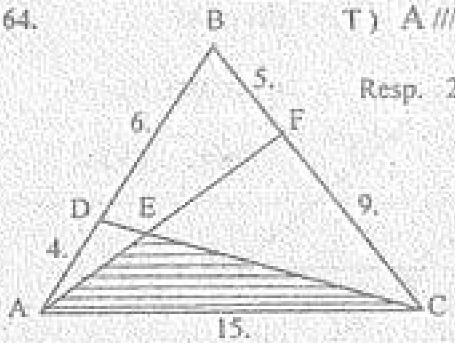
63.



T) A ////// = ?

Resp. 24 u^2

64.

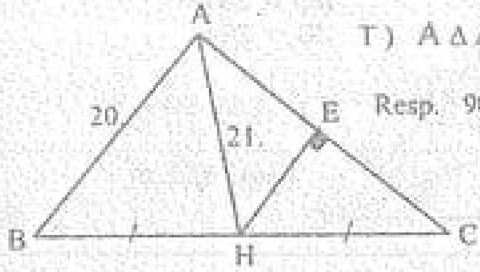


T) A ////// = ?

Resp. 22.14 u^2

65.

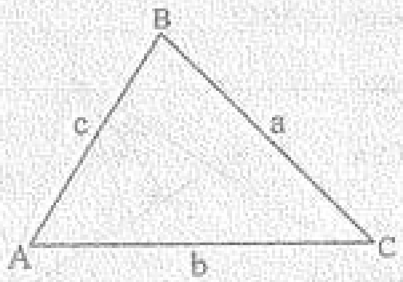
H) BC = 34



T) A Δ AEM = ?

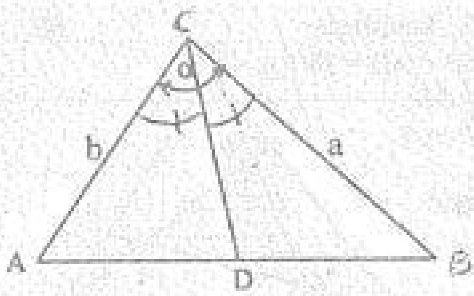
Resp. 90.53 u^2

66.



T) $A_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2 \times \text{Sen } B \times \text{Sen } C}{2 \text{ Sen } A}$

67.

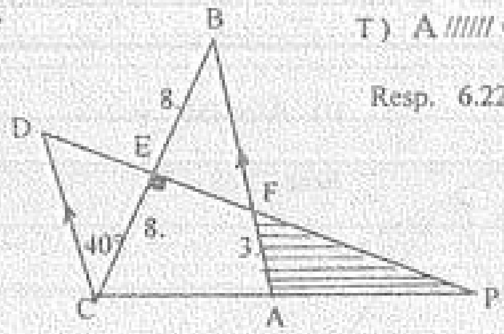


T) $BD = \dfrac{2\, a \times b \times \text{Cos } \alpha/2}{(a+b)^2}$

68. Los lados de un Δ ABC son: b = 36 u., c = 25 u. y es equivalente a un triángulo equilátero de lado 30 u. Hallar el lado a. Resp. 31.95 u.

69. Hallar el área de un triángulo rectángulo, sabiendo que las proyecciones de los catetos en la bisectriz del ángulo recto miden 58 u. y 62 u. respectivamente. Resp. 3595,76u^2

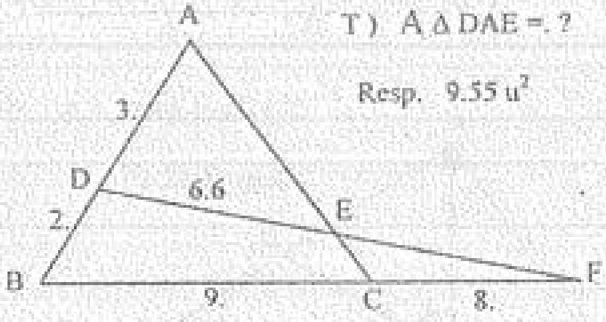
70.



T) A ////// = ?

Resp. 6.22 u^2

71.



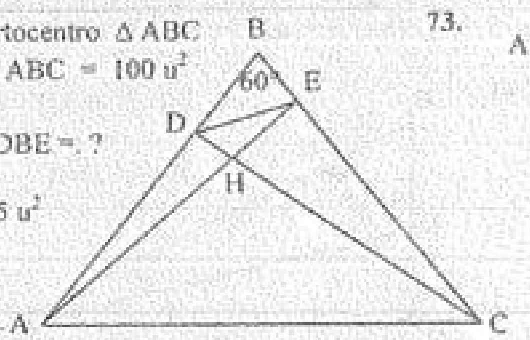
T) A Δ DAE = ?

Resp. 9.55 u^2

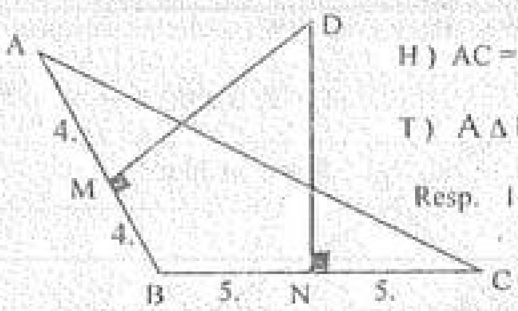
72. H) .H Ortocentro Δ ABC
A Δ ABC = 100 u^2

T) A Δ DBE = ?

Resp. 25 u^2



73.



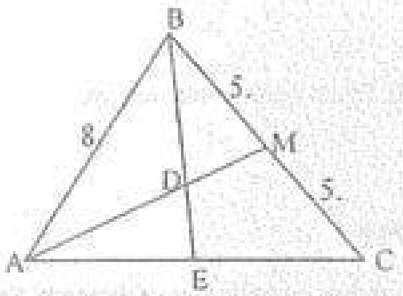
H) AC = 16

T) A Δ DFG = ?

Resp. 16.5 u^2

4.5.13.1. EJERCICIOS RESUELTOS

4.



D) $20\,u^2 = \dfrac{80\ \text{Sen B}}{2}$ $\quad \therefore \hat{B} = 30°$

$AM^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \times 8 \times 5 \times \text{Cos } 30°$

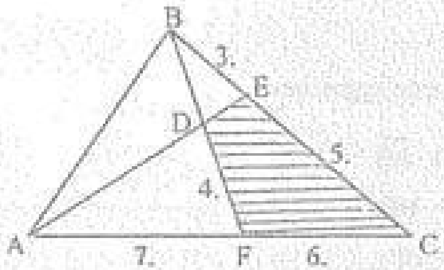
$\therefore AM = 4{,}44$ u.

$\dfrac{AD}{4{,}44 - AD} = \dfrac{8}{5}$ $\quad \therefore AD = 2{,}73$ u.

$DM = 1{,}71$ u.

$\dfrac{A\ ////}{A\,\Delta\, ABM} = \dfrac{2{,}73}{4{,}44}$ $\Rightarrow A\ //// = 6{,}14\ u^2$

10.



D) $BD \times 5 \times 7 = 4 \times 3 \times 13$

$\therefore BD = 4{,}45$ u

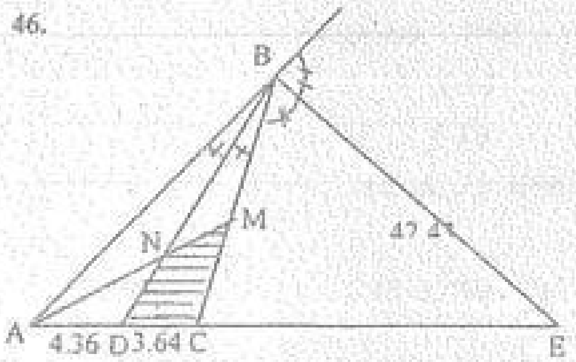
$A\,\Delta\, FBC = 22{,}94\ u^2$

$\dfrac{A\,\Delta\, DBE}{A\,\Delta\, FBC} = \dfrac{3 \times 4{,}45}{8 \times 8{,}4}$

$\therefore A\,\Delta\, DBE = 4{,}56\ u^2$

$A\ ///// = 22{,}94 - 4{,}56 = 18{,}38\ u^2$

46.



D) Idem Ejercicio # 2 de 4.12.2.7.1

$CE = 40{,}44$ u.

$BD = 11{,}18$ u.

$BN \times MC \times AD = ND \times BM \times AC$

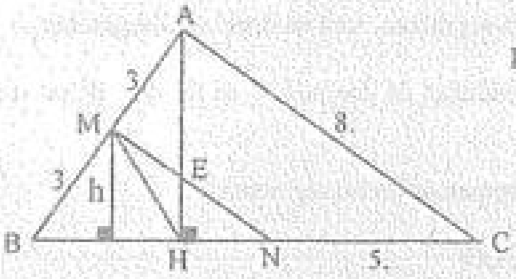
$\therefore \dfrac{BN}{ND} = \dfrac{8}{4{,}36}$ y $\dfrac{BN}{BD} = \dfrac{8}{12{,}36}$

$\dfrac{A\,\Delta\, DBC}{A\,\Delta\, DBE} = \dfrac{3{,}64}{44{,}08}$ $\Rightarrow A\,\Delta\, DBC = 19{,}6\ u^2$

$\dfrac{A\,\Delta\, NBM}{A\,\Delta\, DBC} = \dfrac{BN \times BM}{BD \times BC}$ $\Rightarrow A\,\Delta\, NBM = 6{,}34\ u^2$

$\therefore A\ ///// = 19{,}6 - 6{,}34 = 13{,}01 u^2$

53.



D) $BC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ u.

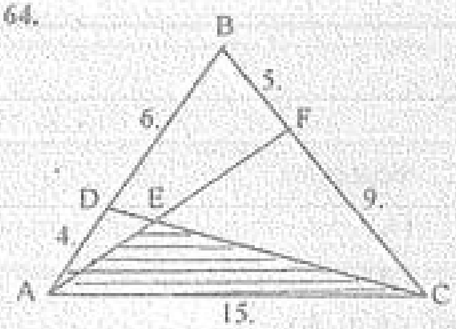
$AH \times 10 = 8 \times 6$ $\quad \therefore AH = 4{,}8$ u.

$AH^2 = BH \times (10 - BH)$ $\quad \therefore BH = 3{,}6$ u.

$HN = 5 - 3{,}6 = 1{,}4$ u.

$\therefore A\,\Delta\, MHN = (HN/2) \times (AH/2) = 1{,}68\ u^2$

64.



D) $15^2 = 14^2 + 10^2 - 2*10*14\ \text{Cos B}$

$\therefore \hat{B} = 75{,}31°$

$DC^2 = 14^2 + 6^2 - 2 \times 6 \times 14\ \text{Cos}75{,}31°$

$\therefore DC = 13{,}76$ u.

$DE \times 10 \times 9 = (13{,}76 - DE) \times 4 \times 5$

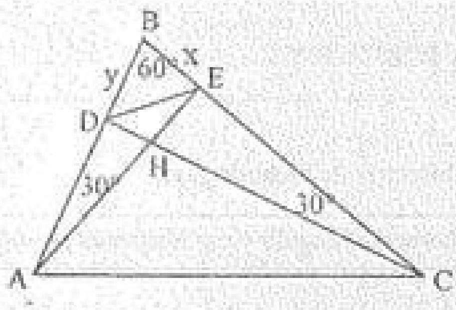
$\therefore DE = 2{,}5$ u. y $EC = 11{,}26$ u.

$A\ ABC = 70\ u^2$

$A\,\Delta\, ADC = (4/10) \times 70 = 28\ u^2$

$\Rightarrow A\ //// = (11{,}26/13{,}76) \times 28 = 22{,}14\ u^2$

72.



D) $\dfrac{A\,\Delta\, DBE}{A\,\Delta\, ABC} = \dfrac{x \times y}{AB \times BC}$

$\text{Cos}\,60° = \dfrac{x}{AB} = \dfrac{y}{BC} = \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{A\,\Delta\, DBE}{A\,\Delta\, ABC} = \dfrac{x \times y}{2x \times 2y}$

$\therefore A\,\Delta\, DBE = 25\ u^2$

4.5.14. LUGARES GEOMETRICOS BÁSICOS

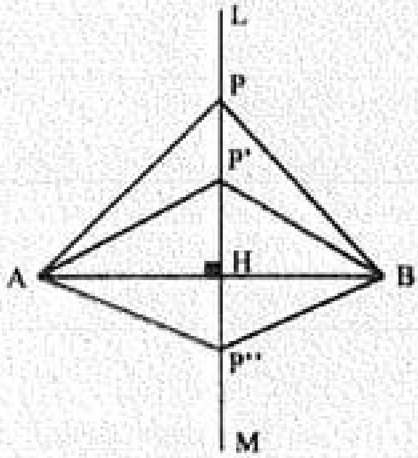
4.5.14.1. DEFINICIÓN

Se llama lugar geométrico de los puntos que gozan de cierta propiedad, a la figura geométrica tal que:

1. Todos los puntos gozan de esa propiedad.
2. Todos los puntos que gozan de esa propiedad pertenecen a la figura.
3. Todos los puntos que no sean elementos del lugar geométrico no deben cumplir las condiciones dadas.

4.5.14.2. PROPIEDAD DE LA MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO

Todo punto de la mediatriz de un segmento equidista de los extremos de este segmento.



H) $\overleftrightarrow{LM} \perp \overline{AB}$

$AH = HB$

T) $AP = BP$

D) Δ APH $\wedge$ Δ BPH rectángulos

$AH = HB$ (L)

$HP = HP$ (L)

$\therefore \Delta APH \cong \Delta BPH$ (L .A. L.)

$\Rightarrow AP = BP$

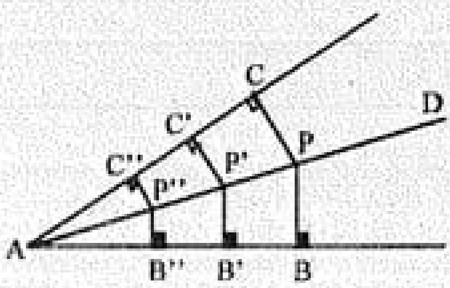
idem. $AP' = BP'$ y $AP'' = BP''$

COROLARIOS.

1. Todo punto que equidista de los extremos de un segmento, pertenece a la mediatriz de dicho segmento.
2. Si una recta tiene dos puntos equidistantes de los extremos de un segmento, será mediatriz del segmento.
3. Si dos rectas se cortan de manera que dos puntos de la una equidistan de dos puntos de la otra, dichas rectas son perpendiculares entre si.
4. La mediatriz de un segmento, es el lugar geométrico de los extremos de dicho segmento.

4.5.14.3. PROPIEDAD DE LA BISECTRIZ DE UN ÁNGULO

Todo punto de la bisectriz de un ángulo equidista de los lados del ángulo.



H) AD Bisectriz del A

T) $PB = PC$

D) $\Delta APB \wedge \Delta APC$ rectángulos

$AP = AP$ (L)

$BAP = CAP$ (A)

$\therefore \Delta APB \cong \Delta APC$ (A. L. A.)

$\Rightarrow PB = PC$

idem $P'B' = P'C'$ y $P''B'' = P''C''$

COROLARIOS

1. Todo punto equidistante de los lados de un ángulo, pertenece a la bisectriz de dicho ángulo.
2. La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos internos al ángulo y equidistantes de los lados del ángulo.

UNIDAD 5

5. EL CÍRCULO

5.1. DEFINICIONES BÁSICAS

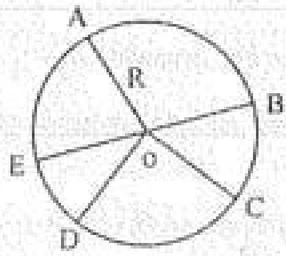
5.1.1. CIRCUNFERENCIA

Es el lugar geométrico de los puntos de un plano que se encuentran a la misma distancia R del centro O; la longitud constante R se llama radio.

5.1.2. CÍRCULO

Es el conjunto de todos los puntos de la circunferencia y de los puntos internos a la misma.

Una circunferencia y un círculo se representan por su centro y su radio.



$\odot(o, R)$

· O centro

$OA = OB = OC = OD = \cdots = R$

5.2. LINEAS Y PUNTOS FUNDAMENTALES

5.2.1. CUERDA

Es el segmento cuyos extremos son puntos de la circunferencia. Cuerda $\overline{AB}$

5.2.2. DIÁMETRO

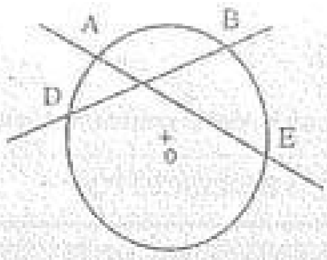
Es la cuerda que contiene el centro del círculo, es la mayor de las cuerdas e igual al doble del radio.

Diámetro BE = 2R

5.2.3. SECANTE

Es una recta que corta a la circunferencia en dos puntos.

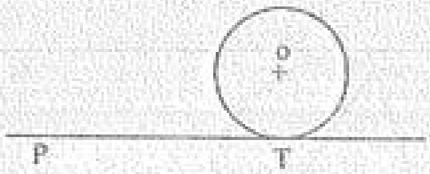
Secantes $\overline{AE}$ y $\overline{BD}$



5.2.4. TANGENTE

Es una recta que interseca a la circunferencia en un solo punto, llamado punto de tangencia o punto de contacto.

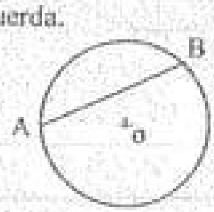
Tangente $\overline{PT}$
Punto de tangencia ·T



5.2.5. ARCO (AB)

Es una parte cualquiera de la circunferencia comprendida entre dos puntos. Los extremos de una cuerda dividen a la circunferencia en dos arcos, llamados arcos subtendidos por la cuerda.

Salvo indicación contraria, el arco subtendido por una cuerda se refiere al arco menor de los dos.

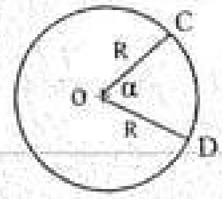


5.3. ÁNGULOS EN UN CÍRCULO

5.3.1. ÁNGULO CENTRAL (α)

Es el ángulo cuyo vértice en el centro del círculo y sus lados son radios.

$$\widehat{COD} = \hat{\alpha} = \overset{\frown}{CD}$$



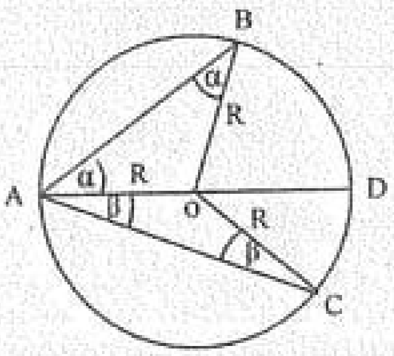
Se dice que el $\widehat{COD}$ interseca al $\overset{\frown}{CD}$ y que el $\overset{\frown}{CD}$ subtiende al ángulo central $\widehat{COD}$.

Por definición, un ángulo central se mide por el arco intersecado por sus lados.

5.3.2. ÁNGULO INSCRITO

Es el ángulo cuyos lados son cuerdas del círculo y su vértice pertenece a la circunferencia.

La medida de un ángulo inscrito es igual a la mitad del arco intersecado por sus lados.



H) $\widehat{BAC}$ Inscrito en $\odot$ (O , R)

T) $\widehat{BAC} = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2}$

D) Δ AOB y Δ AOC Isósceles

$\widehat{BOD} = 2\,\hat{\alpha} = \overset{\frown}{BD}$

$\widehat{COD} = 2\,\hat{\beta} = \overset{\frown}{DC}$

$\hat{\alpha} = \dfrac{\overset{\frown}{BD}}{2}$ y $\hat{\beta} = \dfrac{\overset{\frown}{DC}}{2}$

$\therefore\ \widehat{BAC} = \dfrac{\overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{DC}}{2} = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2}$ ///.

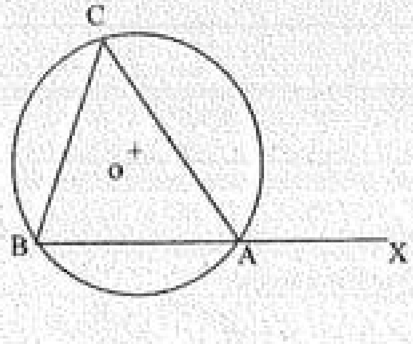
COROLARIO.

Todo ángulo inscrito en un semicírculo, es un ángulo recto.

5.3.3. ANGULO EX-INSCRITO

Es el ángulo formado por una cuerda y la prolongación de otra.

La medida de un ángulo ex-inscrito es igual a la semisuma de los arcos subtendidos por las cu



H) $\widehat{CAX}$ Ex-inscrito en $\odot$ (O , R)

T) $\widehat{CAX} = \dfrac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{AB}}{2}$

D) $\widehat{CAX} = \hat{C} + \hat{B}$

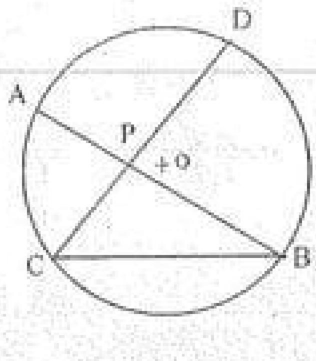
$\widehat{CAX} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2} + \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}$

$\therefore\ \widehat{CAX} = \dfrac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AC}}{2}$ ///.

5.3.4. ANGULO INTERNO

Es el ángulo formado por dos cuerdas que se cortan.

La medida de un ángulo interno es igual a la semisuma de los arcos comprendidos entre los lados del ángulo y los lados de su ángulo opuesto por el vértice.



H) $\widehat{APC}$ Interno en $\odot(O, R)$

T) $\widehat{APC} = \dfrac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}}{2}$

D) $\widehat{ABC} = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}$ y $\widehat{DCB} = \dfrac{\overset{\frown}{BD}}{2}$

$\widehat{APC} = \widehat{ABC} + \widehat{DCB}$

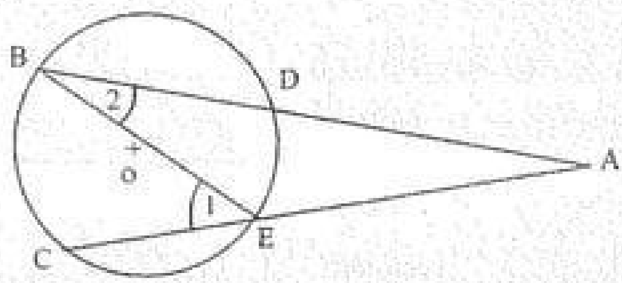
$\widehat{APC} = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2} + \dfrac{\overset{\frown}{BD}}{2}$

$\widehat{APC} = \dfrac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}}{2}$ ///.

5.3.5. ANGULO EXTERNO

Es el ángulo cuyo vértice está fuera del círculo y sus lados pueden ser dos secantes, dos tangentes o una secante y una tangente.

La medida de un ángulo externo es igual a la semidiferencia de los arcos comprendidos entre sus lados.



H) $\widehat{A}$ Externo al $\odot(O, R)$

T) $\widehat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{DE}}{2}$

D) $\widehat{1} = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2}$ y $\widehat{2} = \dfrac{\overset{\frown}{DE}}{2}$

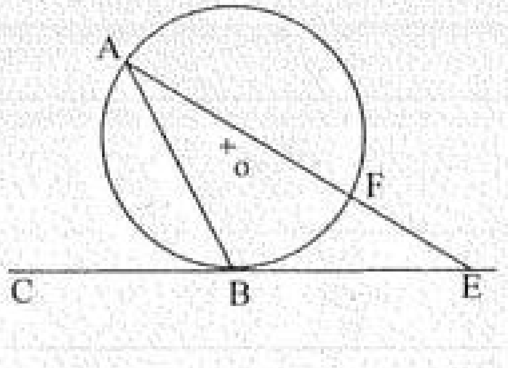
$\widehat{A} = \widehat{1} - \widehat{2}$

$\widehat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{DE}}{2}$ ///.

5.3.6. ANGULO SEMI - INSCRITO

Es el ángulo formado por una cuerda y una tangente y su vértice es el punto de contacto.

La medida de un ángulo semi - inscrito es igual a la mitad del arco subtendido por la cuerda.



H) $\overleftrightarrow{CE}$ Tang. $\odot(O, R)$

$\widehat{ABC}$ Semi - inscrito en $\odot(O, R)$

T) $\widehat{ABC} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$

D) $\widehat{ABC} = \widehat{A} + \widehat{E}$

$\widehat{ABC} = \dfrac{\overset{\frown}{BF}}{2} + \left(\dfrac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{BF}}{2}\right)$

$\widehat{ABC} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$ ///.

5.4. EJERCICIOS

1.- H) $\overline{DE}$ Tang. ⊙ (O, R)

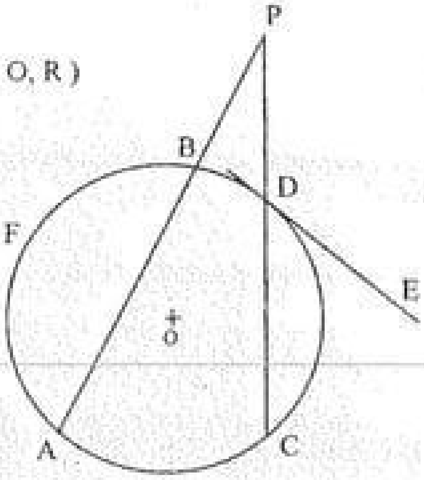
$\widehat{EDC} = \pi/3$

$\widehat{APC} = \pi/9$

$\overset{\frown}{AFB} = 2\pi/3$

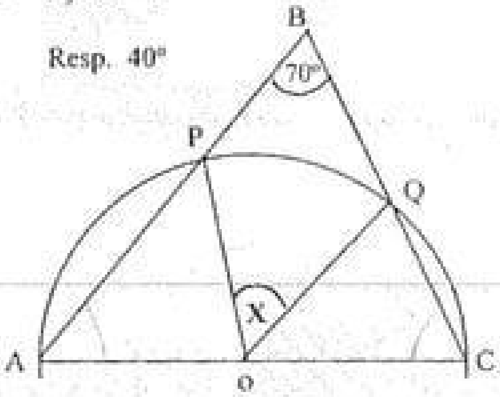
T) $\overset{\frown}{AC} = ?$

Resp. 80°



2.- T) $\widehat{X} = ?$

Resp. 40°

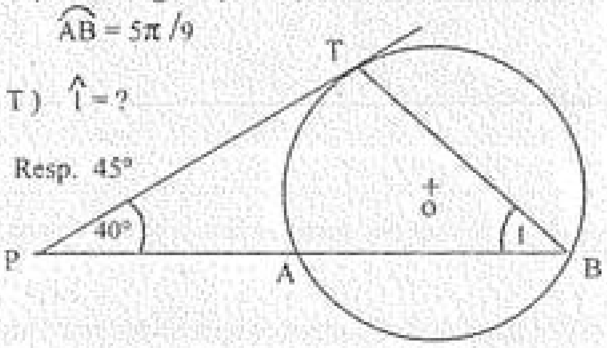


3.- H) $\overline{PT}$ Tang. ⊙ (O, R)

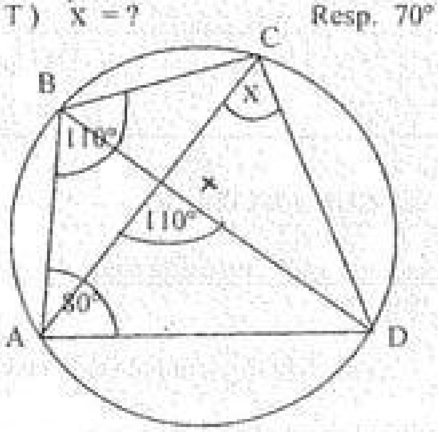
$\overset{\frown}{AB} = 5\pi/9$

T) $\widehat{1} = ?$

Resp. 45°



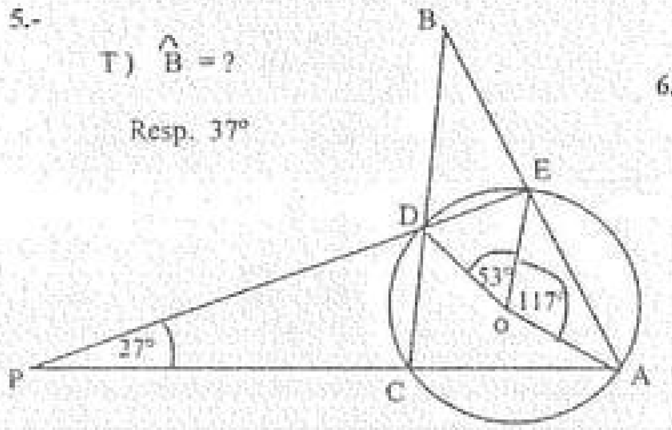
4.- T) $\widehat{X} = ?$ Resp. 70°



5.-

T) $\widehat{B} = ?$

Resp. 37°

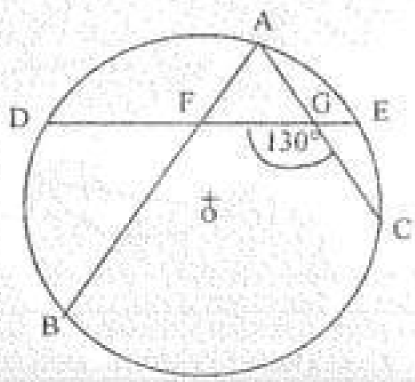


6.- H) $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB}$

$\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{EC}$

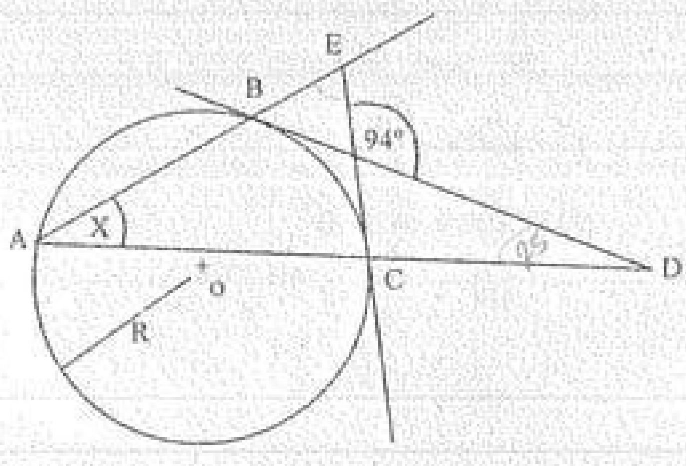
T) $\widehat{BAC} = ?$

Resp. 80°



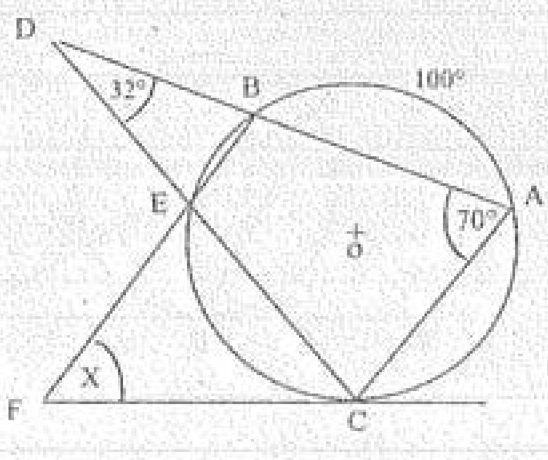
7.- H) $\overline{EC}$ y $\overline{BD}$ Tangs. ⊙ (O, R)

T) $\widehat{X} = ?$ Resp. 43°

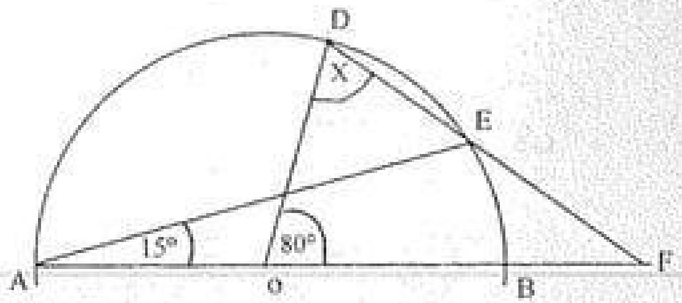


8.- H) $\overline{FC}$ Tang. ⊙ (O, R)

T) $\widehat{X} = ?$ Resp. 68°

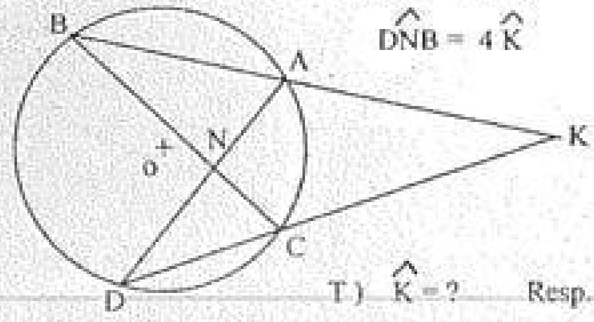


9.- T) $\hat{X} = ?$ Resp. 65°



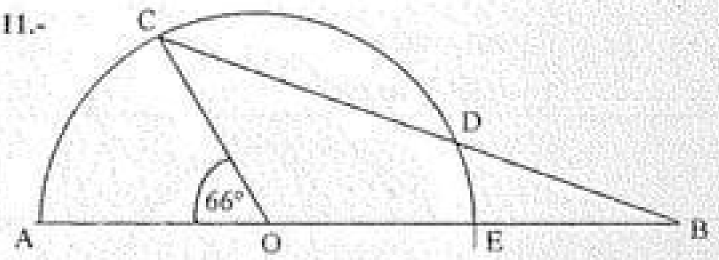
10.- H) $\overset{\frown}{BD} = 7\pi/18$

$\widehat{DNB} = 4\hat{K}$



T) $\hat{K} = ?$ Resp. 14°

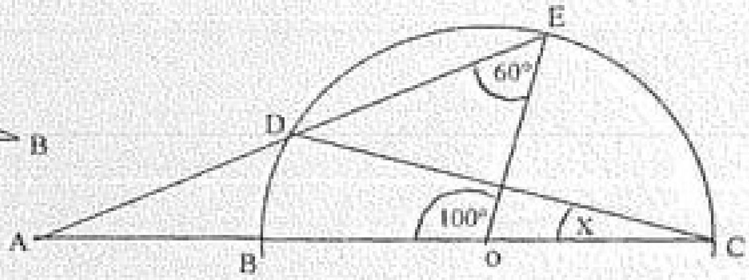
11.-



H) BD = OA = OC = OE

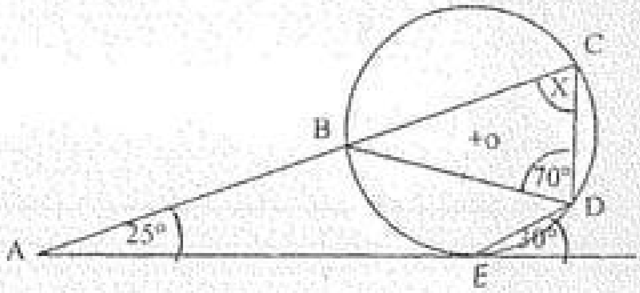
T) $\hat{B} = ?$ Resp. 22°

12.- T) $\hat{X} = ?$ Resp. 20°



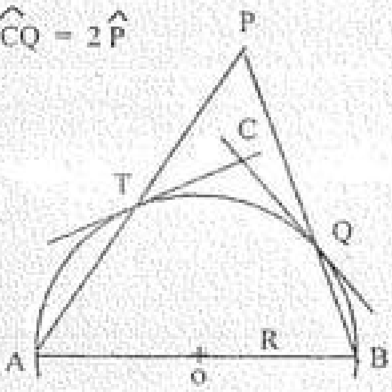
13.- H) $\overleftrightarrow{AE}$ Tang. ⊙ (O, R)

T) $\hat{X} = ?$ Resp. 72.5°



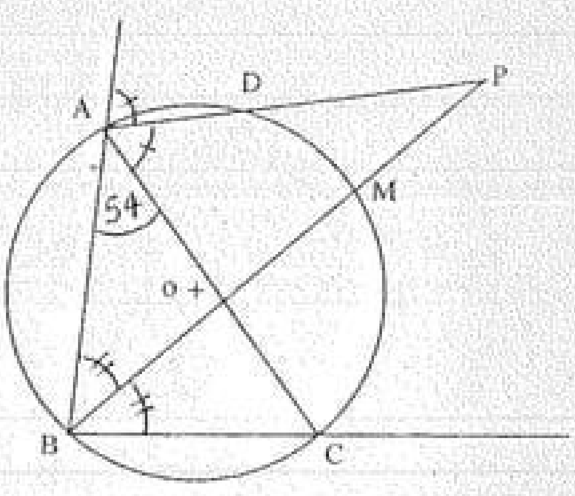
14.- H) $\overleftrightarrow{CT}$ y $\overleftrightarrow{CQ}$ Tangs. ⊙ (O, R)

T) $\widehat{TCQ} = 2\hat{P}$



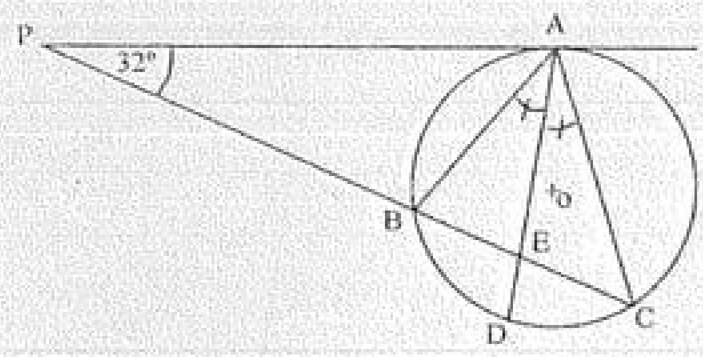
15.- H) $\overset{\frown}{AD} = 34°$

T) $\hat{P} = ?$ Resp. 23°

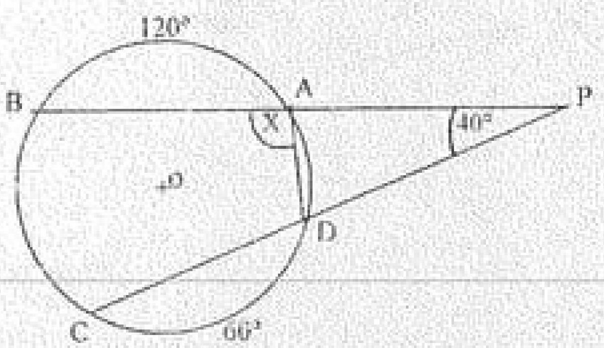


16.- H) $\overline{PA}$ Tang. ⊙ (O, R)

T) $\hat{E} = ?$ Resp. 106°

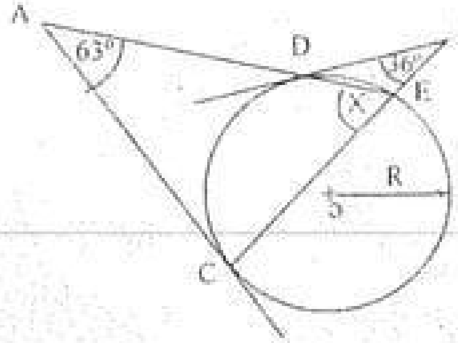


17.- T) $\widehat{X} = ?$ Resp. 95°



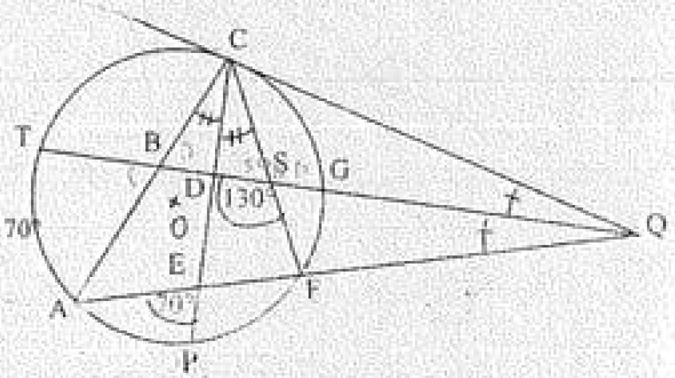
18.- H) $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ Tangs. ⊙ (O, R)

T) $\widehat{X} = ?$ Resp. 51°



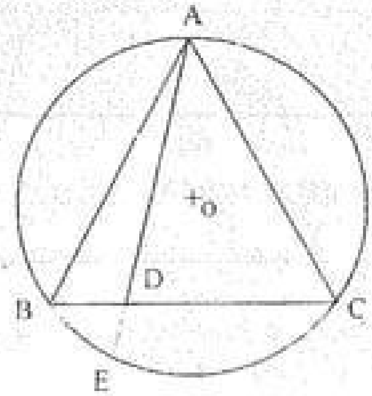
19.- H) $\overline{CQ}$ Tang. ⊙ (O, R)

T) $\widehat{TC} = ?$ Resp. 70°



20.- H) AB = AC

T) $AB^2 = AD \times AE$

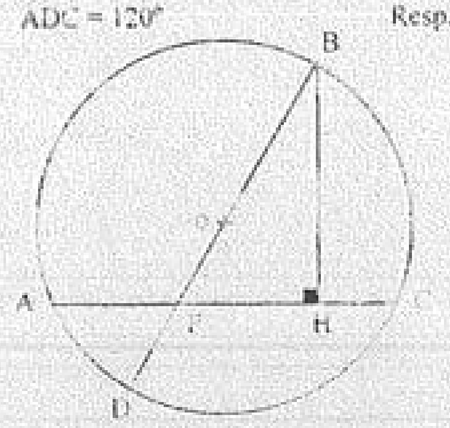


21.- H) $\widehat{PBH} = 30°$

$\widehat{ADC} = 120°$

T) $\widehat{A} = ?$

Resp. 45°

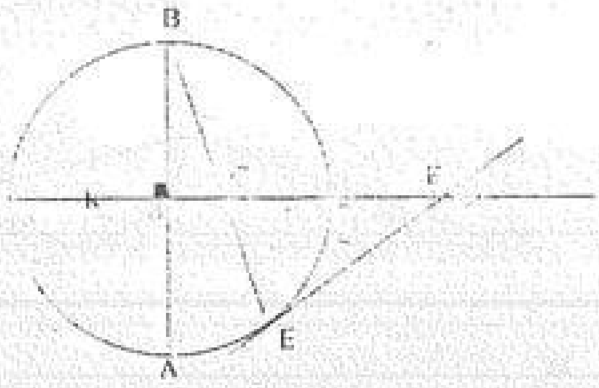


22.- H) $\overleftrightarrow{EF}$ Tang. ⊙ (O, R)

$\widehat{OBC} = 3\pi/20$

T) $\widehat{F} = ?$

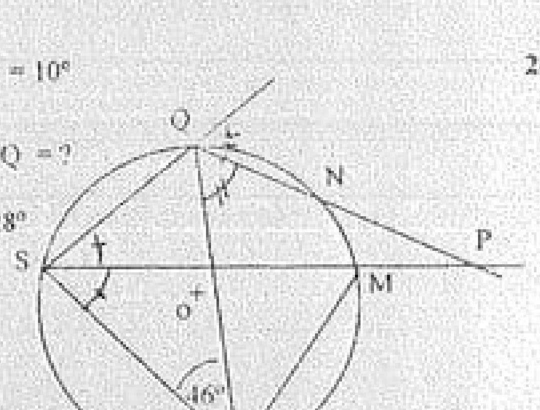
Resp. 54°



23.- H) $\widehat{QN} = 10°$

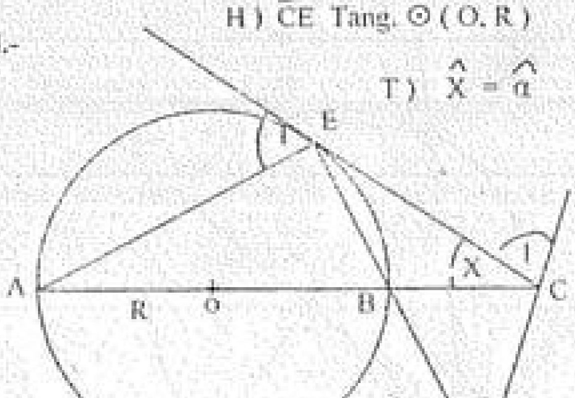
T) $\widehat{MTQ} = ?$

Resp. 28°



24.- H) $\overline{CE}$ Tang. ⊙ (O, R)

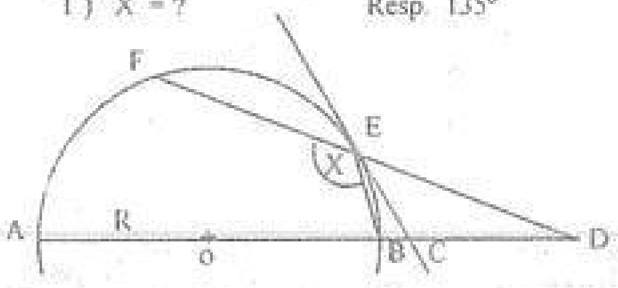
T) $\widehat{X} = \widehat{\alpha}$



25.- H) $\overrightarrow{EC}$ Tang. ⊙ (O, R)

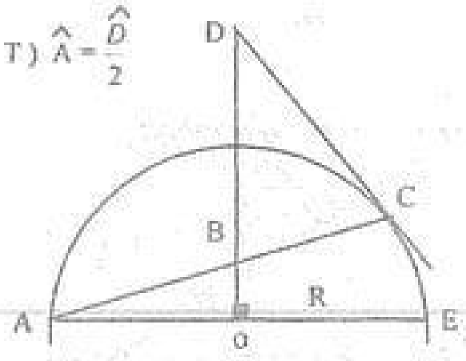
$EC = CD$

T) $\widehat{X} = ?$ Resp. 135°

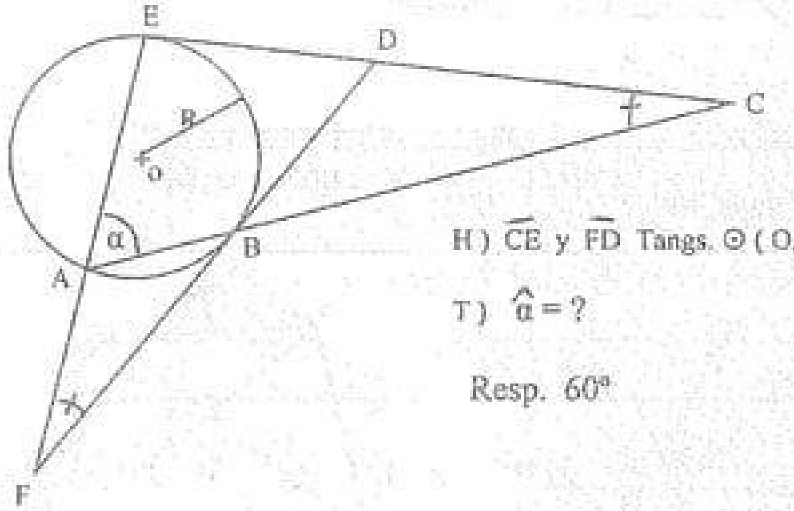


26.- H) $\overrightarrow{DC}$ Tang. ⊙ (O, R)

T) $\widehat{A} = \dfrac{\widehat{D}}{2}$



27.-

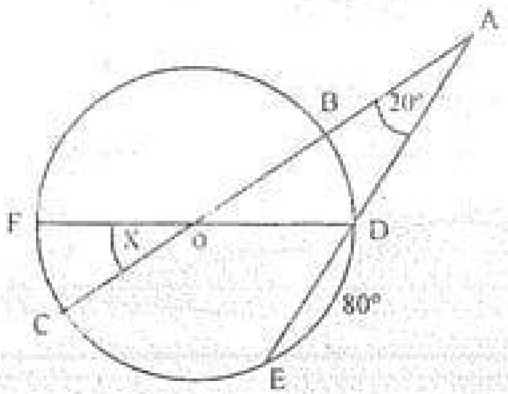


H) $\overline{CE}$ y $\overline{FD}$ Tangs. ⊙ (O, R)

T) $\widehat{\alpha} = ?$

Resp. 60°

28.- T) $\widehat{X} = ?$ Resp. 30°

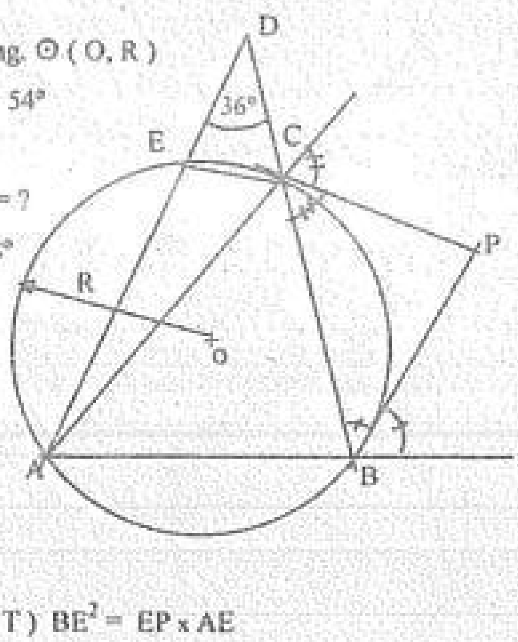


29.- H) $\overline{CP}$ Tang. ⊙ (O, R)

$\widehat{CAB} = 54°$

T) $\widehat{ECA} = ?$

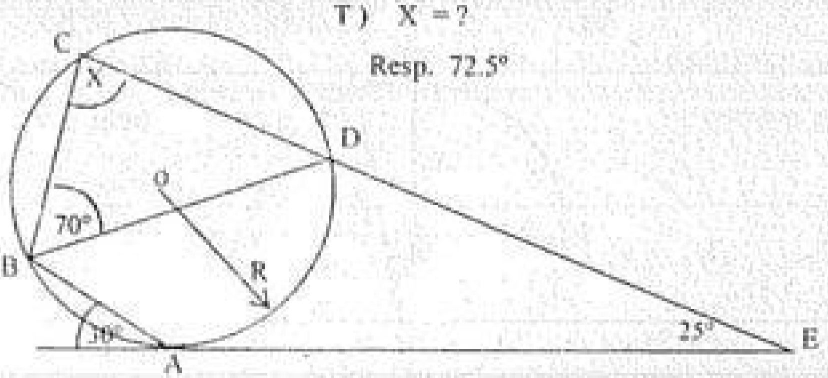
Resp. 18°



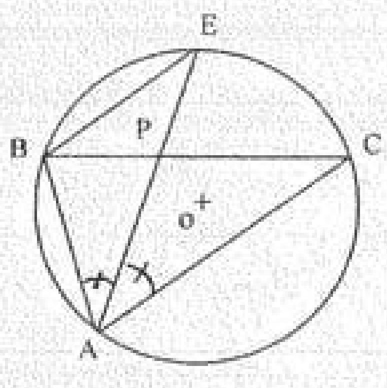
30.- H) $\overline{EA}$ Tang. ⊙ (O, R)

T) $\widehat{X} = ?$

Resp. 72.5°

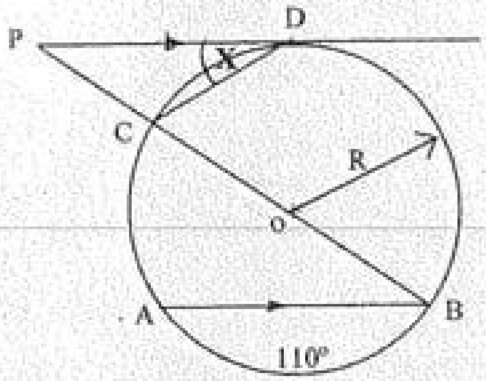


31.- T) $BE^2 = EP \times AE$



32.- H) $\overline{PD}$ Tang. ⊙ (O, R)

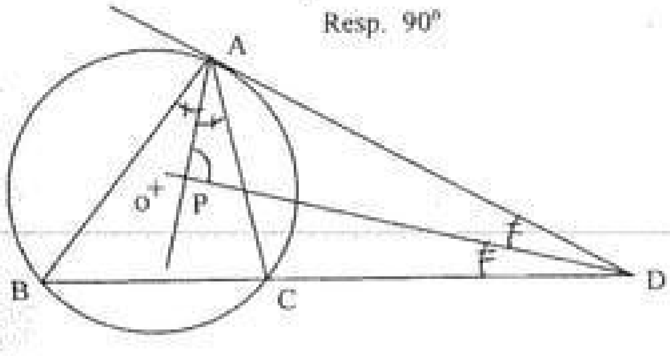
T) $\hat{X} = ?$ Resp. 27.5°



33.- H) $\overline{AD}$ Tang. ⊙ (O, R)

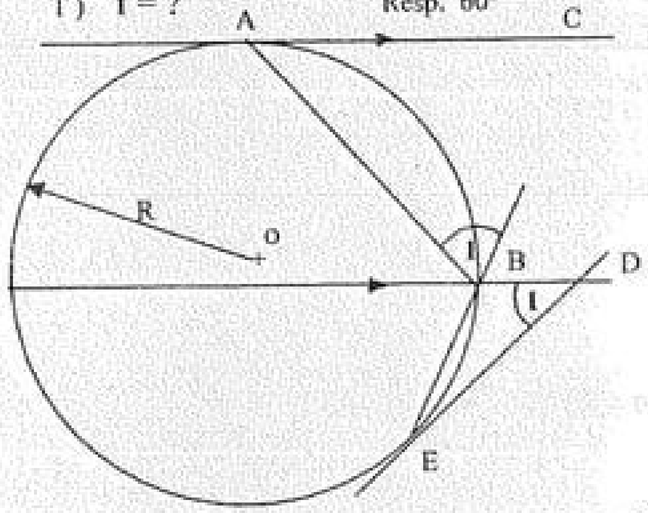
T) $\hat{P} = ?$

Resp. 90°



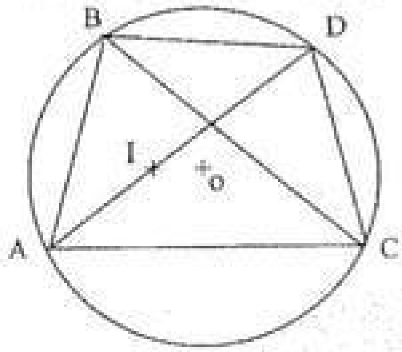
34.- H) $\overline{AC}$ y $\overline{DE}$ Tangs. ⊙ (O, R)

T) $\hat{I} = ?$ Resp. 60°

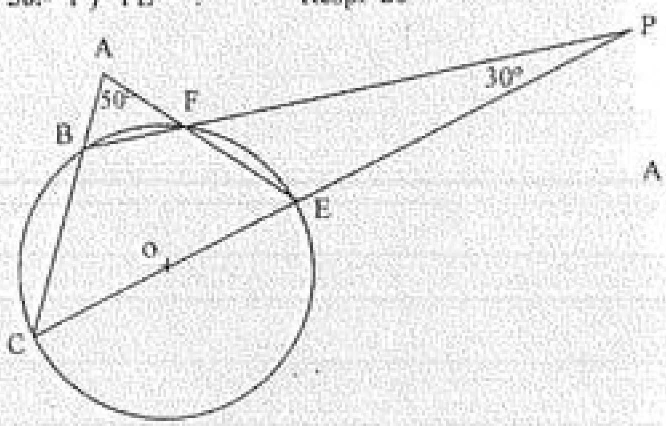


35.- H) I Incentro Δ ABC

T) BD = DC = DI

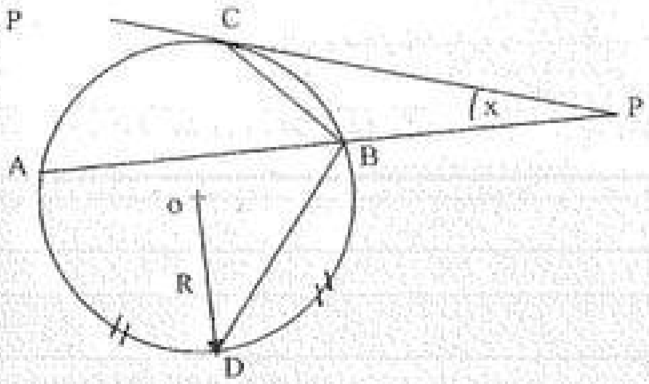


36.- T) $\overset{\frown}{FE} = ?$ Resp. 20°



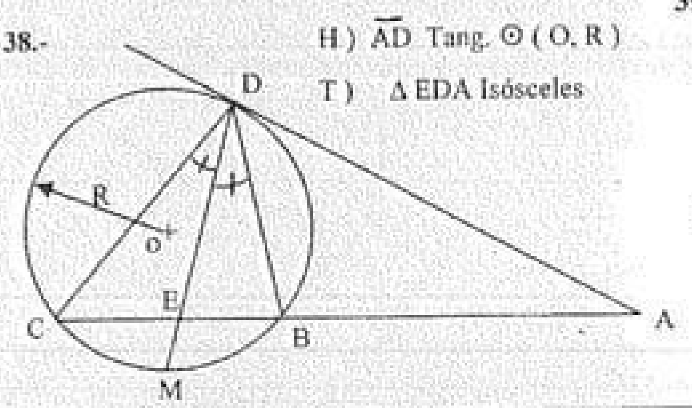
37.- H) $\overline{PC}$ Tang. ⊙ (O, R) T) $\hat{X} = ?$

$\overset{\frown}{CAD} = 220°$ Resp. 40°



38.- H) $\overline{AD}$ Tang. ⊙ (O, R)

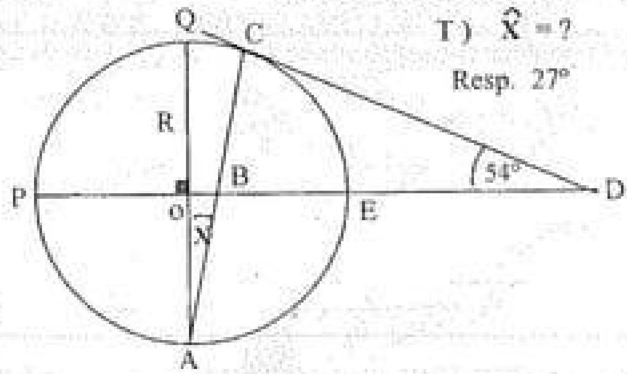
T) Δ EDA Isósceles



39.- H) $\overline{DC}$ Tang. ⊙ (O, R)

T) $\hat{X} = ?$

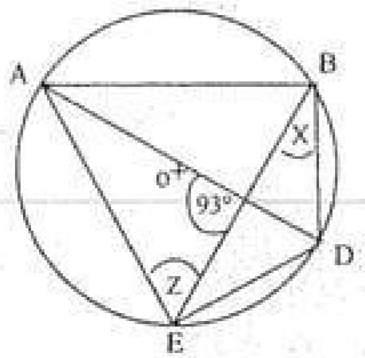
Resp. 27°



40.- H) $\widehat{AB} - \widehat{DE} = 30°$

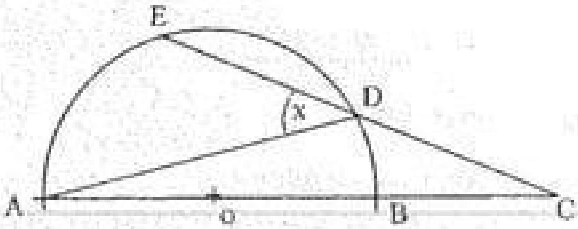
T₁) $\hat{X} = ?$ Resp. 36°

T₂) $\hat{Z} = ?$ Resp. 51°

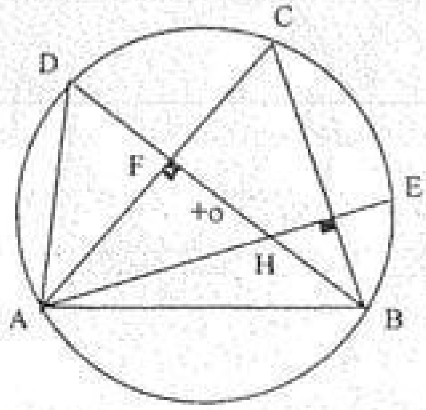


41.- H) ED = DC = OA

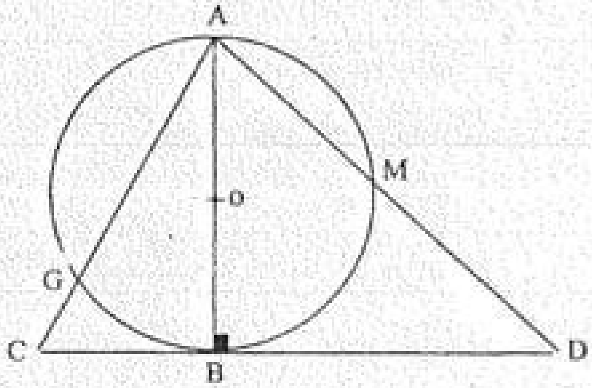
T) $\hat{X} = ?$ Resp. 45°



42.- T) DF = FH



43.- T) AC x AG = AD x AM

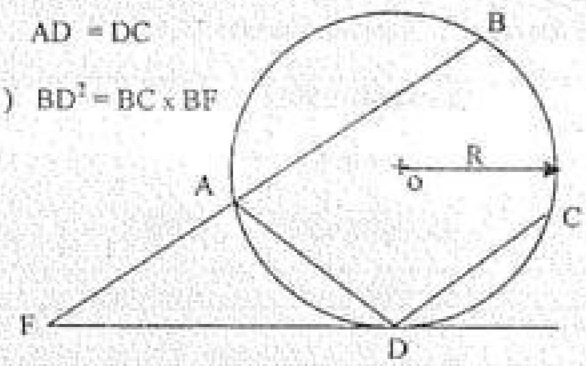


44.- Por el vértice A de un triángulo escaleno ABC y los pies de la mediana y la bisectriz relativas al vértice A, se hace pasar un círculo que corte a $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ en P y Q. Demostrar que BP = CQ.

45.- H) $\overline{FD}$ Tang. ⊙(O , R)

AD = DC

T) $BD^2 = BC \times BF$



5.4.1. EJERCICIOS RESUELTOS

5.- D) 1.- $\widehat{DOE} = \widehat{DE} = 53°$

2.- $\widehat{EOA} = \widehat{EA} = 117°$

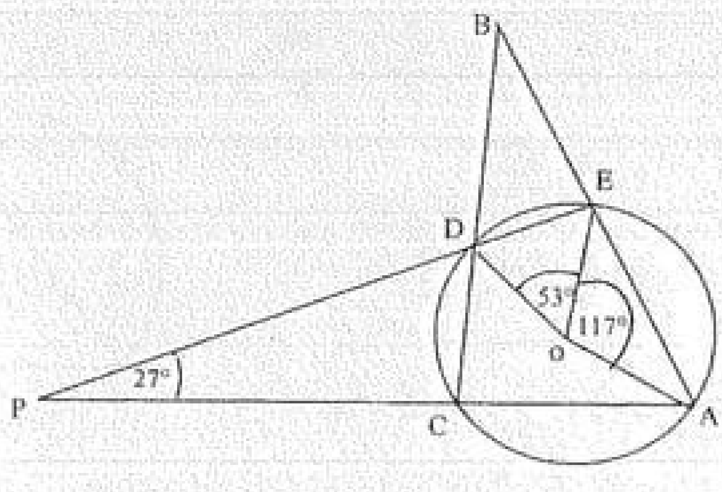
3.- $27° = \dfrac{\widehat{EA} - \widehat{DC}}{2}$

=> $\widehat{DC} = 63°$

4.- $\widehat{AC} = 360° - \widehat{DC} - \widehat{DE} - \widehat{EA}$

=> $\widehat{AC} = 127°$

5.- $\hat{B} = \dfrac{127° - 53°}{2} = 37°$



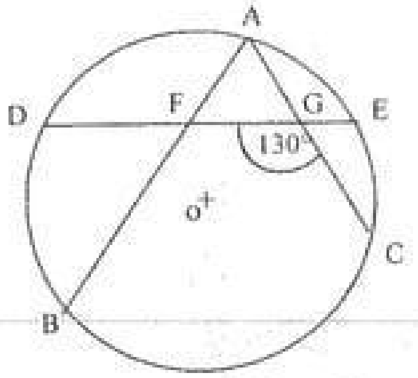
6.- D) 1.- $2\,\widehat{BD} + 2\,\widehat{AE} + \widehat{BC} = 360°$

2.- $130° = \dfrac{(\widehat{BC} + \widehat{BD}) + \widehat{AE}}{2}$

$130° = \dfrac{360° + \widehat{BC}}{4}$

$\Rightarrow \widehat{BC} = 160°$

3.- $B\hat{A}C = \dfrac{\widehat{BC}}{2} = 80°$



8.- D) 1.- $\widehat{AC} - \widehat{BE} = 2 \times 32° = 64°$

2.- $\widehat{EC} + \widehat{BE} = 2 \times 70° = 140°$

$\therefore\ \widehat{AC} + \widehat{EC} = 204°$

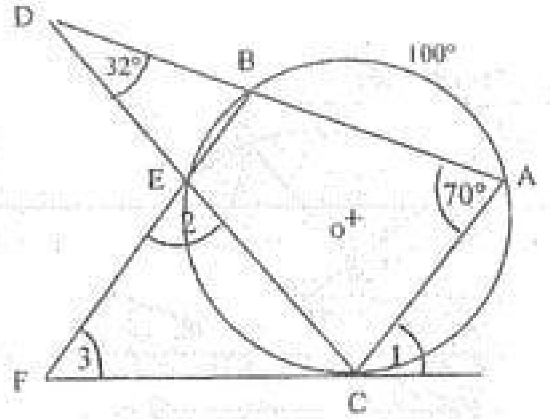
3.- $\widehat{AC} + \widehat{EC} + \widehat{BE} + 100° = 360°$

$\therefore\ \widehat{BE} = 56°$

$\widehat{EC} = 84° \quad \Rightarrow \hat{2} = \dfrac{\widehat{BE} + \widehat{EC}}{2} = 70°$

$\widehat{AC} = 120° \quad \Rightarrow \hat{1} = \dfrac{\widehat{AC}}{2} = 60°$

$\Rightarrow \hat{3} = \dfrac{100° + \widehat{AC} - \widehat{EC}}{2} = 68°$



21.- D) 1.- $\overline{AD}$ Construcción

2.- $D\hat{A}B = 90°$

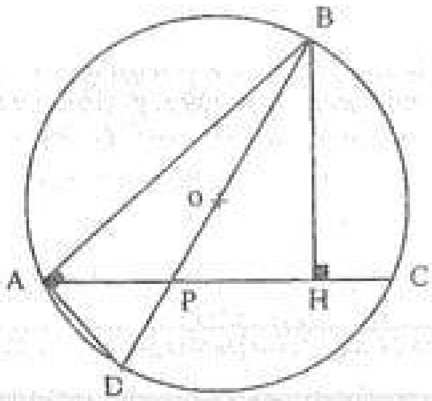
3.- $\hat{C} = \hat{D} = \dfrac{AB}{2}$

4.- $A\hat{B}D = 90° - \hat{C} = C\hat{B}H$

5.- $P\hat{B}H = 30°$

6.- $A\hat{B}C = 60° = 90° - \hat{C} + 30° + 90° - \hat{C} \quad \Rightarrow \hat{C} = 75°$

7.- $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° = \hat{A} + 60° + 75° \quad \Rightarrow \hat{A} = 45°$



33.- D) 1.- $\dfrac{\hat{A}}{2} + \dfrac{\hat{B}}{2} + \dfrac{\hat{C}}{2} = \dfrac{180°}{2} = 90°$

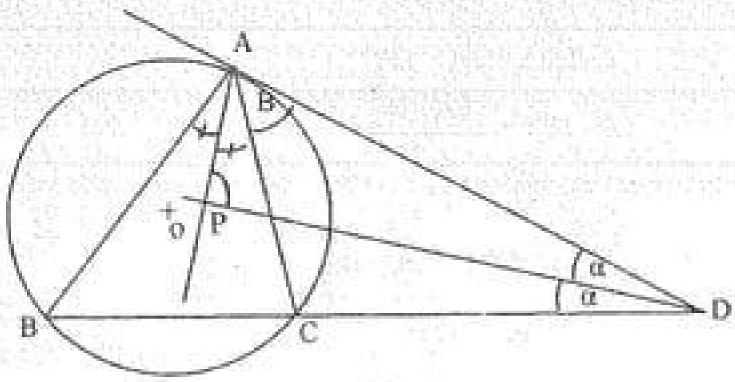
2.- $\hat{C} = \dfrac{\widehat{AB}}{2}$

3.- $\hat{B} = C\hat{A}D = \dfrac{\widehat{AC}}{2}$

$\Rightarrow \hat{\alpha} = \dfrac{\hat{C} - \hat{B}}{2}$

4.- $\hat{P} + \dfrac{\hat{A}}{2} + \hat{B} + \hat{\alpha} = 180°$

$\Rightarrow \hat{P} = 90°$



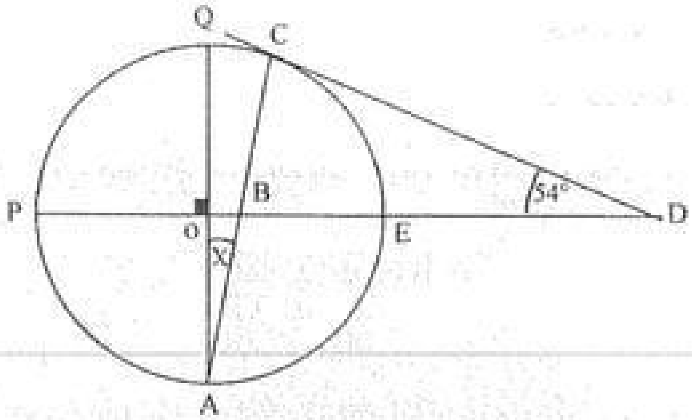
39.- D) 1.- $180° = \overset{\frown}{PC} + \overset{\frown}{CE}$

2.- $54° = \dfrac{\overset{\frown}{PC} - \overset{\frown}{CE}}{2}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{PC} = 144° = 90° + \overset{\frown}{QC}$

$\therefore \overset{\frown}{QC} = 54°$

3.- $\hat{X} = \dfrac{\overset{\frown}{QC}}{2} = 27°$



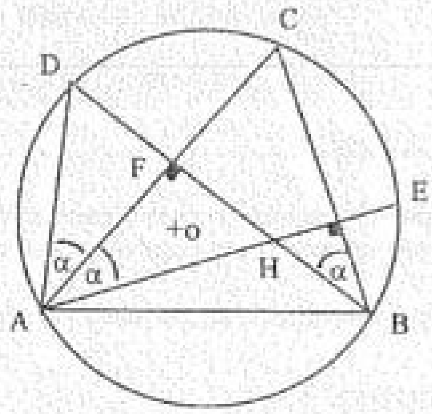
42.- D) 1.- $\overline{AD}$ Construcción

2.- $\widehat{CAH} = \widehat{CBH} = 90° - \hat{C} = \hat{\alpha}$

3.- $\widehat{CBD} = \widehat{CAD} = \dfrac{\overset{\frown}{DC}}{2} = \hat{\alpha}$

4.- $\therefore \Delta ADF \cong \Delta AFH$ (A.L.A)

$\Rightarrow$ DF = FH



45.- D) 1.- AD = DC $\quad \therefore \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DC}$

2.- $\hat{\alpha} = \dfrac{\overset{\frown}{AD}}{2} = \dfrac{\overset{\frown}{DC}}{2}$

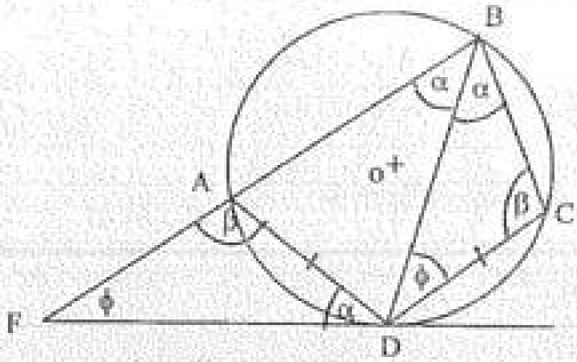
$\hat{\beta} = \dfrac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AD}}{2}$

$\hat{\phi} = 180° - \hat{\alpha} - \hat{\beta}$

3.- $\therefore \Delta BFD \sim \Delta BDC$ (A,A,A)

$\dfrac{BF}{BD} = \dfrac{BD}{BC}$

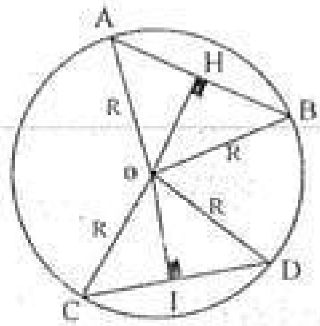
$\Rightarrow BD^2 = BC \cdot BF$



5.5. CUERDAS

TEOREMA # 1

En un mismo círculo las cuerdas equidistantes del centro son congruentes y recíprocamente, cuerdas congruentes equidistan del centro.



H) $\overline{OH} \perp \overline{AB}$
$\overline{OI} \perp \overline{CD}$
$OH = OI$

T) $AB = CD$

D) $\Delta AOH \wedge \Delta COI$ Rectángulos
$OA = OC = R$ (L)
$OH = OI$ (L)
$\Delta AOH \cong \Delta COI$ (L.L.) $\Rightarrow AH = CI$

Idem $\Delta BOH \cong \Delta DOI$ $\Rightarrow HB = ID$

$\therefore AH + HB = CI + ID \Rightarrow AB = CD$ ///.

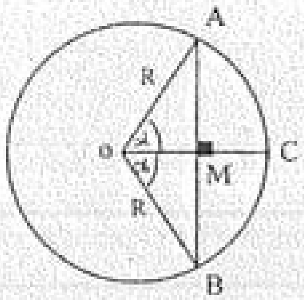
COROLARIOS

1.- En un mismo círculo, las cuerdas congruentes subtienden arcos congruentes y recíprocamente, arcos congruentes intersecan cuerdas congruentes.

2.- En un mismo círculo las cuerdas son congruentes si, y solo si, tienen ángulos centrales congruentes.

TEOREMA # 2

Una recta que pasa por el centro de un círculo y es perpendicular a una cuerda, biseca a la cuerda y al arco que lo subtiende.



H) $\overline{OC} \perp \overline{AB}$

T_1) $AM = MB$
T_2) $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB}$

D) $\Delta AOM \wedge \Delta BOM$ Rectángulos
$OA = BO = R$ (L)
$OM = OM$ (L)
$\Delta AOM \cong \Delta BOM$ (L.L.) $\Rightarrow AM = MB$ ///.
$\therefore A\hat{C}M = B\hat{O}M = \hat{\alpha} = \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB}$ ///.

COROLARIOS

1.- La mediatríz de una cuerda, pasa por el centro del círculo.

2.- Todo diámetro perpendicular a una cuerda, divide a ésta y a los arcos que subtienden en dos partes congruentes.

3.- Todo diámetro biseca al círculo y cada parte congruente se llama semicírculo.

4.- Dos diámetros perpendiculares entre sí, dividen al círculo en cuatro partes congruentes, y cada parte se llama cuadrante.

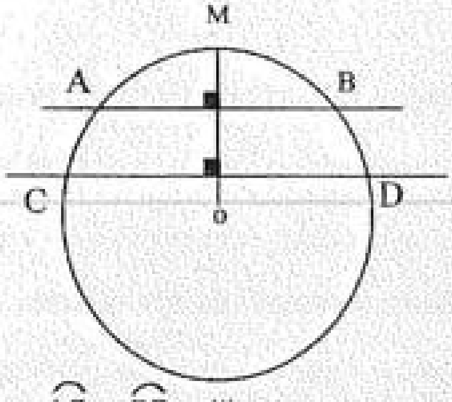
5.- Angulos centrales congruentes intersecan arcos congruentes y recíprocamente, arcos congruentes subtienden ángulos centrales congruentes.

TEOREMA # 3

En todo círculo, dos cuerdas o secantes paralelas intersecan arcos congruentes.

H) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

T) $\widehat{AC} = \widehat{BD}$



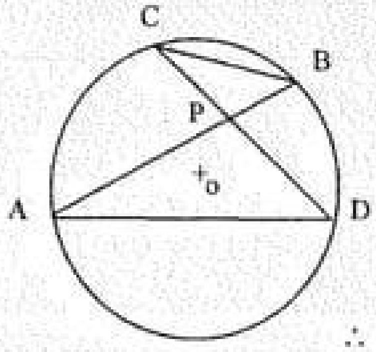
D) $\overline{OM} \perp \overline{AB} \quad \therefore \widehat{AM} = \widehat{MB}$

$\overline{OM} \perp \overline{CD} \quad \therefore \widehat{CM} = \widehat{MD}$

$\widehat{CM} - \widehat{AM} = \widehat{MD} - \widehat{MB} \quad \Rightarrow \quad \widehat{AC} = \widehat{BD}$ ///.

TEOREMA # 4

Si dos cuerdas se cortan dentro de un círculo, el producto de las longitudes de los segmentos formados en la una, es igual al producto de las longitudes de los segmentos formados en la otra.



T) $AP \times PB = CP \times PD$

D) $\Delta APD \wedge \Delta CPB$

$\hat{APD} = \hat{CPB}$ (A)

$\hat{PAD} = \hat{PCB} = \dfrac{\widehat{BD}}{2}$ (A)

$\therefore \Delta APD \sim \Delta CPB$ (A.A.A) $\Rightarrow \dfrac{AP}{CP} = \dfrac{PD}{PB} = \dfrac{AD}{CB}$

$\therefore AP \times PB = CP \times PD$ ///.

5.6. TANGENTES Y SECANTES

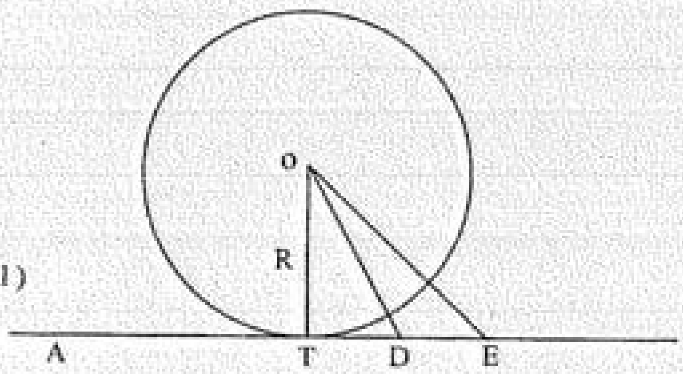
TEOREMA # 1 (TANGENTE EN UN PUNTO)

Si una recta es tangente a un círculo, es perpendicular al radio que tiene por extremo el punto de contacto.

H) $\overline{AE}$ Tang. $\odot(O, R)$ en $\cdot T$

$OT = R$

T) $\overline{AE} \perp \overline{OT}$



D) $AE \not\perp OT$

$\overline{OD} \perp \overline{AE}$ (Suposición temporal)

$DE = TD$ (Construcción)

$\therefore \hat{TDO} = \hat{EDO} = \dfrac{\pi}{2}$

$\Delta DOT \cong \Delta DOE$ (L.A.L)

$\Rightarrow OT = OE = R$

$\therefore$ $\overline{TE}$ Cuerda y $\overline{TE} \in \overleftrightarrow{AE}$ Tangente (Absurdo)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AE} \perp \overline{OT}$ ///.

COROLARIOS

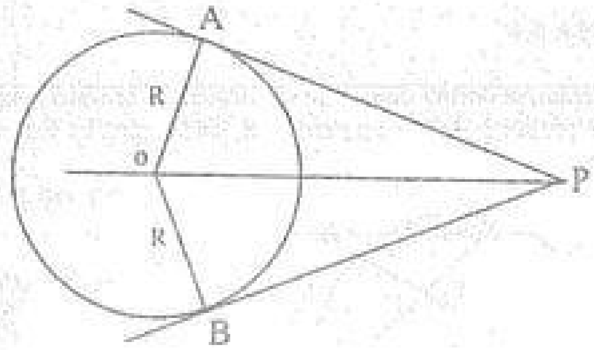
1. Toda recta perpendicular a un radio en su extremo es tangente al círculo.

2. La perpendicular a una tangente en el punto de contacto, pasa por el centro del círculo.

3. La perpendicular bajada del centro de un círculo a una tangente pasa por el punto de contacto.

TEOREMA # 2 (TANGENTES DESDE UN PUNTO)

Si desde un punto exterior se trazan dos segmentos tangentes a un círculo, éstos son congruentes y el segmento trazado del mismo punto al centro del círculo, es bisectriz del ángulo externo que forman las dos tangentes.



H) $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ Tangs. $\odot$ (O , R)

T_1) PA = PB

T_2) $\overline{PO}$ bisectriz de $\widehat{APB}$

D) Δ OAP $\wedge$ Δ OBP

OA = OB = R (L)

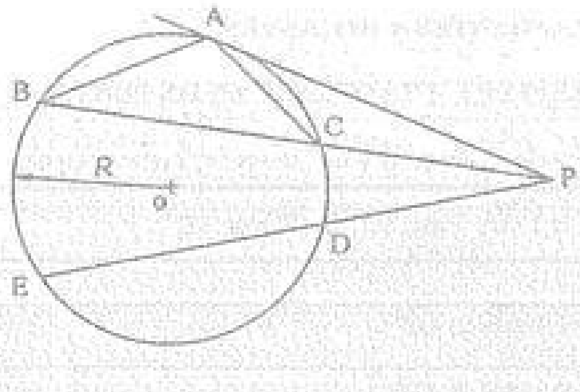
OP = OP (L)

$\therefore$ $\Delta OAP \cong \Delta OBP$ (L. L.) => PA = PB ///.

$\widehat{APO} = \widehat{BPO}$ => $\overline{PO}$ es Bisectriz del $\widehat{APB}$ ///.

TEOREMA # 3

Si desde un punto exterior a un círculo se trazan a él una tangente y una secante, la tangente es media proporcional entre la secante y su parte externa.



H) $\overline{PA}$ Tang. $\odot$ (O , R)

T) $PA^2 = BP \times CP$

D) Δ APB $\wedge$ Δ ACP

$\widehat{ABP} = \widehat{CAP} = \dfrac{\widehat{AC}}{2}$ (A)

$\hat{P} = \hat{P}$ (A)

$\Delta APB \sim \Delta ACP$ (A. A.A.) $\therefore$ $\dfrac{PA}{CP} = \dfrac{BP}{PA} = \dfrac{AB}{AC}$

=> $PA^2 = BP \times CP$ ///.

COROLARIO

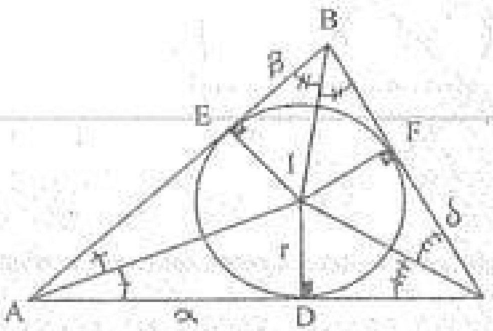
Si desde un punto exterior a un círculo se trazan a él dos secantes, el producto de las longitudes de una secante por su parte externa, es igual al producto de las longitudes de la otra secante por su parte externa.

$$PA^2 = BP \times CP = EP \times DP \quad ///.$$

5.7. CÍRCULO Y TRIÁNGULO

5.7.1. CÍRCULO INSCRITO EN UN TRIÁNGULO

Es el círculo tangente a los tres lados del triángulo.



$\odot\ (I, r)$ Inscrito al Δ ABC

I incentro

r radio del círculo inscrito

Δ ABC Circunscrito al $\odot\ (I, r)$

TEOREMA # 1

La longitud de la tangente trazada desde un vértice de un triángulo al círculo inscrito, es igual a la diferencia entre el semiperímetro y el lado opuesto a dicho vértice.

$T_1)\quad \alpha = p - a$

$T_2)\quad \beta = p - b$

$T_3)\quad \delta = p - c$

D) $AD = AE = \alpha$ $\qquad\Rightarrow\quad 2p = 2(\alpha + \beta + \delta)$

$BE = BF = \beta$ $\qquad \alpha = p - (\beta + \delta)$

$CF = CD = \delta$ $\qquad \therefore\ \alpha = p - a$

$\therefore\ \beta = p - b$

$\therefore\ \delta = p - c$ ///.

TEOREMA # 2

El área de un triángulo es igual al producto del semiperímetro por el radio del círculo inscrito.

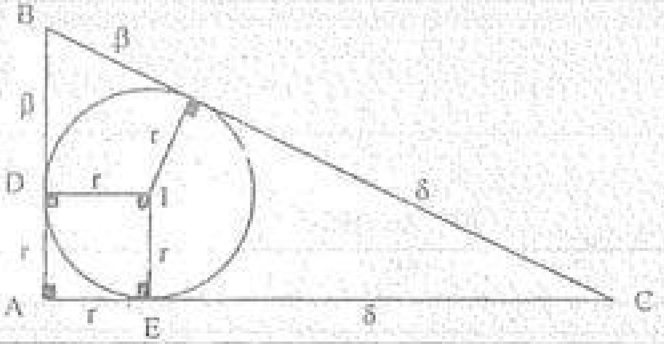
T) $A\,\Delta ABC = p \times r$

D) $A\,\Delta ABC = A\,\Delta BIC + A\,\Delta AIC + A\,\Delta AIB = \frac{1}{2}(a \times r + b \times r + c \times r)$

$\therefore\ A\,\Delta ABC = p \times r$ ///.

TEOREMA # 3

El radio del círculo inscrito en un triángulo rectángulo es igual a la suma de las longitudes de los catetos, menos la longitud de la hipotenusa, todo dividido para dos.



T) $r = \dfrac{b+c-a}{2}$

D) $r = b - \delta$

$r = c - \beta$

$r = \dfrac{b+c-a}{2}$ ///.

5.7.2. CÍRCULO CIRCUNSCRITO A UN TRIÁNGULO

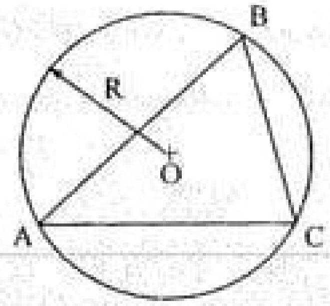
Es el círculo que tiene por cuerdas los tres lados del triángulo. Por tres puntos no colineales pasa un círculo y solo uno.

$\odot(O, R)$ Circunscrito al ΔABC

.O Circuncentro del ΔABC

R radio del círculo circunscrito

ΔABC Inscrito al $\odot(O, R)$



TEOREMA # 1

El producto de dos lados cualesquiera de un triángulo, es igual al producto del diámetro del círculo circunscrito a éste, por la altura relativa al tercer lado.

T) $AB \times AC = 2R \times AH$

D) ΔABH y ΔACD Rectángulos

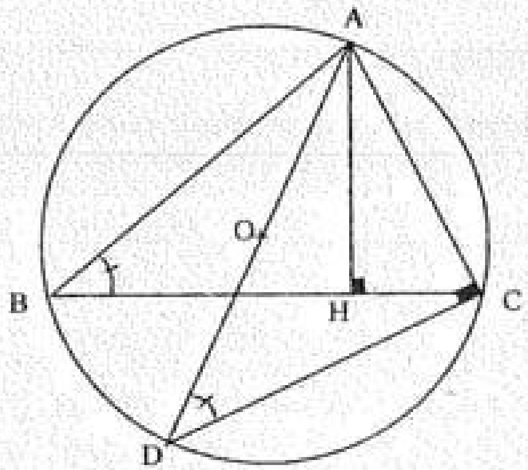
$$\widehat{ABH} = \widehat{ADC} = \frac{AC}{2}$$

$\therefore \Delta ABH \sim \Delta ACD$ (A.A.A.)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AH}{AC} = \frac{BH}{DC}$$

$$AB \times AC = AD \times AH$$

$$AB \times AC = 2R \times AH \quad ///.$$



TEOREMA # 2

En un triángulo, la razón entre una lado y el seno del ángulo opuesto es igual al diámetro del círculo circunscrito del triángulo.

$$T)\ \frac{AB}{\text{Sen C}} = \frac{AC}{\text{Sen B}} = \frac{BC}{\text{Sen A}} = 2R$$

$$D)\ \text{Sen B} = \frac{AH}{AB}$$

$$\therefore AB \times AC = 2R \times (AB \text{ Sen B}) \quad \Rightarrow \quad \frac{AC}{\text{Sen B}} = 2R \quad ///.$$

TEOREMA # 3

El área de un triángulo es igual al producto de los tres lados dividido para cuatro veces el radio del círculo circunscrito al triángulo.

$$T)\ A\,\Delta ABC = \frac{AB \,.\, AC \,.\, BC}{4R}$$

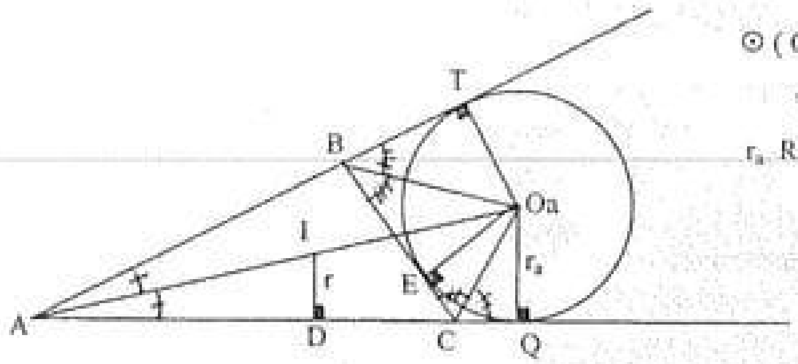
$$D)\ A\,\Delta ABC = \frac{BC \,.\, AH}{2}$$

$$AB \times AC = 2R \times AH$$

$$\therefore AH = \frac{AB \,.\, AC}{2R} \quad \Rightarrow A\,\Delta ABC = \frac{AB \,.\, AC \,.\, BC}{4R} \quad ///.$$

5.7.3. CÍRCULO EX-INSCRITO A UN TRIÁNGULO

Es el círculo tangente a un lado de un triángulo y a las prolongaciones de los otros dos lados.



$\odot$ (O_a , R_a) Ex-inscrito al Δ ABC

O_a Ex-centro del Δ ABC

r_a Radio del círculo tangente al lado a.

TEOREMA # 1

La longitud de la tangente trazada desde un vértice de un triángulo al círculo ex-inscrito, es igual al semiperímetro.

T) $AQ = p$

D) $2p = AB + BE + EC + AC$

$2p = AB + BT + CQ + AC$

$2p = AT + AQ = 2\,AQ$

$\therefore\ p = AQ$ ///.

TEOREMA # 2

El radio del círculo ex-inscrito es al radio del círculo inscrito de un mismo triángulo, como el semiperímetro es al semiperímetro menos la longitud del lado al que el círculo ex-inscrito es tangente.

T) $\frac{r_a}{r} = \frac{p}{p-a}$

D) $\Delta\, AO_aQ \sim \Delta\, AID$ (A.A.A.) $\therefore$ $\frac{r_a}{r} = \frac{p}{p-a}$ ///.

TEOREMA # 3

El área de un triángulo es igual al radio del círculo ex-inscrito por el semiperímetro menos el lado del triángulo al que es tangente el círculo.

T) $A\,\Delta\,ABC = r_a\,(p-a)$

D) $A\,\Delta\,ABC = A\,\Delta\,ACOa + A\,\Delta\,ABOa - A\,\Delta\,BCOa$

$A\,\Delta\,ABC = \frac{1}{2}\,(b \times r_a + c \times r_a - a \times r_a)$

$A\,\Delta\,ABC = \frac{1}{2}\,r_a\,(b + c - a)$

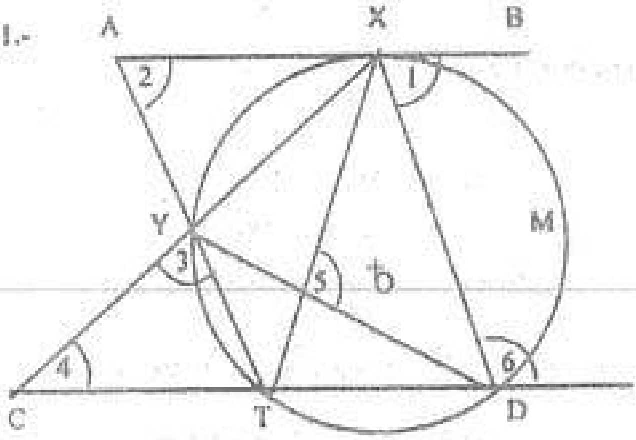
$\therefore\ A\,\Delta\,ABC = r_a\,(p-a)$ ///.

$\therefore\ A\,\Delta\,ABC = r_b\,(p-b)$ ///.

$\therefore\ A\,\Delta\,ABC = r_c\,(p-c)$ ///.

5.8. EJERCICIOS

1.-

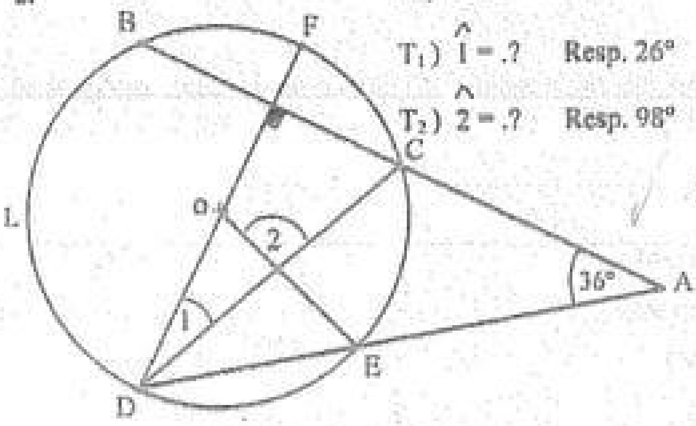


H) $\overline{AB}$ Tang. ⊙ (O , R)
$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
$\widehat{XMD} = 140°$
$\widehat{YT} = 50°$

T) Hallar las medidas de los ángulos:
$\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}$ y $\hat{6}$

Resp. 70°, 65°, 70°, 45°, 95°, 110°

2.-

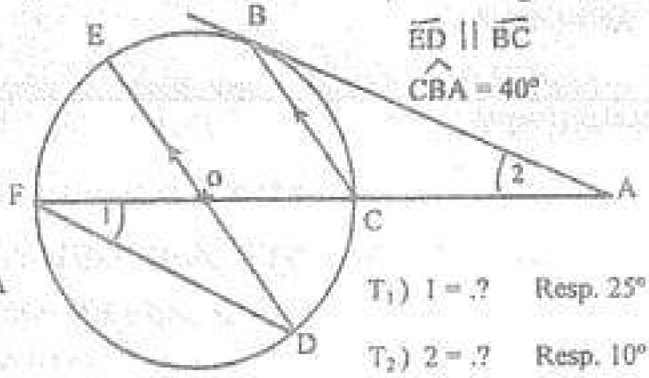


H) $\widehat{BLD} = 128°$

T_1) $\hat{1} = .?$ Resp. 26°

T_2) $\hat{2} = .?$ Resp. 98°

3.-

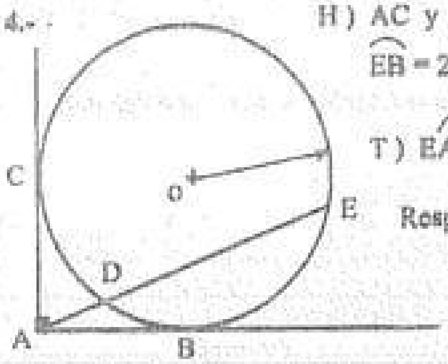


H) $\overline{AB}$ Tang. ⊙ (O, R)
$\overline{ED} \parallel \overline{BC}$
$\widehat{CBA} = 40°$

T_1) $1 = .?$ Resp. 25°

T_2) $2 = .?$ Resp. 10°

4.-

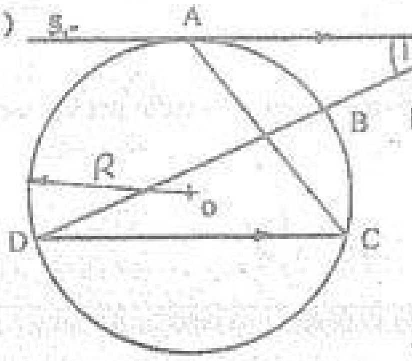


H) $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ Tangs. ⊙ (O, R)
$\widehat{EB} = 2\ \widehat{DB}$

T) $\widehat{EAB} = ?$

Resp. 15°

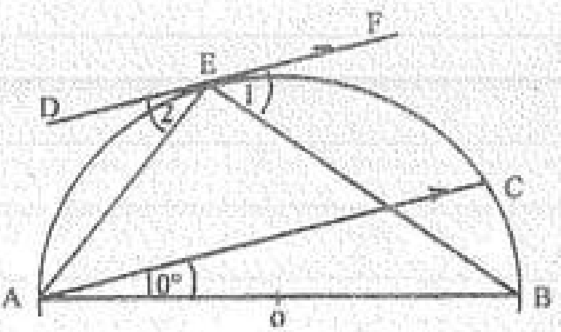
5.-



H) $\overline{AE}$ Tang. ⊙ (O, R)
$\overline{AE} \parallel \overline{DC}$
$\widehat{AB} = 60°$
$\widehat{BC} = 50°$

T) $\hat{1} = .?$ Resp. 25°

6.-

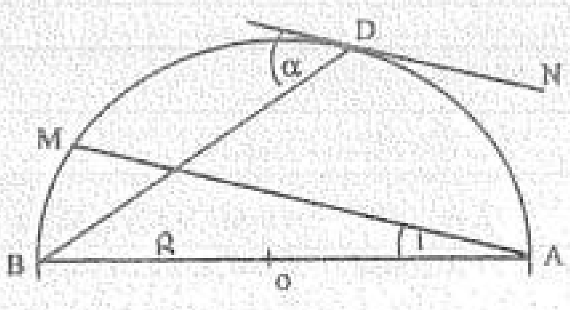


H) $\overline{DF}$ Tang. ⊙ (O, R)
$\overline{DF} \parallel \overline{AC}$

T_1) $\hat{1} = .?$ Resp. 50°

T_2) $\hat{2} = .?$ Resp. 40°

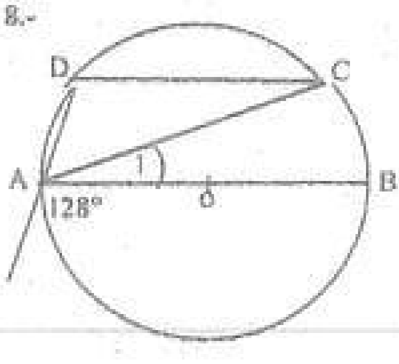
7.-



H) $\overline{ND}$ Tang. ⊙ (O, R)
ND ∥ AM

T) $\hat{1} = 2\hat{\alpha} - 90°$

8.-

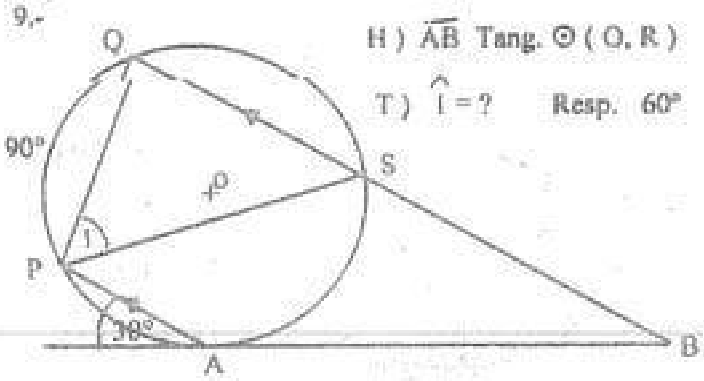


H) $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$

T) $\hat{1} = ?$

Resp. 38°

9.-



H) $\overline{AB}$ Tang. ⊙ (O, R)

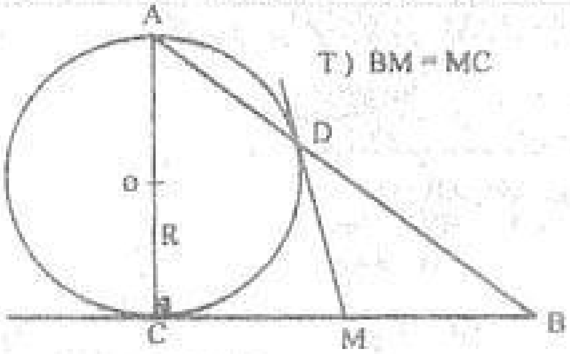
T) $\hat{1} = ?$ Resp. 60°

10.- En un triángulo rectángulo la relación entre los valores de los radios de los círculos inscrito y circunscrito es 2/5. Determinar los valores de los ángulos del triángulo. Resp. 36.87°, 53,13°

11.- Los lados de un triángulo a, b, c son iguales a 25, 24 y 27 cm. Respectivamente. Determinar R, r y r_b
Resp. 14,68 ; 7,25 ; 21,21 cm.

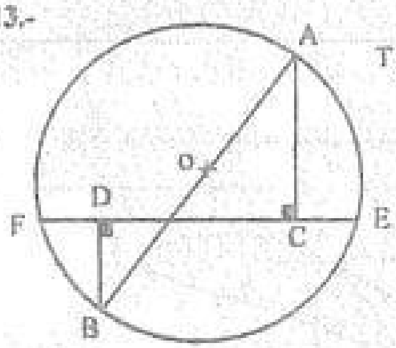
12.- H) $\overline{DM}$ Tang. ⊙ (O, R)

T) BM = MC



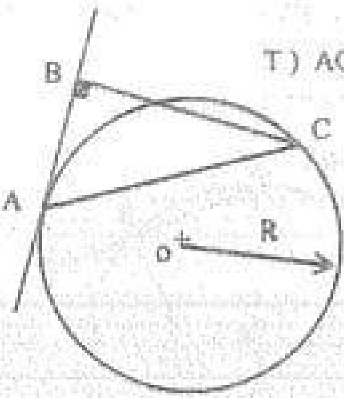
13.-

T) CE = FD



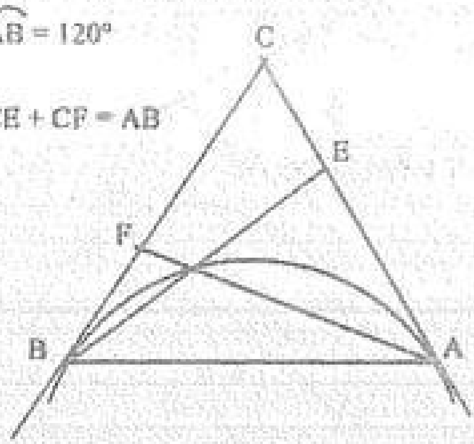
14.- H) AB Tang. ⊙ (O, R)

T) $AC^2 = 2\,R \times BC$



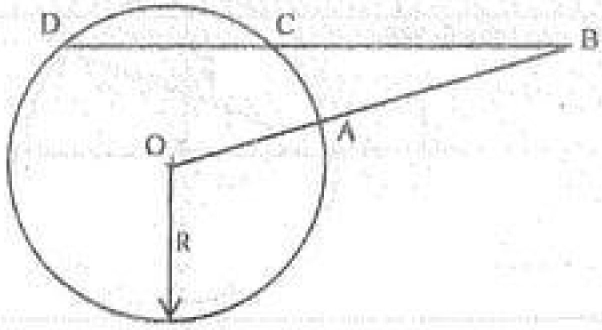
15.- H) $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ Tangs. ⊙ (O, R)
$\widehat{AB} = 120°$

T) CE + CF = AB

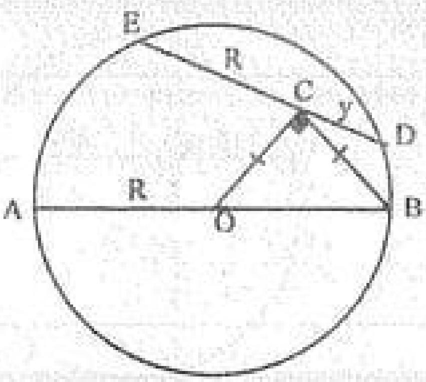


16.- H) OB = a

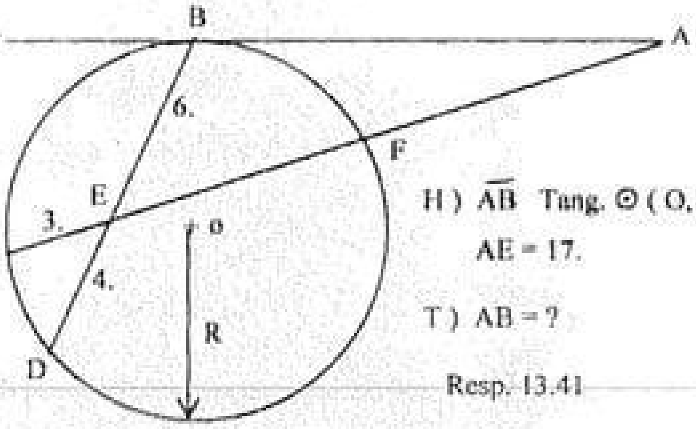
T) $BD \times BC = a^2 - R^2$



17.- T) y = R /2



18.-



H) $\overline{AB}$ Tang. ⊙ (O, R)

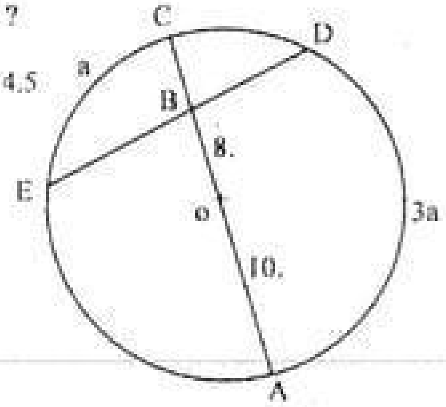
AE = 17.

T) AB = ?

Resp. 13.41

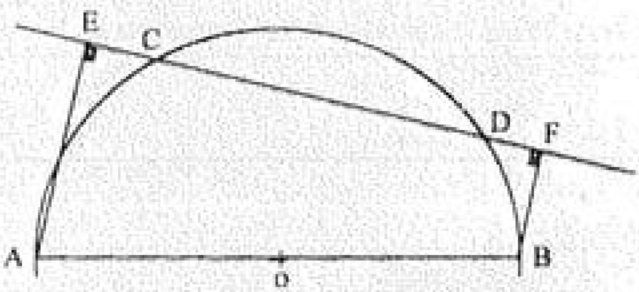
19.- T) BD = ?

Resp. 4.5

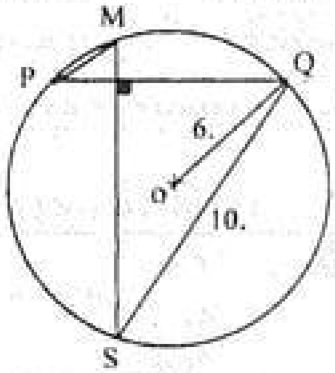


20.- T_1) EC = DF

T_2) AE x BF = DE x DF

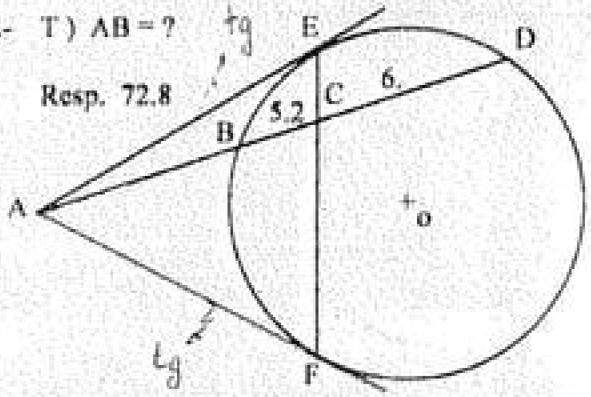


21.- T) MP = ? Resp. 6.63



22.- T) AB = ?

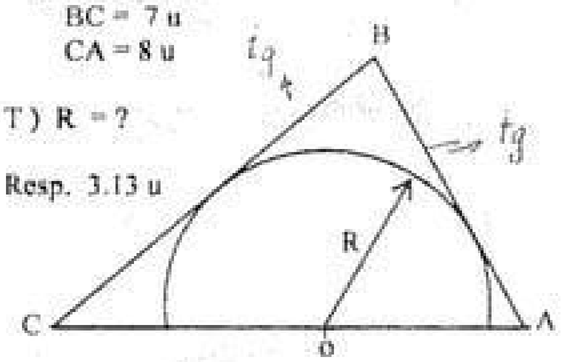
Resp. 72.8



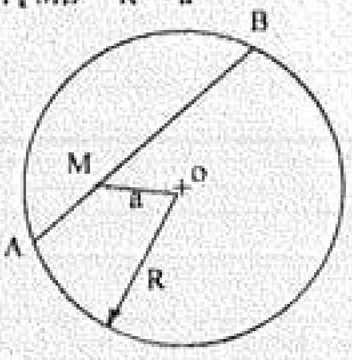
23.- H) AB = 6 u
BC = 7 u
CA = 8 u

T) R = ?

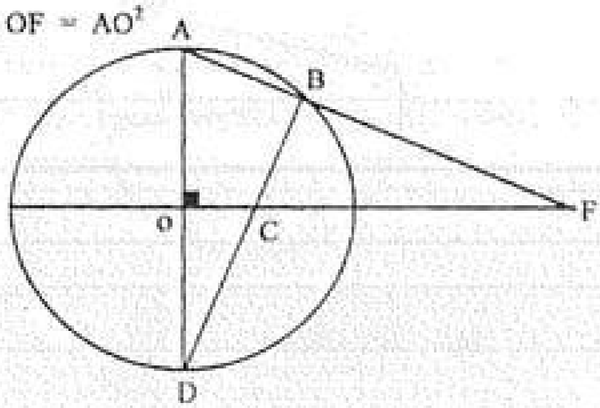
Resp. 3.13 u



24.- T) AM . MB = R^2 - a^2

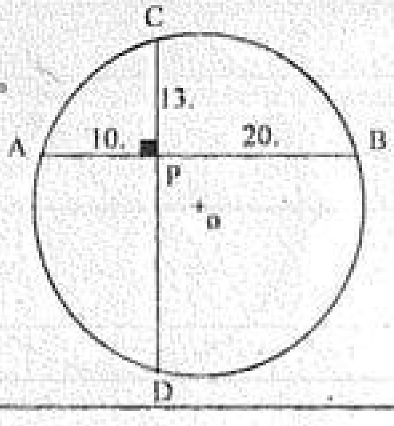


25.- T) CO . OF = AO^2



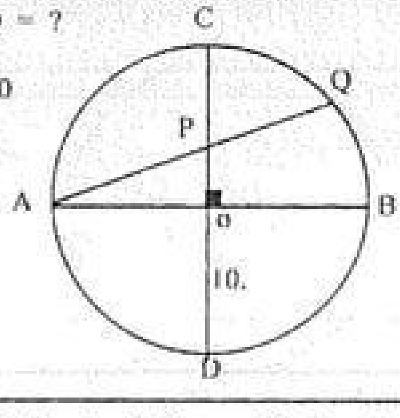
26.- T) COB = ?

Resp. 104.91°

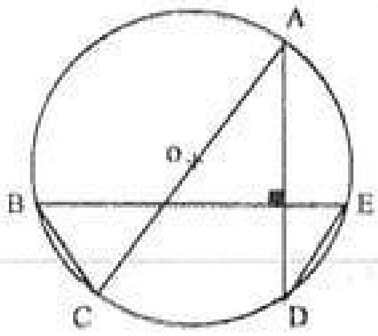


27.- T) AP . AQ = ?

Resp. 200

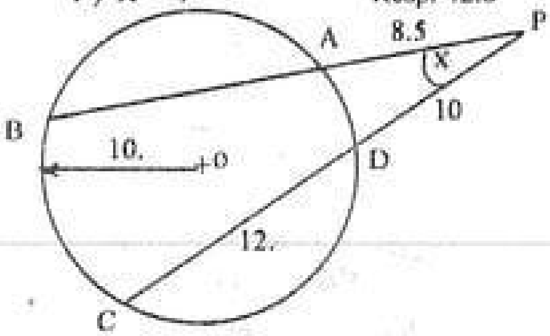


28.- T) DE = CB



29.-

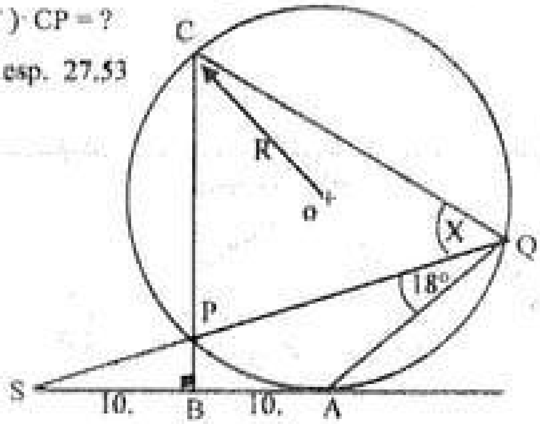
T) $\hat{X}$ = ? Resp. 42.6°



30.- H) $\overline{AS}$ Tang. ⊙ (O, R)

T) CP = ?

Resp. 27.53



31.- H) $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ Tang. ⊙ (O, R)

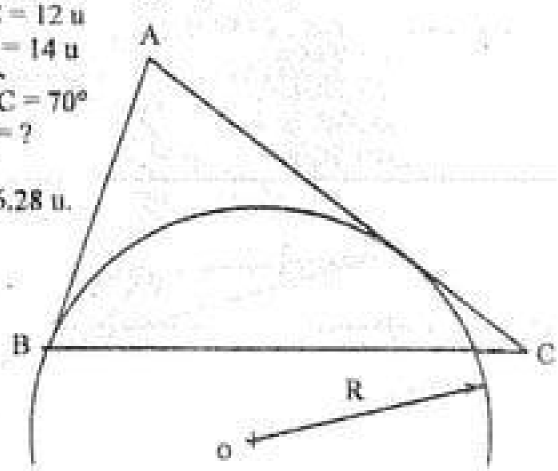
BC = 12 u

AC = 14 u

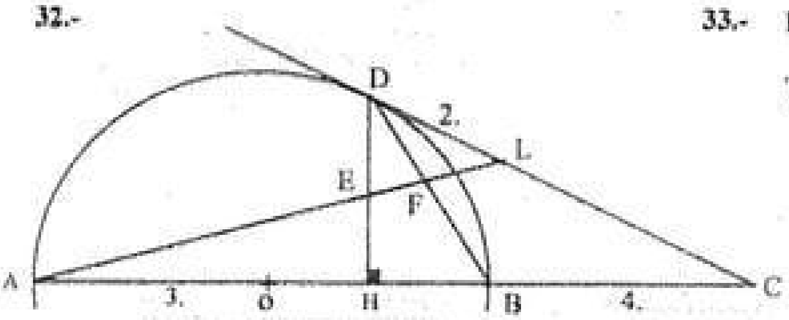
$\widehat{ABC}$ = 70°

T) R = ?

Resp. 6.28 u.



32.-



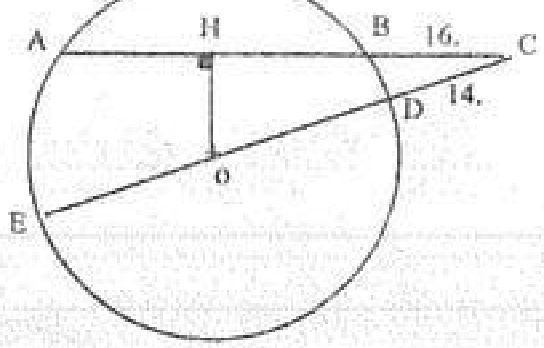
H) $\overline{DC}$ Tang. ⊙ (O, 3)

T_1) EF = ? Resp. 0.8

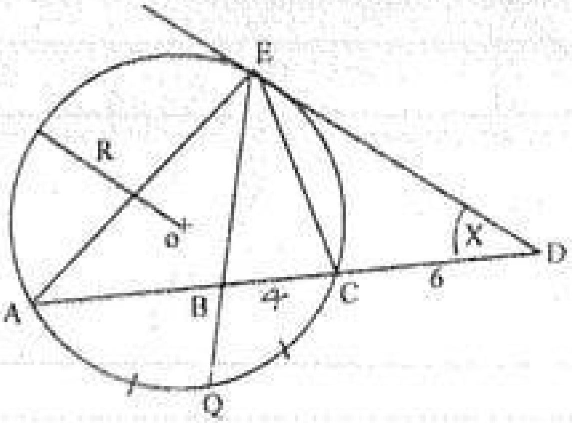
T_2) FB = ? Resp. 1.8

33.- H) AB = 40.

T) OH = ? Resp. 15.



34.-



H) DE Tang. ⊙ (O, R)

R = 6

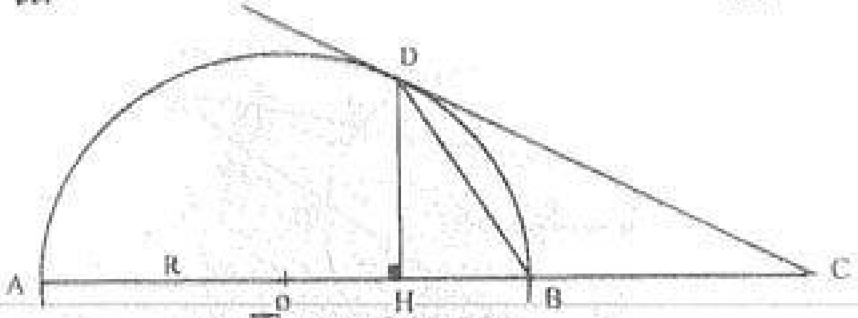
T_1) ΔEBD Isósceles

T_2) AB = ? Resp. 6.67

T_3) $\hat{X}$ = ? Resp. 44.5°

T_4) BQ = ? Resp. 3.52

35.-



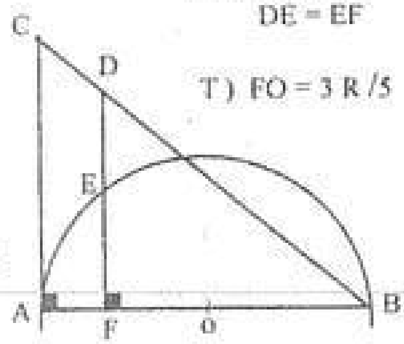
H) $\overline{DC}$ Tang. ⊙ (O, R)

T) $\overline{DB}$ Bisectriz $\widehat{HDC}$

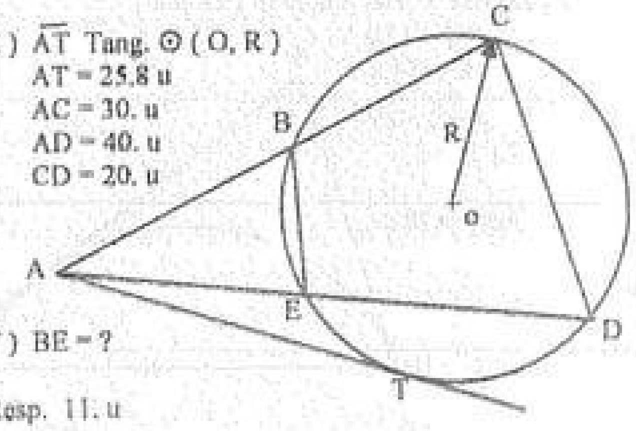
36.-

H) AB = AC
DE = EF

T) FO = 3 R /5



37.- H) $\overline{AT}$ Tang. ⊙ (O, R)
AT = 25.8 u
AC = 30. u
AD = 40. u
CD = 20. u



T) BE = ?

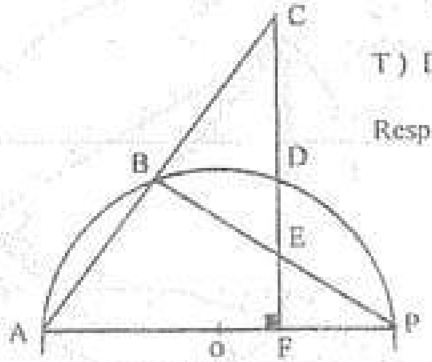
Resp. 11. u

38.-

H) EC = 9. u
EF = 3. u

T) DF = ?

Resp. 6. u

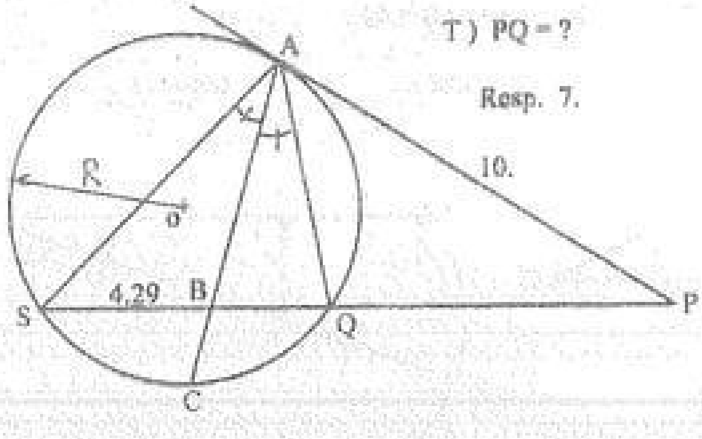


39.-

H) $\overline{PA}$ Tang. ⊙ (O, R)

T) PQ = ?

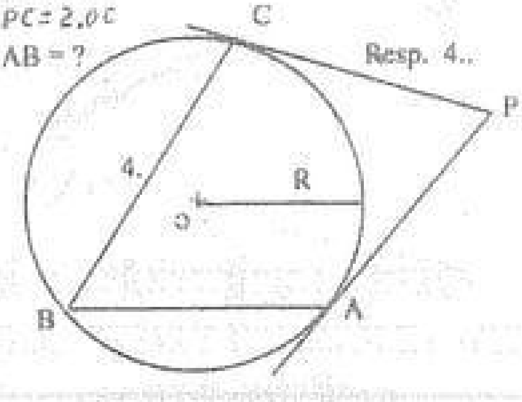
Resp. 7.



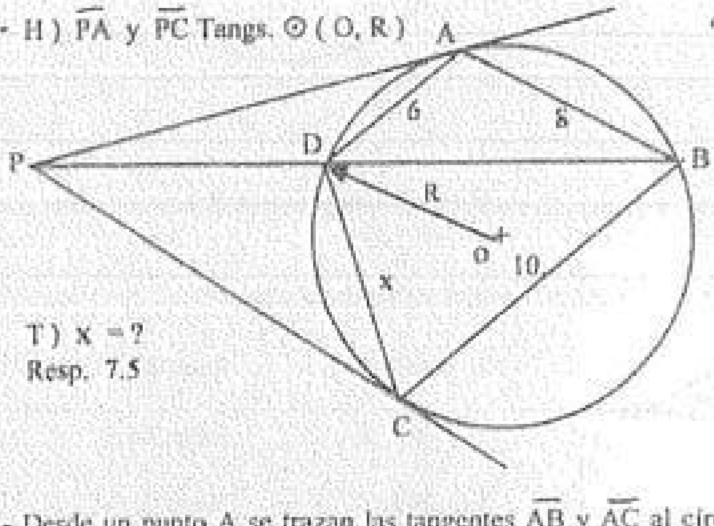
40.- H) $\overline{PA}$ y $\overline{PC}$ Tangs. ⊙ (O, R)
R = 2.15
PC = 2.0C

T) AB = ?

Resp. 4..



41.- H) $\overline{PA}$ y $\overline{PC}$ Tangs. ⊙ (O, R)

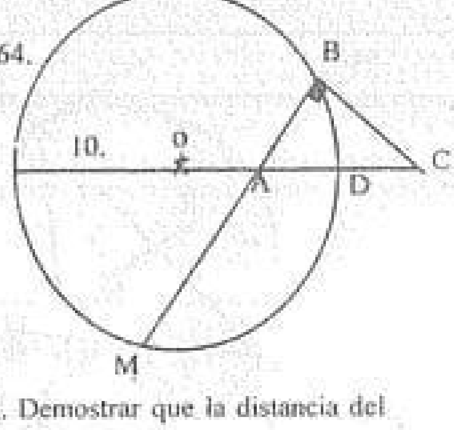


T) x = ?
Resp. 7.5

42.- H) AD = DC = 4.

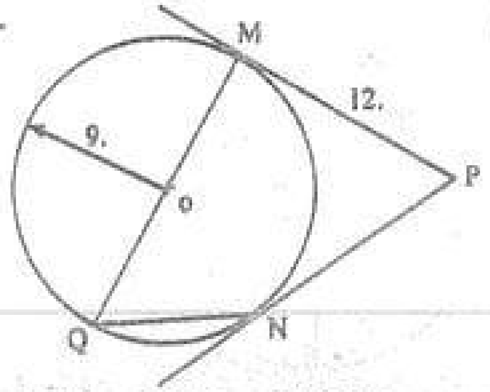
T) AM = ?

Resp. 12.64.



43.- Desde un punto A se trazan las tangentes $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ al círculo de radio R. Demostrar que la distancia del centro del círculo al incentro del ABC es R.

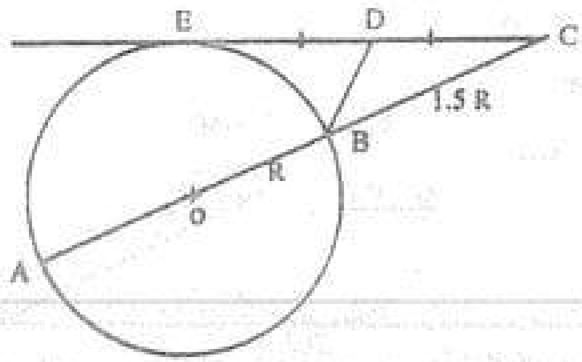
44.-



H) $\overline{PM}$ y $\overline{PN}$ Tangs. ⊙ (O, R)

T) NQ = ? Resp. 10.8

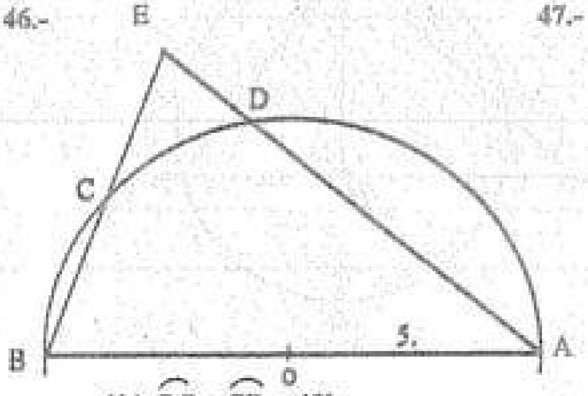
45.-



H) $\overline{EC}$ Tang. ⊙ (O, R)

T) $\widehat{BDC}$ = ? Resp. 114.22

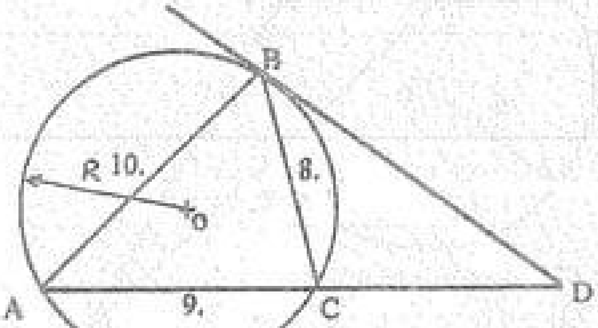
46.-



H) $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = 40°$

T) DE = ? Resp. 2.33

47.-

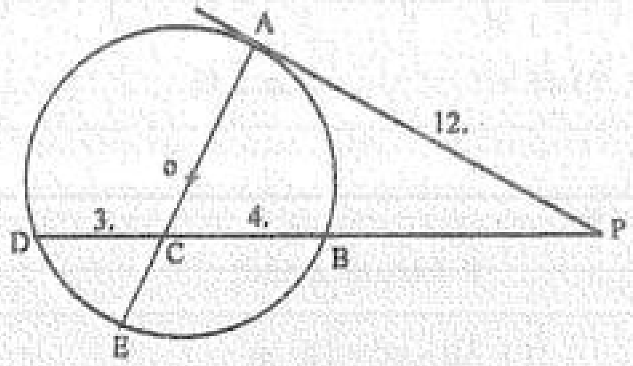


H) $\overline{DB}$ Tang. ⊙ (O, R)

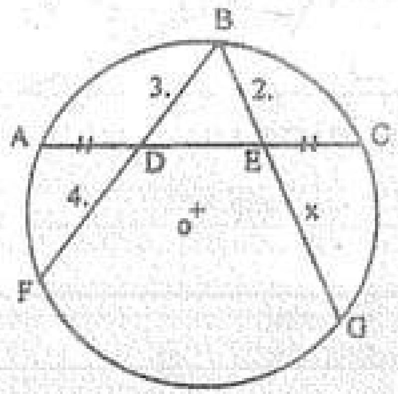
T) DB = ? Resp. 6.4

48.- H) $\overline{PA}$ Tang. ⊙ (O, R)

T) CE = ? Resp. 2.4



49.- T) x = ? Resp. 6.

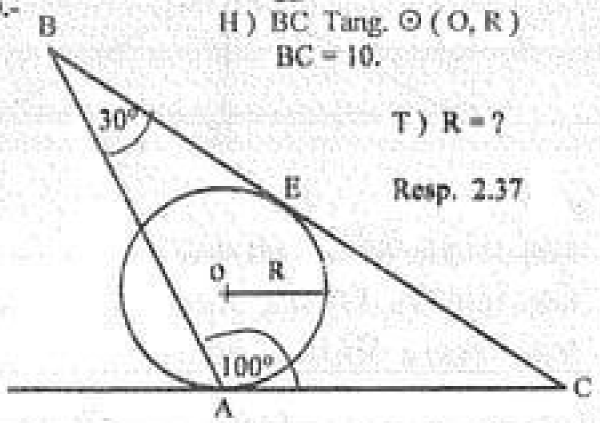


50.- H) $\overline{BC}$ Tang. ⊙ (O, R)

BC = 10.

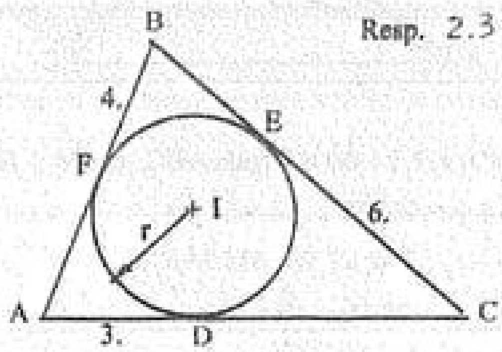
T) R = ?

Resp. 2.37



51.- T) r = ?

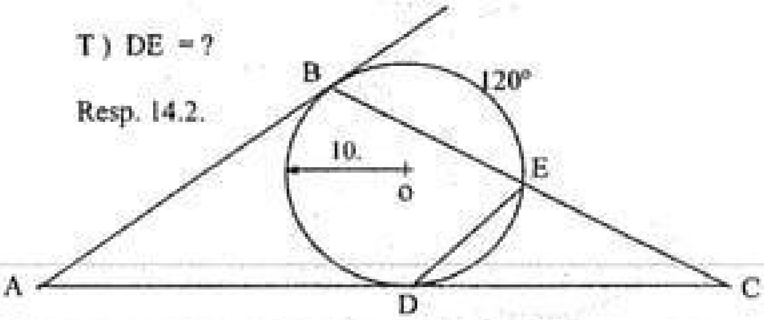
Resp. 2.35



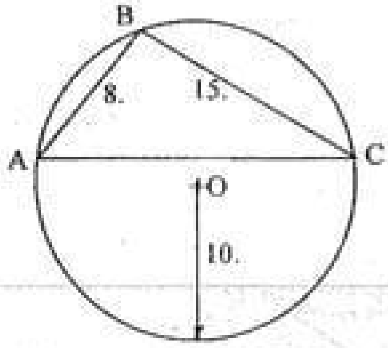
52.- H) $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ Tangs. $\odot(O, R)$
AB = BC

T) DE = ?

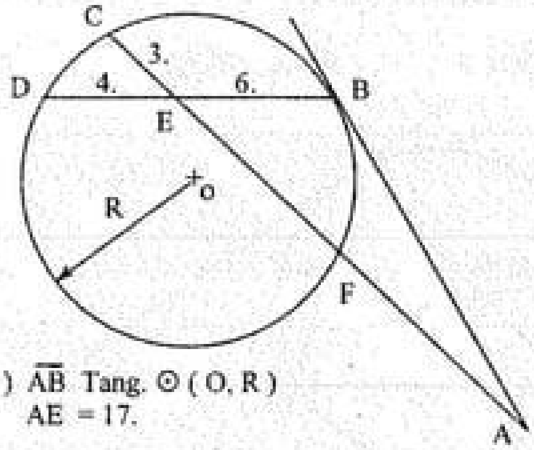
Resp. 14.2.



53.- T) AC = ? Resp. 19.



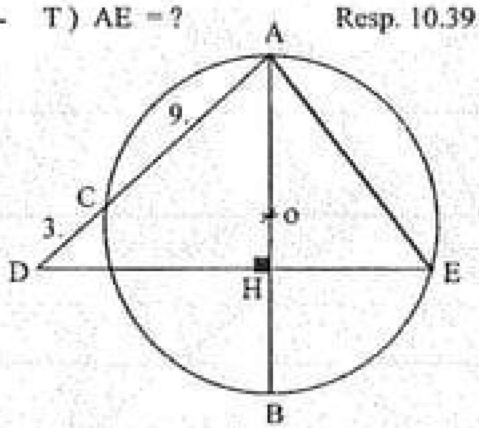
54.-



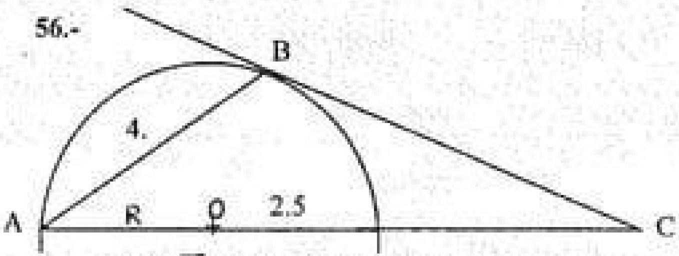
H) $\overline{AB}$ Tang. $\odot(O, R)$
AE = 17.

T) R = ? Resp. 5.58

55.- T) AE = ? Resp. 10.39



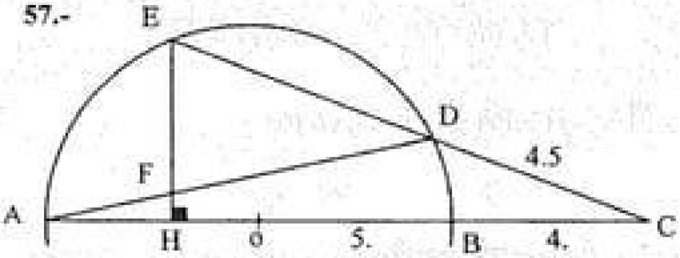
56.-



H) $\overline{CB}$ Tang. $\odot(O, R)$

T) BC = ? Resp. 8.57

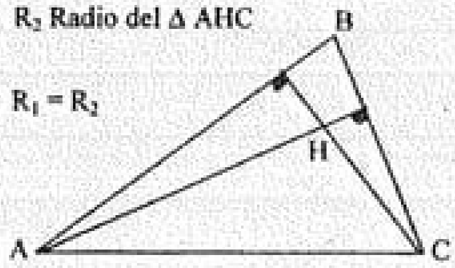
57.-



T) EF = ? Resp. 3.85

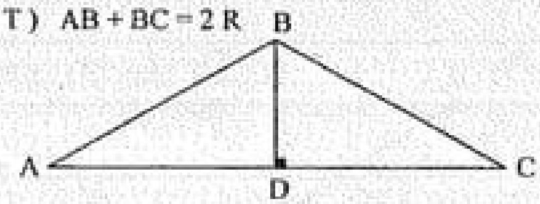
58.- H) R_1 Radio del Δ ABC
R_2 Radio del Δ AHC

T) $R_1 = R_2$



59.- H) AB = BC = 2 BD
R Radio del Δ ABC

T) AB + BC = 2 R



60.- Calcular a, b y c del triángulo ABC, dados: $A = 90°$ y

a) p = 136.69 u, R = 58.9 u — Resp. 117.8 u., 48.1 u, 107,48 u.

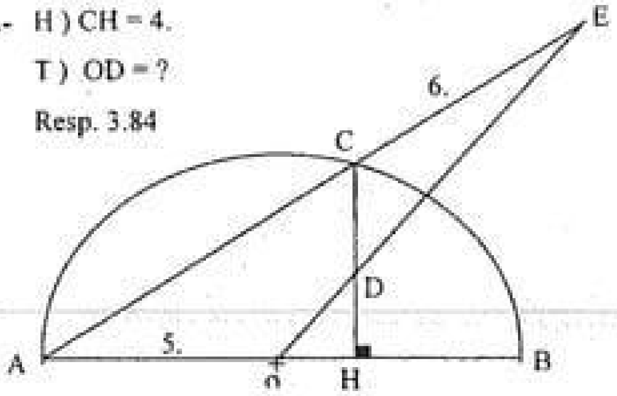
b) r = 200. u, R = 515.34 u — Resp. 1030.68 u, 854.64 u, 576 u.

c) r = 38.45 u, $\hat{B} = 42°$ — Resp. 184.52 u, 112.80 u, 145.61 u.

61.- H) CH = 4.

T) OD = ?

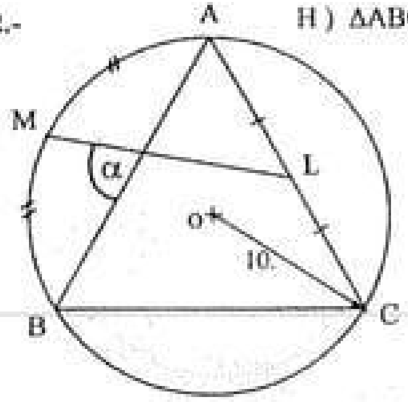
Resp. 3.84



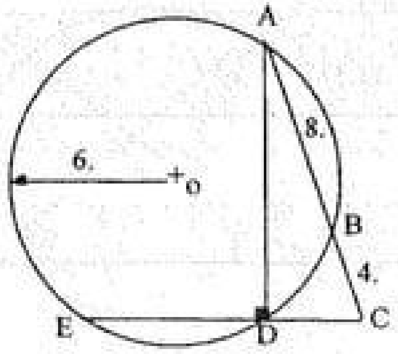
62.- H) ΔABC Equilátero

T) $\widehat{\alpha}$ = ?

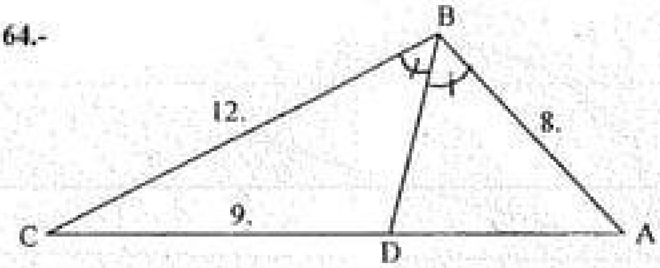
Resp. 70.9°



63.- T) BD = ? Resp. 4.9



64.-



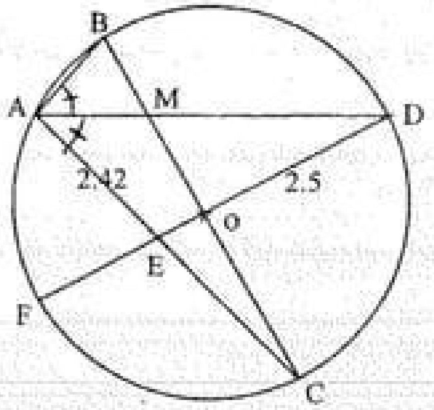
T_1) R Δ DBC = ? Resp. 6.10

T_2) r Δ ABD = ? Resp. 1.86

T_3) r_c Δ ABC = ? Resp. 5.03

65.- H) EO = 0,37

T) MD = ? Resp. 3.11

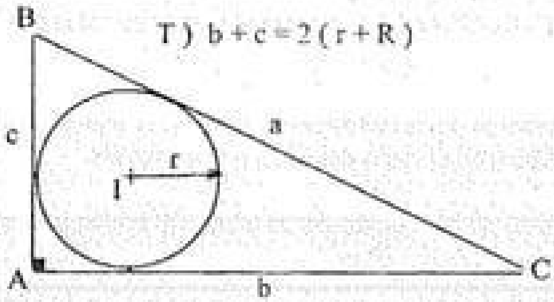


66.- H) ⊙ (I, r) Inscrito Δ ABC

R Radio del círculo

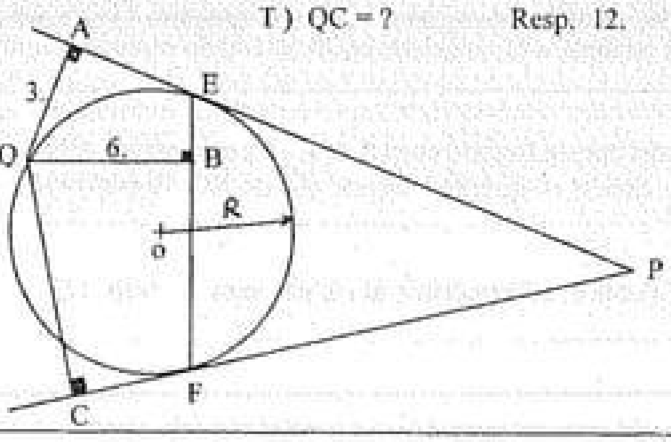
Circunscrito Δ ABC

T) b + c = 2 (r + R)



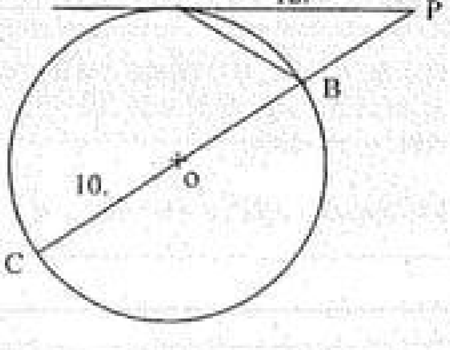
67.- H) $\overline{PA}$ y $\overline{PC}$ Tangs. ⊙ (O, R)

T) QC = ? Resp. 12.



68.- H) $\overline{PA}$ Tang. ⊙ (O, 10)

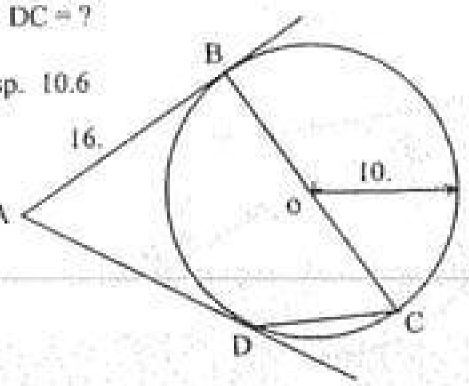
T) AB = ? Resp. 8.43



69.- H) $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ Tangs. $\odot$ (O,10)

T) DC = ?

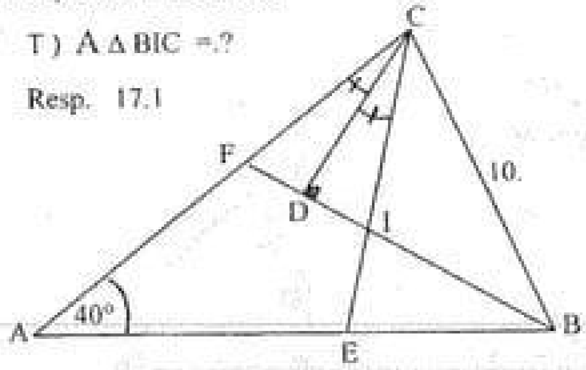
Resp. 10.6



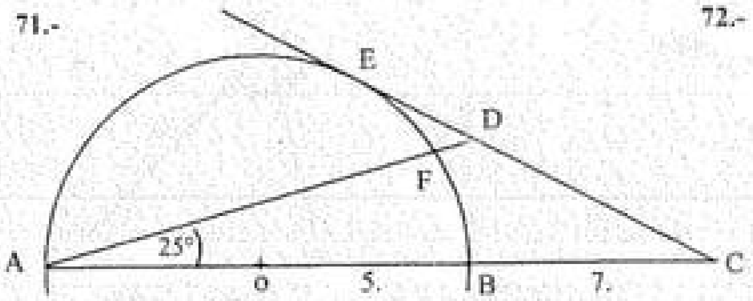
70.- H) I Incentro Δ ABC

T) A Δ BIC = ?

Resp. 17.1



71.-



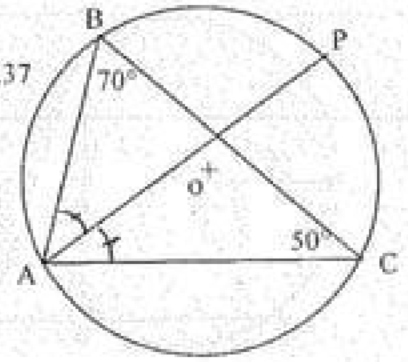
H) $\overline{CE}$ Tang. $\odot$ (O, 5)

T) DF = ?   Resp. 0.24

72.- H) BC = 10.

T) AP = ?

Resp. 11.37



73.- En el interior de un círculo de radio igual a 13 cm, se tiene que un punto M que esta a 5 cm del centro del círculo. Por M se traza una cuerda AB = 25 cm. Hallar la longitud de los segmentos en que el punto M divide a la cuerda $\overline{AB}$. Resp. 9 cm; 16. cm

74.- Hallar el área de un triángulo isósceles siendo el radio del círculo inscrito r = 5 m. y el radio del círculo ex-inscrito a los lados iguales 12m. Resp. 132.84 m^2.

75.- El área de un triángulo es 600 m^2, si uno de sus lados mide 75 m, el producto de los otros dos lados es 1300. Calcular el radio del círculo circunscrito Resp. 40.63 m^2.

76.- Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 40 m. Calcular el radio del círculo inscrito, si el área del triángulo es 180 m^2 Resp. 4 m.

77.- Calcular los lados de un Δ ABC, sabiendo que: 2a = b + c ; R = 65 u. ; ha = 96 u.
Resp. 112 u.; 120u.; 104u.

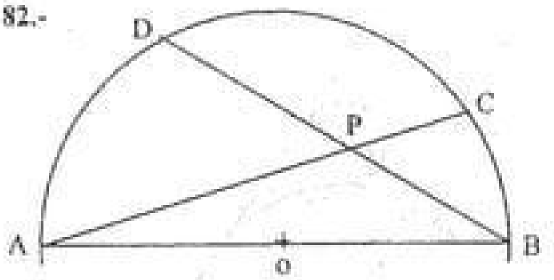
78.- Dados los tres lados del Δ ABC: a = 10 u., b = 12 u., c = 16 u. Calcular R y r.
Resp. 8 u.; 3,15 u.

79.- Los puntos medios de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ del Δ ABC son: L, M y N respectivamente. Probar que la tangente en A del círculo circunscrito al Δ ABC, es paralela a la tangentes en M al círculo circunscrito al Δ LMN.

80.- Si: $\hat{A} = 2\hat{C}$, $\hat{B} = 2\hat{A}$ del Δ ABC; si O es el centro del círculo inscrito en el Δ ABC, O_b es el centro del círculo ex-inscrito tangente al lado $\overline{AC}$ y O_a es el centro del círculo ex-inscrito tangente al lado $\overline{BC}$. Demostrar que Δ ABC ~ Δ OO_bO_a.

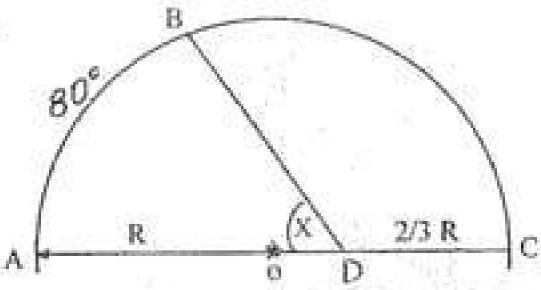
81.- En un Δ ABC: a = b = 10 u. ; $\hat{C}$ = 104°. Hallar la distancia del ortocentro al circuncentro Resp. 12. u

82.-



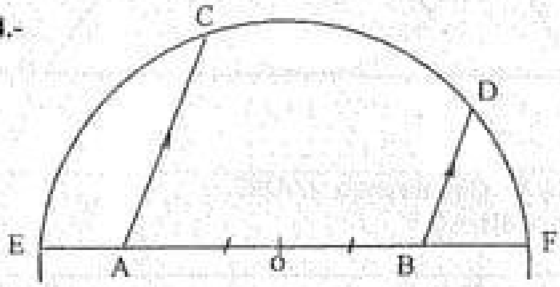
T) $AC \times AP + BD \times BP = AB^2$

83.-



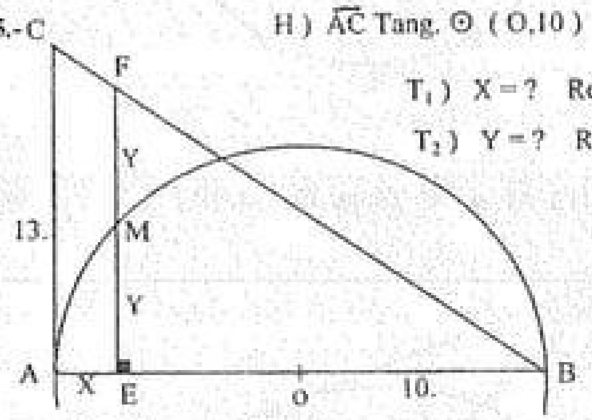
T) $\hat{X} = ?$ Resp. 62.53°

84.-



T) $AC \times BD = BF \times EB$

85.-

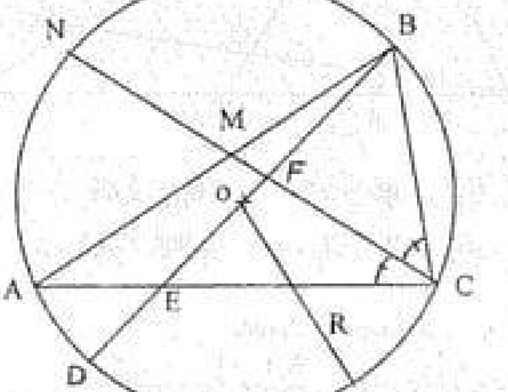


H) $\overline{AC}$ Tang. ⊙ (O,10)

T_1) X = ? Resp. 1.93

T_2) Y = ? Resp. 5.97

86.-



H) R = 5. u.
BC = 6. u.
AB = 9. u.

T_1) AE = ? Resp. 4.4 u

T_3) MB = ? Resp. 3.4 u.

T_3) EB = ? Resp. 6.1 u.

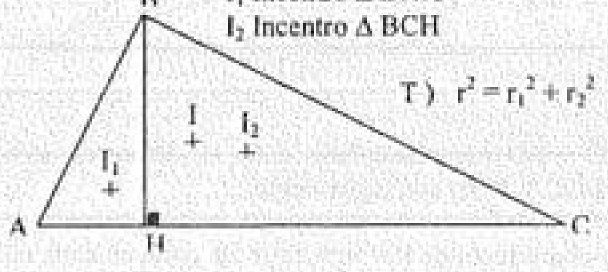
T_4) MF = ? Resp. 1.49 u

T_5) MN = ? Resp. 3.01 u.

T_6) ED = ? Resp. 3.02 u.

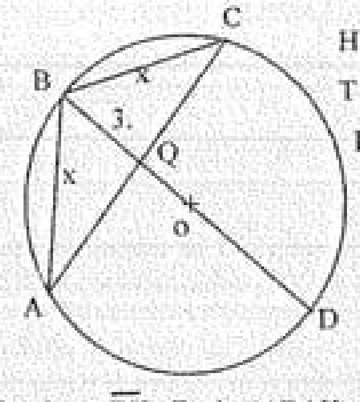
87.-

H) I Incentro Δ ABC
I_1 Incentro Δ BAH
I_2 Incentro Δ BCH



T) $r^2 = r_1^2 + r_2^2$

88.-



H) QD = 9.

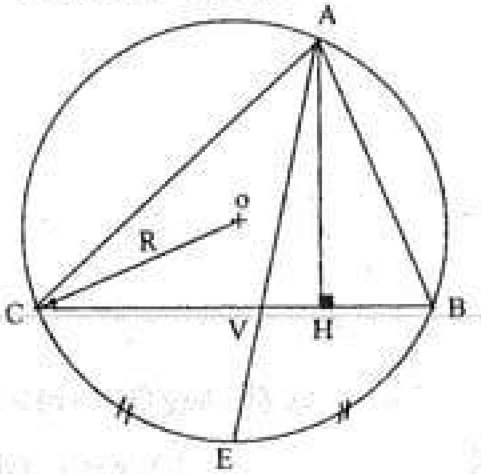
T) x = ?

Resp. 6.

89.- En un triángulo equilátero ABC, de lado a, se traza la altura $\overline{BK}$. En los ΔBAK y ΔBCK se inscriben círculos y se traza la tangente externa común diferente al lado $\overline{AC}$. Hallar el área del triángulo formado por esta tangente y el vértice B. Resp. $(a^2 \sqrt{3})/12$

90.- En la base AC del triángulo isósceles ABC se toma un punto Q de manera que AQ = m y QC = n (m > n). En los triángulos ABQ y CBQ, están inscritos círculos. Hallar la distancia entre los puntos de tangencia de estos círculos en el lado $\overline{BQ}$. Resp. (m - n) / 2

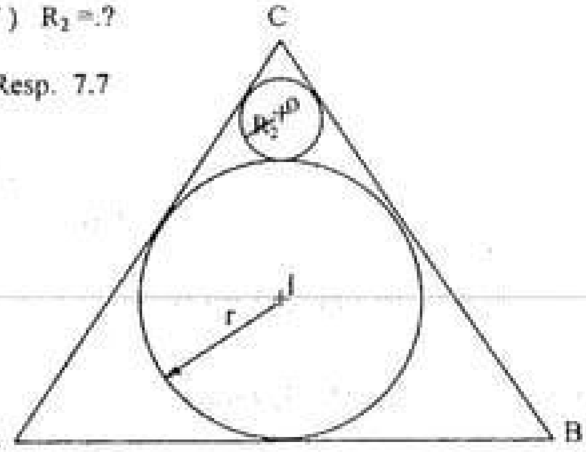
91.- T) AE, AV = AH, 2R



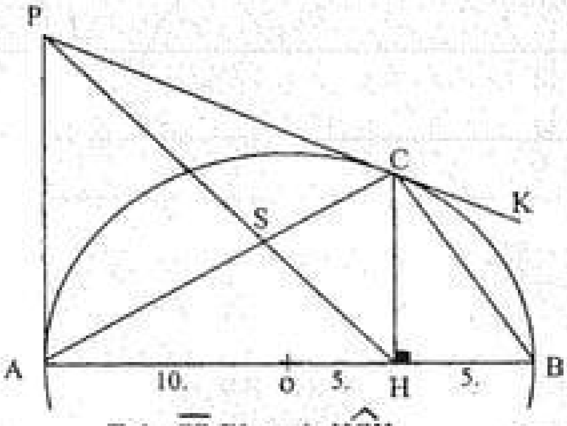
92.- H) AB = BC = CA = 80.

T) R_2 = ?

Resp. 7.7



93.- H) $\overline{AP}$ y $\overline{PC}$ Tangs. ⊙ (O, 10)

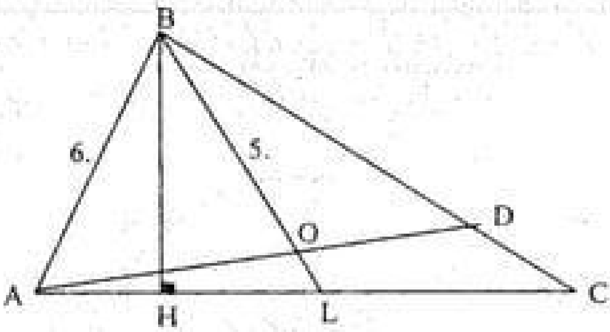


T_1) $\overline{CB}$ Bisectriz $K\widehat{C}H$

T_2) PS = ? Resp. 7.65

94.- H) O Circuncentro Δ ABC

BH = 5.5



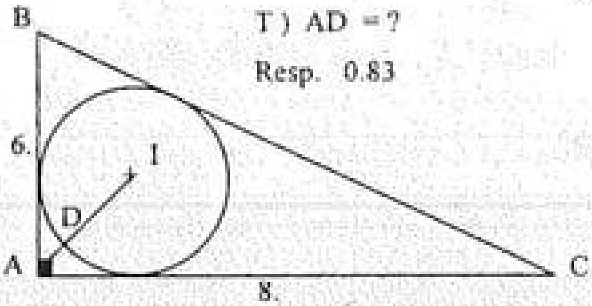
T_1) OD = ? Resp. 2.48

T_2) OL = ? Resp. 1.41

95.

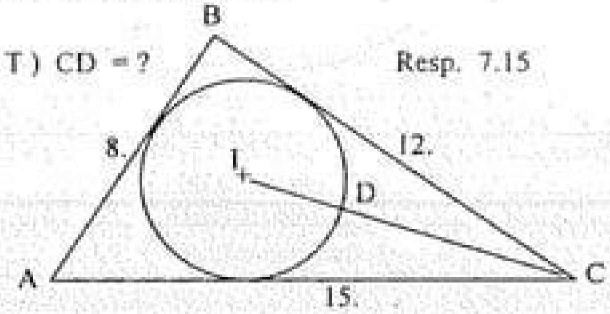
T) AD = ?

Resp. 0.83



96.- H) I Incentro Δ ABC

T) CD = ? Resp. 7.15



97.- En un círculo de centro O se trazan dos cuerdas $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ perpendiculares entre sí, demostrar que los triángulos AOB y COD como también los triángulos BOC y AOD son equivalentes.

98.- En un círculo, dos cuerdas se cortan de tal manera que el producto de los segmentos de corte en cada una es de 145 cm^2. La distancia del centro al punto de intersección es 12 u. Calcular el radio. Resp. 17 u.

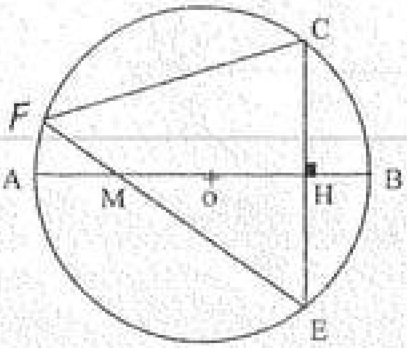
99.- Demostrar que la suma de los cuadrados de los segmentos que une un punto de un semicírculo, con los dos puntos de trisección del diámetro, es igual a 5/9 del cuadrado del diámetro.

100.- Los lados de un Δ ABC son: a = 21 u; b = 30 u; c = 33 u. Hallar: R, r y $\overline{IO_a}$.

(O_a ex centro - I incentro del Δ ABC). Resp. 16.84 u.; 7.34 u.; 22.25 u.

101.- H) AM = MO = 10 u.
BH = 4 u.

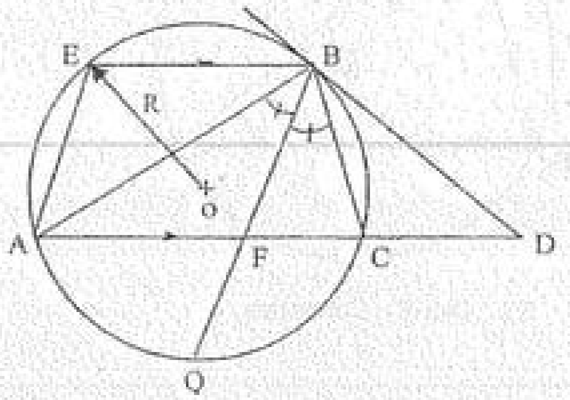
T) CF = ? Resp. 35.71 u.



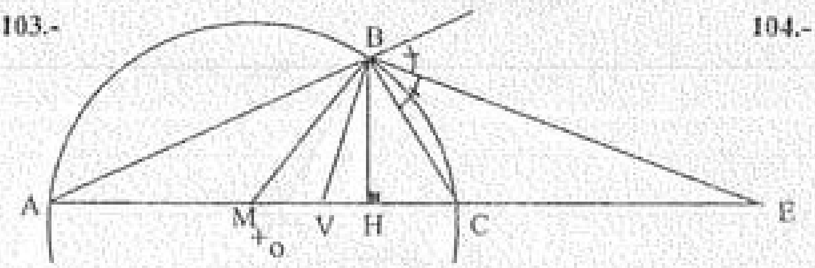
102.- H) $\overline{BD}$ Tang. ⊙ (O, R)

T_1) AB x BC = EB x BD

T_2) AB x BC = BQ x BF



103.-

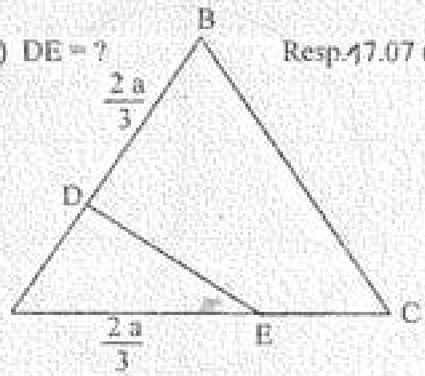


H) Δ ABC Escaleno
AM = MC
$\overline{BV}$ Bisectriz $\widehat{ABC}$

T) AB x BC = MH x VE

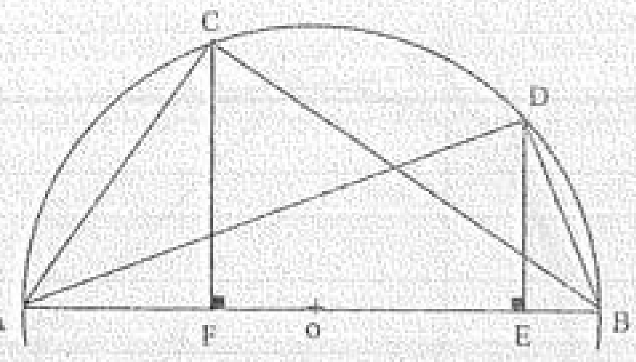
104.- H) Δ ABC Equilátero
a = 30 u.

T) DE = ? Resp. 17.07 u.



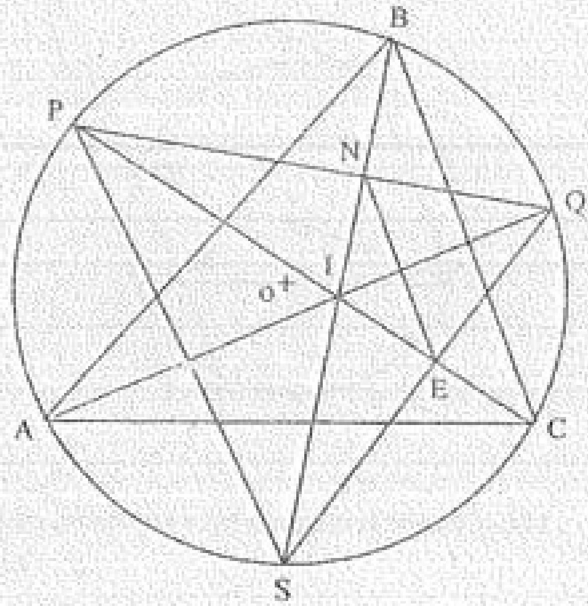
105.- H) I Incentro Δ ABC

T) $\frac{AC^2}{AD^2} = \frac{AF}{AE}$

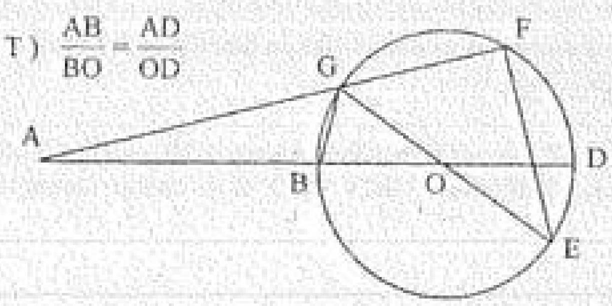


106.- H) I Incentro Δ ABC

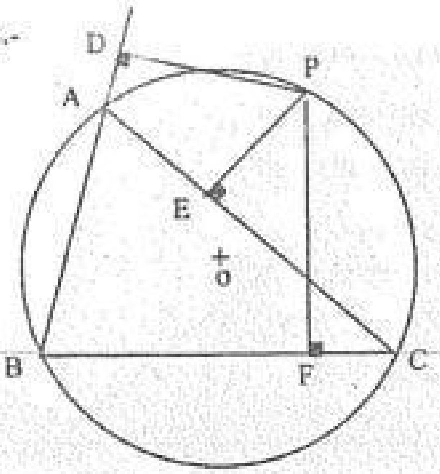
T) EN = BC/2



107.- T) $\frac{AB}{BO} = \frac{AD}{OD}$

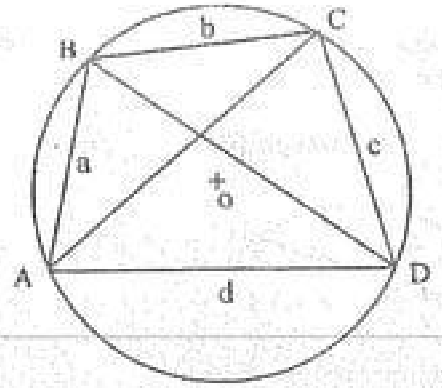


108.-



T) D-E-F Colineales

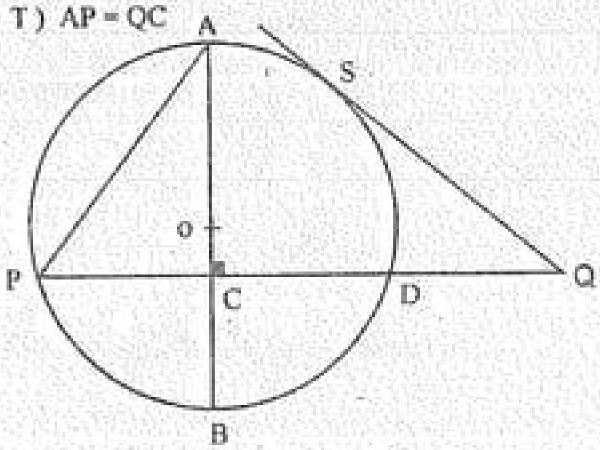
109.-



T) $AC = \dfrac{ac + bd}{BD}$

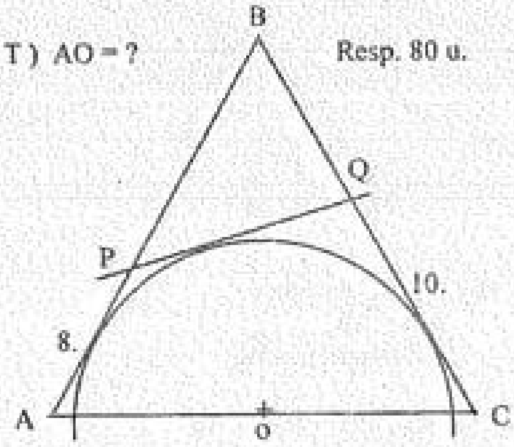
110.- H) QS = AC

T) AP = QC



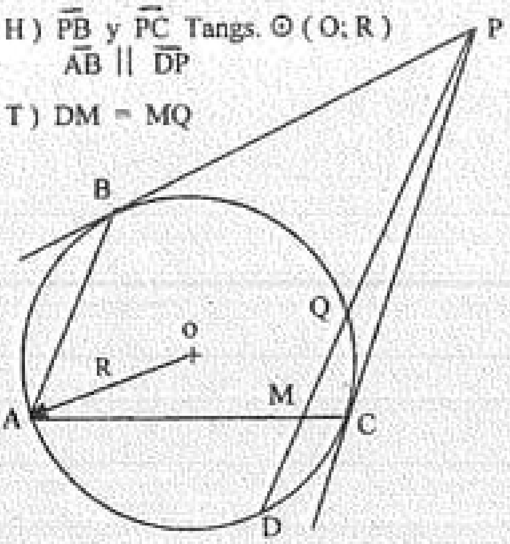
111.- H) $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{PQ}$ Tangs. ⊙ (O; R)
AB = BC

T) AO = ? Resp. 80 u.



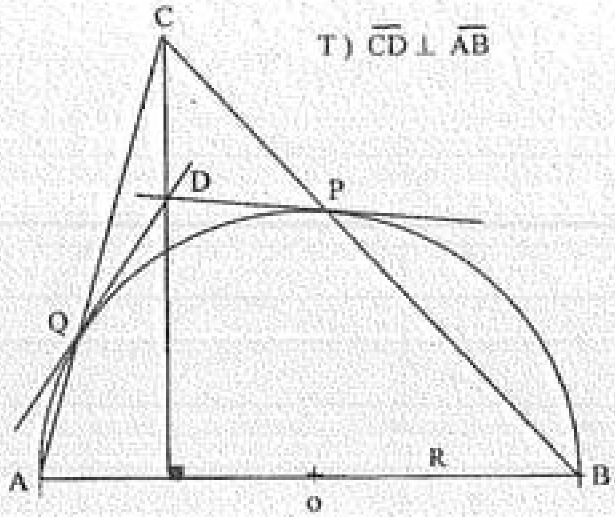
112.- H) $\overline{PB}$ y $\overline{PC}$ Tangs. ⊙ (O; R)
$\overline{AB}$ || $\overline{DP}$

T) DM = MQ



113.- H) $\overline{DP}$ y $\overline{DQ}$ Tangs. ⊙ (O; R)

T) $\overline{CD} \perp \overline{AB}$



114.- Calcular la distancia entre los centros de los círculos inscrito y circunscrito en función de los radios.

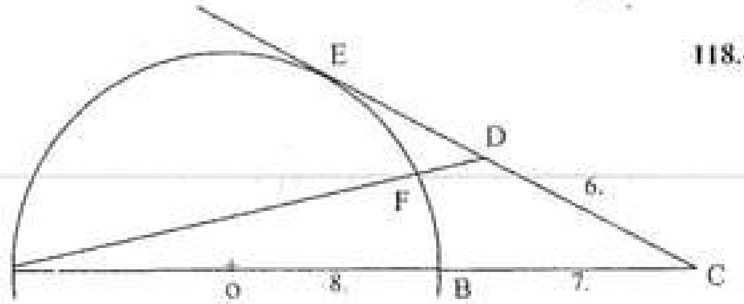
Resp. $\sqrt{R(R-2r)}$

115.- En un triángulo rectángulo ABC: $\hat{A} = 90°$ y $\hat{C} = 30°$, se tiene trazada la bisectriz $\overline{BD}$. Hallar la distancia entre los centros de los círculos inscritos en los triángulos ABC y CBD si el cateto menor es 1 u. Resp. 0,52 u.

116.- En un círculo se construyen tres cuerdas que se intersecan de dos en dos. Cada cuerda está dividida por los puntos de intersección en tres partes iguales. Hallar el radio del círculo si una cuerda es de longitud a.

Resp. $\frac{a}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}$

117.-



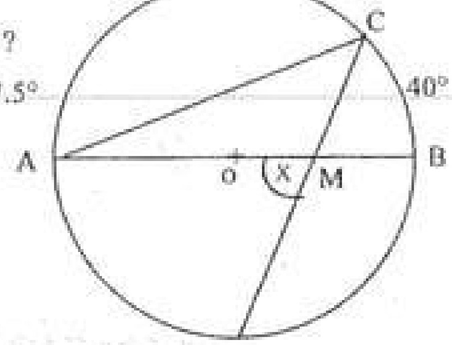
H) $\overline{CE}$ Tang. ⊙ (O; 8)

T) DF = ? Resp. 2.92

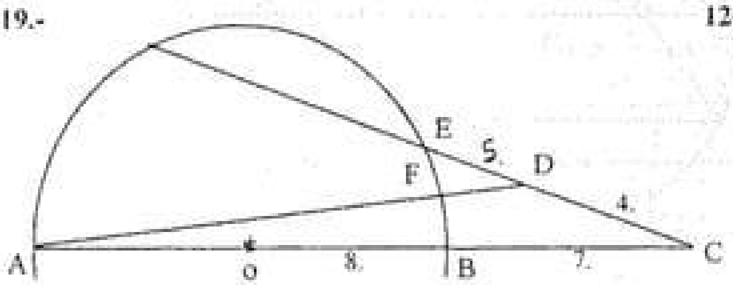
118.- H) OM = MB

T) $\hat{x}$ = ?

Resp. 67.5°



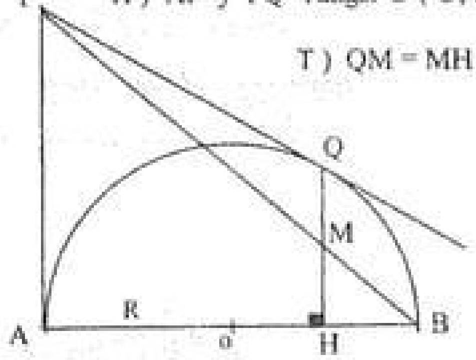
119.-



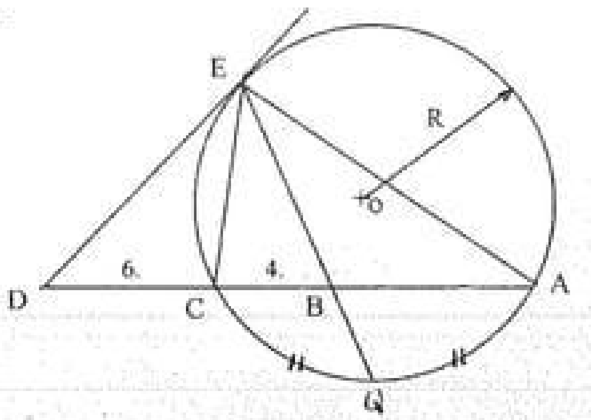
T) FD = ? Resp. 3.5

120.- H) $\widehat{AP}$ y $\overline{PQ}$ Tangs. ⊙ (O; R)

T) QM = MH



121.-



H) R = 10.

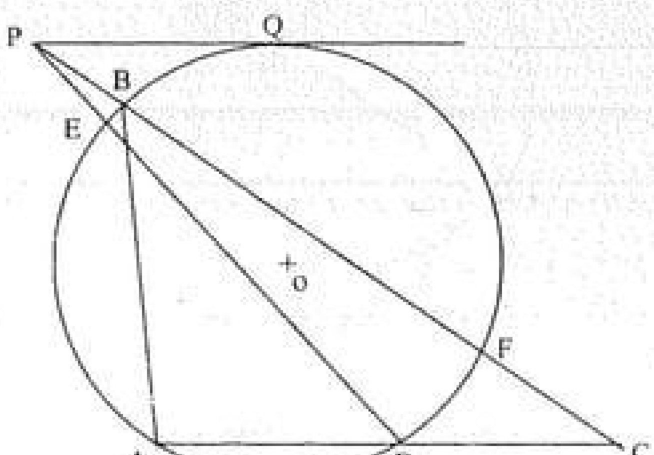
T_1) Δ EBD Isósceles

T_2) AB = ? Resp. 6.67 u.

T_3) $\widehat{EDC}$ = ? Resp. 80.8°

T_4) BQ = ? Resp. 2.04 u.

122.-



H) $\overline{PQ}$ Tang. ⊙ (O , R)

$\overline{PQ} \parallel \overline{AD}$

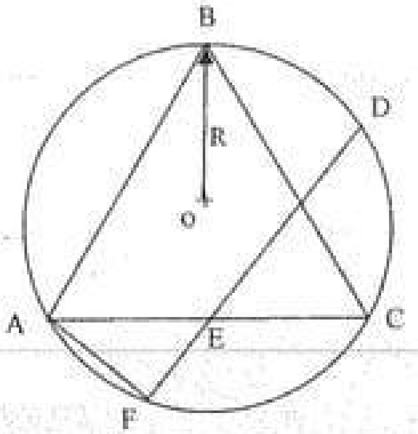
$\widehat{AQ}$ = 150°

$\widehat{BQ}$ = 30°

$\widehat{EQ}$ = 50°

T) $\widehat{ABC}$ = ? Resp. 76.7°

123.-



H) AB = BC = AC

$\widehat{BD} = \widehat{DC}$

AE = EC

R = 5 u.

T_1) AF = ?	Resp. 3.27 u.
T_2) DF = ?	Resp. 9.45 u.
T_3) EF = ?	Resp. 2.84 u.

124.-

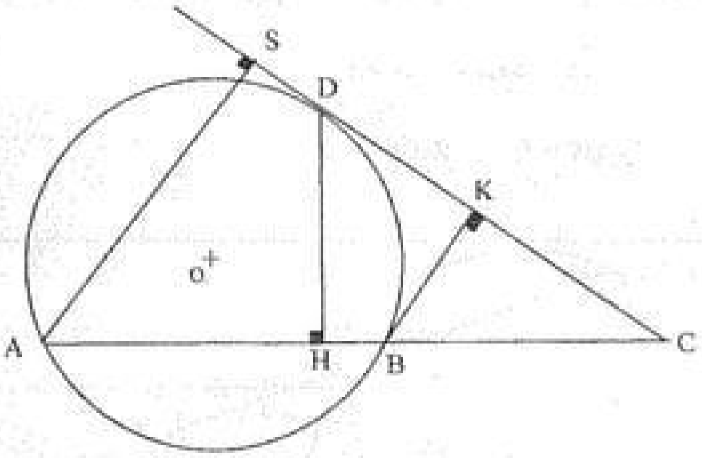
H) $\overline{CS}$ Tang. ⊙ (O , R)

AB = 12.5 u.

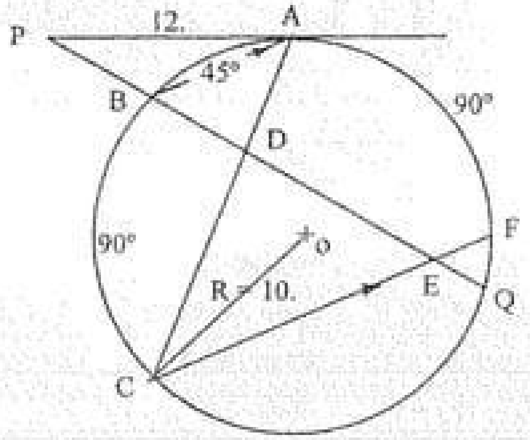
AS = 13.5 u.

BK = 6 u.

T) HD = ? Resp. 9. u.



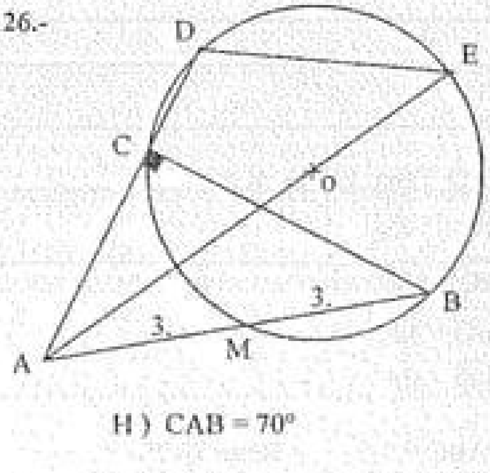
125.-



H) $\overline{AP}$ Tang. ⊙ (O , R)

T_1) BD = ?	Resp. 5.46 u.
T_2) EF = ?	Resp. 3.29 u.

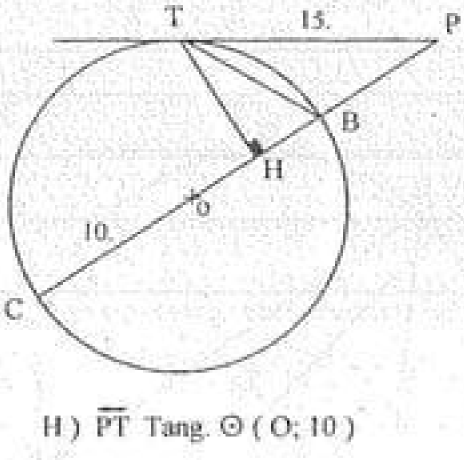
126.-



H) CAB = 70°

T) DE = ? Resp. 4.63 u.

127.-



H) $\overline{PT}$ Tang. ⊙ (O; 10)

T_1) TB = ?	Resp. 9.43 u.
T_2) TH = ?	Resp. 8.32 u.

5.8.1. EJERCICIOS RESUELTOS

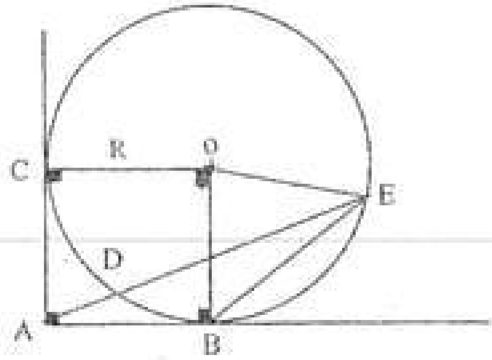
4.- 1.- $\widehat{EAB} = \dfrac{\overset{\frown}{EB} - \overset{\frown}{DB}}{2} = \dfrac{2\overset{\frown}{DB} - \overset{\frown}{DB}}{2} = \dfrac{\overset{\frown}{DB}}{2} = \widehat{DEB}$

2.- $\therefore \Delta$ ABE Isósceles

3.- AC = AB = CO = BO = BE = EO = R

4.- $\therefore \Delta$ OBE Equilátero y $\overset{\frown}{BE} = 60°$

5.- $\Rightarrow \overset{\frown}{DB} = 30°$ y $\widehat{EAB} = 15°$



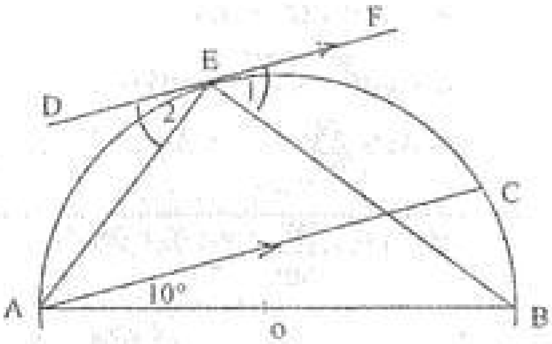
6.- 1.- $\overset{\frown}{CB} = 2 \times 10° = 20°$

2.- $\overline{AB}$ Diámetro $\therefore$ $\overset{\frown}{AE} + \overset{\frown}{EC} + 20° = 180°$

3.- $\overline{DF} \parallel \overline{AC}$ $\Rightarrow \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{EC} = 80°$

4.- $\hat{1} = \dfrac{\overset{\frown}{EC} + \overset{\frown}{CB}}{2} = 50°$

$\hat{2} = \dfrac{\overset{\frown}{AE}}{2} = 40°$

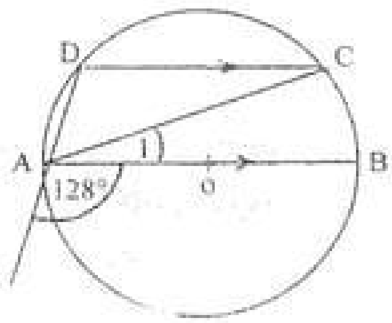


8.- 1.- $\widehat{DAB} = 180° - 128° = 52° = \dfrac{\overset{\frown}{DCB}}{2}$ $\therefore \overset{\frown}{DCB} = 104°$

2.- $\overline{AB}$ Diámetro y $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$

$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CB} = 180° - \overset{\frown}{DCB} = 76°$

3.- $\therefore \hat{1} = \dfrac{\overset{\frown}{CB}}{2} = 38°$



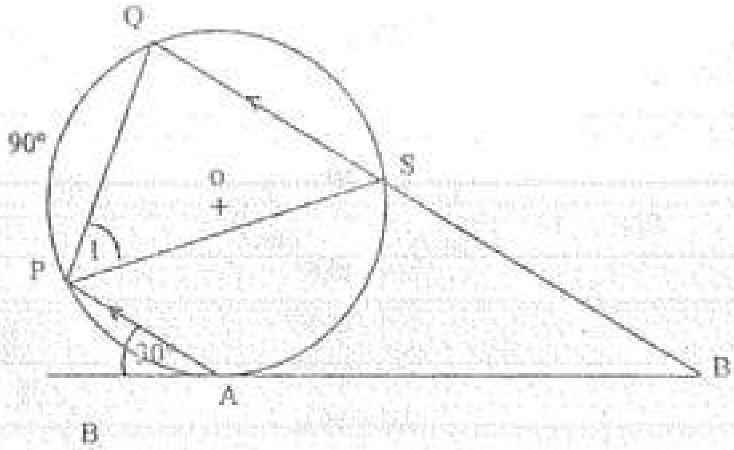
9.- 1.- $\overset{\frown}{AP} = 2 \times 30° = 60°$

2.- $\overline{AP} \parallel \overline{BQ}$ $\Rightarrow$ $\overset{\frown}{PQ} = \overset{\frown}{AS} = 90°$

3.- $90° + \overset{\frown}{QS} + 90° + 60° = 360°$

$\therefore$ $\overset{\frown}{QS} = 120°$

4.- $\hat{1} = \dfrac{\overset{\frown}{QS}}{2} = 60°$



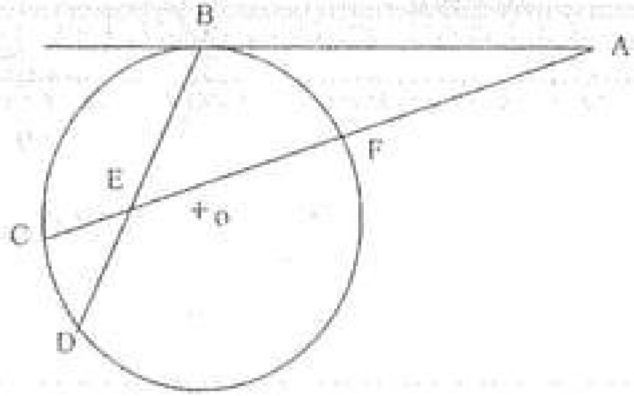
18.- 1.- $3 \times EF = 4 \times 6$

$\therefore$ EF = 8 u.

2.- AF = 17 – EF = 9

3.- $AB^2 = AC \times AF$

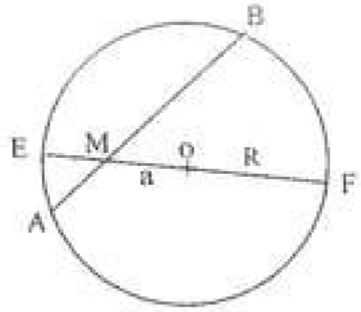
$\Rightarrow$ AB = 13.41 u.



24.- 1.- $OE = OF = R$ (Construcción)

2.- $AM_x MB = EM_x MF = (R - a)_x (R + a)$

$\therefore AM_x MB = R^2 - a^2$



29.- 1.- $(12 + 10)_x 10 = (AB + 8.5)_x 8.5$

$\therefore AB = 17.38$ u.

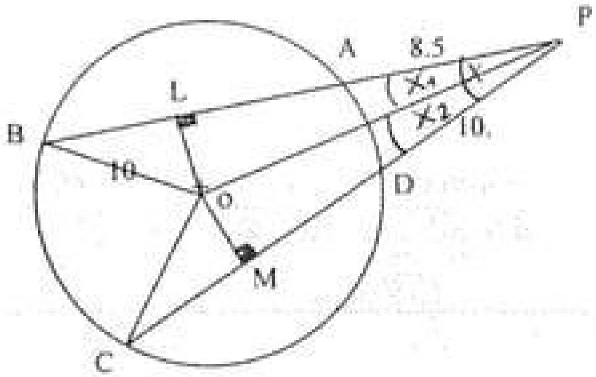
2.- $OM = \sqrt{10^2 \quad 6^2} = 8$ u.

$OL = \sqrt{10^2 \quad 8{,}69^2} = 4.95$ u.

3.- $\tan \widehat{X}_1 = \dfrac{OL}{LP} \Rightarrow \widehat{X}_1 = 16°$

$\tan \widehat{X}_2 = \dfrac{OM}{MP} \Rightarrow \widehat{X}_2 = 26{,}5°$

$\Rightarrow \widehat{X} = 42{,}6°$



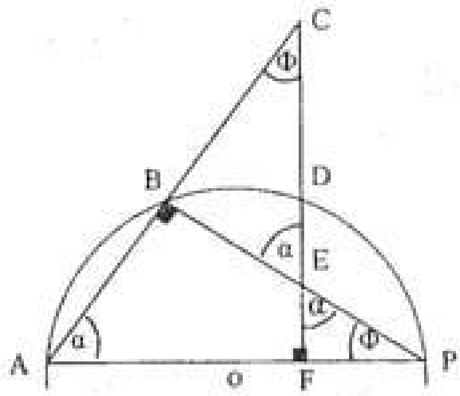
46.- 1.- $\widehat{B} = 90° \quad \therefore \alpha + \phi = 90°$

2.- $\Delta ACF \sim \Delta EGF$ (A,A,A)

$\dfrac{12}{FG} = \dfrac{AF}{3}$

3.- $DF^2 = AF_x FG = 12_x 3$

$\therefore DF = 6$ u.



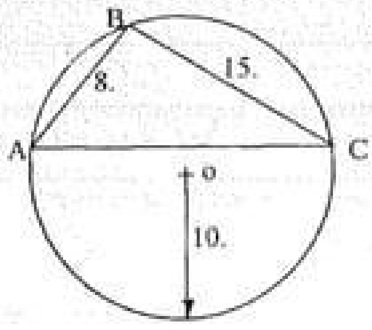
53.- 1.- $\dfrac{15}{\text{Sen } A} = \dfrac{8}{\text{Sen } C} = \dfrac{AC}{\text{Sen } B} = 2(10)$

$\therefore \widehat{A} = 48.6°$

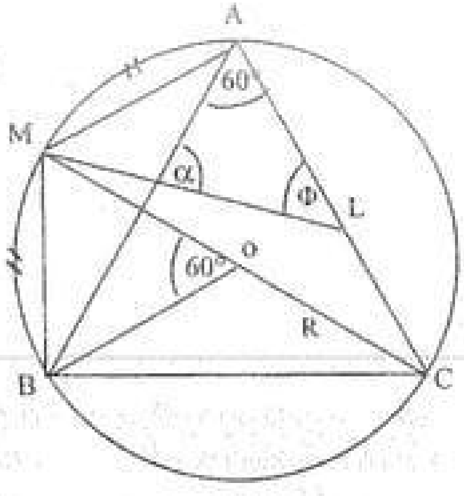
$\widehat{C} = 23.6°$

$\widehat{B} = 107.8°$

$AC = 19$ u.



62.- 1.- $\frac{AC}{\text{Sen } 60°} = 2R$ $\quad\therefore\ AB = BC = CA = 17.32$ u.



2.- $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB} = 60°$ $\quad\therefore\ AM = MB = R = 10$ u.

3.- $M\hat{B}L = \frac{\overset{\frown}{MA} + \overset{\frown}{AC}}{2} = 90°$ $\quad\therefore\ \text{Tan } \phi = \frac{MB}{BL}$

$\Rightarrow \hat{\phi} = 49.1°$

4.- $\hat{\alpha} = 180° - 60° - \hat{\phi} = 70.9°$

66.- 1.- $AE = AF = r$

2.- $CE = CD$ y $BF = BD$

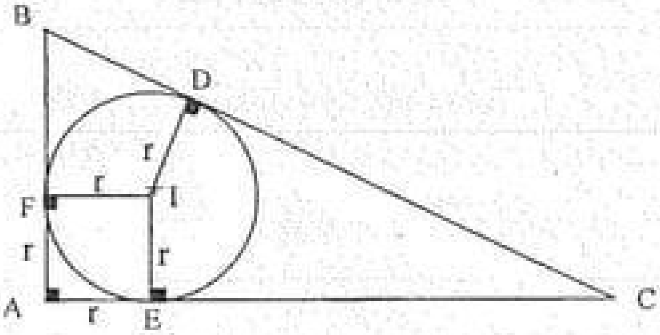
3.- $b = r + CE = r + CD$

4.- $c = r + BF = r + BD$

$\therefore\ b + c = 2r + a$

$\Rightarrow r = \frac{1}{2}(b + c - a)$

5.- $a = 2R \Rightarrow b + c = 2r + 2R = 2(r + R)$



70.- 1.- $\hat{\phi} = 90° + \frac{1}{4}\hat{A} = \frac{1}{2}\hat{C} + 90°$

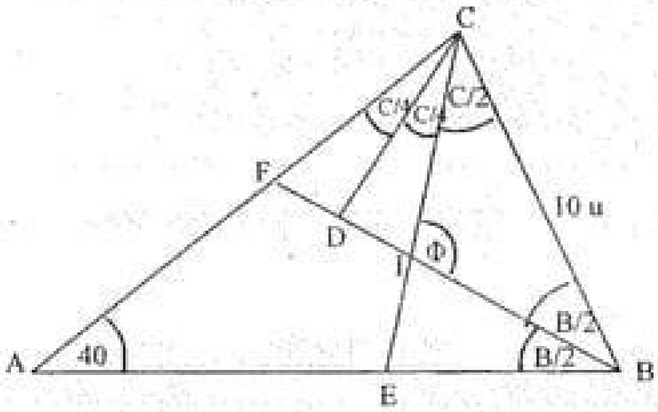
$\therefore\ \hat{\phi} = 110°$

$\hat{C} = 80°$

$\hat{B} = 60°$

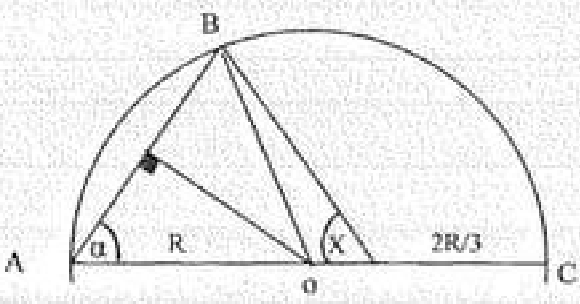
2.- $\frac{10}{\text{Sen } \phi} = \frac{CI}{\text{Sen } \frac{1}{2} B}$

$\Rightarrow CI = 5{,}32$ u.



3.- $A\,\Delta\,BIC = \frac{1}{2}\left(CI \times CB \times \text{Sen } \frac{1}{2} C\right) = 17{,}1\ u^2$

83.- 1.- $A\hat{O}B = \overset{\frown}{AB} = 80°$



2.- $\text{Sen } 40° = \frac{\frac{AB}{2}}{R} \Rightarrow AB = 1{,}28\,R$

3.- $\hat{\alpha} = 90° - 40° = 50°$

4.- $BE^2 = AB^2 + (R + {}^{1}R)^2 - 2 \times AB \times (R + {}^{1}R) \times \text{Cos } 50°$

$\Rightarrow BE = 1{,}1\,R$

5.- $\frac{AB}{\text{Sen } x} = \frac{1.1\,R}{\text{Sen } 50°} \Rightarrow \hat{X} = 63°$

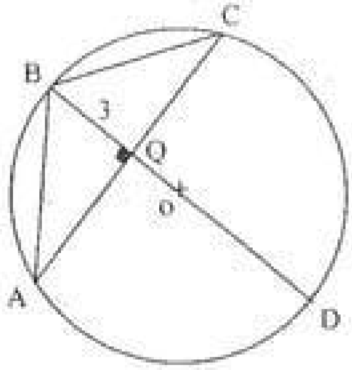
88.- 1.- $\overline{BO}$ es Mediatriz de $\overline{AC}$

$\therefore$ AQ = QC

2.- BQ . QD = AQ . QC

$\therefore$ AQ = QC = 5,196 u.

3.- $AB = \sqrt{AQ^2 + BQ^2} = 6$ u.

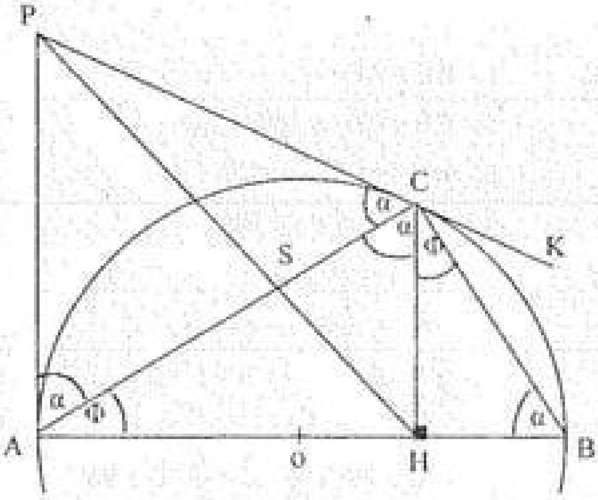


93.- T_1.) 1.- Δ ACH ; Δ CHB y Δ ACB Rectángulos $\therefore$ $\hat{\alpha} + \hat{\phi} = 90°$

2.- Las Tangentes PA = PC $\therefore$ Δ APC Isósceles

3.- $2\hat{\alpha} + \hat{\phi} + K\hat{C}B = 180°$ $\therefore$ $K\hat{C}B = \hat{\phi}$

=> $\overline{CB}$ Bisectriz de $K\hat{C}H$



T_2.) 1.- $CH^2 = 7.5 \cdot 2.5$ $\therefore$ CH = 4,33 u.

AC = 8,66 u.

2.- Sen $\alpha = \dfrac{7.5}{8.66}$ => $\hat{\alpha} = 60°$

3.- Δ APC Equilátero

$\therefore$ PA = PC = AC = 8,66 u.

4.- $PH = \sqrt{PA^2 + 7{,}5^2} = 11.4$ u.

5.- Δ APS ~ Δ CHS (A,A,)

$$\frac{PA}{CH} = \frac{PS}{PH - PS} \Rightarrow PS = 7{,}65 \text{ u.}$$

106.- 1.- $A\hat{F}S = \dfrac{\overset{\frown}{AS} + \overset{\frown}{PB} + \overset{\frown}{BQ}}{2} = \dfrac{\hat{B}}{2} + \dfrac{\hat{C}}{2} + \dfrac{\hat{A}}{2} = 90°$

2.- Idem : $A\hat{F}S = B\hat{N}Q = C\hat{E}S = 90°$

$\therefore$ I es Ortocentro del Δ PQS

3.- * Según problema # 39 Pag. 177 *

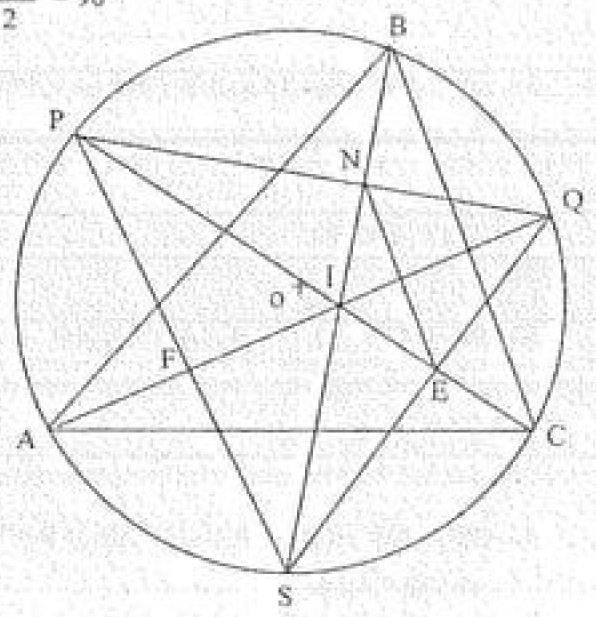
: AF = FI

BN = NI

CE = EI

4.- En Δ BIC : E y N son puntos medios

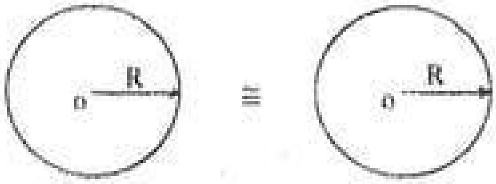
$\therefore$ $EN = \dfrac{BC}{2}$



5.9. POSICIÓN RELATIVA DE DOS CÍRCULOS

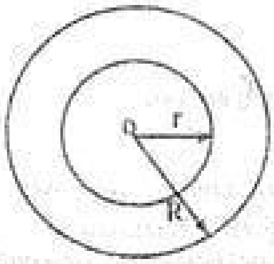
5.9.1. CONGRUENTES

Si tienen tres puntos comunes o, si sus radios son congruentes.



5.9.2. CONCÉNTRICOS

Si tienen el mismo centro pero diferente radio.



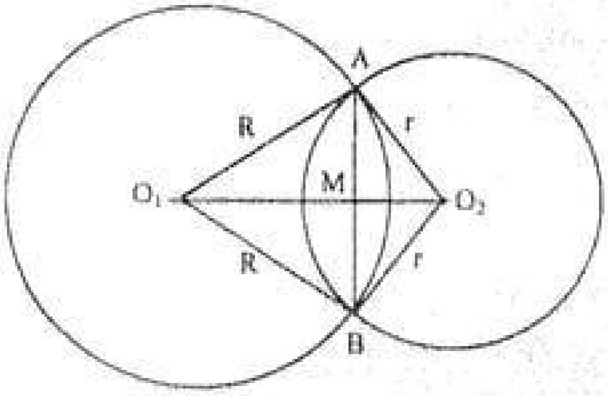
5.9.3. SECANTES

Si tienen dos puntos comunes (puntos de intersección).

El segmento que une los puntos de intersección se llama "cuerda común ".

El segmento que une los centros se llama " línea de centros ".

La línea de centros de dos círculos secantes es la mediatriz de la cuerda común, y es menor que la suma de sus radios y mayor que la diferencia.



H) (O_1,R) y (O_2,r) son círculos secantes.

$\overline{AB}$ cuerda común.

T_1) $\overline{O_1O_2} \perp \overline{AB}$

T_2) $AM = MB$

D) $AO_1 = BO_1 = R$

$\therefore$ O_1 Equidista de A y B

$AO_2 = BO_2 = r$

$\therefore$ O_2 Equidista de A y B

$\Rightarrow$ $\overline{O_1O_2} \perp \overline{AB}$ y $AM = MB$ ///.

Círculos Ortogonales son dos círculos secantes tales que, las tangentes trazadas en dichos puntos son perpendiculares entre sí.

El cuadrado de la distancia entre los centros de dos círculos ortogonales es igual a la suma de los cuadrados de sus radios.

5.9.4. TANGENTES

Si tienen un punto común.

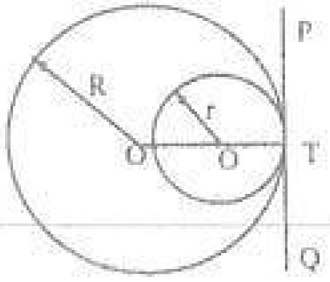
La recta que es tangente a dos círculos se llama "tangente común".

5.9.4.1. TANGENTES INTERNOS

Dos círculos son tangentes internos, si: los centros y el punto de tangencia son colineales; y la distancia entre los centros es igual a la diferencia de los radios.

$\overline{PQ}$ Tangente común

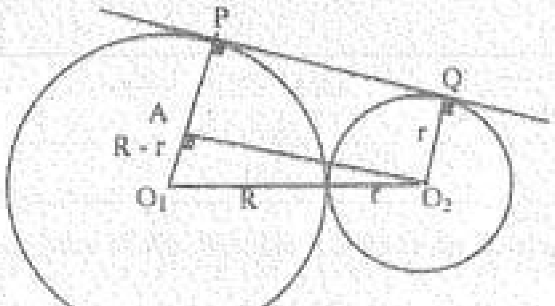
$O_1O_2 = R - r$



5.9.4.2. TANGENTES EXTERNOS

Dos círculos son tangentes externos, si: los centros y el punto de tangencia son colineales; y la distancia entre los centros es igual a la suma de los radios.

La tangente externa común de los círculos tangentes externos, es media proporcional entre sus diámetros.



H) $\overline{PQ}$ Tang. común

$O_1O_2 = R + r$

T) $PQ^2 = 2\,R\,.\,2\,r$

D) $AO_2{}^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2$

$AO_2{}^2 = R^2 + 2\,R\,r + r^2 - R^2 + 2\,R\,r - r^2$

$AO_2{}^2 = 4\,R\,r = PQ^2$

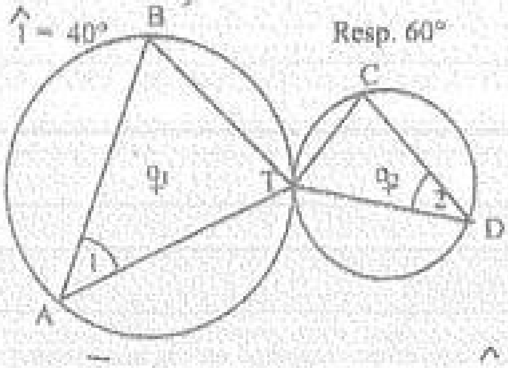
$\Rightarrow\; PQ^2 = 2\,R\,.\,2\,r$ ///.

5.9.5. EJERCICIOS

1.-

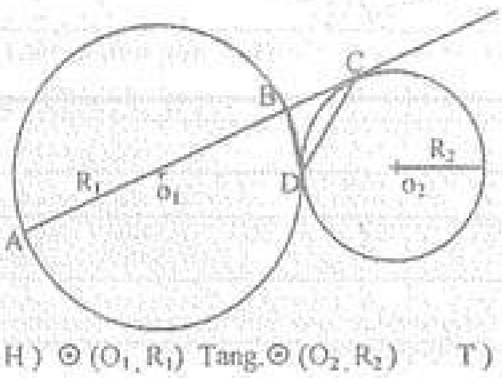
H) $\widehat{BTC} = \dfrac{5\Pi}{9}$ T) $\hat{2} = ?$

$\hat{1} = 40°$ Resp. 60°



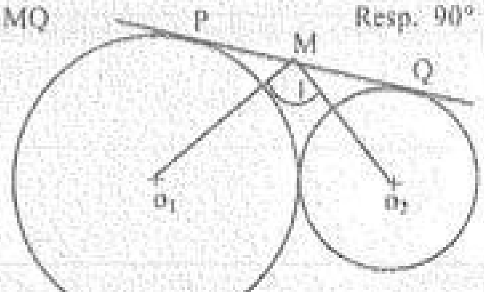
2.- H) $\odot(O_1, R_1)$ Tang. $\odot(O_2, R_2)$

$\overline{AC}$ Tang. $\odot(O_2, R_2)$ T) $\widehat{BDC} = \dfrac{\Pi}{4}$



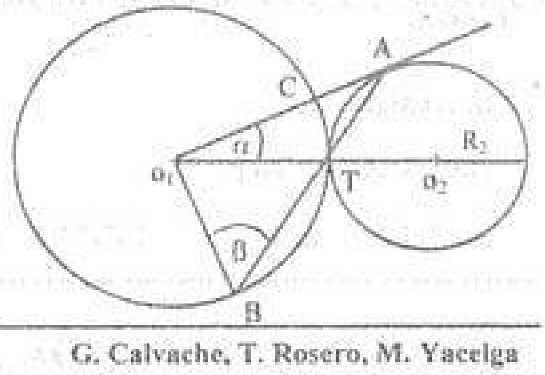
3.- H) $\overline{PQ}$ Tang. común T) $\hat{1} = ?$

PM = MQ Resp. 90°



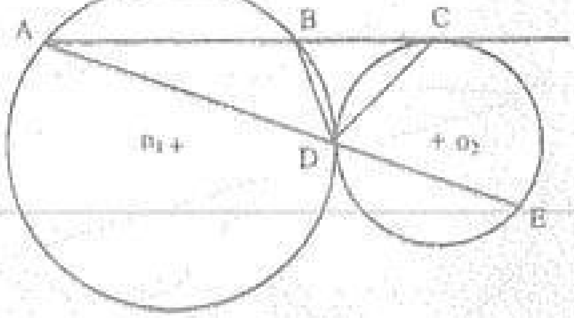
4.- H) $\odot(O_1, R_1)$ Tang. $\odot(O_2, R_2)$ T) $\hat{\alpha} = 2\,\hat{\beta} - 90°$

$\overline{O_1A}$ Tang. $\odot(O_2, R_2)$



5.- H) $\overline{AC}$ Tang. $\odot (O_2, R_2)$ T) $\widehat{ADC} = ?$

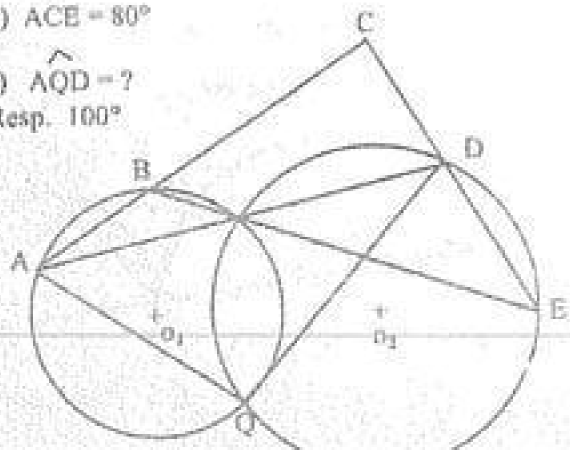
$\widehat{BDC} = 50°$ Resp. 130°



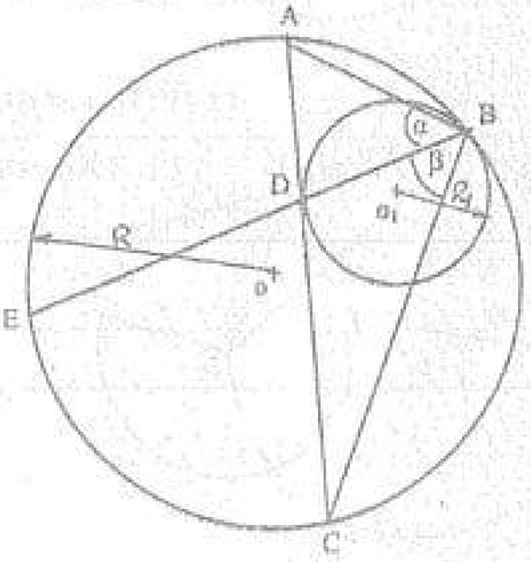
6.- H) $\widehat{ACE} = 80°$

T) $\widehat{AQD} = ?$

Resp. 100°



7.-



a) H) $\odot (O_1, R_1)$ Tang. $\odot (O, R)$

$\overline{AC}$ Tang. $\odot (O_1; R_1)$

T) $\hat{\alpha} \equiv \hat{\beta}$

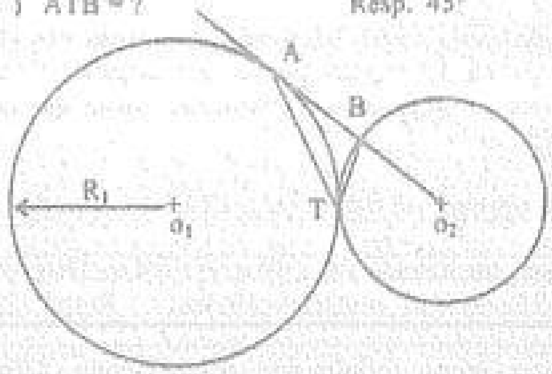
b.- H) $\widehat{AB} = \dfrac{\Pi}{3}$

$\widehat{AE} = \dfrac{5\Pi}{9}$

T) $\widehat{ADB} = ?$ Resp. 80°

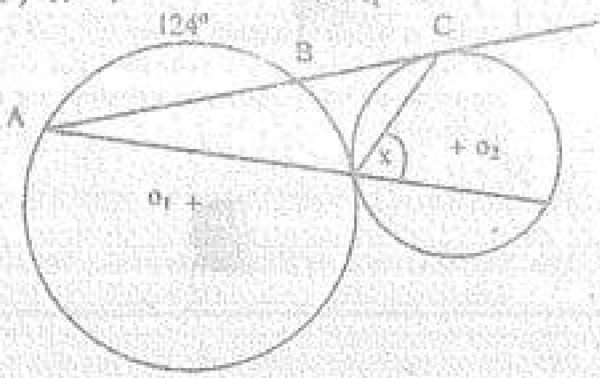
8.- H) $\overline{O_2A}$ Tang. $\odot (O_1, R_1)$

T) $\widehat{ATB} = ?$ Resp. 45°



9.- H) $\overline{AC}$ Tang. $\odot (O_2, R_2)$

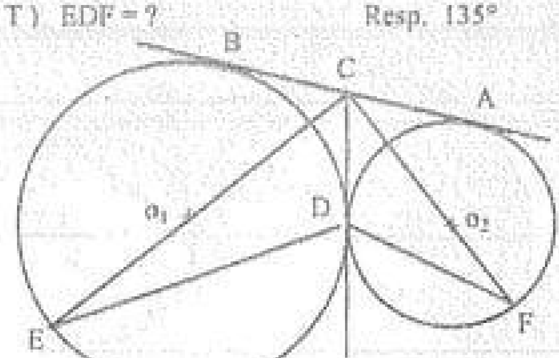
T) $\hat{X} = ?$ Resp. 59°



10.- H) $\overline{CD}$ Tang. Común

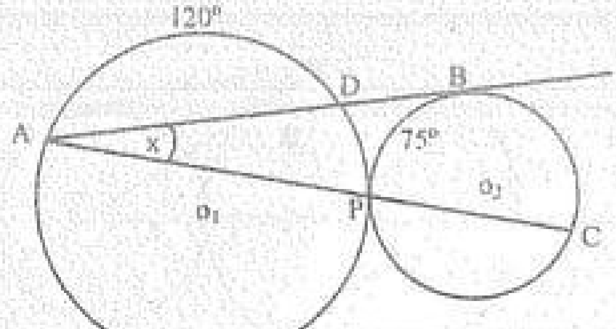
$\overline{AB}$ Tang. Común

T) $\widehat{EDF} = ?$ Resp. 135°



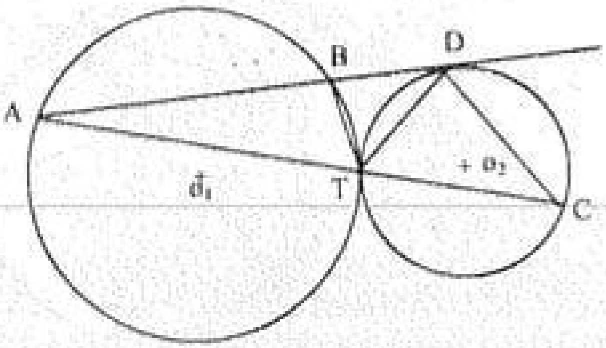
11.- H) $\overline{AB}$ Tang. $\odot (O_2, R_2)$

T) $\hat{X} = ?$ Resp. 22.5°



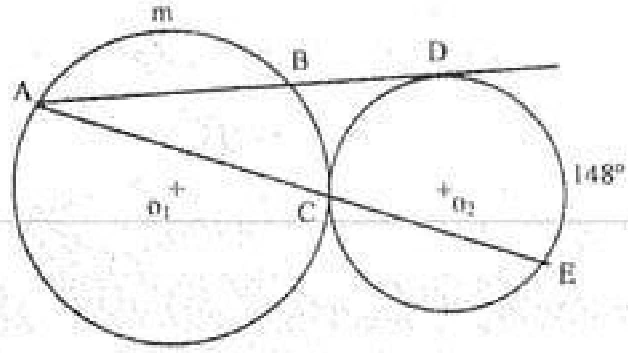
12.- H) $\overline{AD}$ Tang. $\odot (O_2, R_2)$

T) $BT \times DC = TD \times BD$

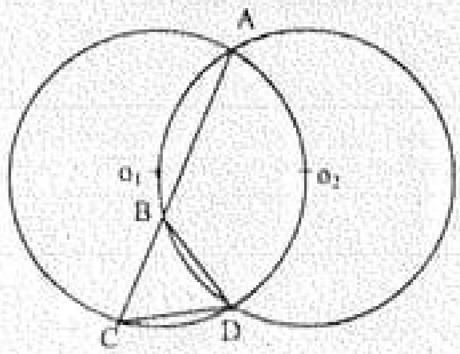


13.- H) $\overline{AD}$ Tang. $\odot (O_2, R_2)$

T) $m = ?$ Resp. 64°

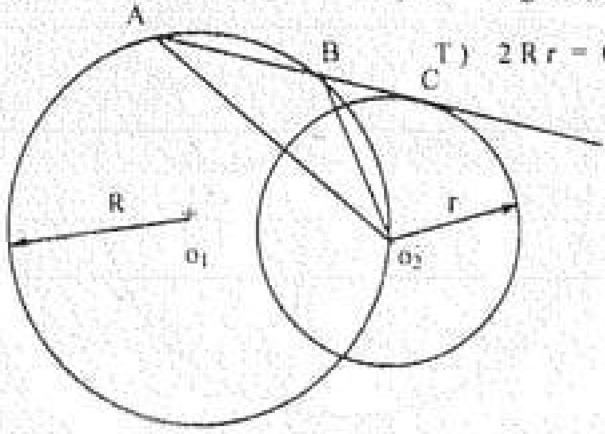


14.- T) Δ CDB Equilátero



15.- H) $\overline{AC}$ Tang. $\odot (O_2, r)$

T) $2\,R\,r = O_1A \times O_2B$



16.- En un círculo de radio 10 u. En un diámetro se toma un punto A tal que OA = 8. Hallar el radio de un segundo círculo tangente al diámetro en A y al círculo dado. Resp. 1.8 u.

17.- Los lados de un triángulo miden 6,7 y 9 cm.; tomando como centro sus vértices se trazan tres círculos mutuamente tangentes. El círculo cuyo centro es el vértice del ángulo menor del triángulo es tangente interiormente a los otros dos, mientras que estos son entre sí tangentes exteriormente. Hallar los radios de los círculos. Resp. 11 u.; 4 u.; 2 u.

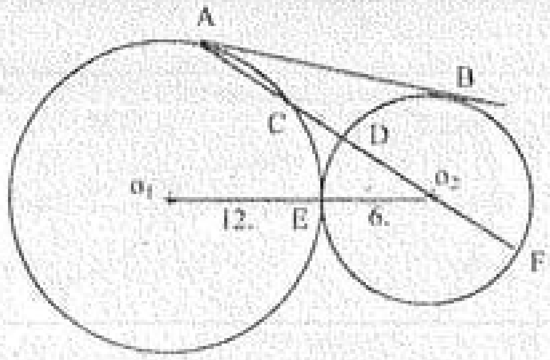
18.- Calcular el valor de la tangente común a dos círculos ortogonales de radios 9 u. y 12 u. . Resp. 14.7 u.

19.- Se trazan las tangentes a dos círculos tangentes externamente de radios R = 10 u. y r = 4 u. .Determinar la longitud del segmento de la tangente interna comprendida entre las tangentes externas. Resp. 12.65 u.

20.- Por el punto de contacto de dos círculos tangentes externamente se traza una secante común. Demostrar que las cuerdas son directamente proporcionales a sus radios.

21.- H) $\overline{AB}$ Tang. Común

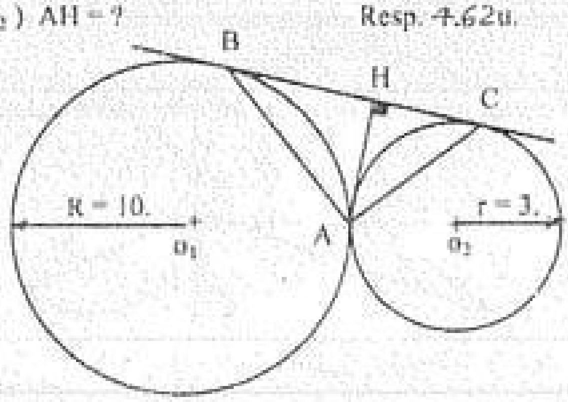
T) CD = ? Resp. 4 u.



22.- H) $\overline{BC}$ Tang. Común

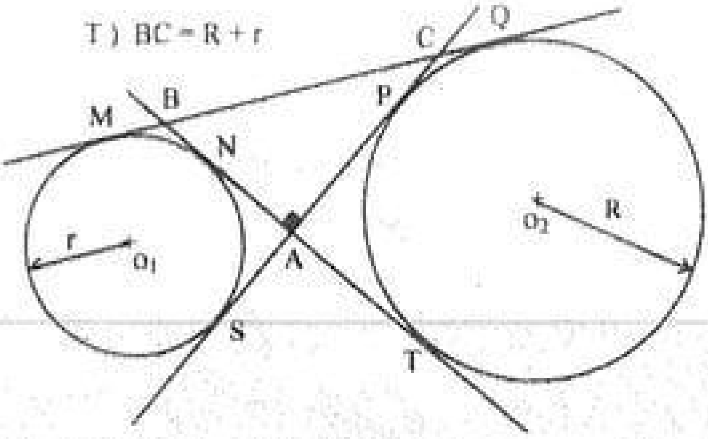
T_1) $\widehat{BAC} = ?$ Resp. 90°

T_2) AH = ? Resp. 4.62u.

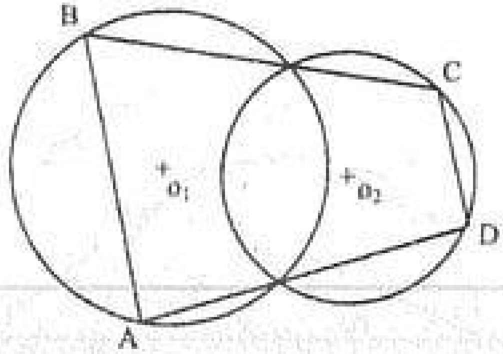


23.- H) $\overline{MQ}$, $\overline{BT}$, $\overline{CS}$ Tangs. Comunes

T) BC = R + r



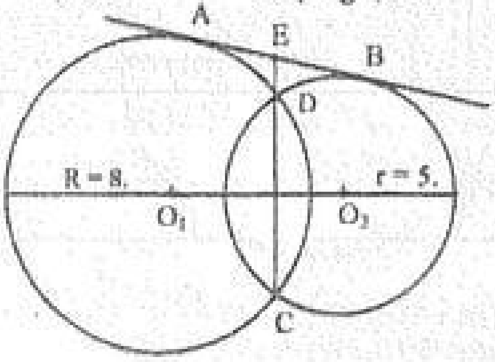
24.- T) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$



25.- H) $\overline{AB}$ Tang. Común

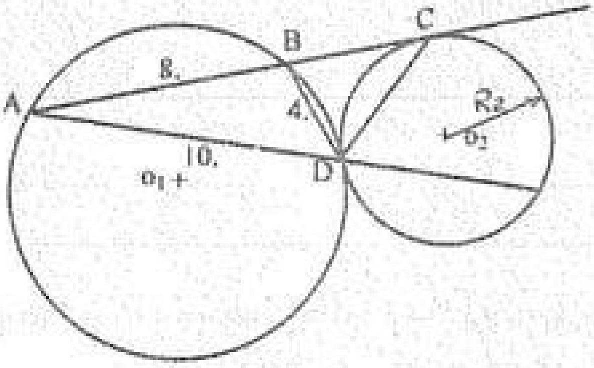
O_1O_2 = 10 u.

T) CE = ? Resp. 9.48 u.



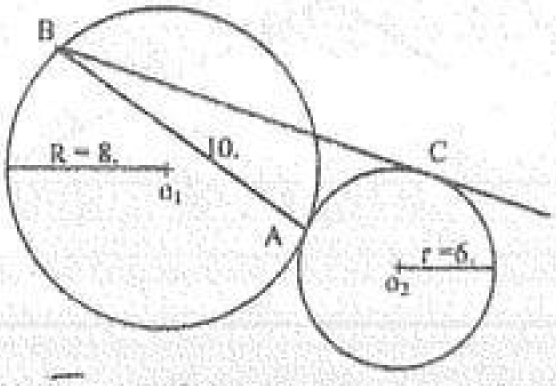
26.- H) $\overline{AC}$ Tang. $\odot(O_2, R_2)$

T) DC = ? Resp. 5.19



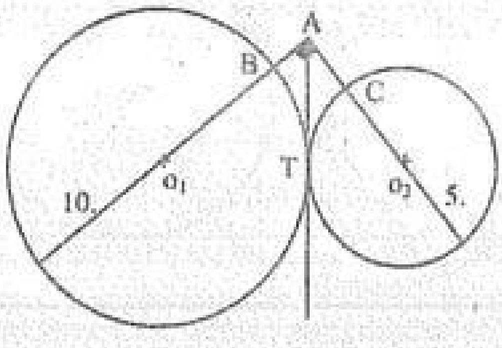
27.- H) $\odot(O_1, R)$ Tang. $\odot(O_2, r)$ T) $\overline{BC}$ = ?

$\overline{BC}$ Tang. $\odot(O_2, r)$ Resp. 13.22



28.- H) $\odot(O_1, 10)$ Tang. $\odot(O_2, 5)$ T) AC = ?

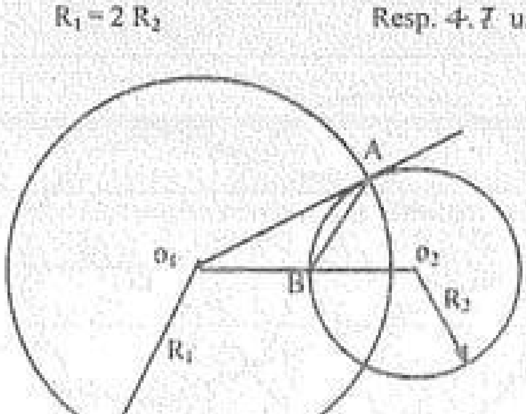
$\overline{AT}$ Tang. Común Resp. 3.65



29.- H) $\overline{O_1A}$ Tang. $\odot(O_2, R_2)$ T) AB = ?

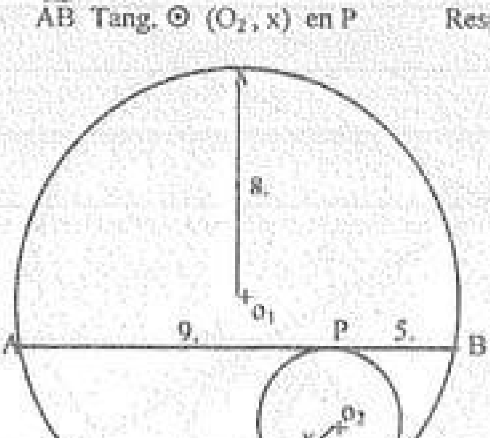
O_1O_2 = 10 u.

$R_1 = 2R_2$ Resp. 4.7 u.



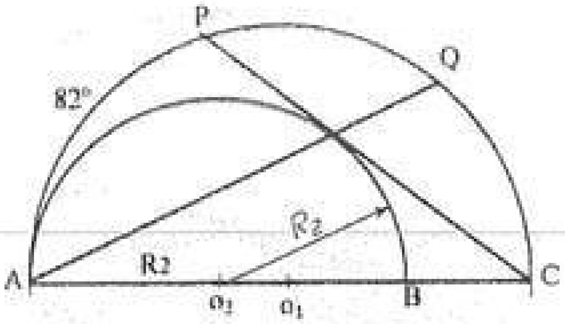
30.- H) $\odot(O_1, X)$ Tang. $\odot(O_2, 8)$ T) X = ?

$\overline{AB}$ Tang. $\odot(O_2, x)$ en P Resp. 1.9.

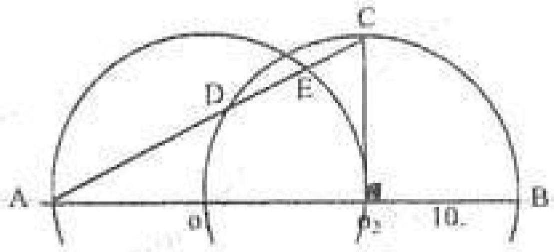


31.- H) $\overline{CP}$ Tang. $\odot(O_2, R_2)$

T) $\widehat{CQ} = ?$ Resp. 49°



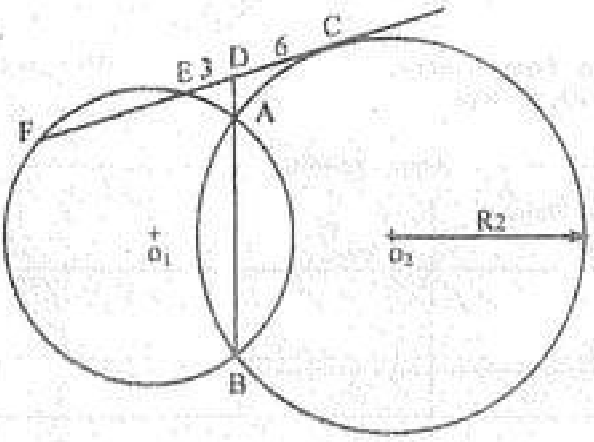
32.- T) EC = ? Resp. 4.48



33.- H) $\overline{FC}$ Tang. $\odot(O_2, R_2)$

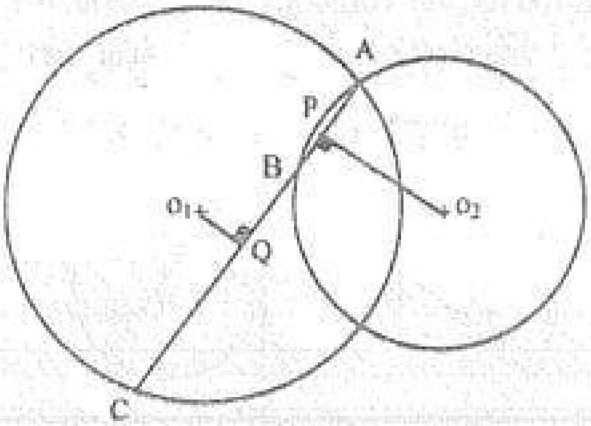
T) EF = ?

Resp. 9 u.



34.- H) AC = 8 u. T) PQ = ?

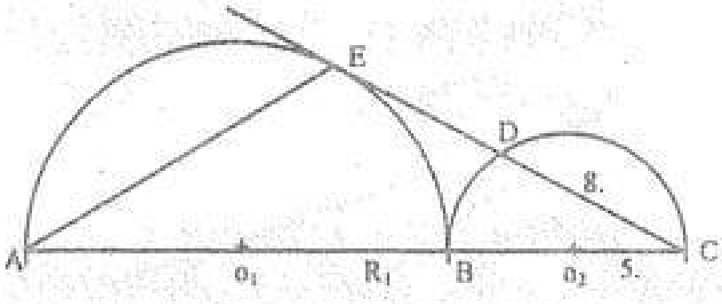
AB = 2 u.) Resp. 3 u.



35.- H) $\odot(O_1, R_1)$ Tang. $\odot(O_2, 5)$

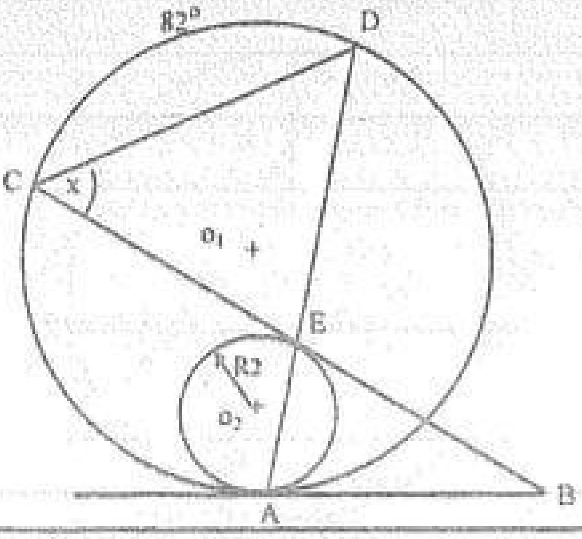
$\overline{CE}$ Tang. $\odot(O_1, R_1)$

T) AE = ? Resp. 26.8.



36.- H) $\overline{AB}$ y $\overline{CB}$ Tang. $\odot(O_2, R_2)$

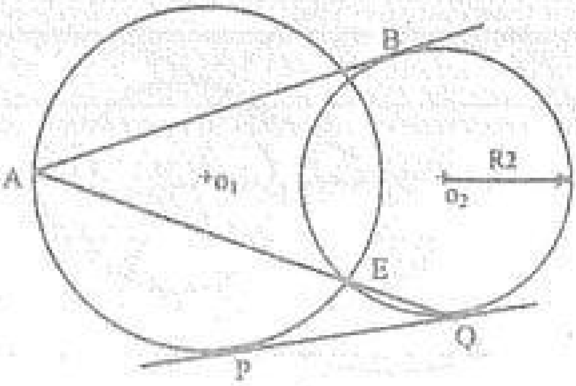
T) $\hat{x} = ?$ Resp. 41°



37.- H) AB = 10 u. Tang. $\odot(O_2, R_2)$

$\overline{PQ}$ = 6 u. Tang. Común

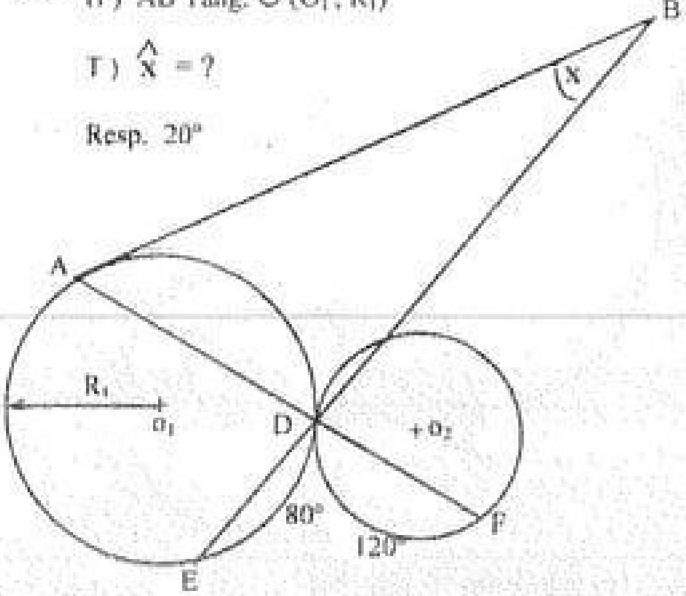
T) AQ = ? Resp. 11.66 u.



38.- H) $\overline{AB}$ Tang. ⊙ (O_1, R_1)

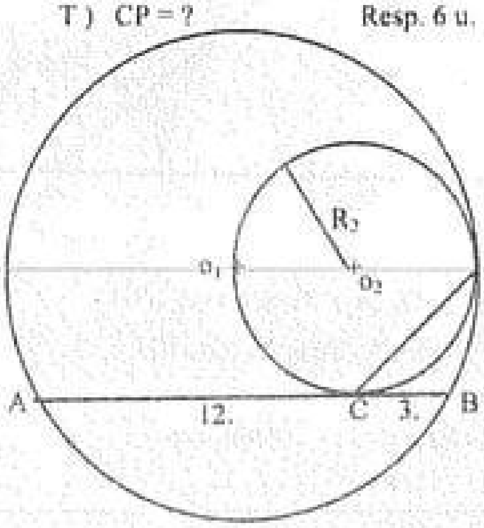
T) $\hat{x} = ?$

Resp. 20°



39.- H) $\overline{AB}$ Tang. ⊙ (O_2, R_2)

T) CP = ?   Resp. 6 u.



40.- Una recta es tangente a un círculo de radio 5 u. en M. En esta recta a ambos lados del punto M se toman los puntos A y B tal que AM = MB = 10 u. Hallar el radio del círculo que pasa por A y B, además que sea tangente al círculo dado.   Resp. 10 u.

41.- H) $\overline{FC}$ Tang. ⊙ (O_1, R_1)

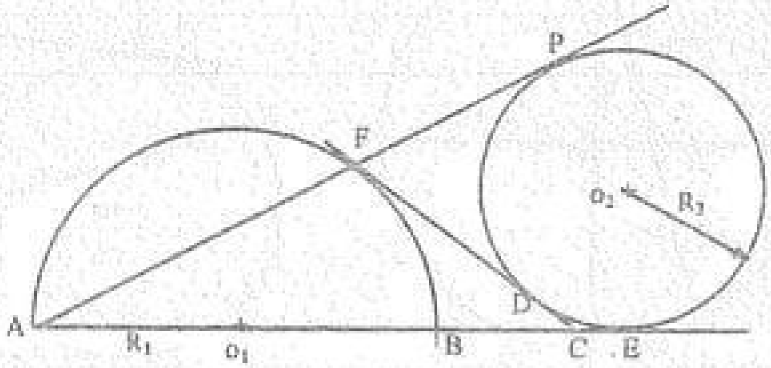
$\overline{AP}$ Tang. ⊙ (O_2, R_2)

$\overline{AE}$ Tang. ⊙ (O_2, R_2)

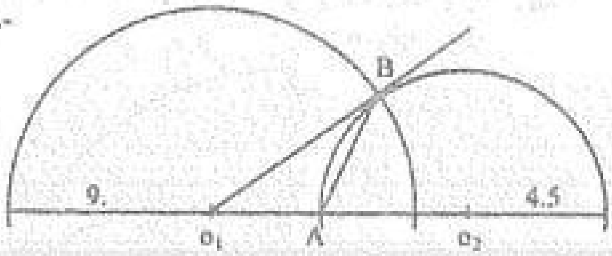
$\overline{FDC}$ Tang. Común

$\widehat{DE} = 30°$

T) $\widehat{PD} = \widehat{AF}$



42.-



H) $O_1O_2 = 10.$

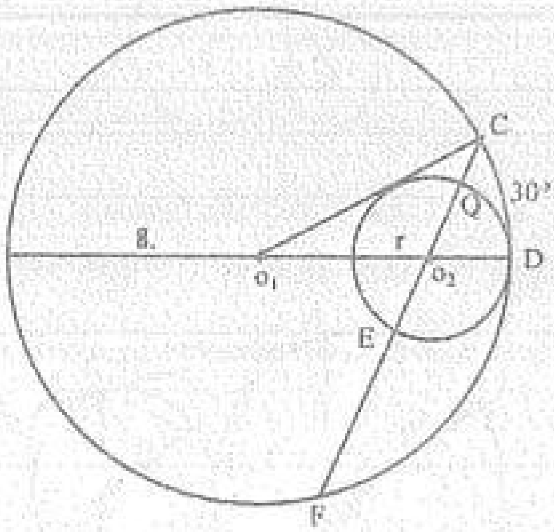
T) AB = ?   Resp. 4.78

43.- H) ⊙ $(O_1, 8)$ Tang. ⊙ (O_2, r)

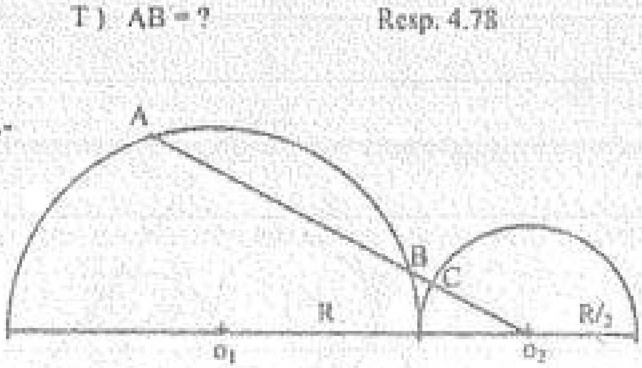
$\overline{O_1C}$ Tang. ⊙ (O_2, r)

T_1) CQ = ?   Resp. 1.64

T_2) EF = ?   Resp. 5.60



44.-

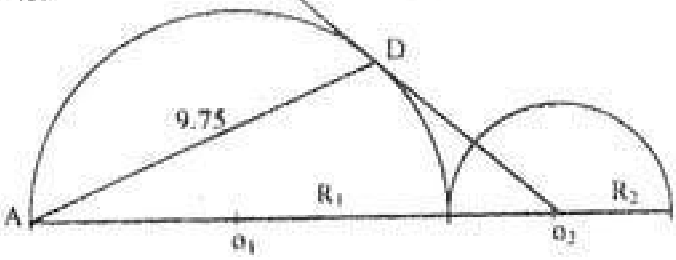


H) ⊙ (O_1, R) Tang. ⊙ $(O_2, R/2)$

$AO_2 = 2R = 10$ u.

T) BC = ?   Resp. 0.63 u.

45.-



H) $\odot(O_1, R_1)$ Tang. $\odot(O_2, R_2)$

$O_2D = 5$ Tang. $\odot(O_1, R_1)$

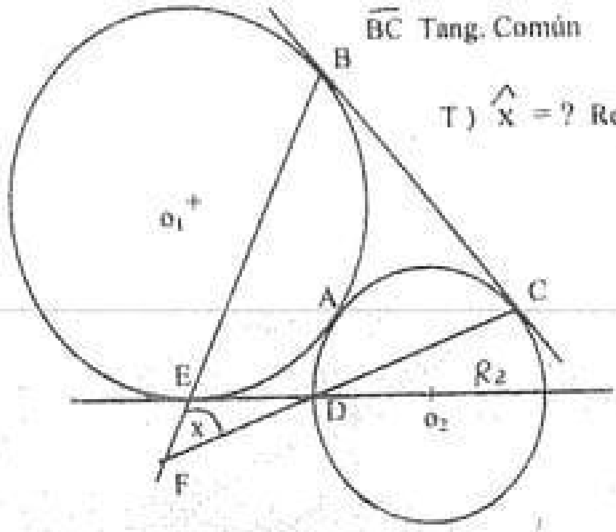
T) $R_2 = ?$ Resp. 2 u.

46.-

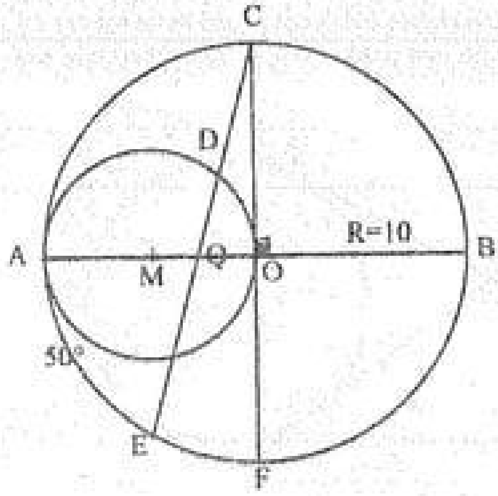
H) $\overline{DE}$ Tang. $\odot(O_1, R_1)$

$\overline{BC}$ Tang. Común

T) $\hat{x} = ?$ Resp. 45°



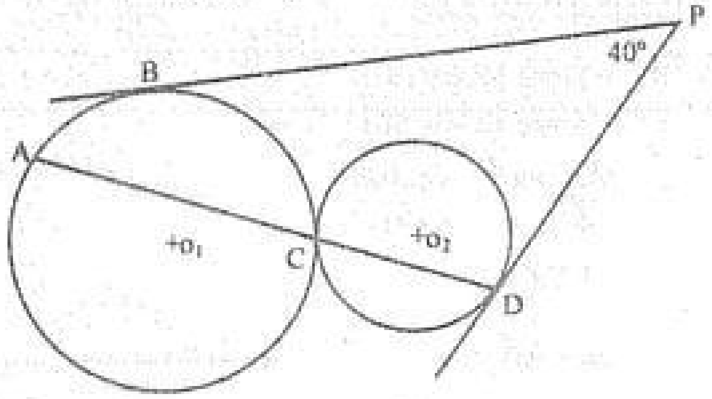
47.- T) $DQ = ?$ Resp. 4.37



48.- H) $\overline{PB}$ Tang. $\odot(O_1, R_1)$

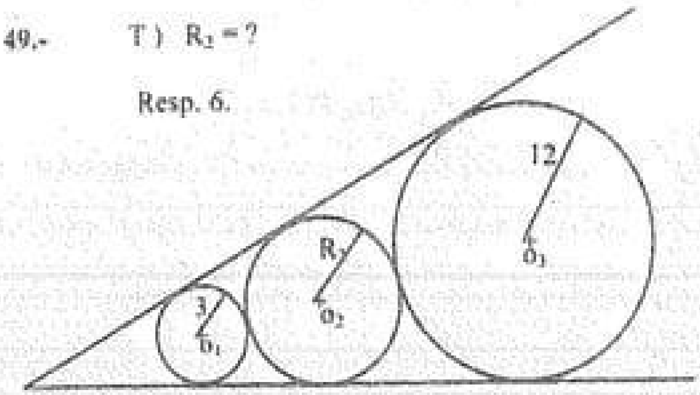
$\overline{PD}$ Tang. $\odot(O_2, R_2)$

T) $\widehat{AB} = ?$ Resp. 40°



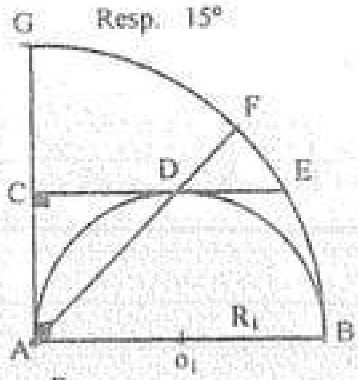
49.- T) $R_2 = ?$

Resp. 6.



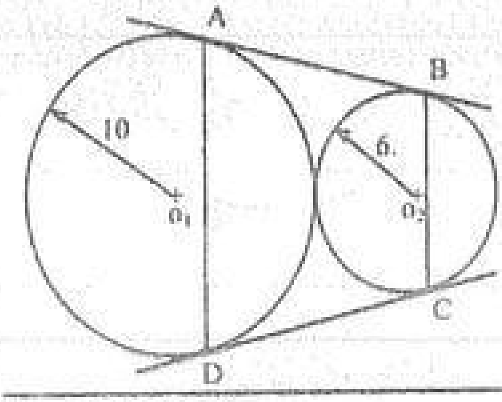
50.- H) $\overline{CE}$ Tang. $\odot(O_1, R_1)$

T) $\widehat{FE} = ?$ Resp. 15°



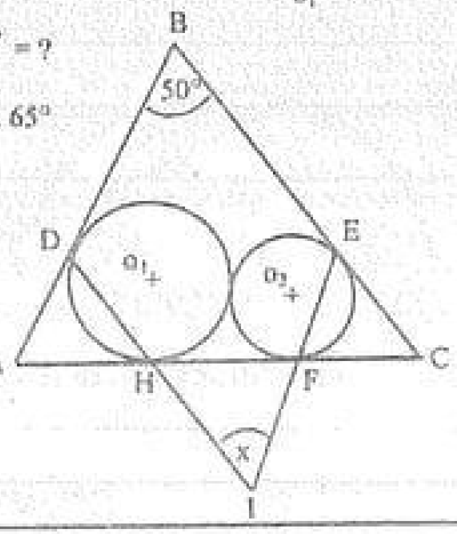
51.- H) $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ Tang. Comunes

T) $(AD + BC)/2$ Resp. 15.49

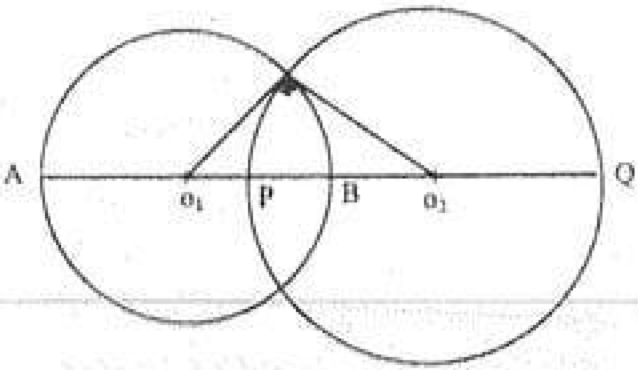


52.- T) $\hat{x} = ?$

Resp. 65°



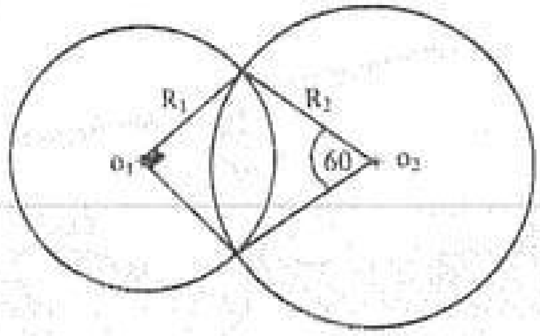
53.- T) $PB = (AP_x BQ)/AQ$



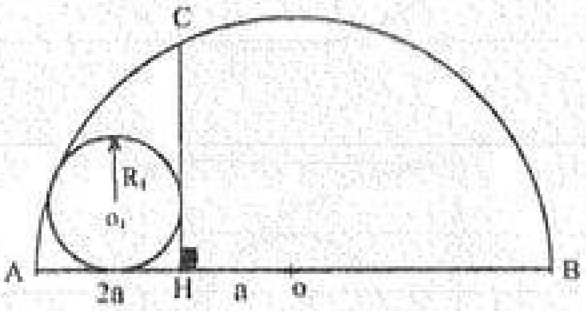
54.- H) $O_1O_2 = a$

T_1) $R_1 = ?$ Resp. 0.52 a

T_2) R_2 ? Resp. 0.73 a

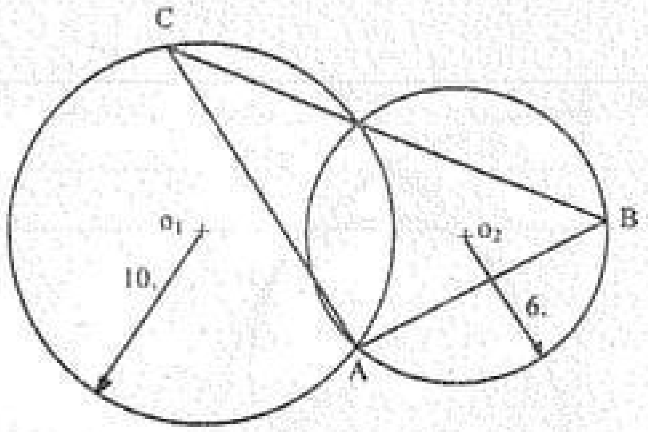


55.- T) $R_1 = ?$ Resp. 0.9 a

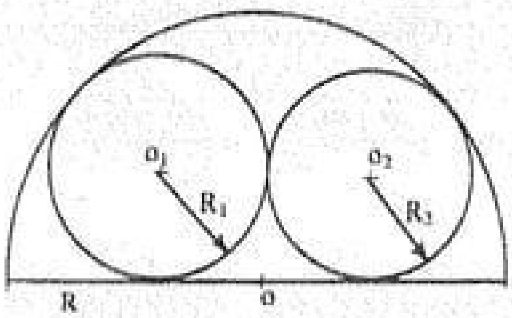


56.- H) AC = 14. T) AB = ?

Resp. 8,4



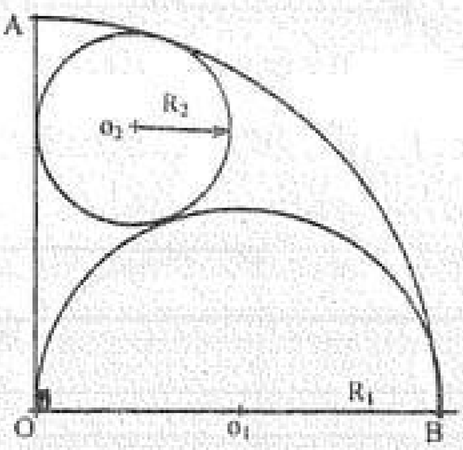
57.-



H) $R_2 = 2\,R_1/3$ T) R = ?

$R_1 = 4.8$ u. Resp. 10 u.

58.-

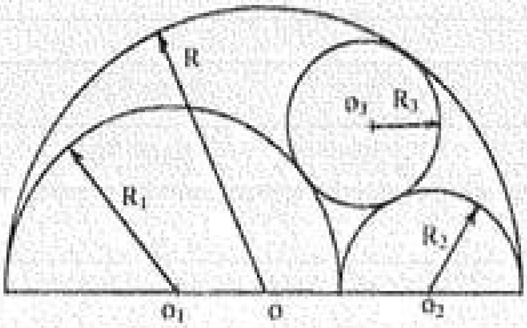


H) OA = OB = a

T_1) $R_1 = ?$ Resp. a / 2

T_2) $R_2 = ?$ Resp. a / 4

59.-

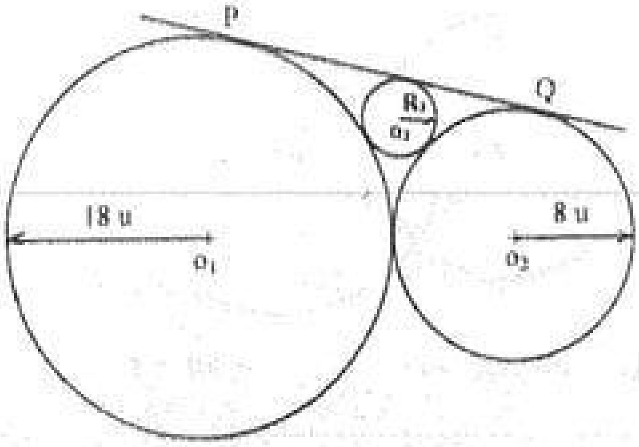


H) $R_1 = 2\,R_2$ T) R = ?

$R_3 = 2.86$ u. Resp. 10 u.

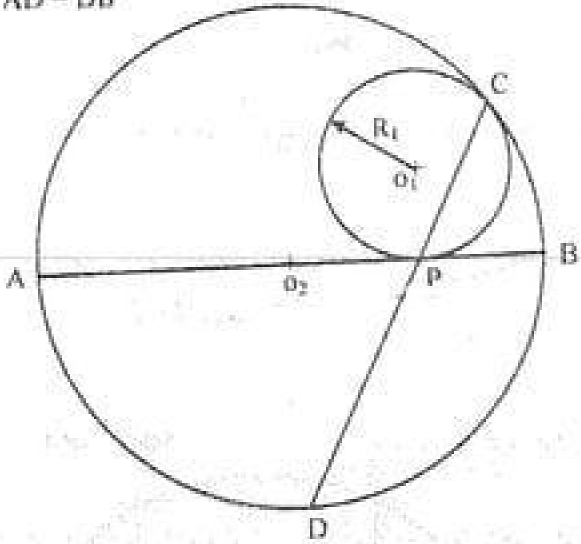
60.- H) $\widehat{PQ}$ Tang. Común

T) $R_3 = ?$ Resp. 2.88

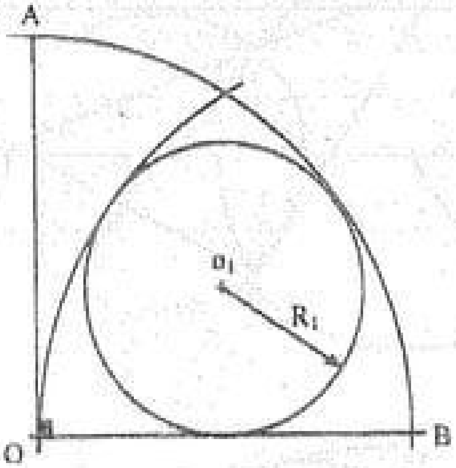


61.- H) $\overline{AB}$ Tang. ⊙ (O_1, R_1)

T) $\widehat{AD} = \widehat{DB}$



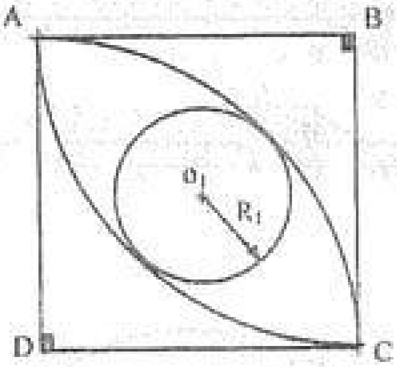
62.-



H) OA = OB = 40 u.

T) $R_1 = ?$ Resp. 15 u.

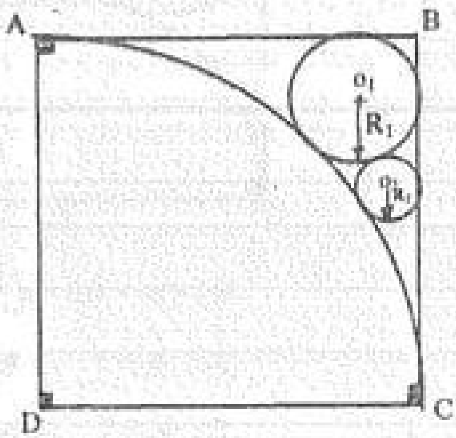
63.-



H) AB = BC = CD = AD = 10 u.

T) $R_1 = ?$ Resp. 2.9 u

64.-



H) AB = BC = CD = AD

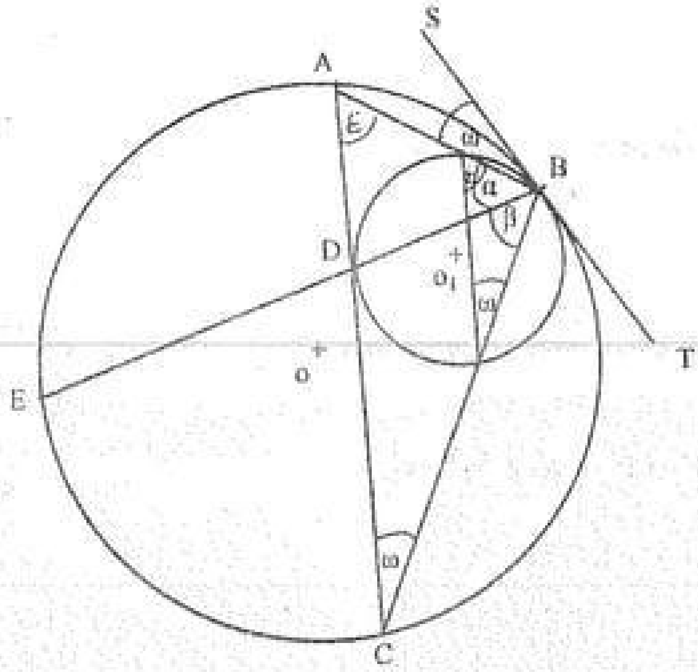
$R_1 = 1.7$ u.

T_1) $R_2 = ?$ Resp. 0.9 u.

T_2) AB = ? Resp. 10 u.

5.9.5.1. EJERCICIOS RESUELTOS

7.-



T_1) 1.- $\widehat{ABS} = \widehat{ACB} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$

2.- $\widehat{PBS} = \widehat{PBQ} = \dfrac{\overset{\frown}{PB}}{2}$

$\therefore \widehat{ACB} = \widehat{PBQ} = \hat{\omega}$

3.- Idem : $\widehat{BAC} = \widehat{BPQ} = \hat{\varepsilon}$

$\therefore \overline{PQ} \parallel \overline{AC}$

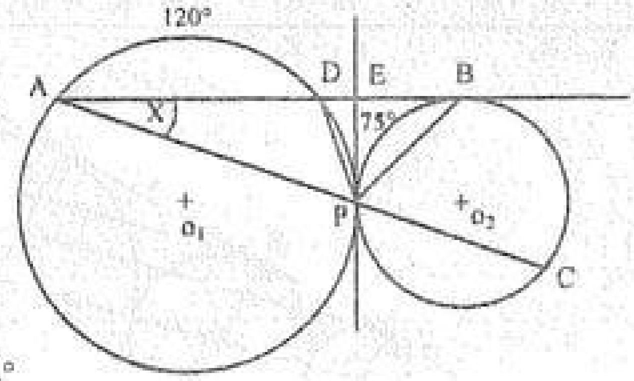
=> $\overset{\frown}{PD} = \overset{\frown}{DQ} = \hat{\alpha} = \hat{\beta}$

T_2) 1.- $\hat{\omega} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2} = 30°$

2.- $\hat{\alpha} = \hat{\beta} = \dfrac{\overset{\frown}{AE}}{2} = 50°$

$\therefore \hat{X} = \hat{\omega} + \hat{\beta} = 80°$

11.-



1.- $\widehat{APD} = \dfrac{\overset{\frown}{AD}}{2} = 60°$

2.- $\widehat{DPE} = \hat{X} = \dfrac{\overset{\frown}{DP}}{2}$

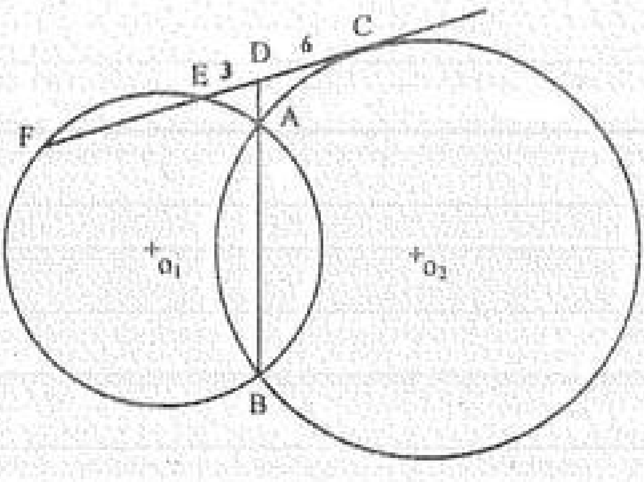
3.- $\widehat{EPB} = \widehat{EBP} = \dfrac{\overset{\frown}{PB}}{2} = 37.5°$

4.- $\widehat{BPC} = \hat{X} + \widehat{EBP}$

=> $\widehat{APD} + \widehat{DPE} + \widehat{EPB} + \widehat{BPC} = 180°$

$60° + \hat{X} + 37{,}5° + \hat{X} + 37{,}5 = 180° \qquad \therefore \hat{X} = 22.°$

33.-



1.- $DF \times DE = DB \times DA = (3 + EF) \times 3$

2.- $DC^2 = DB \times DA = 6^2$

$\therefore (3 + EF) \times 3 = 6^2$

=> EF = 9 u.

43.-

1.- $\text{Sen } 30° = \dfrac{r}{8 - r}$ => r = 2,6 u.

2.- $CO_1^2 = 8^2 + (8 - r)^2 - 2 \times 8 \times (8 - r) \times \text{Cos } 30°$

=> $CO_1 = 4{,}3$ u.

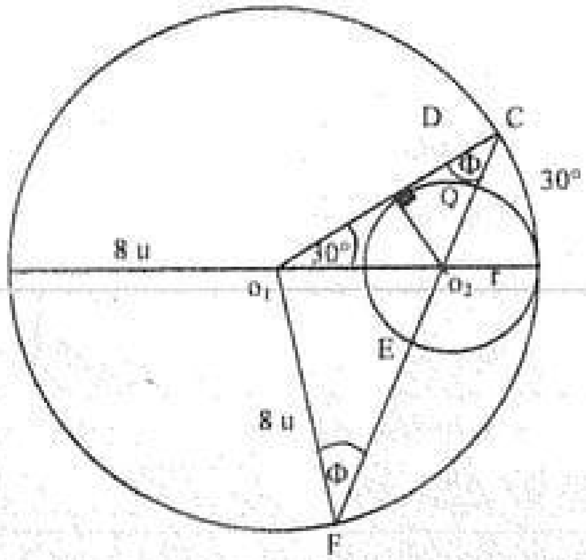
3.- $CQ = CO_1 - r = 1{,}64$ u.

4.- $\dfrac{CO_1}{\text{Sen } 30°} = \dfrac{8 - r}{\text{Sen } \phi}$

$\Rightarrow \phi = 38{,}3°$

5.- $\text{Cos } \phi = \dfrac{\frac{CF}{2}}{8} \Rightarrow CF = 12{,}5$ u.

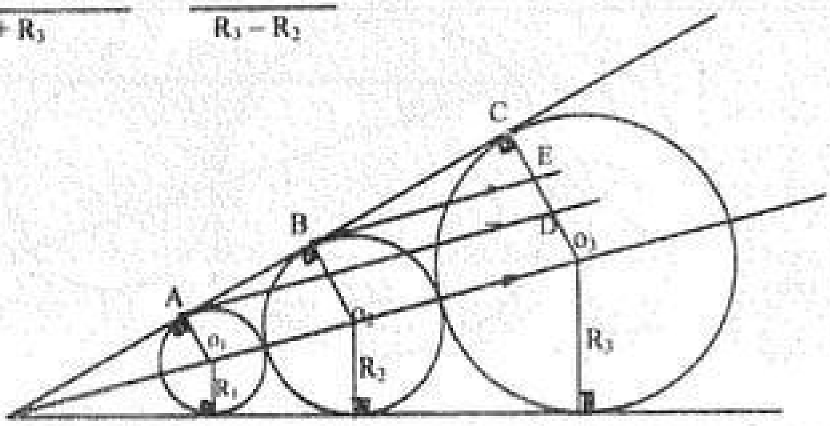
6.- $EF = CF - CO_2 - r = 5{,}6$ u.



49.-

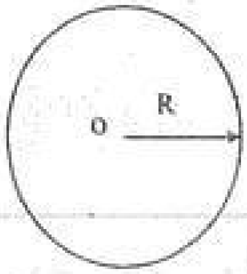
1.- $\Delta ACD \sim \Delta BCE$ (A,A,)

$$\frac{R_1 + 2R_2 + R_3}{R_2 + R_3} = \frac{R_3 - R_1}{R_3 - R_2} \Rightarrow R_2^2 = R_1 \times R_3$$



5.10. AREAS CIRCULARES

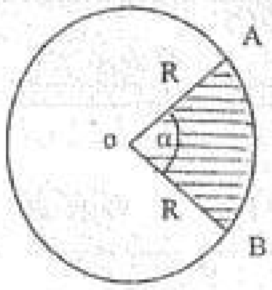
5.10.1. AREA DE UN CÍRCULO



$$S\odot(O, R) = \Pi \times R^2$$

5.10.2. SECTOR CIRCULAR

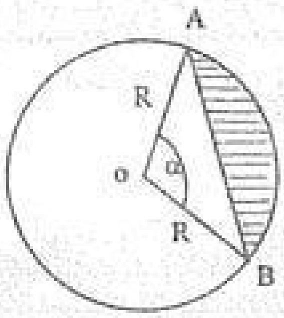
Es el área comprendida entre un arco y los radios correspondientes a los extremos de dicho arco.



$$S\,o\overset{A}{\triangle}_{B} = \frac{\Pi R^2 \alpha}{360} \quad ///.$$

5.10.3. SEGMENTO CIRCULAR

Es el área comprendida entre un arco y la cuerda correspondiente a los extremos de dicho arco.



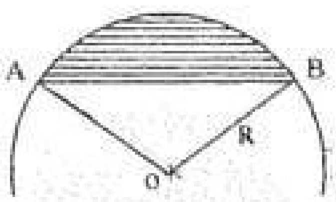
$$S_{A \frown B} = S\,o\ _{B} - S\,\Delta\,OAB$$

$$S_{A \frown B} = \frac{\Pi R^2 \alpha}{360} - \frac{R^2 \operatorname{sen}\alpha}{2}$$

$$S_{A \frown B} = \frac{R^2}{2}\left(\frac{\Pi \alpha}{180} - \operatorname{Sen}\alpha\right) \quad ///.$$

5.10.1. EJERCICIOS

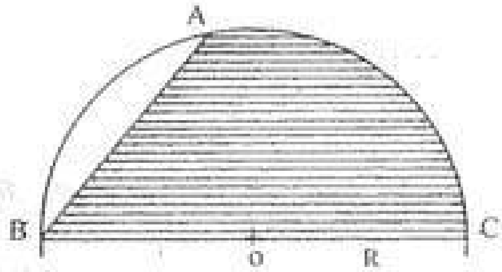
1.-



H) $AB = 1.7\,R$

T) $S_{///} = ?$ f (R) Resp. $0.56\,R^2$

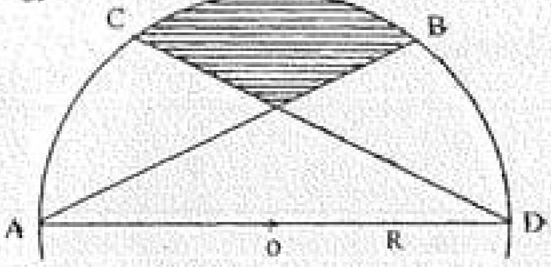
2.-



H) $AB = 1.2\,R$

T) $S_{///} = ?$ f (R) Resp. $1.4\,R^2$

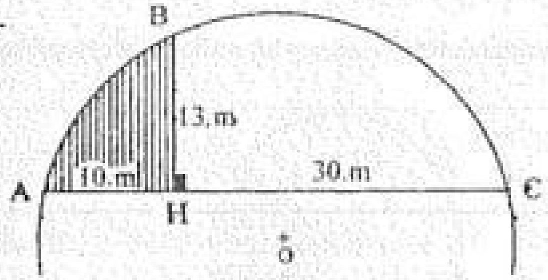
3.-



H) $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{DB}$

T) $S_{///} = ?$ f (R) Resp. $0.235\,R^2$

4.-

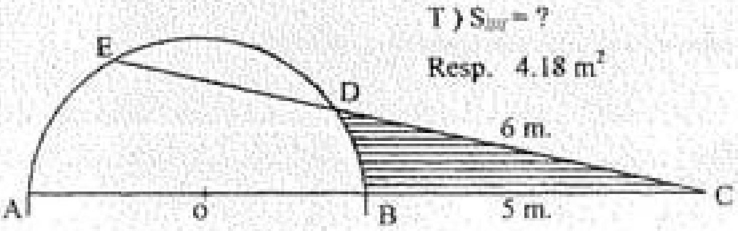


T) $S_{///} = ?$ Resp. $83.75\ m^2$

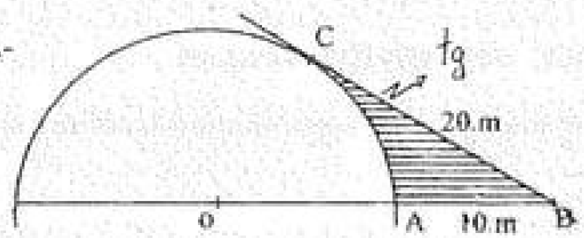
5.- H) $AO = OB = R = 2.5$ m.

T) $S_{///} = ?$

Resp. $4.18\ m^2$

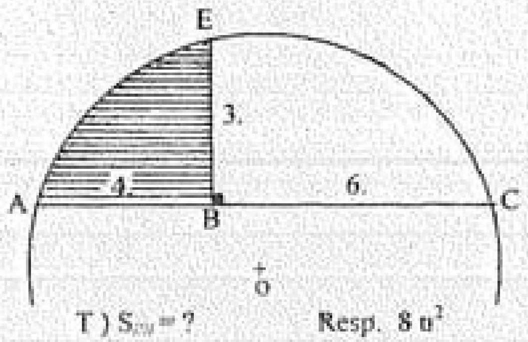


6.-



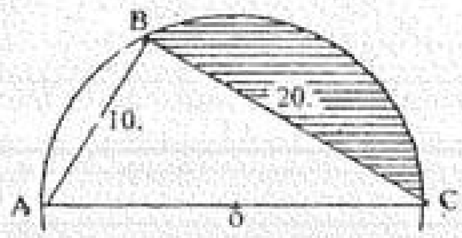
T) $S_{///} = ?$ Resp. $45.68\ m^2$

7.-



T) $S_{///} = ?$ Resp. $8\ u^2$

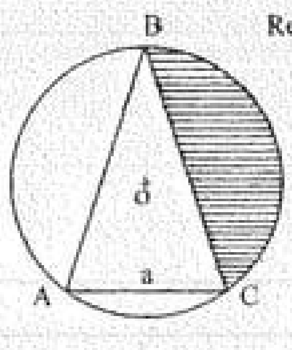
8.-



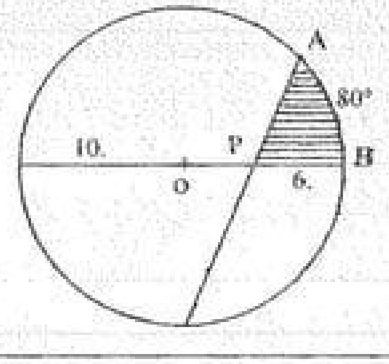
T) $S_{///} = ?$ Resp. 89.38

9.- H) $AB = BC = 2\,a$ T) $S_{///} = ?$ f(a)

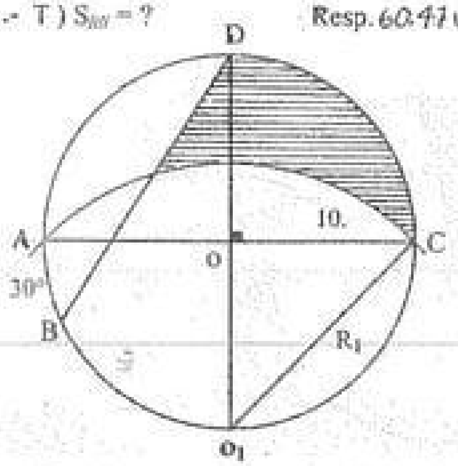
Resp. $1{,}05\,a^2$



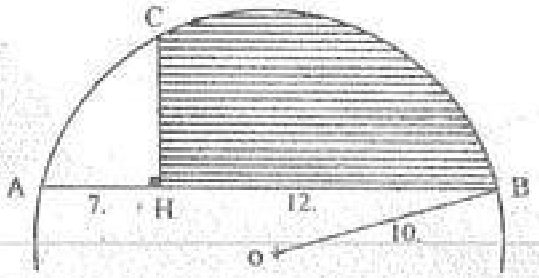
10.- T) $S_{///} = ?$ Resp. $50.72\,u^2$



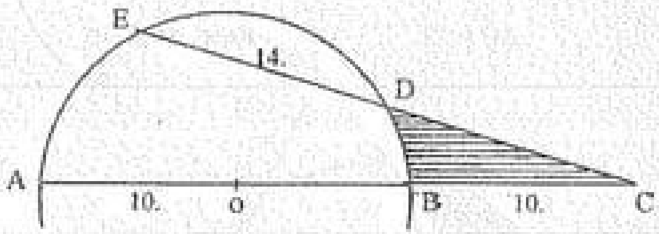
11.- T) $S_{////} = ?$ Resp. 60.47 u^2



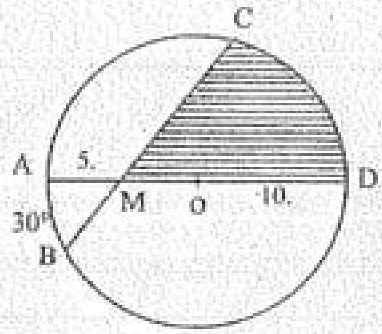
12.- T) $S_{////} = ?$ Resp. 64.81 u^2



13.- T) $S_{////} = ?$ Resp. 20.49 u^2



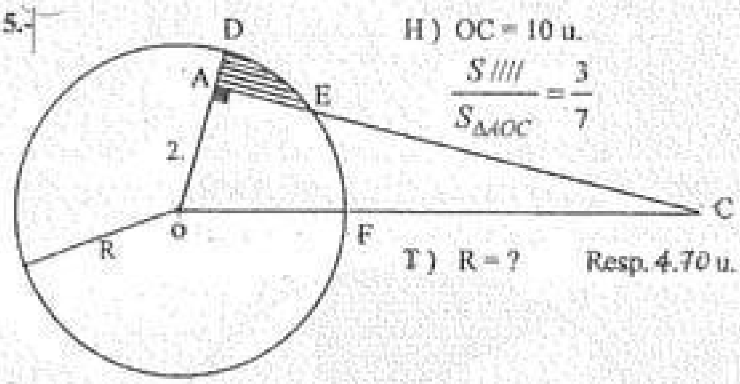
14.- T) $S_{////} = ?$ Resp. 92.17 u^2



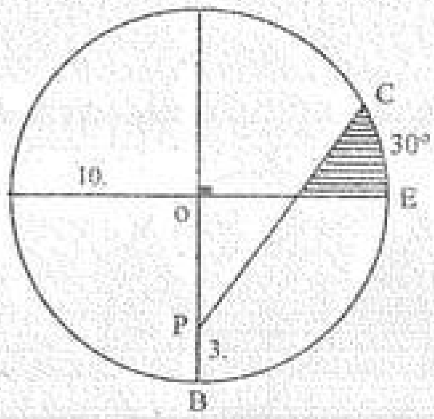
15.- H) OC = 10 u.

$$\frac{S_{////}}{S_{\Delta AOC}} = \frac{3}{7}$$

T) R = ? Resp. 4.70 u.



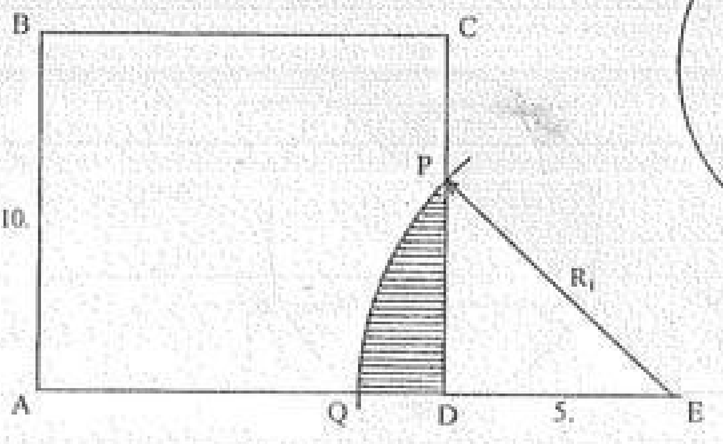
16.- T) $S_{////} = ?$ Resp. 16.67 u^2



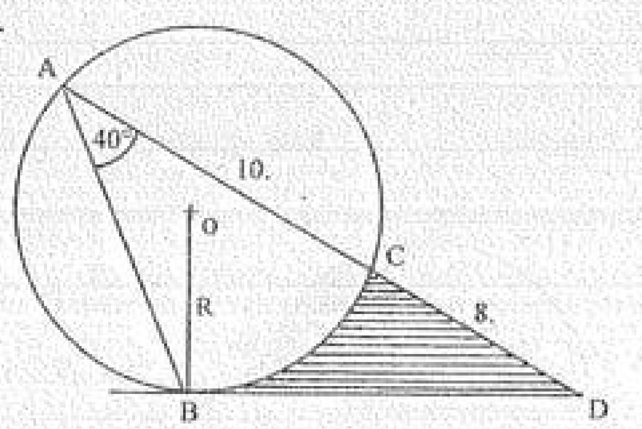
17.- H) ABCD Cuadrado

$$S_{////} = \frac{S_{ABCD}}{7}$$

T) $R_1 = ?$ Resp. 8.18



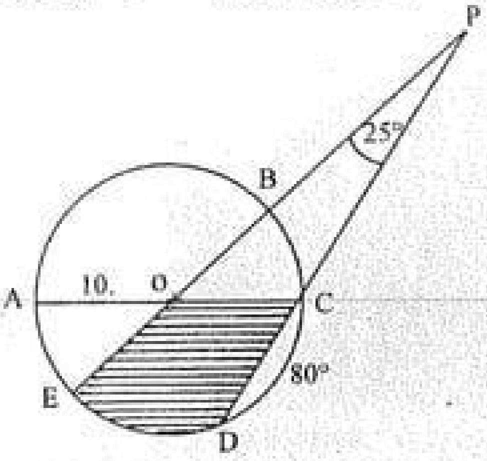
18.-



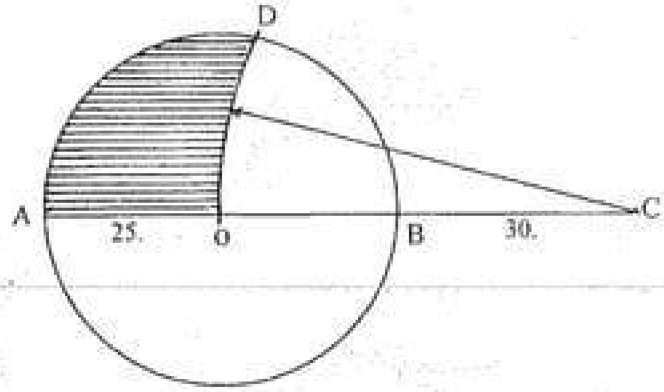
H) $\overline{BD}$ Tang. ⊙ (O, R)

T) $S_{////} = ?$ Resp. 21.03 u^2

19.- T) $S_{///}$ = ? Resp. 16.20 u^2

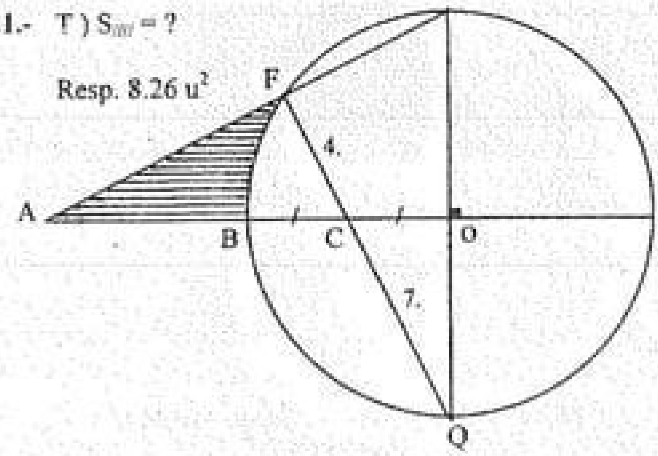


20.- T) $S_{///}$ = ? Resp. 5.3849 u^2



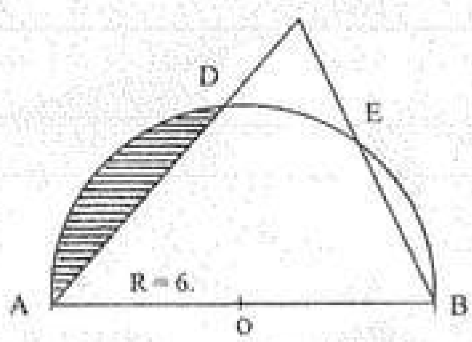
21.- T) $S_{///}$ = ?

Resp. 8.26 u^2

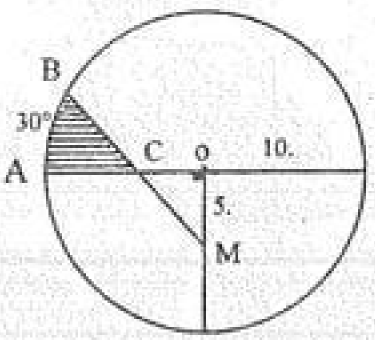


22.- H) BC = 8. T) $S_{///}$ = ?

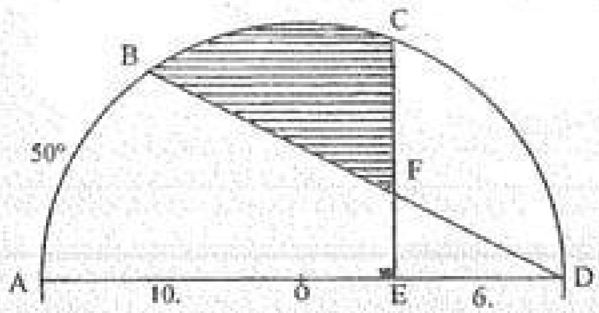
AC = 12. Resp. 14.44 u^2



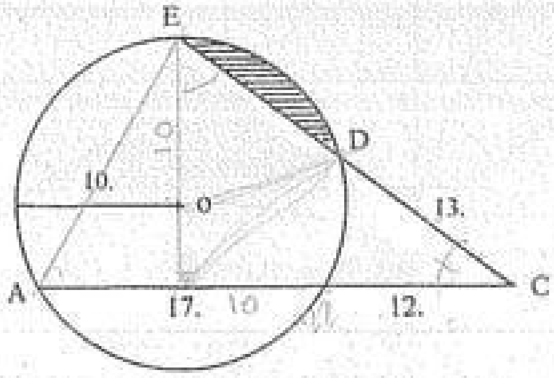
23.- T) $S_{///}$ = ? Resp. 25.33 u^2



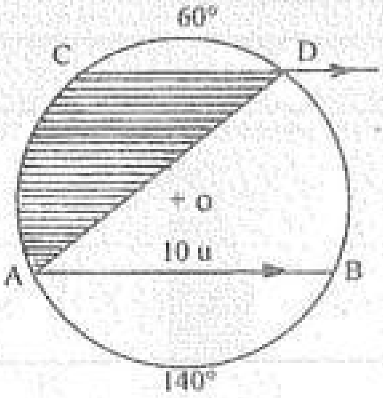
24.- T) $S_{///}$ = ? Resp. 43.92 u^2



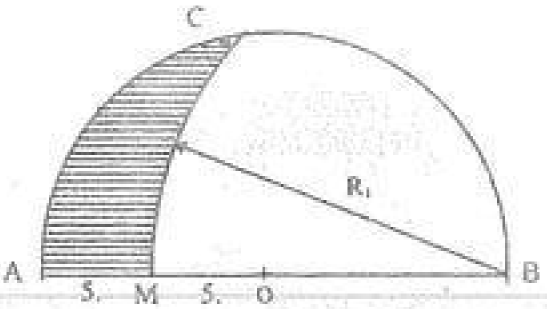
25.- T) $S_{///}$ = ? Resp. 26.00 u^2



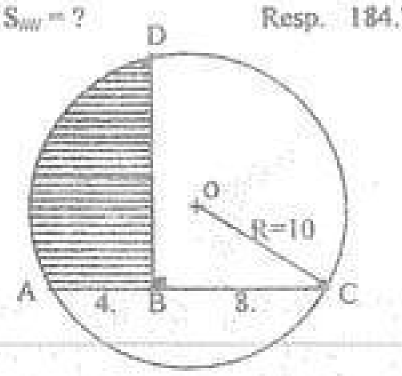
26.- T) $S_{///}$ = ? Resp. 23.0 u^2



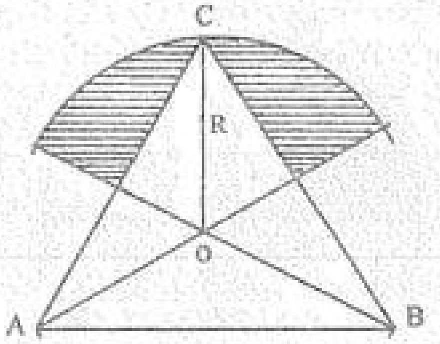
27.- T) $S_{///}$ = ?   Resp. 40.6 u^2



28.- T) $S_{///}$ = ?   Resp. 184.77 u^2



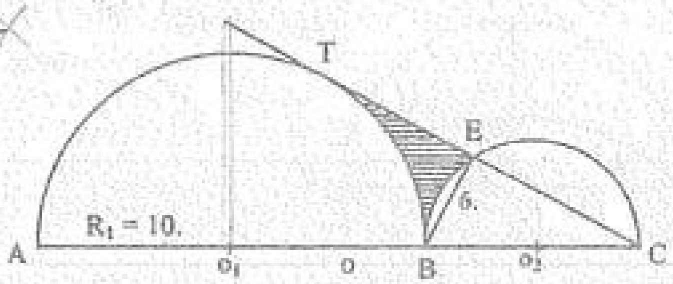
29.-



H) Δ ABC Equilátero de lado 20 m.
.O su Circuncentro

T) $S_{///}$ = ?   Resp. 81.76 m^2

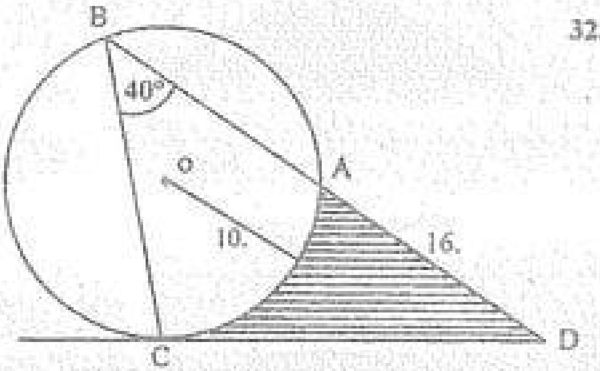
30.-



H) ⊙ $(O_1, 10)$ Tang ⊙ (O_2, R_2)
$\overline{CT}$ Tang ⊙ $(O_1, 10)$

T) $S_{///}$ = ?   Resp. 13.06 u^2

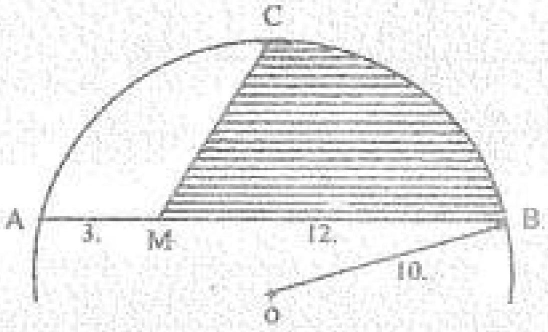
31.-



H) $\overline{DC}$ Tang ⊙ (O,10)

T) $S_{///}$ = ?   Resp. 76.77 u^2

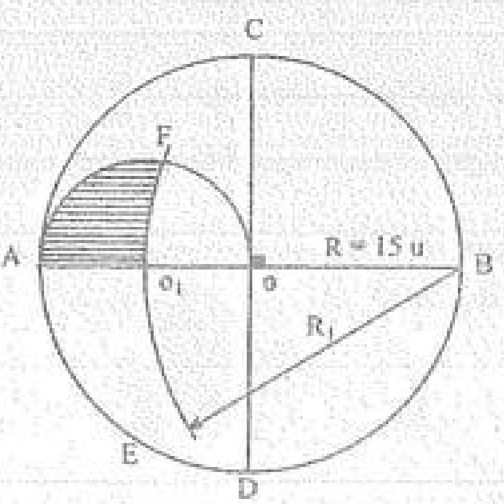
32.-



H) $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB}$

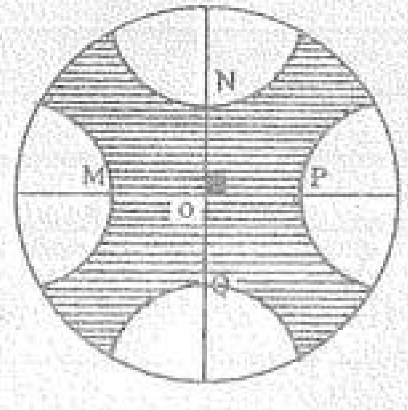
T) $S_{///}$ = ?   Resp. 254 u^2

33.-



T) $S_{///}$ = ?   Resp. 47.34 u^2

34.-

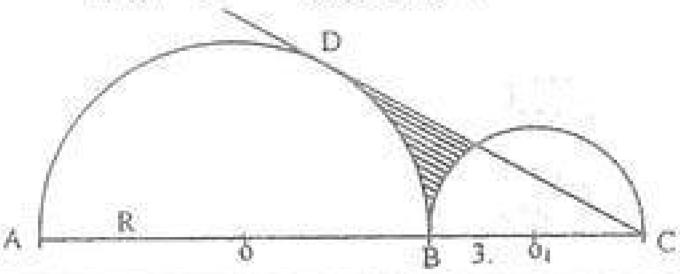


H) M, N, P y Q puntos
medios de los radios R = 10 u.

T) $S_{///}$ = ?   Resp. 173.87 u^2

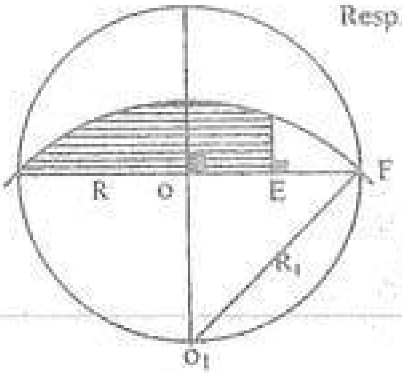
35.- H) $\overline{DC}$ = 14.84 u . Tang ⊙ (O, R)

T) $S_{////}$ = ? Resp. 11.65 u^2



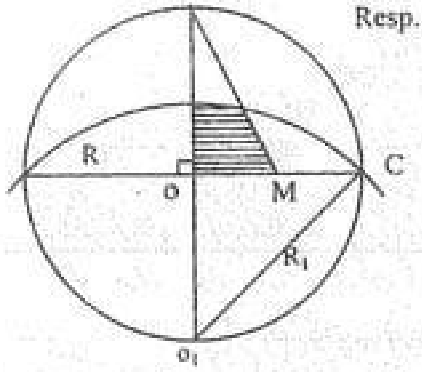
36.- H) OE = EF T) $S_{////}$ = ? f(R)

Resp. 0.47 R^2



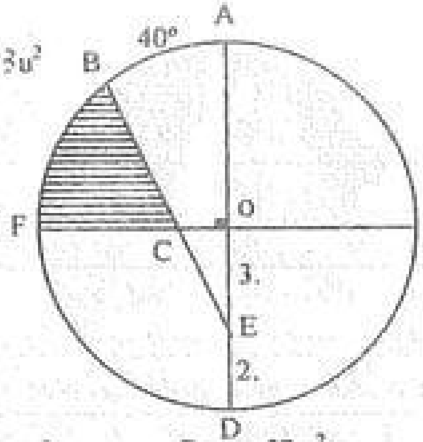
37.- H) OM = MC = 5 u. T) $S_{////}$ = ?

Resp. 12.57 u^2

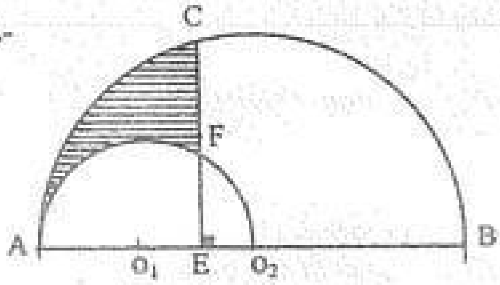


38.- T) $S_{////}$ = ?

Resp. 8.23 u^2



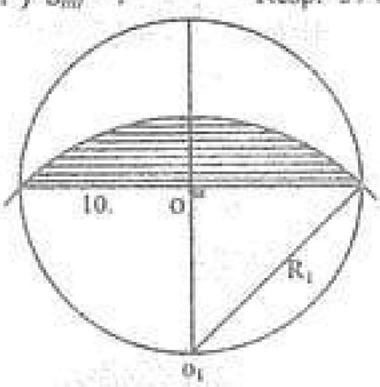
39.-



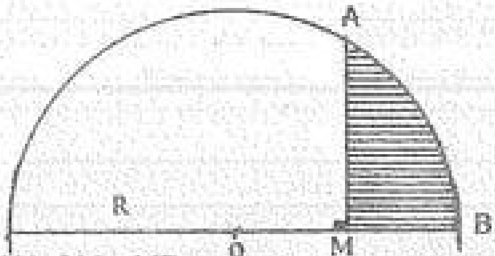
H) $AO_2 = O_2B$ = 10 cm.
EO_2 = 2.5 cm.

T) $S_{////}$ = ? Resp. 22.25 cm^2

40.- T) $S_{////}$ = ? Resp. 57 u^2



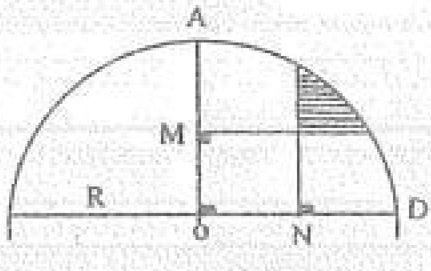
41.-



H) OM = MB

T) $S_{////}$ = ? f(R) Resp. 0.307 R^2

42.-

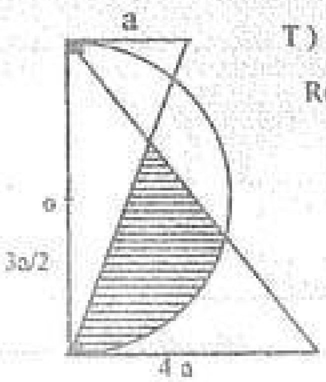


H) AM = MO = ON = ND

T) $S_{////}$ = ? f(R) Resp. 0.22 R^2

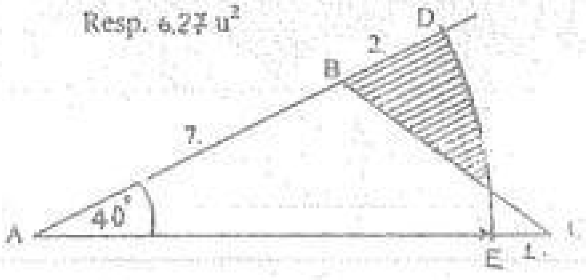
43.- T) $S_{////}$ = ? f(a)

Resp. 1.97 a^2

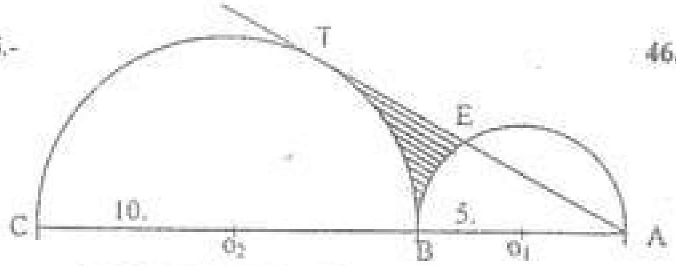


44.- T) $S_{////}$ = ? f(R)

Resp. 6.27 u^2



45.-

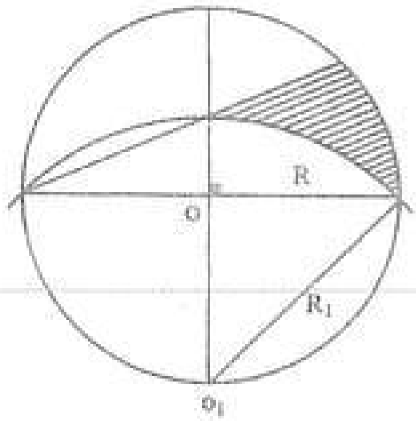


H) $\odot (O_1,10)$ Tang $\odot (O_2,5)$

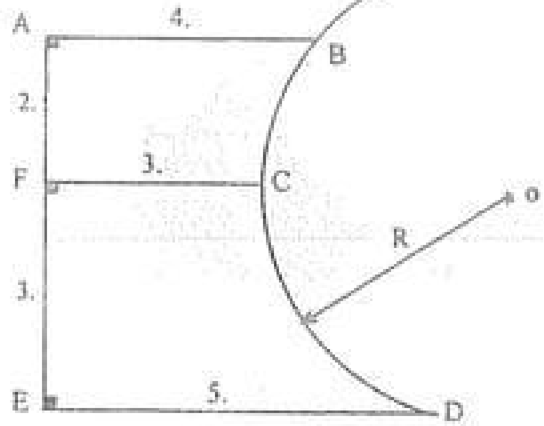
$\overline{AT}$ Tang. $\odot (O_2,10)$

T) $S_{///} = ?$ Resp. $10.13\ u^2$

46.- T) $S_{///} = ?$ f (R) Resp. $0.25\ R^2$



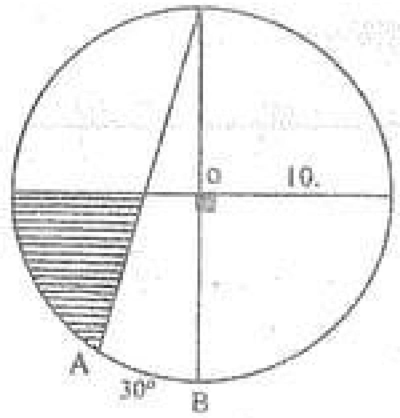
47.-



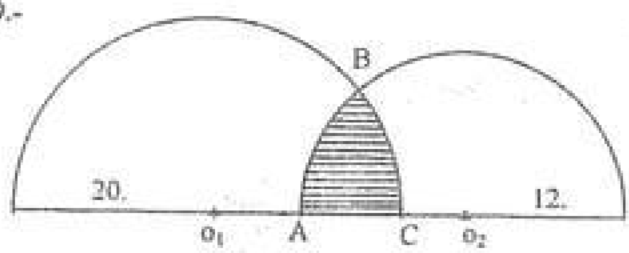
T) Area de la figura ABDE

Resp. $22.03 u^2$

48.- T) $S_{///} = ?$ Resp. $40.75\ u^2$



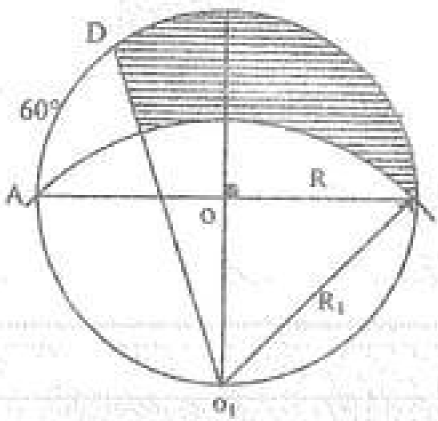
49.-



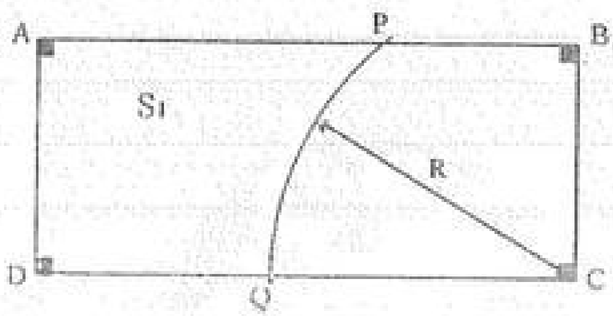
H) $O_1 O_2 = 24$ u.

T) $S_{///} = ?$ Resp. $55.41\ u^2$

50.- T) $S_{///} = ?$ f (R) Resp. $0.28\ R^2$



51.-



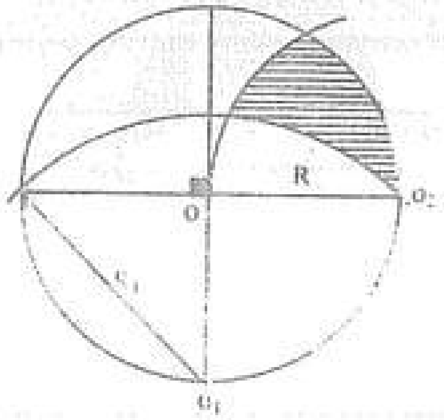
H) AB = 30 u.
AD = 10 u.

T) R = ?

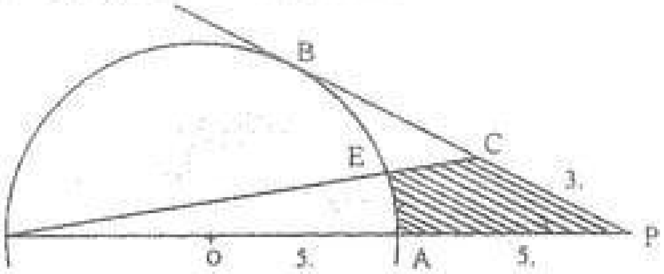
$$\frac{S_1}{S_{ABCD}} = \frac{1}{2}$$

Resp. 16.13 u

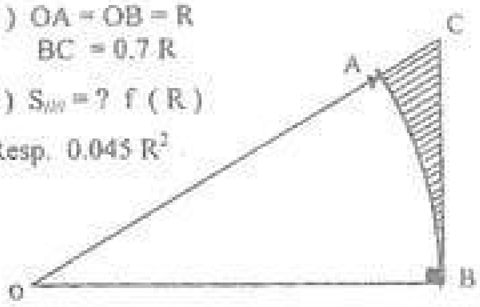
52.- T) $S_{///} = ?$ f (R) Resp. $0.34\ R^2$



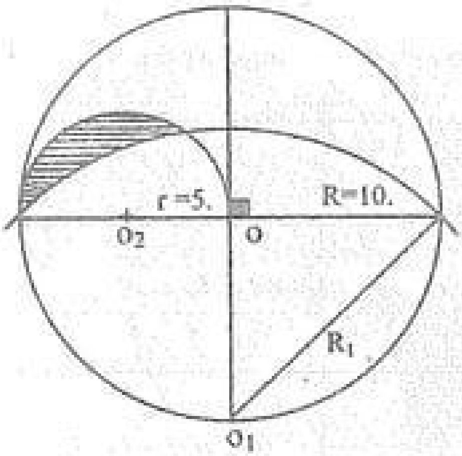
53.- T) $S_{////}$ = ? Resp. 5.25 u^2



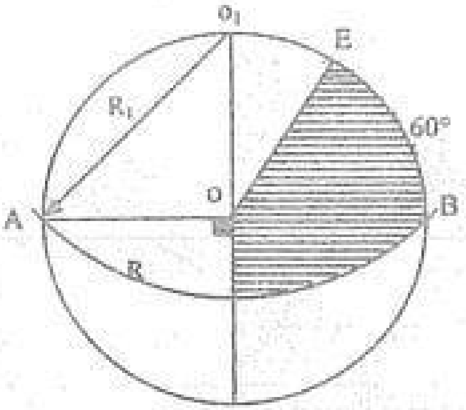
54.- H) OA = OB = R
BC = 0.7 R
T) $S_{////}$ = ? f(R)
Resp. 0.045 R^2



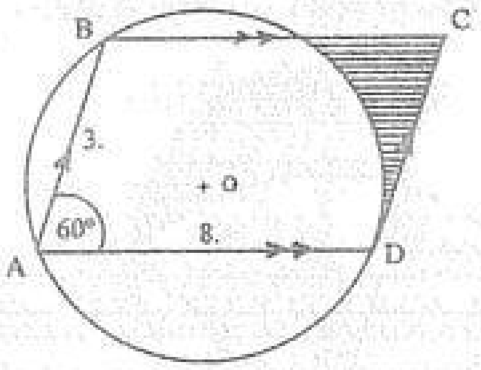
55.- T) $S_{////}$ = ? Resp. 13.38 u^2



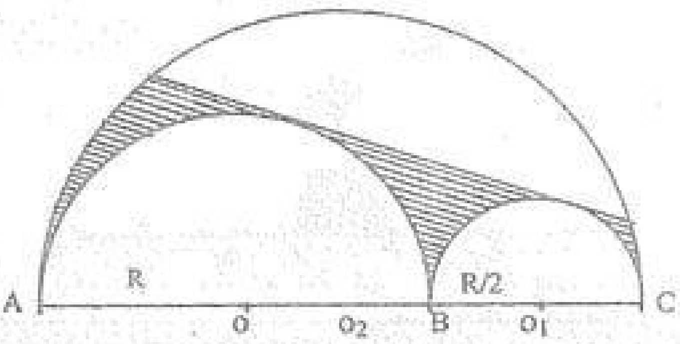
56.- T) $S_{////}$ = ? f(R) Resp. 0.809 R^2



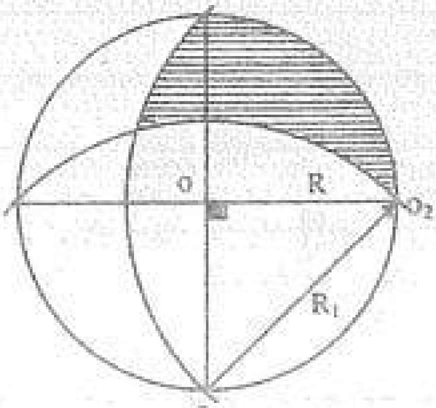
57.- T) $S_{////}$ = ? Resp. 3.30 u^2



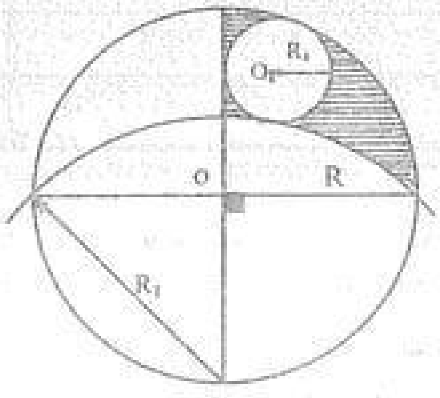
58.- T) $S_{////}$ = ? f(R) Resp. 0.4 R^2



59.- T) $S_{////}$ = ? f(R) Resp. 0.627 R^2

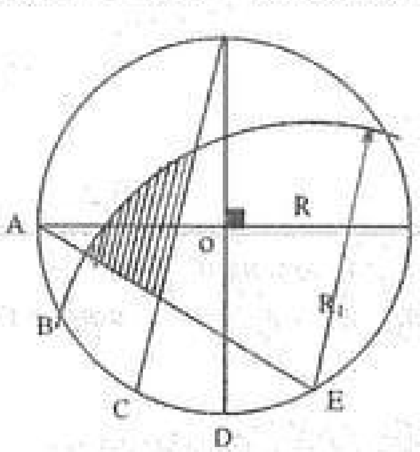


60.- T) $S_{////}$ = ? f(R) Resp. 0.26 R^2



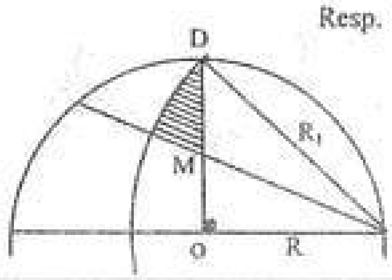
61.- H) $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE} = 30°$

T) $S_{////} = ?\ f(R)$ Resp. $0.136\ R^2$

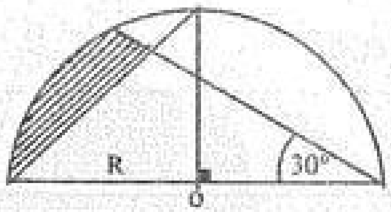


62.- H) DM = MO T) $S_{////} = ?\ f(R)$

Resp. $0.072\ R^2$

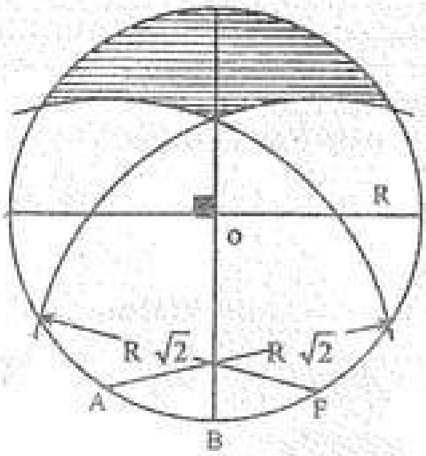


63.- T) $S_{////} = ?\ f(R)$ Resp. $0.224\ R^2$

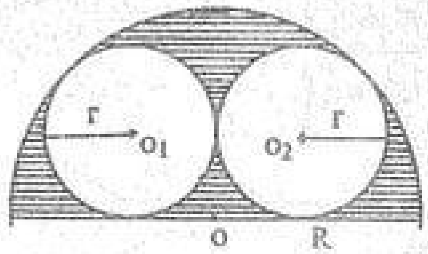


64.- H) AB = BF = 30°

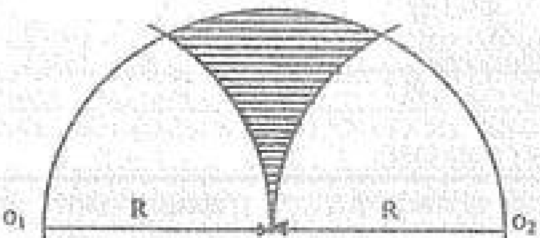
T) $S_{////} = ?\ f(R)$ Resp. $0.372\ R^2$



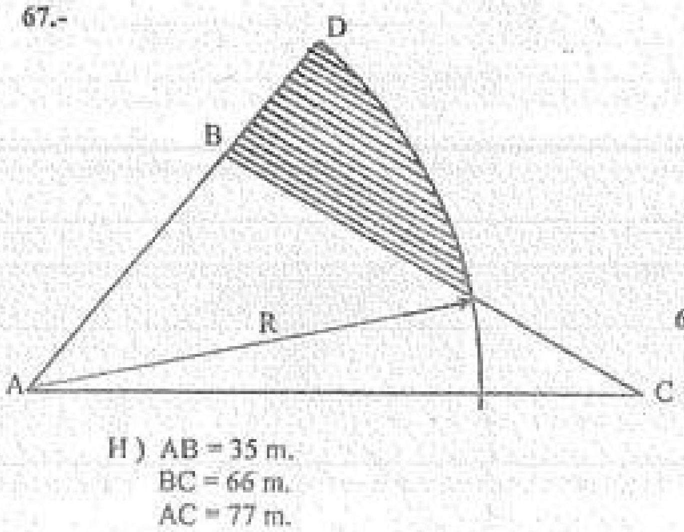
65.- T) $S_{////} = ?\ f(R)$ Resp. $0.492\ R^2$



66.- T) $S_{////} = ?\ f(R)$ Resp. $0.34\ R^2$



67.-

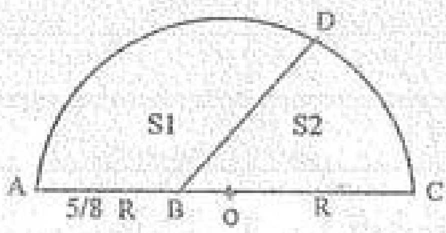


H) AB = 35 m.
BC = 66 m.
AC = 77 m.

$$\frac{S\,////}{S_{\Delta ABC}} = \frac{3}{7}$$

T) R = ? Resp. 51.6 m.

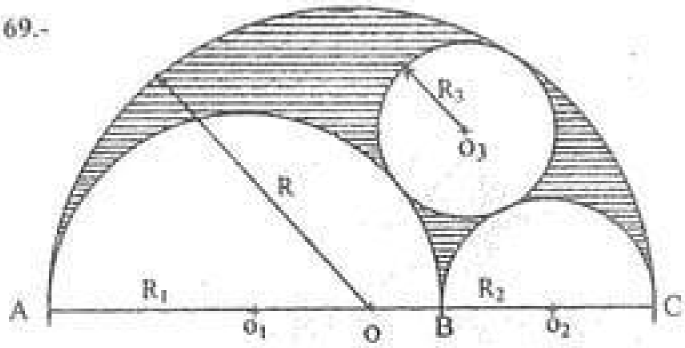
68.-



H) $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{2}$

T) $\widehat{DC} = ?$ Resp. 54.5°

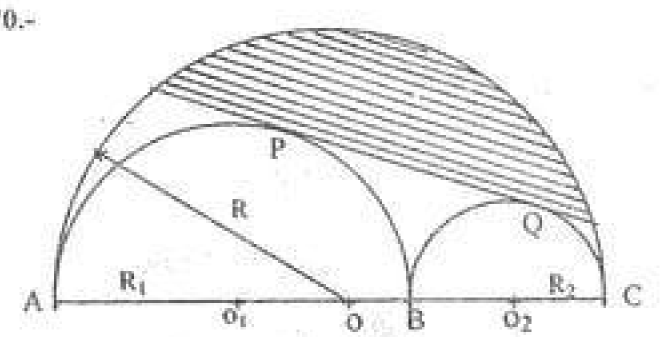
69.-



H) $R_1 = 2\ R_2$

T) $S_{////} = ?\ f(R)$ Resp. $0.442\ R^2$

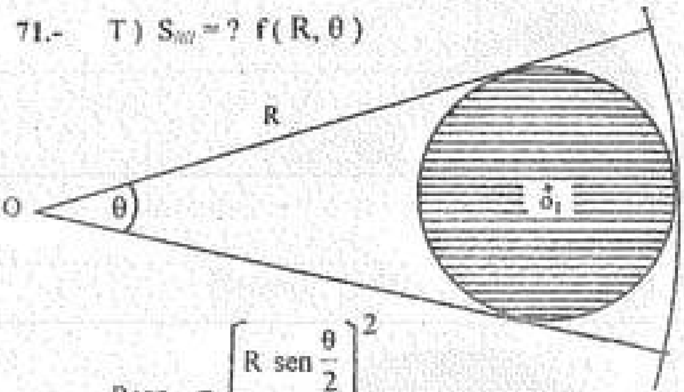
70.-



H) $\overline{PQ}$ Tang. Común T) $S_{////} = ?\ f(R)$

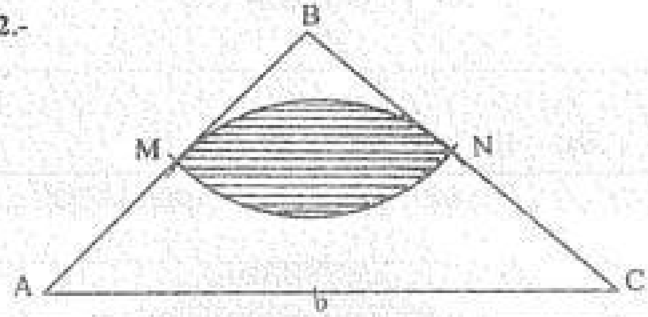
$R_1 = 2\ R_2$ Resp. $0.178\ R^2$

71.- T) $S_{////} = ?\ f(R, \theta)$



Resp. $\pi \left[\dfrac{R \text{ sen } \frac{\theta}{2}}{1 + \text{sen } \frac{\theta}{2}} \right]^2$

72.-

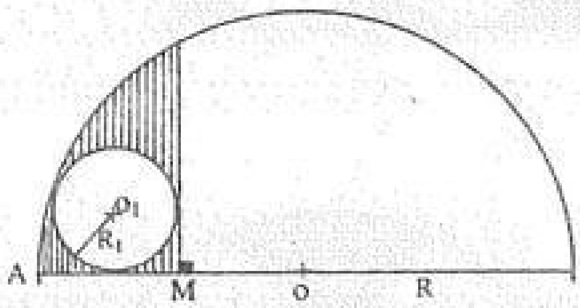


H) AB = BC = a

M y N Puntos Medios

T) $S_{////} = ?\ f(a)$ Resp. $0.143\ a^2$

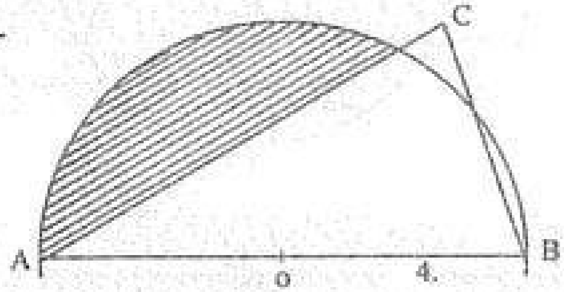
73.-



H) AM = MO

T) $S_{////} = ?\ f(R)$ Resp. $0.14\ R^2$

74.-

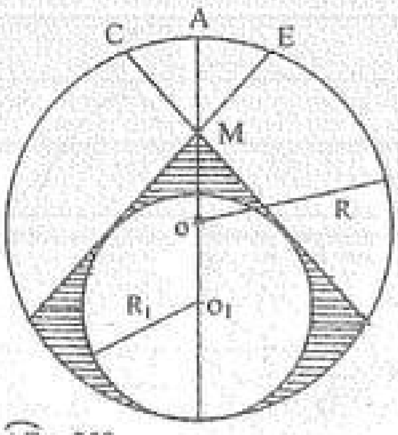


H) BC = 4 m.

AC = 7 m.

T) $S_{////} = ?$ Resp. $9.83\ m^2$

75.-

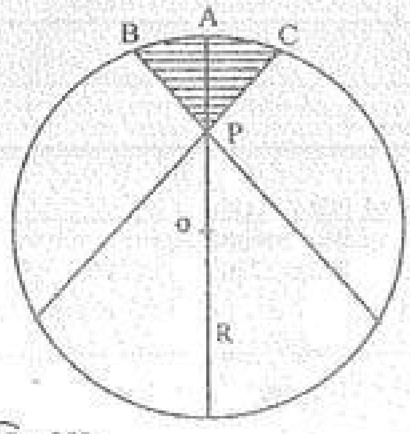


H) $\widehat{AC} = \widehat{AE} = 20°$

AM = MO

T) $S_{////} = ?\ f(R)$ Resp. $0.363\ R^2$

76.-

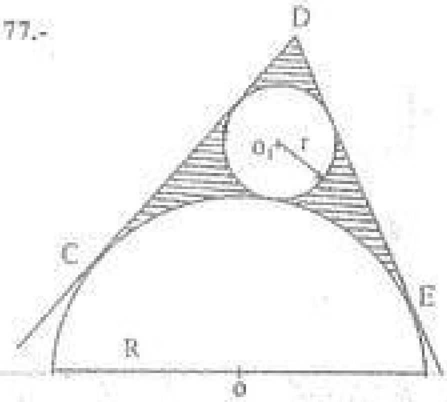


H) $\widehat{AB} = \widehat{AC} = 20°$

AP = 2/3 R

T) $S_{////} = ?\ f(R)$ Resp. $0.24\ R^2$

77.-

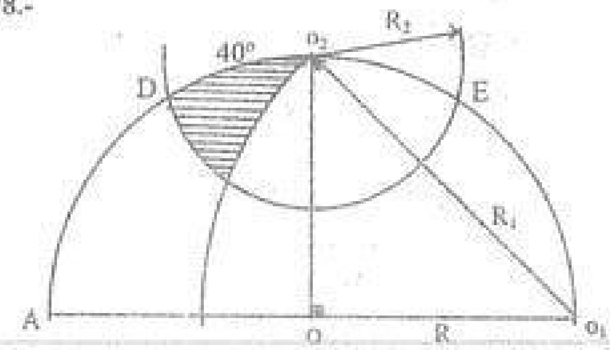


H) $\overline{DC}$ y $\overline{DE}$ Tang. $\odot(O, R)$

$\widehat{CDE} = 60°$

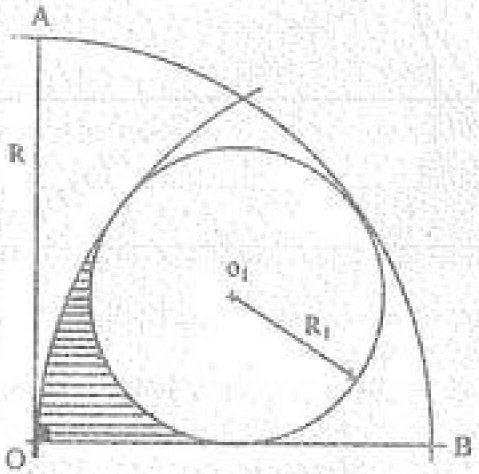
T) $S_{////} = ?\ f(R)$ Resp. $0.33\ R^2$

78.-



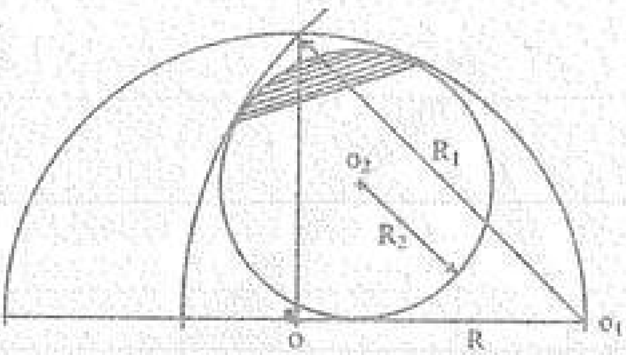
T) $S_{////} = ?\ f(R)$ Resp. $0.16\ R^2$

79.-



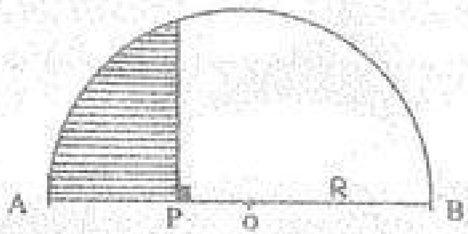
T) $S_{////} = ?\ f(R)$ Resp. $0.072\ R^2$

80.-



T) $S_{////} = ?\ f(R)$ Resp. $0.05\ R^2$

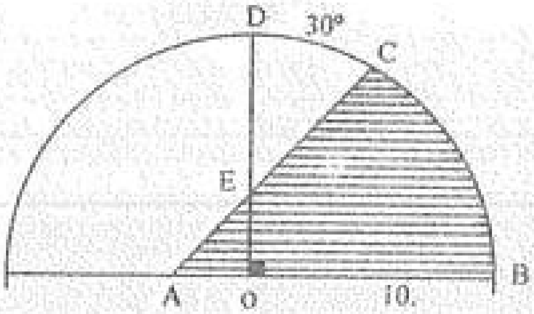
81.-



H) $\dfrac{AB}{AP} = \dfrac{5}{2}$

T) $S_{////} = ?\ f(R)$ Resp. $0.57\ R^2$

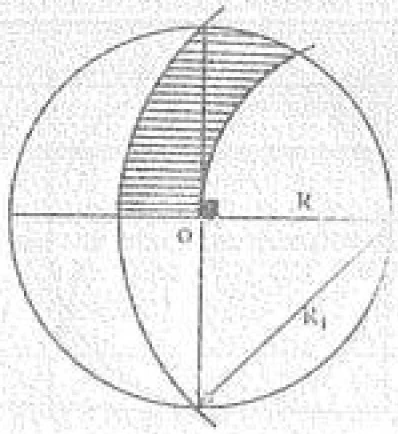
82.-



H) $\dfrac{S_{////}}{S_T} = \dfrac{4}{7}$

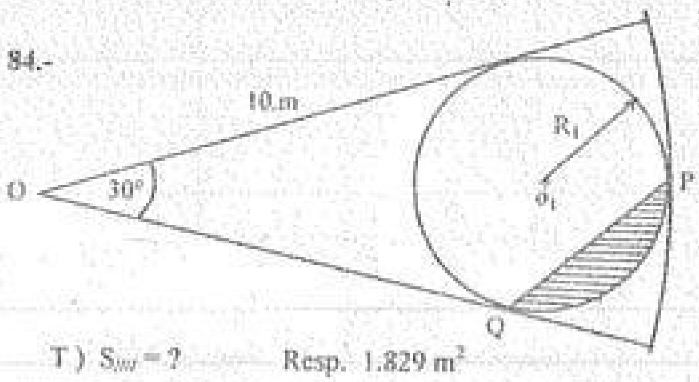
T) ED = ? Resp. 4.54

83.-



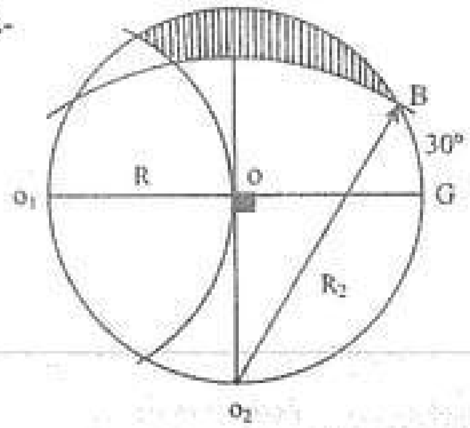
T) $S_{////} = ?\ f(R)$ Resp. $0.25\ R^2$

84.-



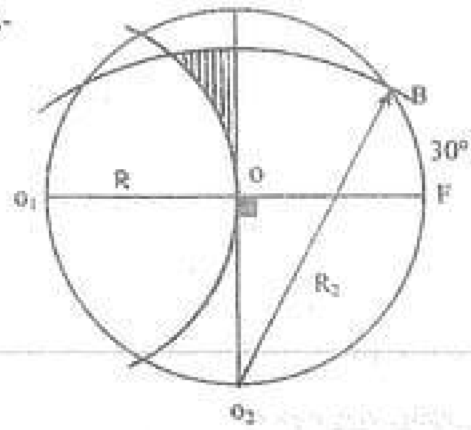
T) $S_{////} = ?$ Resp. $1.829\ m^2$

85.-



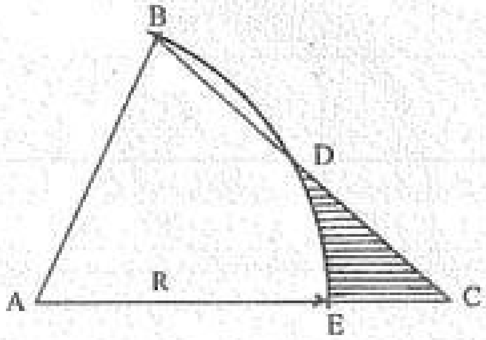
T) $S_{///} = ?$ f(R) Resp. $0.288\ R^2$

86.-



T) $S_{///} = ?$ f(R) Resp. $0.068\ R^2$

87.-

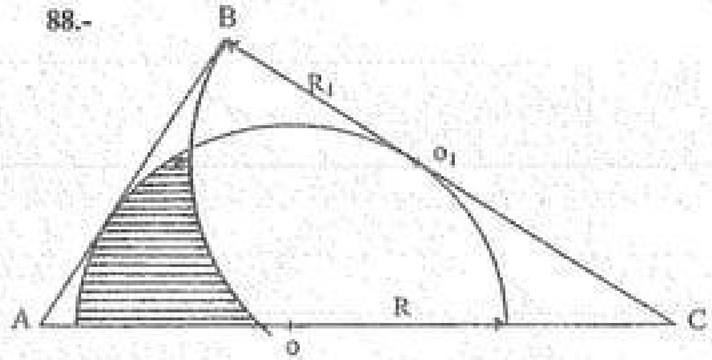


H) AB = 5 m.
BC = 8 m.
AC = 7 m.

T) $S_{///} = ?$

Resp. 1.74 m^2

88.-

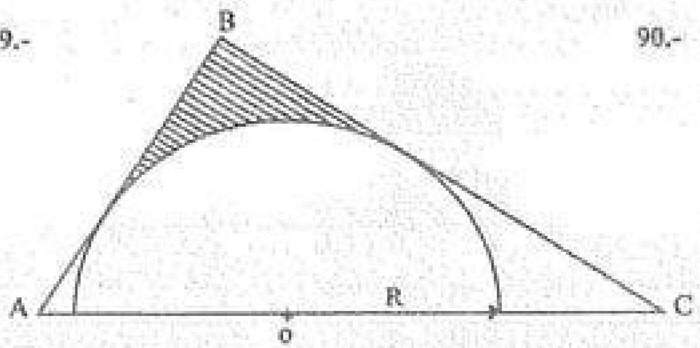


H) AC = 10 m.
BC = 9 m.
AB = 7 m.

T) $S_{///} = ?$

Resp. 4.013 m^2

89.-

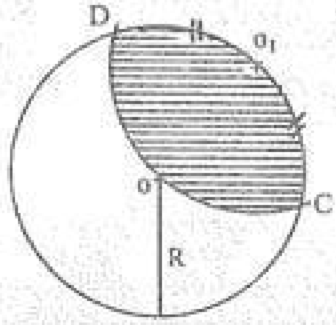


H) AC = 10 m.
BC = 7 m.
AB = 5,5 m.

T) $S_{///} = ?$

Resp. 0.964 m^2

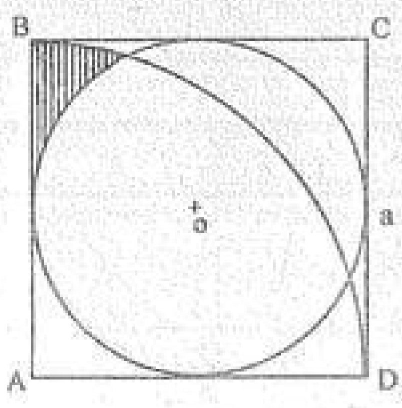
90.-



H) DO_1 = 30°

T) $S_{///} = ?$ f(R) Resp. $0.64\ R^2$

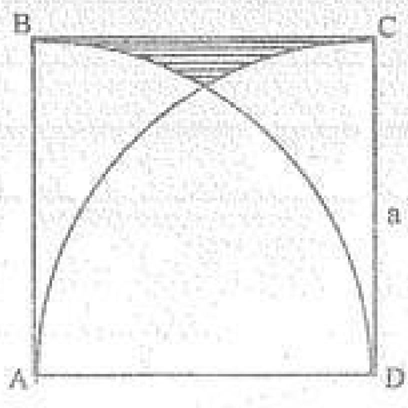
91.-



H) ABCD Cuadrado

T) $S_{///} = ?$ f(a) Resp. $0.046\ a^2$

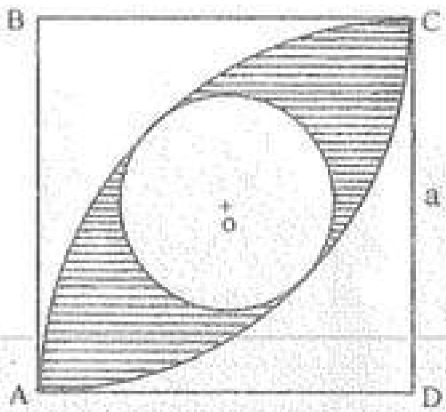
92.-



H) ABCD Cuadrado

T) $S_{///} = ?$ f(a) Resp. $0.042\ a^2$

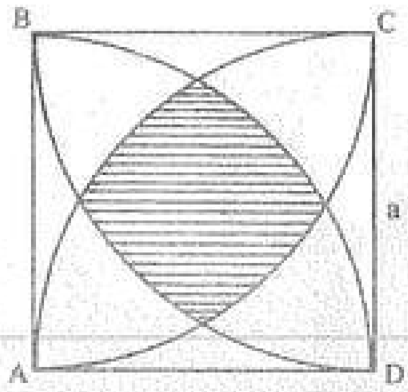
93.-



H) ABCD Cuadrado

T) $S_{///}$ = ? f (a)   Resp. 0.301 a^2

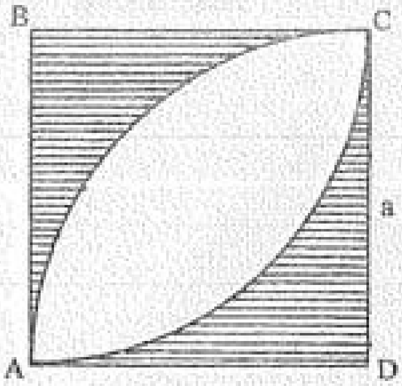
94.-



H) ABCD Cuadrado

T) $S_{///}$ = ? f (a)   Resp. 0.315 a^2

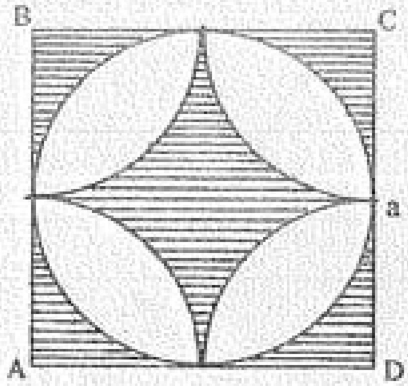
95.-



H) ABCD Cuadrado

T) $S_{///}$ = ? f (a)   Resp. 0.429 a^2

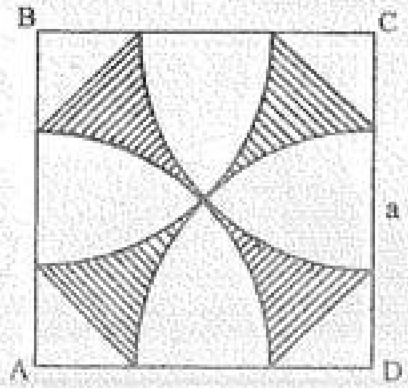
96.-



H) ABCD Cuadrado

T) $S_{///}$ = ? f (a)   Resp. 0.47 a^2

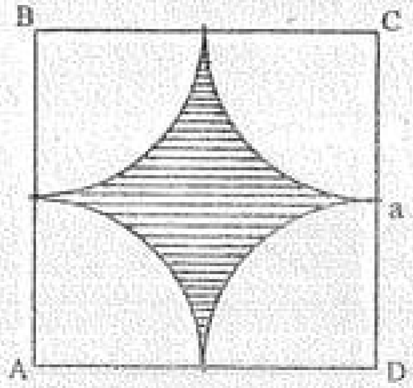
97.-



H) ABCD Cuadrado

T) $S_{///}$ = ? f (a)   Resp. 0.257 a^2

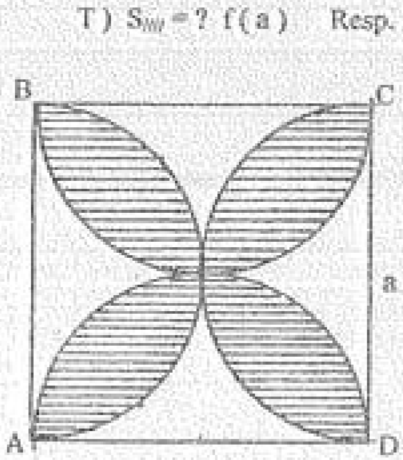
98.-



H) ABCD Cuadrado

T) $S_{///}$ = ? f (a)   Resp. 0.215 a^2

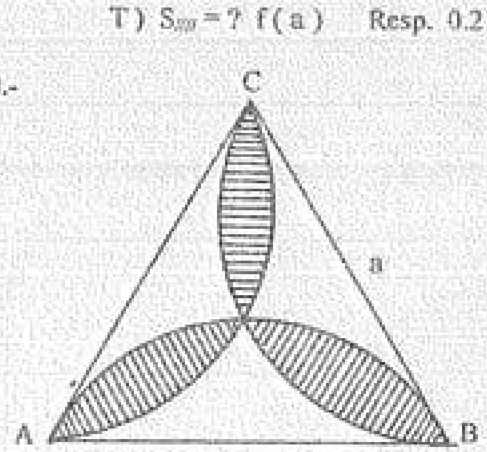
99.-



H) ABCD Cuadrado

T) $S_{///}$ = ? f (a)   Resp. 0.571 a^2

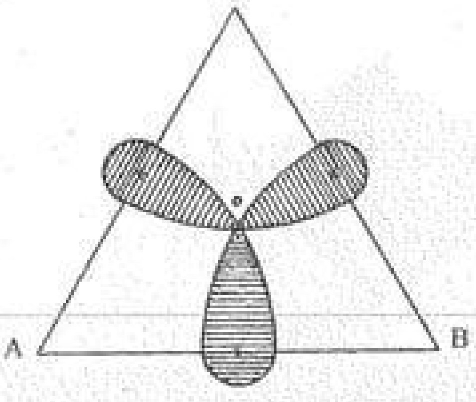
100.-



H) Δ ABC Equilátero

T) $S_{///}$ = ? f (a)   Resp. 0.181 a^2

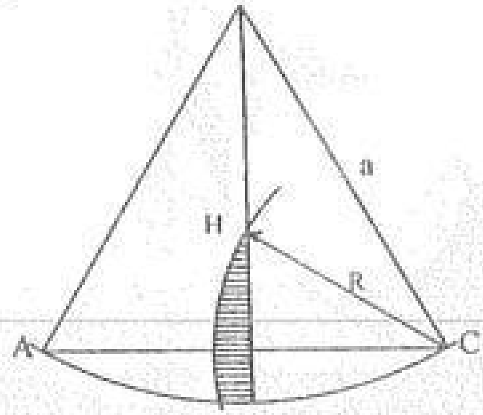
101.-



H) Δ ABC Equilátero de lado a

T) $S_{////}$ = ? f (a)   Resp. 0.119 a^2

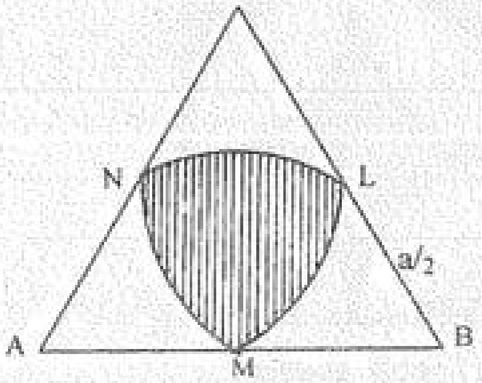
102.-



H) Δ ABC Equilátero
H Ortocentro

T) $S_{////}$ = ? f (a)   Resp. 0.024 a^2

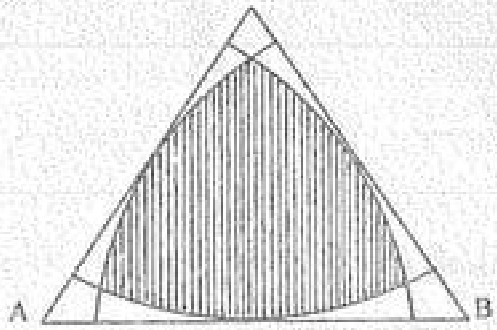
103.-



H) Δ ABC Equilátero
L, M y N Puntos Medios

T) $S_{////}$ = ? f (a)   Resp. 0.176 a^2

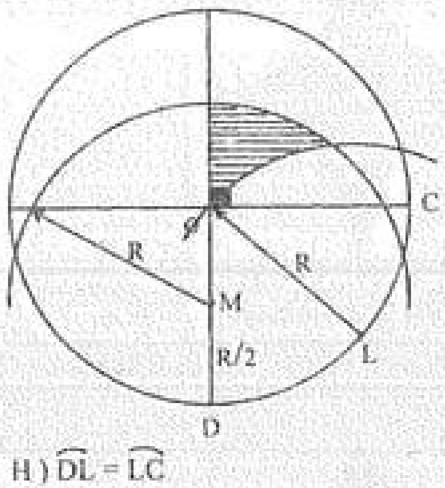
104.-



H) Δ ABC Equilátero

T) $S_{////}$ = ? f (a)   Resp. 0.344 a^2

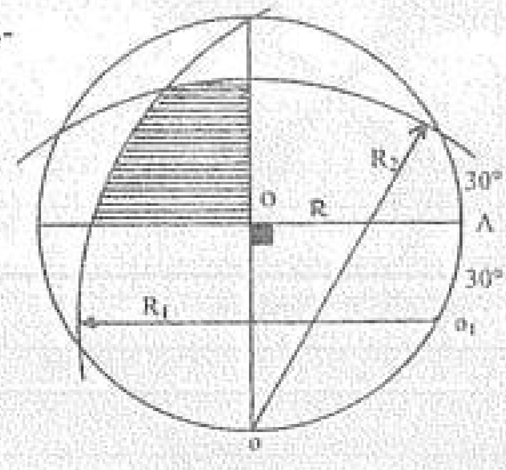
105.-



H) $\widehat{DL} = \widehat{LC}$

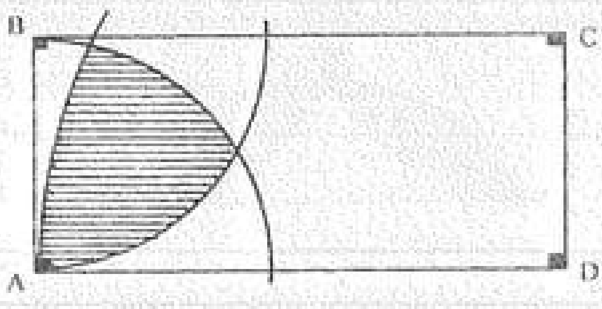
T) $S_{////}$ = ? f (R)   Resp. 0.147 R^2

106.-



T) $S_{////}$ = ? f (R)   Resp. 0.44 R^2

107.-

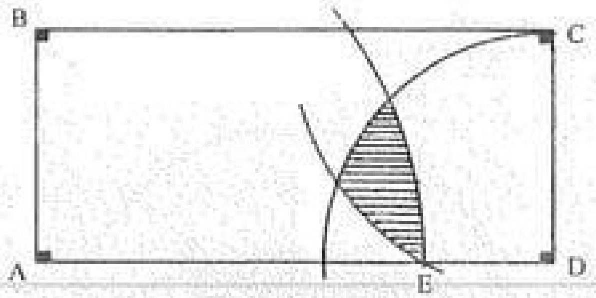


H) AB = 5 m.
AD = 10 m.

T) $S_{////}$ = ?

Resp. 13.258 m^2

108.-



H) AB = 6 m.
AD = 12 m.
ED = 3 m.

T) $S_{////}$ = ?

Resp. 5.912 m^2

109.- Desde un punto se trazan dos tangentes a un círculo de radio 10 m. El ángulo que forman las tangentes es 80°. Determinar el área limitada por las tangentes y el arco de círculo. Resp. 31,84m^2

110.- Siendo R = 9 m. el radio de un sector circular de 30°. ¿Cuánto mide el radio del círculo equivalente al sector circular?. Resp. 2.598 m.

111.- El área del círculo inscrito en un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los círculos inscritos en los triángulos parciales que la altura determina sobre la hipotenusa.

112.- Dos círculos de radios R = 14 m. y r = 6 m. se cortan y la distancia entre sus centros es igual a d = 10 m. Hallar el área de su parte común. Resp 97.96 m^2.

113.- En el interior de un triángulo equilátero de lado 10 m. hay tres círculos iguales tangentes a los lados del triángulo y mutuamente tangentes entre sí. Hallar el área del triángulo curvilíneo formado por los arcos de los círculos mutuamente tangentes (siendo sus vértices los puntos de tangencia). Resp. 0.54 m^2.

114.- En un círculo se trazan dos diámetros perpendiculares $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$; con centro en D, se traza el arco $\widehat{AB}$ y dos cuerdas cualesquiera $\overline{DP}$ y $\overline{DQ}$, que cortan el arco $\widehat{AB}$ en L y M. Los puntos P y Q se proyectan en el diámetro AB en los puntos P' y Q' respectivamente. Demostrar que el área circular LPMQ es equivalente al triángulo DP'Q'.

5.10.4.1. EJERCICIOS RESUELTOS

14.-

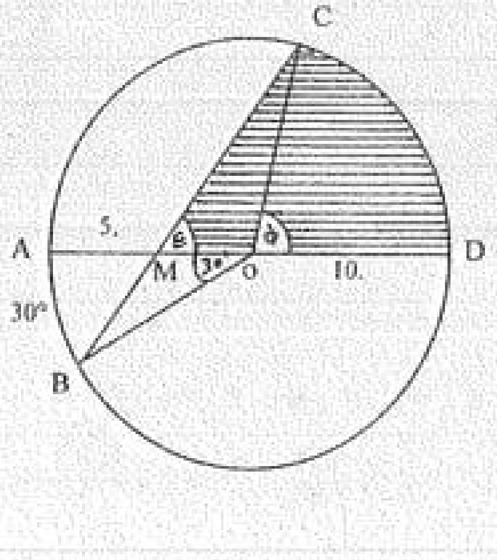
1.- $S_{////} = S_{\sphericalangle O\,C\,D} + S_{\Delta MOC} = \Pi\,(10)^2 \times \dfrac{\phi}{360^\circ} + \frac{1}{2}\,(5 \times 10 \times \text{Sen}\,(180^\circ - \phi));$

2.- $BM^2 = 5^2 + 10^2 - 2 \times 5 \times 10 \times \text{Cos}\,30^\circ$

$\therefore$ BM = 6,2 u.

3.- $\dfrac{BM}{\text{Sen}\,30^\circ} = \dfrac{10}{\text{Sen}\,\varepsilon}$

$\therefore \quad \widehat{\varepsilon} = 53.7^\circ$



4.- $53{,}7^\circ = \dfrac{30^\circ + \widehat{CD}}{2}$

5.- $\Rightarrow \widehat{CD} = 77{,}4^\circ = \phi$

$\therefore \quad S_{////} = 92\ u^2$

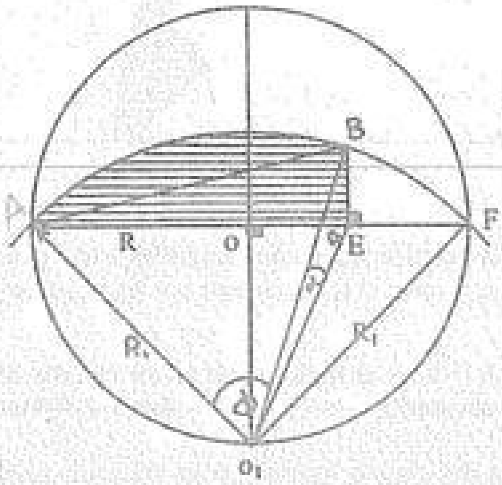
36.-

1.- $S_{///} = S_{A \frown B} + S \Delta ABE = \dfrac{R_1^2}{2}\left(\dfrac{\phi \Pi}{180^\circ} - \text{Sen}\,\phi\right) + \dfrac{AE_x BE}{2}$

2.- $R_1 = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}$

3.- $CE = \sqrt{R^2 + (½ R)^2} = ½ R\sqrt{5}$

4.- $\text{Tan}\ \varepsilon = \dfrac{R}{½R} \Rightarrow \widehat{\varepsilon} = 63{,}4^\circ$



5.- $BEC = 90^\circ + \varepsilon = 153.4^\circ$

6.- $R_1^2 = BE^2 + CE^2 - 2_x BE_x CE_x \text{Cos}\,\widehat{BEC}$

$\Rightarrow BE = 0{,}32\ R$

$$\frac{R_1}{\text{Sen}\ 153.4^\circ} = \frac{BE}{\text{Sen}\ \alpha}$$

$\Rightarrow \widehat{\alpha} = 5{,}8^\circ$

7.- $\widehat{\phi} = 45^\circ + (90^\circ - \widehat{\varepsilon}) - \widehat{\alpha} = 65.8^\circ$

$\Rightarrow\ S_{///} = 0{,}47\ R^2$

52.-

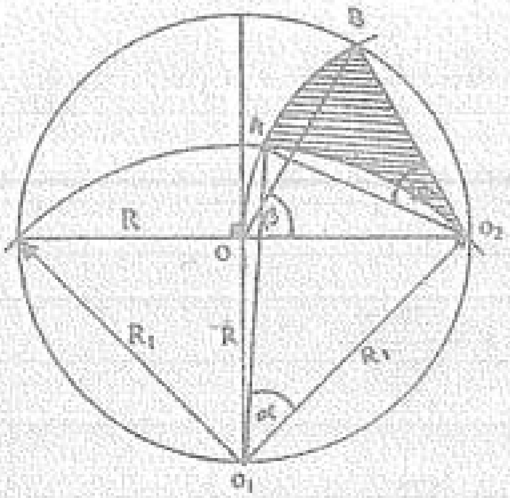
1.- $S_{///} = S \Delta ABO2 + S_{A \frown B} + S_{B \frown O2} - S_{A \frown O2}$

2.- $S_{///} = \dfrac{R_x R_x \text{Sen}\,\omega}{2} + \dfrac{R^2}{2}\left(\dfrac{\omega \Pi}{180^\circ} - \text{Sen}\,\omega\right) + \dfrac{R^2}{2}\left(\dfrac{\beta \Pi}{180^\circ} - \text{Sen}\,\beta\right) - \dfrac{R_1^2}{2}\left(\dfrac{\alpha \Pi}{180^\circ} - \text{Sen}\,\alpha\right)$

3.- $R_1 = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}$

4.- $\Delta\ OBO_2$ Equilátero

$\therefore\ \beta = 60^\circ$ y $BO_2 = R$



5.- $\Delta\ AO_1O_2$ Isósceles

$\therefore\ \text{Sen}\ ½\,\alpha = \dfrac{½\,R}{R_1}$

$\Rightarrow\ \widehat{\alpha} = 41{,}4^\circ$ y $AO_2 = R$

6.- $\widehat{\omega} = 60^\circ - (90^\circ - ½\,\widehat{\alpha} - 45^\circ) = 35{,}7^\circ$

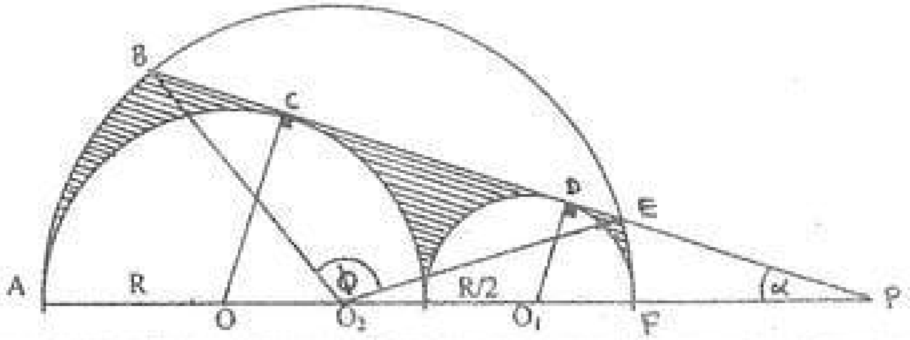
$\therefore\ S_{///} = 0{,}34\ R^2$

58.-

1.- $S_{///} = S_{A \frown F} - S_{B \frown E} - S_{A \frown T} - S_{T \frown F}$

2.- $S_{///} = \dfrac{\Pi R_2^2}{2} + \dfrac{R_2^2}{2}\left(\dfrac{\phi \Pi}{180^\circ} - \text{Sen}\,\phi\right) - \dfrac{\Pi R^2}{2} - \dfrac{\Pi (½ R)^2}{2}$

3.- $AF = 2\ AO_2 = 2\ R + R = 3\ R \quad \Rightarrow AO_2 = R_2 = ½\ R = 1.5\ R$



4.- $\Delta OCP \sim \Delta O_1DP$ (A.A.)

$$\frac{R}{\frac{1}{2}R} = \frac{OP}{O_1P} = \frac{2R + FP}{\frac{1}{2}R + FP} \Rightarrow FP = R$$

5.- $\operatorname{Sen} \alpha = \dfrac{R}{OP} \Rightarrow \alpha = 19{,}47°$

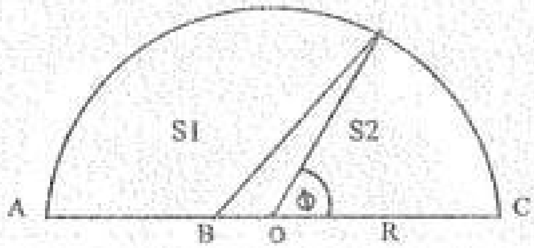
6.- En ΔO_2EP $\dfrac{1.5\,R}{\operatorname{Sen} 19.47°} = \dfrac{2.5\,R}{\operatorname{Sen} O_2EP}$

7.- En ΔO_2BE Isósceles $O_2EB = O_2BE = 33.75°$ y $\hat{\phi} = 112{,}5°$ $\therefore$ $S_{///} = 0{,}4\,R^2$

68.-

1.- Si $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{3}{2}$

2.- $\dfrac{S_1 + S_2}{S_2} = \dfrac{3+2}{2}$



$$\therefore \quad \frac{5}{2} = \frac{\dfrac{\Pi R^2}{2}}{\dfrac{\phi\, R^2}{2} \quad \dfrac{R_x \frac{1}{2} R_x \operatorname{Sen}\phi}{2}}$$

3.- $\therefore$ $40\,\hat{\phi} + 15 \operatorname{Sen} \hat{\phi} = 16\,\Pi \Rightarrow \phi = 54{,}5° = \overset{\frown}{DC}$

77.-

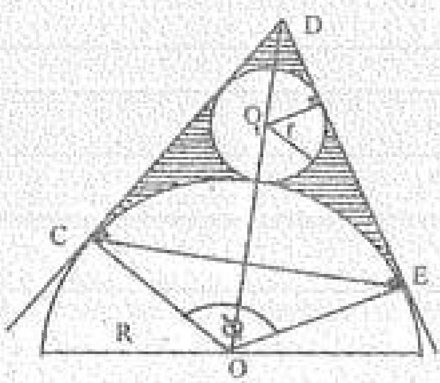
1.- $S_{///} = S\,\Delta CDE - S_{C \frown E} - S \odot (o_1 , r)$

2.- $S_{///} = \dfrac{CE^2 \sqrt{3}}{4} - \dfrac{R^2}{2} \left(\dfrac{\phi\,\Pi}{180°} - \operatorname{Sen}\, \phi \right) - \Pi\, r^2$

3.- ΔCDE Equilátero : $\operatorname{Tan} 30° = \dfrac{R}{DE}$

y $\operatorname{Sen} 30° = \dfrac{r}{DO_1}$

$\Rightarrow CE = DE = DC = 1.73\,R$ y $DO_1 = 2r$



4.- $\dfrac{R}{r} = \dfrac{R + r + DO_1}{DO_1}$

$\therefore$ $r = \frac{1}{2} R$

5.- $\phi = 180° - 60° = 120°$

$\Rightarrow S_{///} = 0{,}35\,R^2$

UNIDAD 6

6. POLÍGONOS Y CUADRILÁTEROS

6.1. CONGRUENCIA DE POLÍGONOS

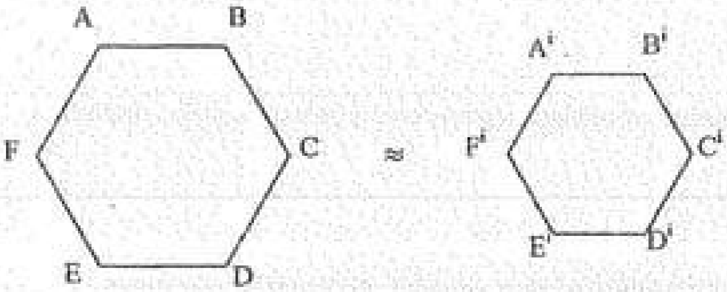
Dos polígonos son congruentes si tienen respectivamente congruentes sus lados y sus ángulos internos.

6.2. SEMEJANZA DE POLÍGONOS

Dos polígonos son semejantes si tienen respectivamente sus lados proporcionales y sus ángulos congruentes.

TEOREMA # 1

Los perímetros de dos polígonos semejantes son entre sí como dos lados homólogos.



H) $ABCD\ldots \approx A'B'C'D'\ldots$

T) $\dfrac{P}{P'} = \dfrac{AB}{A'B'}$

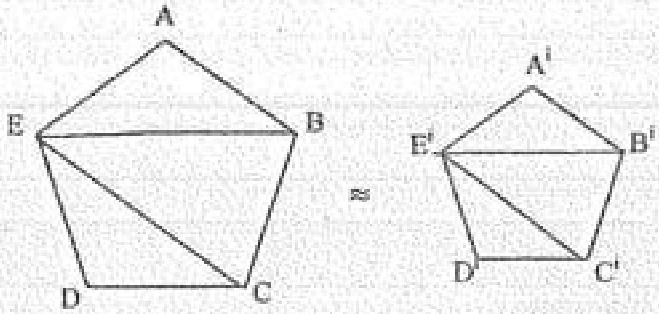
D) $$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \ldots$$

$$\frac{AB + BC + CD + DE + \ldots}{A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + \ldots} = \frac{AB}{A'B'}$$

$$\therefore \quad \frac{P}{P'} = \frac{AB}{A'B'} \quad ///.$$

TEOREMA # 2

Si dos polígonos son semejantes se pueden descomponer en un mismo número de triángulos semejantes, semejantemente dispuestos.



H) $ABCDE\ldots \approx A'B'C'D'E'\ldots$

T) $\Delta ABE \approx \Delta A'B'C'$

$\Delta BEC \approx \Delta B'E'C'$

$\Delta CED \approx \Delta C'E'D'$

D) $\Delta ABE \wedge \Delta A'B'E'$: $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{EA}{E'A'}$

$$A = A'$$

$$\therefore \quad \Delta ABE \approx \Delta A'B'E' \quad ///.$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AE}{A'E'} = \frac{BE}{B'E'}$$

$$\Delta CED \sim \Delta C'E'D' : \quad \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'}$$

$$D = D'$$

$$\therefore \ \Delta CED \approx \Delta C'E'D' \qquad ///.$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{CE}{C'E'}$$

$$\Delta BEC \sim \Delta B'E'C' : \quad \frac{BC}{B'C'} = \frac{BE}{B'E'} = \frac{CE}{C'E'}$$

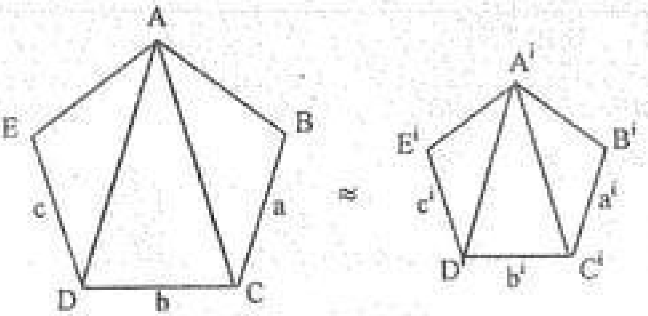
$$\therefore \ \Delta BCE \approx \Delta B'C'E' \qquad ///.$$

COROLARIO

Si dos polígonos pueden descomponerse en igual número de triángulos semejantes y semejantemente dispuestos, los polígonos son semejantes.

TEOREMA # 3

Las áreas de los polígonos semejantes están en la misma relación que el cuadrado de los lados homólogos.



H) $ABCDE.... \approx A'B'C'D'E'....$

T) $\dfrac{S \ ABCD\cdots}{S \ A'B'C'D'\cdots} = \dfrac{a^2}{a_1^{\,2}} = \ldots$

$$D)\quad \frac{S \ \Delta ABC}{S \ \Delta A'B'C'} = \frac{a^2}{a_1^{\,2}}$$

$$\frac{S \ \Delta ACD}{S \ \Delta A'C'D'} = \frac{b^2}{b_1^{\,2}}$$

$$\frac{S \ \Delta ADE}{S \ \Delta A'D'E'} = \frac{c^2}{c_1^{\,2}}$$

$$\frac{a}{b_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \ldots\ldots$$

$$\therefore \ \frac{S \ \Delta ABC}{S\Delta \ A'B'C'} = \frac{S \ \Delta \ ACD}{S \ \Delta \ A'C'D'} = \frac{S \ \Delta \ ADE}{S\Delta \ A'D'E'} = \ldots\ldots$$

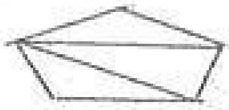
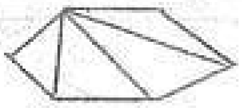
$$\therefore \ \frac{S \ \Delta \ ABC + S \ \Delta \ ACD + S \ \Delta \ ADE}{S \ \Delta \ A'B'C' + S \ \Delta \ A'C'D' + S \ \Delta \ A'D'E'} = \frac{S \ \Delta \ ABC}{S \ \Delta \ A'B'C'}$$

$$\therefore \ \frac{S \ ABCD\cdots}{S \ A'B'C'D'\cdots} = \frac{a^2}{a_1^{\,2}} = \ldots \quad ///.$$

6.3. NÚMERO DE DIAGONALES

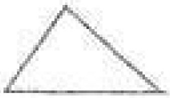
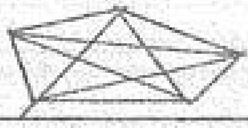
TEOREMA # 1

El número de diagonales trazadas desde un vértice de un polígono de n lados es igual a (n - 3).

Número de Lados n	Figura Geométrica	Número de Diagonales	Fórmula
3		0	n - 3
4		1	n - 3
5		2	n - 3
6		3	n - 3

TEOREMA # 2

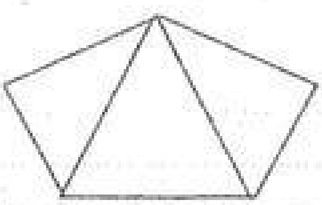
El número de diagonales totales de un polígono de n lados es igual a $\frac{n(n-3)}{2}$

Número de Lados n	Figura Geométrica	Número de Diagonales	Fórmula
3		0	$\frac{n(n-3)}{2}$
4		2	$\frac{n(n-3)}{2}$
5		5	$\frac{n(n-3)}{2}$
6		9	$\frac{n(n-3)}{2}$

6.4. SUMA DE ÁNGULOS

TEOREMA # 1

La suma de los ángulos internos de un polígono de n lados es igual al producto de dos ángulos rectos por el número de lados del polígono disminuido en dos.



T) $\sum \angle \text{int.} = \pi\ (n-2)$

D) Construimos todas las diagonales desde un mismo vértice.

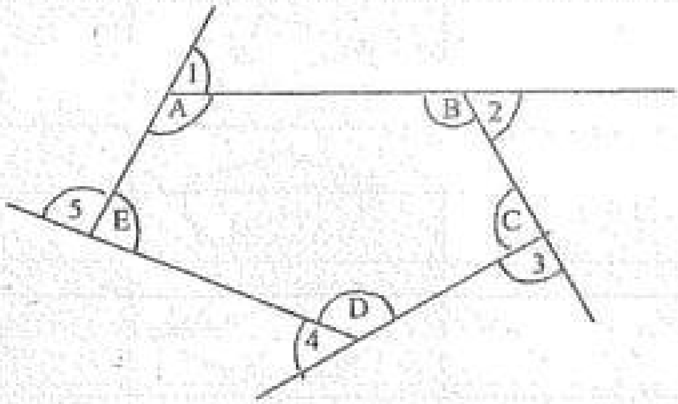
Se forman $(n-2)$ Triángulos.

$\therefore\ \sum \measuredangle$ int. del polígono = $\sum \measuredangle$ int. de todos los triángulos formados.

$\Rightarrow\ \sum \measuredangle$ int. del polígono = $\pi\,(n-2)$ ///.

TEOREMA # 2

La suma de los ángulos externos de un polígono formados al prolongar los lados en un mismo orden es igual a cuatro ángulos rectos.



T) $\sum \measuredangle$ ext. $= 2\pi$

D) $\hat{1} + \hat{A} = \pi$

$\hat{2} + \hat{B} = \pi$

$\hat{3} + \hat{C} = \pi$

$\hat{n} + \hat{N} = \pi$

$(\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \ldots + \hat{n}) + (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \ldots + \hat{N}) = n\pi$

$(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \ldots + \hat{N}) = (n-2)\pi$

$\therefore (\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \ldots + \hat{n}) + (n-2)\pi = n\pi$

$\therefore\ \sum \measuredangle$ externos $= n\pi - (n-2)\pi$

$\therefore\ \sum \measuredangle$ externos $= 2\pi$ ///.

6.5. PROPIEDADES DE LOS POLÍGONOS REGULARES

1. Todo polígono regular tiene un círculo Inscrito y un círculo circunscrito. El radio del círculo circunscrito es el "radio del polígono" y el radio del círculo inscrito es su "apotema". Los dos círculos son concéntricos y su centro común es el "centro del polígono".

2. Si un círculo se divide en n arcos congruentes ($n \geq 3$) y se unen consecutivamente los puntos de división, el polígono inscrito resultante es regular. Las tangentes trazadas por los mismos puntos forman un polígono regular circunscrito.

3. Todo radio de un polígono regular biseca al ángulo interno.

3. "Angulo central" de un polígono regular es el ángulo formado por dos radios que unen los extremos de sus lados con el centro del polígono.

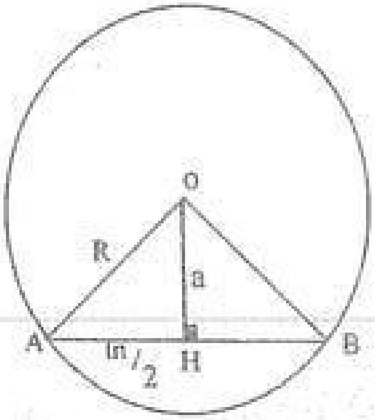
5. Los ángulos centrales de un polígono regular de n lados son congruentes y cada uno tiene por medida $2\pi / n$

6. El ángulo central de un polígono regular es el suplemento de su ángulo interno.

7. Dos polígonos regulares de igual número de lados son semejantes.

8. Cada ángulo interno de un polígono regular de n lados es igual a $\dfrac{\pi(n-2)}{n}$.

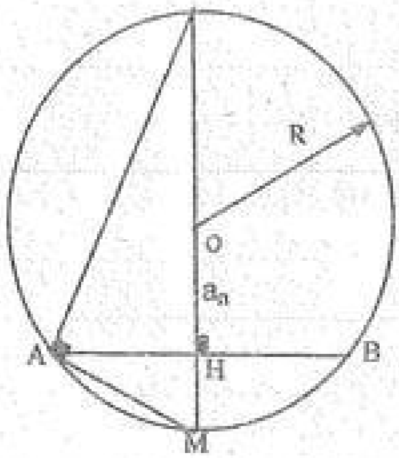
6.6. CÁLCULO DE LA APOTEMA DE UN POLÍGONO REGULAR DE "n" LADOS (a_n)



$AB = l_n$

$$a_n = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - l_n^2}$$

6.7. CÁLCULO DEL LADO DE UN POLÍGONO REGULAR DE DOBLE NÚMERO DE LADOS (l_{2n})



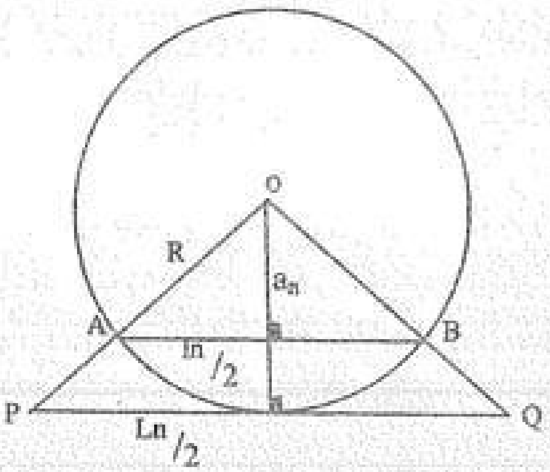
$AB = l_n$

$AM = l_{2n}$

$AM^2 = 2R(R - a_n)$

$$l_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - l_n^2}}$$

6.8. CALCULO DEL LADO DE UN POLIGONO REGULAR CIRCUNSCRITO DE LADO (L_n)



$AB = l_n$

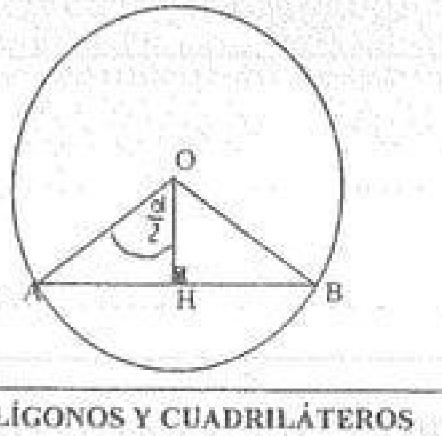
$PQ = l_n$

$$\frac{a_n}{R} = \frac{l_n}{L_n}$$

$$L_n = \frac{2Rl_n}{\sqrt{4R^2 - l_n^2}}$$

6.9. CÁLCULO DEL LADO DE UN POLÍGONO REGULAR DE "n" LADOS (l_n), CONOCIDO R

1. TRIÁNGULO EQUILÁTERO (l_3).



$AB = l_3$

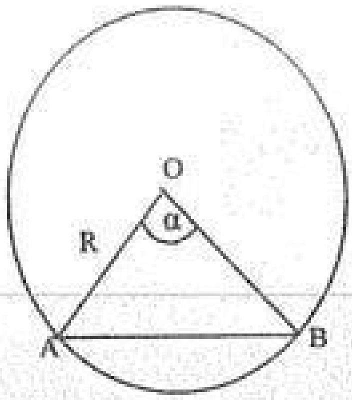
$\widehat{AOB} = \hat{\alpha} = 2\pi / 3$

$$OH = \frac{R}{2}$$

$$AH = R\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$l_3 = 2\,AH = R\sqrt{3}$

2. CUADRADO (l_4).

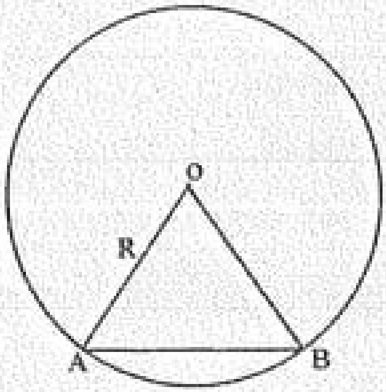


$AB = l_4$

$\widehat{AOB} = \widehat{\alpha} = \pi / 2$

$l_4 = R\sqrt{2}$

3. HEXÁGONO REGULAR (l_6).



$AB = l_6$

$\widehat{AOB} = \pi / 3$

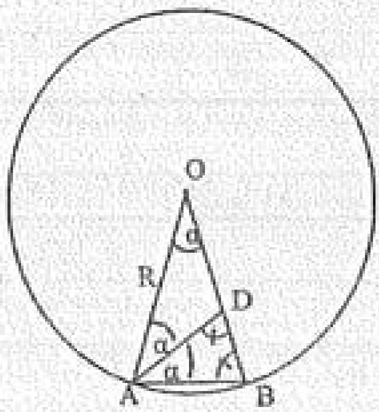
$l_6 = R$

4. OCTÓGONO REGULAR (l_8).

$l_4 = R\sqrt{2}$

$l_8 = \sqrt{2}R^2 - R\sqrt{4R^2 - (R\sqrt{2})^2} = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$

5. DECÁGONO REGULAR (l_{10}).



$AB = l_{10}$

$\widehat{AOB} = \widehat{\alpha} = \pi / 5$

$AB = AD = DO = l_{10}$

$$\frac{l_{10}}{R} = \frac{R - l_{10}}{l_{10}}$$

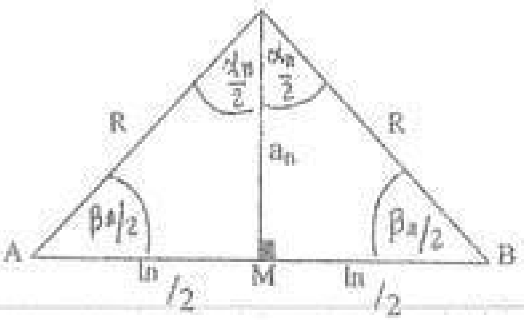
$$l_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

6. PENTÁGONO REGULAR (l_5)

$$l_{10} = \frac{R}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - l_5{}^2}}$$

$$l_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

El lado de un polígono regular de n lados, se puede calcular tomando en cuenta el triángulo fundamental de un polígono regular Δ OAB.



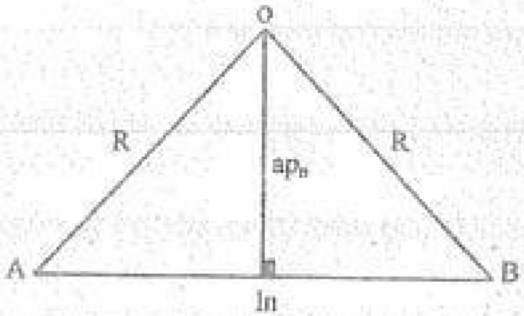
Δ OAB

$$l_n = \sqrt{2R^2(1 - \cos \alpha n)}$$

6.10. SUPERFICIE

TEOREMA # 1

El área de un polígono regular es igual al semiperímetro por su apotema.



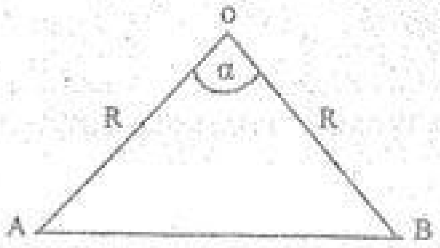
S polígono = n S Δ OAB

$$S\ polígono = \frac{n\ \ ln \times apn}{2}$$

S polígono = p x apn ///.

TEOREMA # 2

La superficie de un polígono regular en función del radio y de su ángulo central.



S polígono = n S Δ OAB

$$S\ polígono = \frac{n\ \ R^2 sen\ \ \alpha}{2}$$

6.11. CALCULO DEL VALOR π. (PARA R = 1)

N	ln	n ln	$K = n\,\frac{ln}{2R}$
6	1.	6.	3.
12	0.517638	6.211657	3.105828
24	0.261052	6.265257	3.132628
48	0.130806	6.278700	3.139650
96	0.065438	6.282063	3.141031
192	0.032723	6.282905	3.141452
384	0.016362	6.283155	3.141557
768	0.008181	6.283169	3.141586

$$k = 3.141586 = \pi$$

6.12. CALCULO DE LA CIRCUNFERENCIA

La circunferencia es el límite hacia el cual tiende el perímetro de un polígono regular cuando el número de lados aumenta indefinidamente. Por lo tanto, la circunferencia es igual al perímetro de un círculo.

$$2p = n\ ln$$

$$\text{si } n \Rightarrow \infty \qquad \therefore \quad 2p = \frac{C}{2R} = \Pi$$

$$\Rightarrow \; C = 2\,\Pi\, R$$

6.13. EJERCICIOS

1. Hallar el número de lados de un polígono, cuyos ángulos internos suman once veces más que sus ángulos externos. Resp. 24

2. La suma de los ángulos internos y externos de un polígono es 5π. Cuántos lados tiene el polígono? Resp. 5

3. De cuántos lados es el polígono que tiene 170 diagonales totales? Resp. 20

4. Si el número de lados de un polígono se aumenta en tres, el número de diagonales totales aumenta en quince. Cuántos lados tiene el polígono?. Resp. 5

5. Hallar el número de diagonales totales de un polígono cuyos ángulos internos suman 5π. Resp. 14

6. Cuántos lados tiene un polígono que tiene el número de diagonales totales igual a su número de lados. Resp. 5

7. Determinar el número de lados de un polígono que tiene cinco diagonales totales más que el polígono que tiene un lado menos. Resp. 7

8. Cuántos lados tiene un polígono, cuyos ángulos internos sumados, es igual a la suma de los ángulos internos y externos de otro polígono de 16 lados. Resp. 18

9. Los lados de un polígono miden 3, 5, 6, 8, y 10 m. respectivamente. El perímetro de un polígono semejante es 40 m. Encontrar la longitud de los lados del segundo polígono. Resp. 3,75; 6,25; 7,5; 10; 12,5 m.

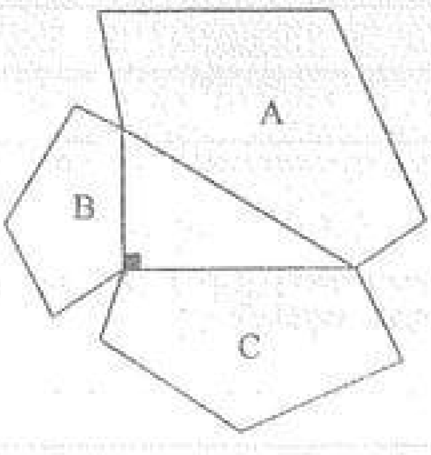
10. Los lados de un pentágono son de 2, 5, 7, 8, y 10 unidades. Hallar los lados de otro polígono semejante cuyo perímetro es de 50 unidades. Resp. 3,13; 4,69; 10.94; 12,50 y 15,63 u.

11. El número de vértices de un polígono más el número de diagonales totales es igual a 45. Cuantos lados tiene el polígono. Resp 10

12. La suma de los ángulos internos de un polígono Q es igual a la suma de los ángulos internos y externos de un polígono P. Calcular el número de lados de Q si P tiene 16 lados. Resp 18

13. Un círculo tiene cuatro cuerdas iguales de longitud 5m y cuatro cuerdas iguales de longitud 8m. Hallar el área del octógono formado por las cuerdas. Resp. 201,75 m^2

14.



H) A, B, C, Polígonos Semejantes

T) $S_A = S_B + S_C$

15. Si los ángulos centrales de dos polígonos regulares difieren en $\frac{\Pi}{20}$ y el número de diagonales trazadas desde un mismo vértice difiere en 9. Calcular el número de los lados del polígono. Resp. 15; 24

16. En dos polígonos regulares, los ángulos internos y los ángulos centrales difieren en 42. Calcular el número de lados de cada polígono. Resp. 12; 5

17. La medida del ángulo central del polígono regular P es a la medida del ángulo interno del polígono regular Q como 3 es a 8. Si la diferencia entre el número total de diagonales del polígono P y del polígono Q es 11; hallar el número de lados de cada polígono. Resp. 8; 6

18. El polígono regular P tiene 2 lados más que el polígono regular Q y la diferencia entre sus ángulos centrales es de 6^0. Determinar el número de lados de cada polígono. Resp. 10; 12.

19. El ángulo interno y el ángulo central de los polígonos regulares difieren en 126° y sus ángulos internos en 18°. Calcular el número de lados de cada polígono. Resp. 20; 10

20. En un polígono regular, el radio mide 4,54 cm. Y su apotema $3\sqrt{\frac{3}{2}}$ cm. Calcular el lado del polígono regular de doble número de lados. Si su apotema mide 14,93 cm. Resp. 9,7 cm.

21. El número de lados de dos polígonos regulares difieren en dos y sus ángulos centrales en 15°. Si la superficie del polígono regular de mayor número de lados es $50u^2$. Calcular cuanto mide su radio. Resp. 4,20 u.

22. Si la relación entre las diagonales totales de dos polígonos regulares es infinito y los ángulos centrales están en la relación ¼. Calcular la medida del ángulo interno del mayor polígono. Resp. 150°

23. La relación de las diagonales totales de dos polígonos regulares es infinito y el número de vértices difieren en 5. Si la superficie del polígono de mayor número de lados es $30m^2$. Hallar el valor de su apotema. Resp. 3m.

24. Un polígono regular tiene tres lados más que el otro, y su ángulo central mide 27° menos que el ángulo central del otro polígono. Cuántos lados tiene cada polígono. Resp. 5; 8

25. El número total de diagonales de un polígono regular es 27. Si su apotema es 5,14 u. Calcular su área. Resp. 86,54 u^2

26. En un polígono regular, el ángulo central más un ángulo interno, más un ángulo externo es 210°. Calcular el número de diagonales totales. Resp. 54

27. El radio de un polígono regular es 10m y su área es $200\sqrt{2}$ m^2. Determina el número total de diagonales que tiene el polígono. Resp. 20

28. Si el número de lados de un polígono regular aumenta en diez y cada ángulo del nuevo polígono es $\frac{\Pi}{60}$ mayor que cada ángulo del primero. Cuántos lados tiene cada polígono. Resp. 30; 40

29. Si a un polígono regular se le aumenta un lado su ángulo interno aumenta en $\frac{\Pi}{15}$. Cuántos lados tiene el polígono. Resp. 5

30. La suma de los ángulos internos de un polígono regular vale 56 rectos. Cuál es el valor del ángulo central de ese polígono. Resp. 12°

31. Si la suma de los ángulos internos de dos polígonos regulares difieren en 4π y sus ángulos centrales difieren en $\frac{\Pi}{24}$. Calcular el número de lados de cada polígono. Resp. 12; 16

32. Un ángulo interno de un polígono regular de n lados es $\frac{\Pi}{8}$ mayor que el ángulo de un polígono regular de (n - 3) lados. Cuántos lados tiene cada polígono ? Resp. 9; 6

33. Se tiene dos polígonos regulares P y Q, el polígono P tiene 8 lados menos que el polígono Q y, cada ángulo interno tiene del polígono Q vale $\frac{\Pi}{15}$ más que cada ángulo interno del polígono P. Encontrar el número de los lados de cada polígono. Resp. 12; 20

34. En un polígono regular el perímetro es de 12 cm. El radio 2 cm. y su apotema $\sqrt{3}$ cm. Calcular el perímetro y el radio de otro polígono regular de igual numero de lados si su apotema es 3 cm.
Resp. 20,8cm.; 3,47 cm.

35. Calcular el valor del lado y apotema del polígono regular inscrito, el lado del polígono regular circunscrito a un polígono de n = 16, si el radio del polígono es R = 10 u.
Resp. 3,92 u.; 9,81 u.; 3,98 u.

36. Dados los perímetros P_1 y P_2 de los polígonos regulares de igual número de lados, el uno circunscrito y el otro inscrito al mismo círculo. Encontrar los perímetros de los polígonos regulares inscrito y circunscrito de doble número de lados en el mismo círculo.
Resp. $2P_1P_2 / (P_1 + P_2)$; $\sqrt{P_1P_2}$

37. Un hexágono está inscrito en un círculo otro hexágono esta circunscrito en el mismo círculo. Hallar el radio del círculo si la diferencia entre los perímetros es a. Resp. 1,08 a.

38. En un círculo de radio R está inscrito un hexágono regular ABCDEF. Hallar el radio del círculo inscrito en el Δ ACD. Resp. 0,37 R

39. Calcular el lado de un cuadrado inscrito en un círculo si la superficie de un octógono regular inscrito en el mismo círculo es 35,44 u^2. Resp. 5 u.

40. La diferencia del ángulo interno y del ángulo central de un polígono regular es de 36°. Hallar el número de lados del polígono. Resp. 5

41. Cuántos lados tiene el polígono regular si su ángulo interno es igual a su ángulo central. Resp. 4

42. Si el número de lados de dos polígonos regulares difieren en 2 y sus ángulos centrales difieren en 15°. Cuántos lados tienen cada polígono. Resp. 6, 8.

43. En un polígono regular, el ángulo interno es cuatro veces mayor que su ángulo externo. Cuántos lados tiene el polígono. Resp. 10

44. El radio de un polígono regular es de 5,54 u. y su apotema 5,1183 u. Determinar:
El valor de su lado. El valor de su ángulo central. El valor de su ángulo interno. El valor del área. El número total de sus diagonales. Resp. 4,24 u; 45° ; 135°; 86,80 u^2, 20

45. Un polígono regular tiene su apotema $5\sqrt{3}$ y su lado 10 u. Hallar el número de diagonales totales del polígono. Resp. 9

46. El lado de un polígono regular de 12 lados mide 5 u. Cuánto mide el ángulo central, el radio y su apotema. Resp. 30°; 9,66 u; 9,33 u.

47. El número total de diagonales de un polígono regular es 27 y su área es 86,8 u^2. Calcular su apotema. Resp. 5,14 u.

48. En un polígono regular, la suma de los ángulos internos es 540° y su lado mide 4 u. Calcular su área. Resp. 27,44 u^2.

49. El radio de un polígono regular es 3 u., su apotema 2,772 u. Calcular su área. Resp. 25,46 u^2

50. Calcular la apotema de un pentágono regular inscrito en un círculo, si la superficie de un octógono regular inscrito en el mismo círculo es de 35,44 m^2. Resp. 2,86 m .

51. El lado de un pentágono regular es 8 u. Cuanto mide la apotema de otro pentágono semejante si su perímetro es 80 u. Resp. 11 u.

52. Calcular la superficie de un octógono regular inscrito en un circulo, si el lado del cuadrado inscrito en el mismo circulo es 5 u.. Resp. 35,44 u^2.

53. El lado de un polígono regular mide 12 u, si el número total de diagonales es igual al número de lados. Calcular la superficie. Resp. 247, 75u^2

54. Cual es la relación entre las áreas de dos pentágonos regulares, si el lado del segundo polígono es la apotema del primero. Resp. 2,11

55. Si los ángulos centrales de dos polígonos regulares difieren en 5°, y el número de lados de un polígono es el doble del número de lados del otro polígono. Calcular la relación de sus áreas si están inscritos en el mismo circulo. Resp. 1

56. Los puntos medios de los lados de un n-ágono regular se unen mediante rectas para formar un nuevo n-ágono inscrito en el lado. Hallar la relación entre sus áreas.

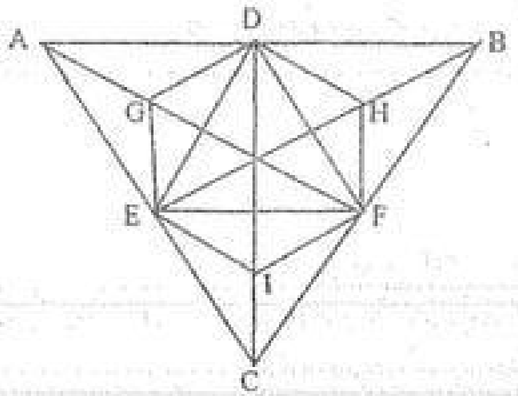
$$\text{Resp.} = \cos^2 \frac{\Pi}{n}$$

57. Si se prolongan en un mismo sentido todos los lados de un hexágono regular en una longitud igual a los lados y se unen los extremos de las prolongaciones. Hallar la razón de las áreas entre el hexágono dado y el polígono formado. Resp. 1/3

58. Hallar la relación de las áreas entre un hexágono regular inscrito y circunscrito en un mismo círculo. Resp. 4/3

59. Un cuadrado y un pentágono regular tienen perímetros iguales. Hallar la relación entre sus áreas. Resp. 0,9

60.



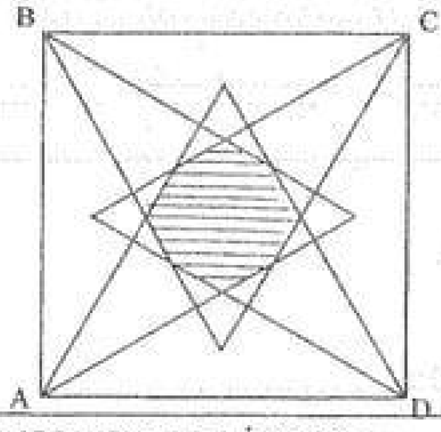
H) Δ ABC Equilátero

FHDGEI Hexágono regular = A_6

T) $A_6^2 = A\,\Delta\,DEF \times A\,\Delta\,ABC$

61. Dados un cuadrado ABCD, llamando O al centro del polígono, demostrar que los centros de los círculos inscritos en el triángulos AOB, BOC, COD, AOD, ABC, BCD, ADB y ADC son vértices de un octógono regular. Hallar el área del octógono si el lado del cuadrado es 10 u. Resp. 24 u^2

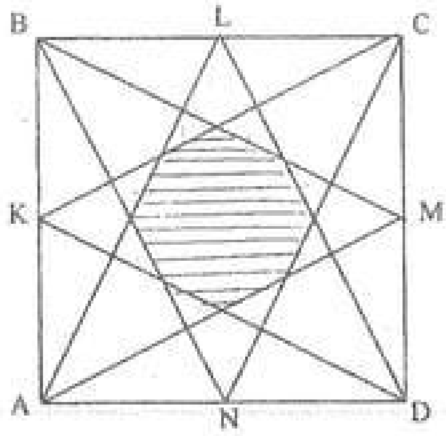
62.



En un cuadrado de lado a, y sobre cada lado se construye interiormente un triángulo equilátero. Calcular la superficie del polígono.

Resp. 0,12 a^2

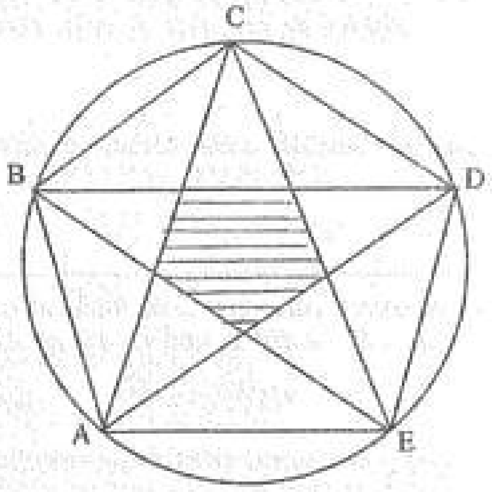
63.



H) ABCD cuadrado de lado a
K, L, M, N puntos medios

T) S///// = ? Resp. $\frac{1}{6}a^2$

64.

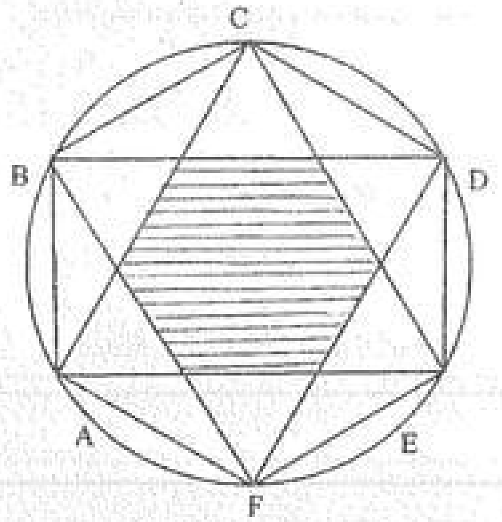


H) ABCDE polígono regular

T) $\frac{S_{///////}}{S_{ABCDE}} = ?$

Resp. = 0,146

65.



H) ABCDEF polígono regular

T) $\frac{S_{//////}}{S_{ABCDEF}} = ?$

Resp. = $\frac{1}{3}$

66. Se tiene un triángulo acutángulo ABC inscrito en un círculo, los radios trazados desde cada vértice se prolongan hasta el círculo, y cada uno de estos puntos se unen con los otros dos vértices del triángulo, resultando un hexágono también inscrito. Hallar el área del hexágono si el área del triángulo ABC es S. Resp. 2 S.

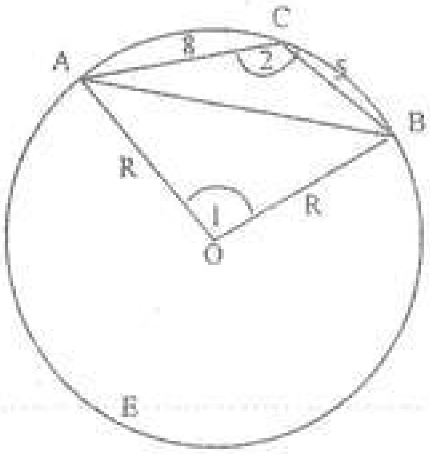
6.13.1. EJERCICIOS RESUELTOS

10. $P = 50$ y $P_1 = 2+5+7+8+10 = 32$

$$\frac{P}{P_1} = \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{d}{d_1} = \frac{e}{e_1} \quad \text{y} \quad \frac{50}{32} = \frac{a}{2} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7} = \frac{d}{8} = \frac{e}{10}$$

$\therefore$ a = 3,13 ; b = 4,69 ; c = 10,94 ; d = 12,50 ; e = 15,63 u.

13.



$4\ AC + 4\ BCb = 360°$

$AC + BC = 90° = \hat{1}$

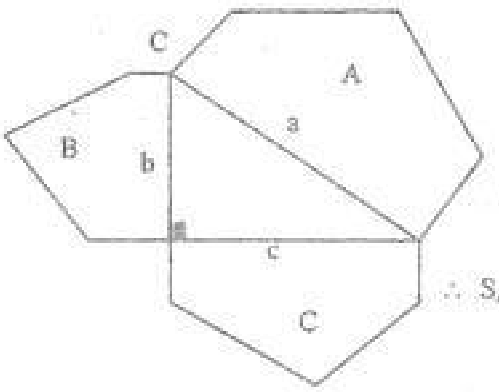
$\hat{2} = AEB / 2 = 270°/ 2 = 135°$

$\Delta\ ABC$: $AB^2 = 8^2 + 5^2 - 2\ (8)\ (5)\ \text{Cos}\ 135°$
$\therefore\ AB = 12{,}07$

$S\ \Delta\ ABC = (8 \times 5 \times \text{Sen}\ 135°)/2 = (8 \times 5 \times 12{,}07)/4\ R$
$\therefore\ R = 8{,}52$

$Sx = 4\ S\ \Delta\ ABC + 4\ S\Delta\ OAB = 4\ (8 \times 5 \times \text{Sen}\ 135°)/2 + 4\ (8{,}52)^2/2$
$\therefore\ Sx = 201{,}75\ m^2$

14.



$$\frac{SB}{SA} = \frac{b^2}{a^2} \qquad (1)$$

$$\frac{SC}{SA} = \frac{c^2}{a^2} \qquad (2)$$

$\therefore\ S_A = S_B + S_C \qquad (1) + (2)$

18.

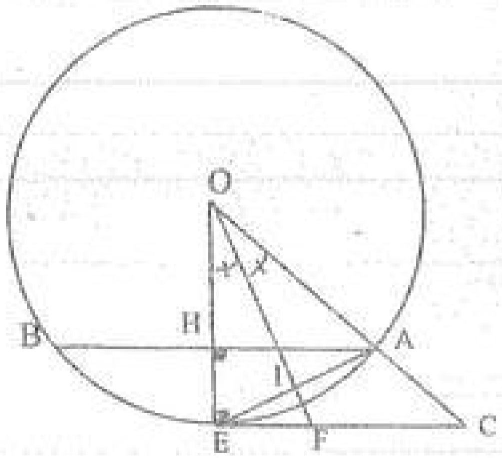
$Q = n \qquad \therefore\ \hat{\alpha}_1 = 360°/n$

$P = n + 2 \qquad \therefore\ \hat{\alpha}_2 = 360°/(n+2)$

$\{360°/(n+2)\} + 6 = 360°/n$

$\Rightarrow\ n = 10 \quad y \quad \therefore\ Q = 10\ ; \quad P = 12$

36.



$P_1 = 2\ n\ AH \quad y \quad P_1 = 2\ n\ AE = 4\ n\ IE$

$P_2 = 2\ n\ EC \quad y \quad P_2 = 4\ n\ EF$

$\overline{OF}$ Bisectriz : $\dfrac{OC}{OE} = \dfrac{CF}{FE} \qquad \therefore\ \dfrac{P_2}{P_1} = \dfrac{OC}{OE} = \dfrac{CF}{FE}$

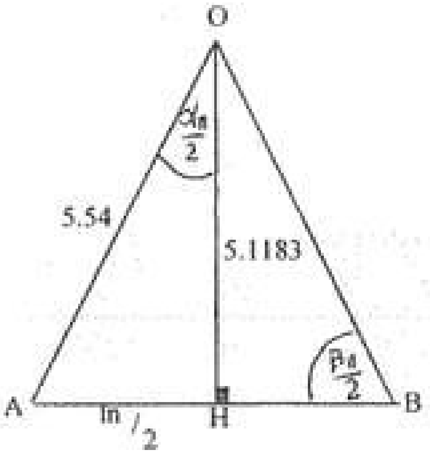
$\Delta\ AHE \approx \Delta\ EIF$: $\dfrac{P_2 + P_1}{P_1} = \dfrac{CF + FE}{FE} \quad y \quad \dfrac{P_2 + P_1}{P_1} = \dfrac{CE}{FE}$

$$\frac{AE}{EF} = \frac{AH}{EI} \qquad y \qquad \frac{\frac{P_1}{2n}}{\frac{P_2}{4n}} = \frac{\frac{P_1}{2n}}{\frac{P_1}{4n}}$$

$$\frac{P_2 \quad P_1}{P_2} = \frac{\frac{P_2}{2n}}{\frac{P_2}{4n}} \qquad \therefore \qquad P_2 = \frac{2\,P_1\,P_2}{P_1 + P_2}$$

$$\therefore \qquad P_1 = \sqrt{P_1\,P_2}$$

44.



$$\left(\frac{ln}{2}\right)^2 = 5{,}54^2 - 5{,}1183^2$$

$$ln = 4{,}24 \text{ u.}$$

$$\cos\frac{\alpha n}{2} = \frac{5{,}1183}{5{,}54}$$

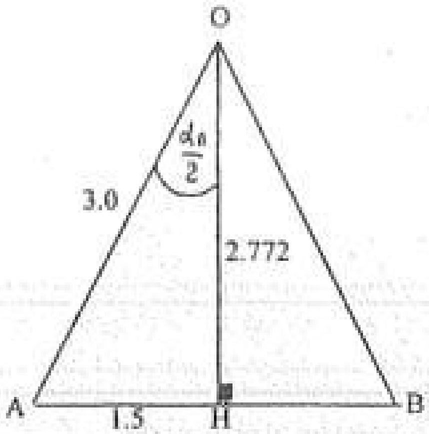
$$\widehat{\alpha}_n = 45° = \frac{360°}{n} \Rightarrow n = 8$$

$$\frac{\beta n}{2} = 67{,}5° \Rightarrow \widehat{\beta}_n = 135°$$

$$S = 4\,(\,5{,}54^2 \times \text{ Sen } 45°) = 86{,}80 \text{ u}^2$$

$$\text{Diags} = \frac{n\,(n-3)}{2} = \frac{8\,(8-3)}{2} = 20$$

49.

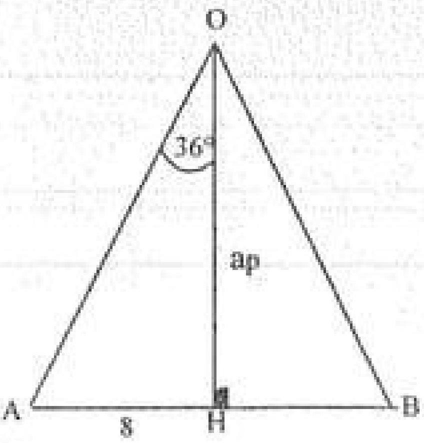


$$\text{Cos}\frac{\alpha n}{2} = \frac{2{,}772}{3}$$

$$\widehat{\alpha}_n = 45° = \frac{360°}{n} \Rightarrow n = 8$$

$$S = \frac{8\,(\,3 \times 3 \times \text{Sen}45°}{2} = 25{,}46\text{u}^2$$

51.



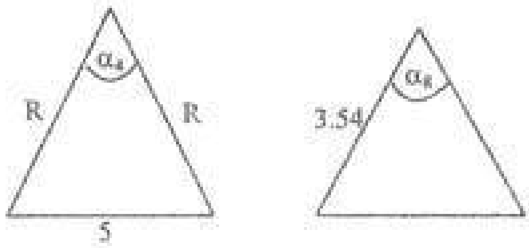
$$\widehat{\alpha}_5 = \frac{360°}{n} = 72°$$

$$l_5 = 8$$

$$P = 5\, l_5 = 80 \Rightarrow l_5 = 16$$

$$\text{Tg } 36° = \frac{8}{ap} \Rightarrow a_p = 11 \text{ u.}$$

52.



$$\hat{\alpha}_4 = \frac{360°}{4} = 90°$$

$$25 = 2\,R^2 \qquad \Rightarrow \quad R = 3{,}54$$

$$\hat{\alpha}_8 = \frac{360°}{8} = 45°$$

$$S = 4 \times 3{,}54^2 \times \ \text{Sen } 45° \ = 35{,}44 \ u^2$$

55.

$$A = n \qquad \therefore \quad \hat{\alpha}_A = \frac{360°}{n}$$

$$B = 2n \qquad \therefore \quad \hat{\alpha}_B = \frac{360°}{2n}$$

$$\frac{360°}{2n} + 5° = \frac{360°}{n} \qquad \Rightarrow \ n = 36$$

$$\hat{A} = 36° \quad y \quad \hat{B} = 72°$$

$$\hat{\alpha}_A = 10° \quad y \quad \hat{\alpha}_B = 5°$$

$$\frac{S_A}{S_B} = \frac{36\,R^2 \,\text{Sen } 10°}{76\,R^2 \,\text{Sen } 5°} = 1{,}0$$

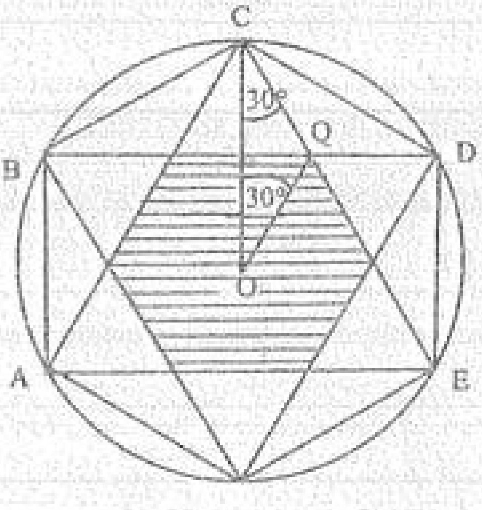
65.

$$\frac{S_{////}}{S_{ABCDEF}} = \frac{OQ^2}{OC^2}$$

$$\frac{OC}{\text{Sen}120°} = \frac{OQ}{\text{Sen}30°}$$

$$\frac{OQ}{OC} = \frac{\text{Sen}30°}{\text{sen}120°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

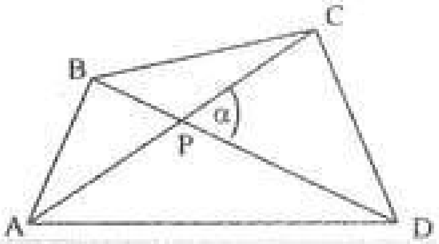
$$\therefore \quad \frac{S_{////}}{S_{ABCDEF}} = \frac{1}{3}$$



6.14. CUADRILÁTEROS

TEOREMA # 1

El área de un cuadrilátero es igual a la mitad del producto de dos diagonales por el seno el ángulo comprendido.



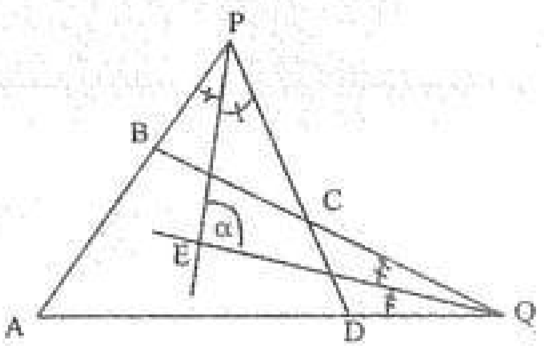
$$S_{ABCD} = S_{\Delta ABP} + S_{\Delta BPC} + S_{\Delta CPD} + S_{\Delta DPA}$$

$$S_{ABCD} = \frac{AP \times PB\,\text{Sen}\alpha}{2} + \frac{BP \times PC\,\text{Sen}(180° - \alpha)}{2} + \frac{CP \times PD\,\text{Sen}\alpha}{2} + \frac{AP \times PD\,\text{Sen}(180° - \alpha)}{2}$$

$$\therefore \quad S_{ABCD} = \frac{AC \times BD \times \text{Sen}\alpha}{2} \qquad ///.$$

TEOREMA # 2.

El ángulo formado por las bisectrices de los ángulos obtenidos al prolongar los lados de un cuadrilátero es igual a la semisuma de los ángulos opuestos a este ángulo formado.



$$\text{T)} \quad \hat{\alpha} = \frac{\hat{A} + \hat{C}}{2}$$

$$\text{D)} \quad \hat{\alpha} = \hat{1} + \hat{A} + \hat{2} \qquad (1)$$

$$\hat{C} = \hat{1} + \hat{\alpha} + \hat{2} \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \hat{\alpha} - \hat{C} = \hat{A} - \hat{\alpha} \qquad (1) - (2)$$

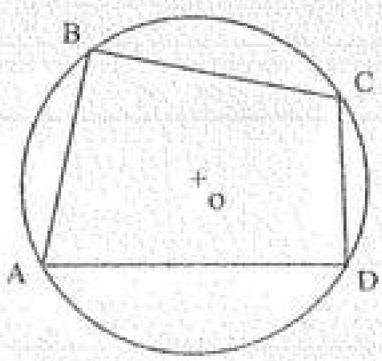
$$\therefore \quad \hat{\alpha} = \frac{\hat{A} + \hat{C}}{2} \qquad ///.$$

6.14.1. CUADRILATERO INSCRIPTIBLE.

Este cuadrilátero se puede inscribir en un círculo, los lados son cuerdas del círculo.

TEOREMA # 1.

La suma de las medidas de los ángulos opuestos es igual a 180° .



$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BCD}}{2}$$

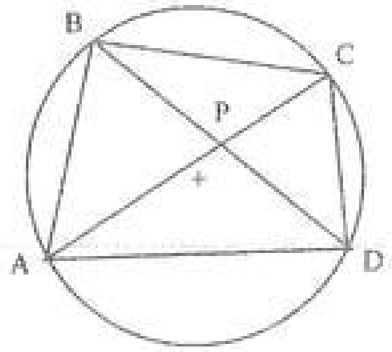
$$\hat{C} = \frac{\overset{\frown}{BAD}}{2}$$

$$\therefore \quad \hat{A} + \hat{C} = 180°$$

$$\therefore \quad \hat{B} + \hat{D} = 180°$$

TEOREMA # 2. (POTENCIA DE UN PUNTO)

El producto de los segmentos formados en una diagonal es igual al producto de los segmentos formados en la otra.

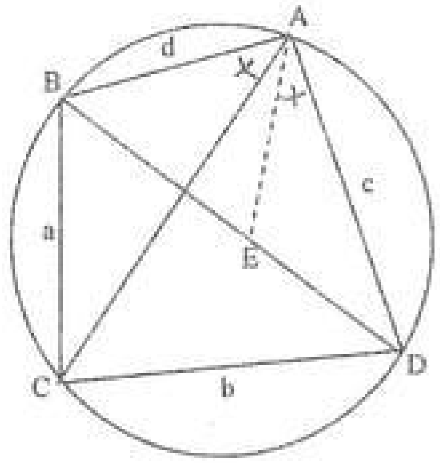


$\Delta APD \approx \Delta BPC$

$AP \times PC = BP \times PD$ ///.

TEOREMA # 3. (PTOLOMEO)

En todo cuadrilátero inscriptible, el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los lados opuestos.



T) $AC \times BD = a \times c + b \times d$

D) $\widehat{DAE} = \widehat{BAC}$ (Construcción)

$$\widehat{ADE} = \widehat{ACB} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

$$\Delta ADE \approx \Delta ABC: \quad \frac{c}{AC} = \frac{DE}{a} = \frac{AE}{d} \qquad \therefore DE = \frac{a \cdot c}{AC}$$

$$\widehat{BAE} = \widehat{BAC} + \widehat{EAC} = \widehat{DAC} = \widehat{DAE} + \widehat{EAC}$$

$$\widehat{ABE} = \widehat{ACD} = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2}$$

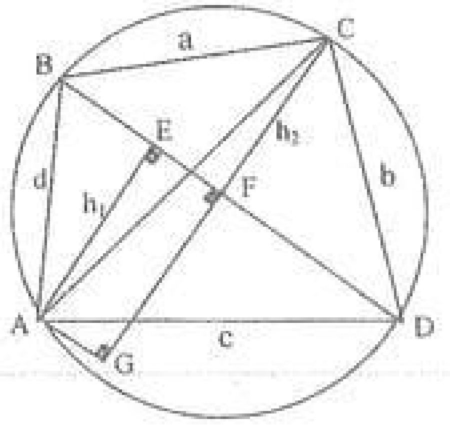
$$\Delta AEB \approx \Delta ADC: \quad \frac{d}{AC} = \frac{EB}{b} = \frac{AE}{c} \qquad \therefore EB = \frac{b \cdot d}{AC}$$

$$DE + EB = \frac{a \cdot c}{AC} + \frac{b \cdot d}{AC} \quad \Rightarrow \quad AC \times BD = a \times c + b \times d \qquad ///.$$

TEOREMA # 4. (SUPERFICIE)

T) $S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

$$S_{ABCD} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BCD} = \frac{BDxh_1}{2} + \frac{BDxh_2}{2}$$



$$S_{ABCD} = \frac{BD}{2}(h_1 + h_2) = \frac{BDxCG}{2} \qquad (1)$$

$$\Delta\, ACG:\ CG = \sqrt{AC^2 - AG^2} = \sqrt{AC^2 - EF^2} \qquad (2)$$

$$\Delta\, ABC:\ d^2 = c^2 + BD^2 - 2\ BD \times DE \qquad (3)$$

$$\Delta\, BCD:\ a^2 = b^2 + BD^2 - 2\ BD \times DF \qquad (4)$$

$$\therefore\ EF = \frac{c^2 - b^2 - d^2 + a^2}{2\,BD} \qquad (3)-(4)$$

$$S_{ABCD} = \frac{BD}{2}\sqrt{AC^2 - \left(\frac{c^2 - b^2 - d^2 + a^2}{2BD}\right)^2} \qquad (4)\ y\ (2)\ en\ (1)$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{4}\sqrt{4AC^2 x\, BD^2 - (c^2 - b^2 - d^2 + a^2)^2} \qquad (6)$$

$$AC \times BD = a \times c + b \times d \qquad (7)$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{4}\sqrt{(2ac + 2bd)^2 - (c^2 - b^2 - d^2 + a^2)^2} \qquad (7)\ en\ (6)$$

$$\therefore\ S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \qquad ///.$$

6.14.2. PROPIEDADES PARA DEMOSTRAR QUE UN CUADRILÁTERO ES INSCRIPTIBLE

1. Si la suma de las medidas de los ángulos opuestos es 180°.

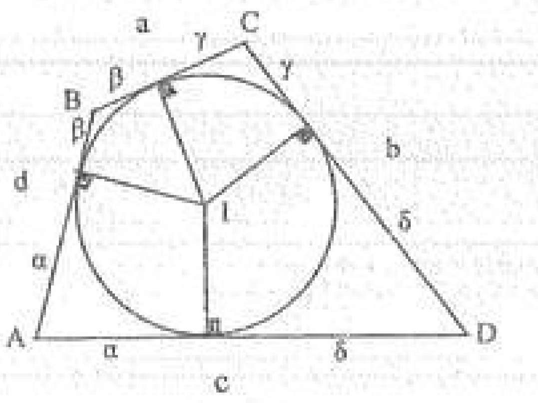
2. Si el producto de los segmentos formados en una diagonal es igual al producto de los segmentos formados en la otra.

6.14.3. CUADRILÁTERO CIRCUNSCRIPTIBLE

El cuadrilátero se puede circunscribir a un círculo, los lados son tangentes a este círculo.

TEOREMA # 1.

La suma de las longitudes de los lados opuestos es igual a la suma de las longitudes de los otros dos e igual al semiperímetro.



$$a = \beta + \gamma$$

$$c = \alpha + \delta \quad => \quad a + c = \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

$$P = 2\,p = 2\,\alpha + 2\,\beta + 2\,\gamma + 2\,\delta$$

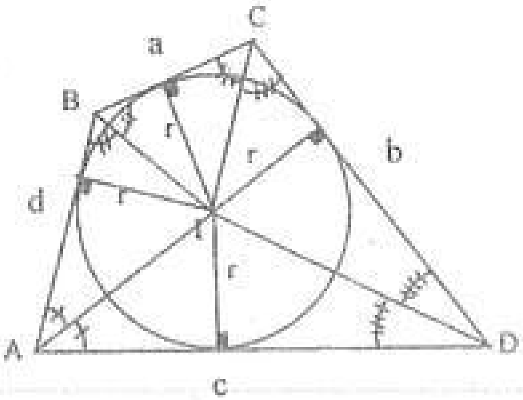
$$p = \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

$$p = a + c = b + d \qquad ///.$$

TEOREMA # 2.

El área de un cuadrilátero circunscriptible es igual al semiperímetro por el radio del círculo inscrito.

$$S_{ABCD} = S_{\Delta BIC} + S_{\Delta CID} + S_{\Delta AID} + S_{\Delta AIB}$$



$$S_{ABCD} = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} + \frac{d \cdot r}{2}$$

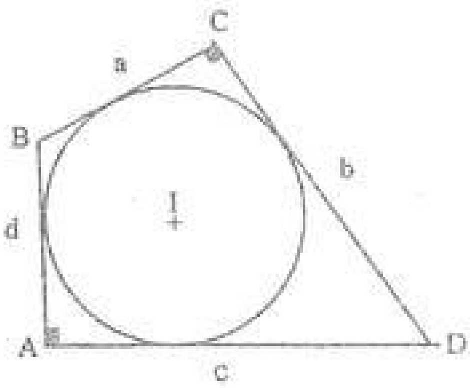
$S_{ABCD} = p \times r$ ///.

6.14.4. PROPIEDADES PARA DEMOSTRAR QUE UN CUADRILÁTERO ES CIRCUSCRIPTIBLE.

Si la suma de las longitudes de dos lados opuestos es igual al semiperímetro.

6.14.5. CUADRILÁTERO INSCRIPTIBLE Y CIRCUNSCRIPTIBLE A LA VEZ

TEOREMA # 1 (SUPERFICIE)



(1) Inscriptible : $S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

(2) Circunscriptible : $a + c = b + d = p$

remplazando (2) en (1)

=> $S_{ABCD} = \sqrt{a\,b\,c\,d}$ ///.

6.14.6. PARALELOGRAMO

Es un cuadrilátero que tiene los lados opuestos paralelos e iguales.

6.14.6.1. PROPIEDADES

1. Las diagonales forman triángulos congruentes: $\Delta\, ABC \cong \Delta\, ACD$

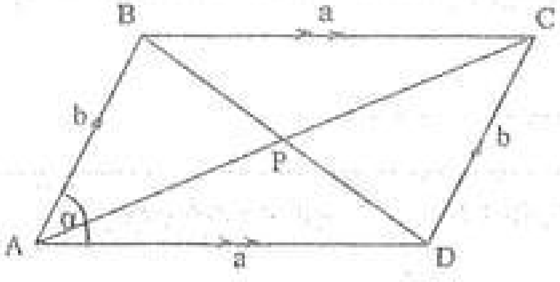
$\Delta\, ABD \cong \Delta\, BCD$

$\Delta\, ABP \cong \Delta\, PCD$

$\Delta\, BPC \cong \Delta\, APD$

2. Las diagonales se bisecan mutuamente : $AP = PC$ y $BP = PD$

2. El área de un paralelogramo es igual al producto de dos lados no paralelos por el seno del ángulo comprendido.

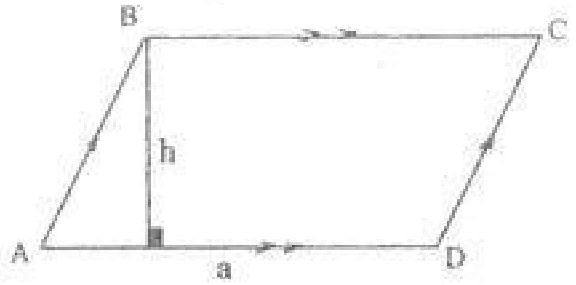


$S_{ABCD} = 2\, S_{\Delta ABD}$

$$S_{ABCD} = 2\left(\frac{a \times b \times \text{Sen}\ \alpha}{2}\right)$$

$S_{ABCD} = a \times b \times \text{Sen}\ \alpha$ ///.

4. El área de un paralelogramo es igual al producto de un lado por la altura correspondiente.



$$S_{ABCD} = 2\, S_{\triangle ABD}$$

$$S_{ABCD} = 2\, \frac{a \cdot h}{2}$$

$$S_{ABCD} = a \times h \qquad ///.$$

6.14.7. PROPIEDADES PARA DEMOSTRAR QUE UN CUADRILÁTERO ES UN PARALELOGRAMO

1. Si dos lados opuestos son iguales y paralelos.

2. Si las diagonales se bisecan mutuamente.

6.14.8. ROMBO

Es un paralelogramo que tiene los cuatro lados iguales.

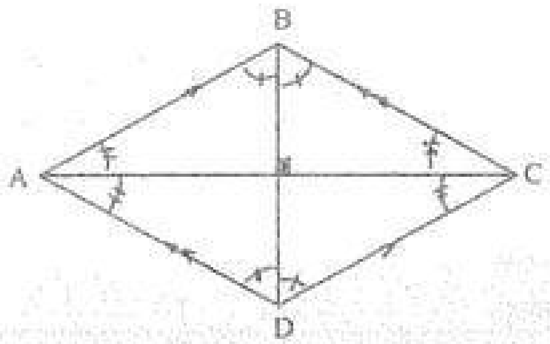
6.14.8.1. PROPIEDADES

1. Las diagonales son perpendiculares entre sí : $AC \perp BD$

2. Las diagonales son bisectrices de los ángulos internos.

3. El rombo es un cuadrilátero circunscriptible, el centro del círculo inscrito es el punto de intersección de las diagonales.

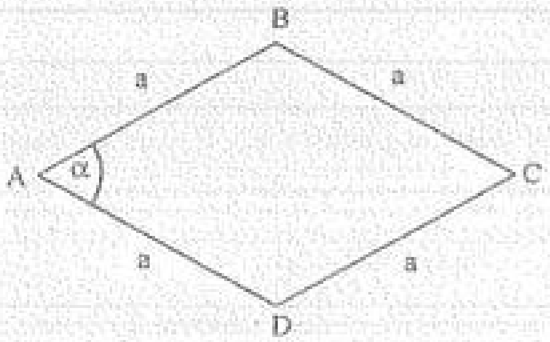
4. El área de un rombo es igual a la mitad del producto de las diagonales.



$$S_{ABCD} = \frac{AC \times BD \times \text{Sen } 90^\circ}{2}$$

$$S_{ABCD} = \frac{AC \times BD}{2}$$

5. El área de un rombo es igual a la longitud de un lado al cuadrado por el seno de un ángulo interno.



$$S_{ABCD} = a^2 \times \text{Sen } \alpha$$

6.14.9. PROPIEDADES PARA DEMOSTRAR QUE UN CUADRILÁTERO ES UN ROMBO

1. Si tiene los cuatro lados iguales.

2. Si las diagonales son perpendiculares y se bisecan mutuamente.

6.14.10. RECTANGULO

Es un paralelogramo que tiene los cuatro ángulos internos iguales (90°).

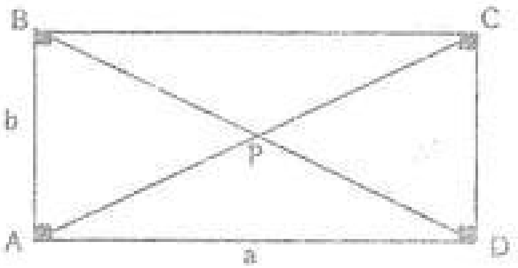
6.14.10.1. PROPIEDADES

1. Las diagonales son iguales : $AC = BD$

2. Los cuatro segmentos formados en las diagonales son iguales : $AP = PC = BP = PD$

3. El rectángulo es un cuadrilátero inscriptible, el centro del circulo circunscrito es el punto de intersección de las diagonales.

4. La superficie de un rectángulo es igual al producto de los lados no paralelos



$S_{ABCD} = a \times b$

6.14.11. PROPIEDADES PARA DEMOSTRAR QUE UN CUADRILÁTERO ES UN RECTÁNGULO

1. Si los cuatro ángulos internos son iguales (90°)

2. Si los cuatro segmentos formados en las diagonales son iguales.

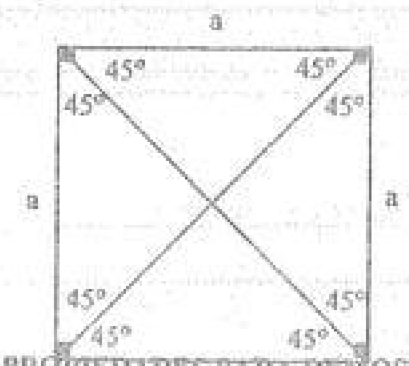
6.14.12. CUADRADO

Es un polígono regular de cuatro lados.

6.14.12.1. PROPIEDADES

1. Tiene todas las propiedades de los polígonos regulares.

2. La superficie de un cuadrado es igual a la longitud de un lado elevado al cuadrado.



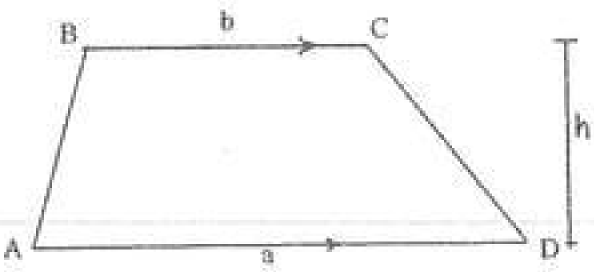
$S_{ABCD} = a^2$

6.14.13. PROPIEDADES PARA DEMOSTRAR QUE UN CUADRILÁTERO ES UN CUADRADO

1. Si tiene todos los lados y todos sus ángulos respectivamente iguales.

6.14.14. TRAPECIO.

Es un cuadrilátero que tiene dos lados opuestos paralelos.

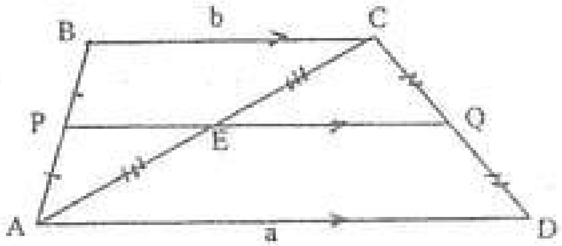


Base menor $\overline{BC}$

Base mayor $\overline{AD}$

6.14.14.1. PROPIEDADES.

1. El segmento que une los lados medios de los lados no paralelos, es paralelo a las bases e igual a la semisuma de las mismas. (**BASE MEDIA**)

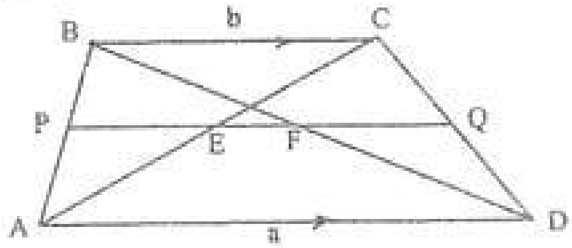


$$\overline{BC} \parallel \overline{PQ} \parallel \overline{AD}$$

$$PQ = PE + EQ$$

$$PQ = \frac{b}{2} + \frac{a}{2} = \frac{a+b}{2} \quad ///.$$

2. El segmento que une los puntos medios de las diagonales, es paralelo a las bases e igual a la semidiferencia de las mismas.

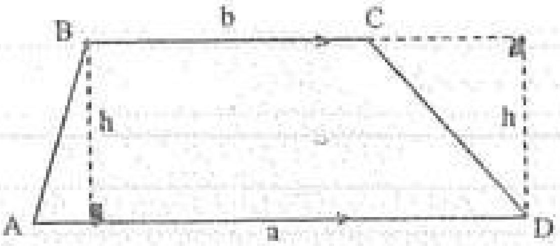


$$\overline{BC} \parallel \overline{EF} \parallel \overline{AD}$$

$$EF = EQ - FQ$$

$$EF = \frac{b}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a-b}{2} \quad ///.$$

3. El área de un trapecio es igual a la semisuma de las bases por la altura.

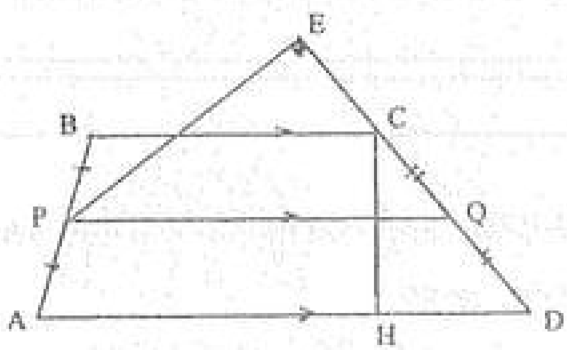


$$S_{ABCD} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BCD}$$

$$S_{ABCD} = \frac{a \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2}$$

$$S_{ABCD} = \left(\frac{a+b}{2} \right) h \quad ///.$$

4. El área de un trapecio es igual al producto de uno de sus lados no paralelos por la longitud de la perpendicular bajada desde el punto medio del lado opuesto al primero.



$$S_{ABCD} = PQ \times CH$$

$$\Delta PIQ = \Delta CHD$$

$$\frac{CH}{PE} = \frac{CD}{PQ}$$

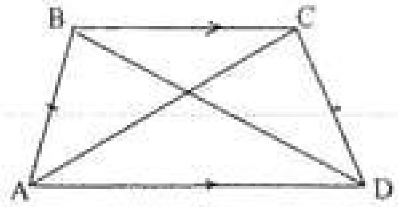
$$S_{ABCD} = CD \times PE \quad ///.$$

6.14.15. PROPIEDADES PARA DEMOSTRAR QUE UN CUADRILÁTERO ES UN TRAPECIO.

1. Si tiene dos lados opuestos paralelos.

6.14.16. TRAPECIO ISOSCELES

Es un trapecio que tiene los lados no paralelos iguales.



6.14.16.1. PROPIEDADES.

1. Los ángulos en las bases son respectivamente iguales : $\hat{A} = \hat{D}$ y $\hat{B} = \hat{C}$

2. Las diagonales son iguales : AC = BD

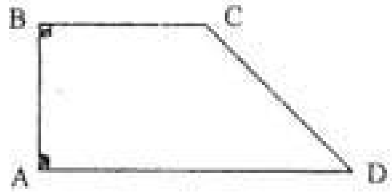
3. El trapecio isósceles es un cuadrilátero inscriptible.

6.14.17. PROPIEDADES PARA DEMOSTRAR QUE UN CUADRILÁTERO ES UN TRAPECIO ISOSCELES

Si tiene dos lados opuestos paralelos y los otros dos son iguales.

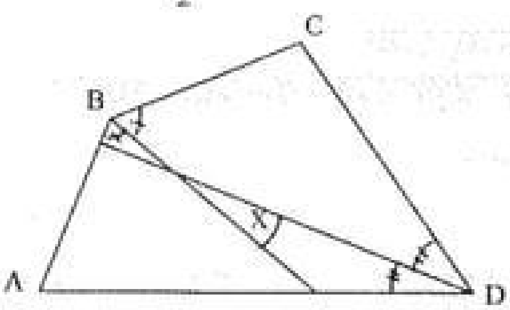
6.14.18. TRAPECIO RECTÁNGULO

Es un trapecio que tiene un lado no paralelo perpendicular a las bases.

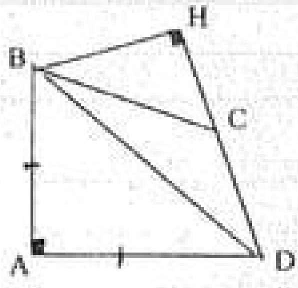


6.14.19. EJERCICIOS

1.- T) $\hat{X} = \dfrac{\hat{C} - \hat{A}}{2}$



2.-



H) $A\hat{B}C = 60°$

$B\hat{C}D = 135°$

T) $D\hat{B}H = ?$

Resp. 60°

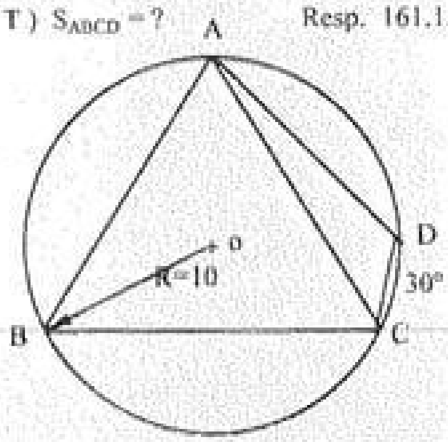
3.- Dados los cuatro lados de un cuadrilátero y una de las diagonales, calcular la otra diagonal: a = 5 cm., b = 7 cm., c = 6 cm., d = 8 cm. y la diagonal 8 cm.. Resp. 10.41 cm.

4.- En un cuadrilátero ABCD: $D\hat{A}B = 90°$, $D\hat{B}C = 90°$, DB = a y DC = b. Hallar la distancia entre los centros de los círculos, si uno pasa por D, A, B y otro por B, C y D.

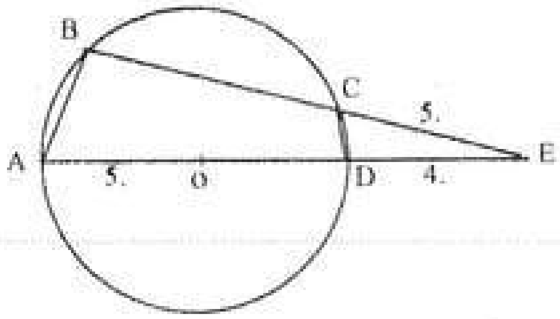
Resp. $\dfrac{1}{2}\sqrt{b^2 - a^2}$

5.- H) Δ ABC Equilátero

T) S_{ABCD} = ?   Resp. 161.15 u^2

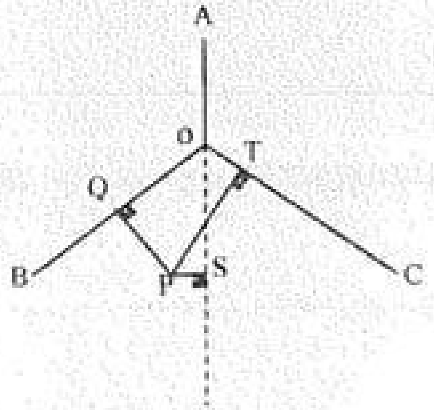


6.- T) S_{ABCD} = ?   Resp. 29.85 u^2



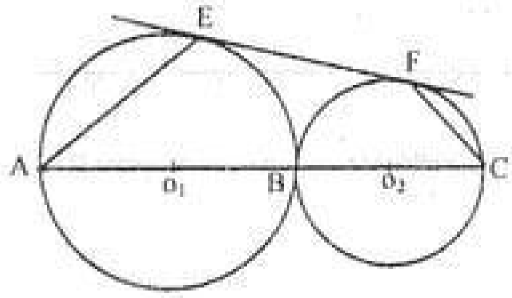
7.- H) $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{AOC}$

T) PQ = PT - PS

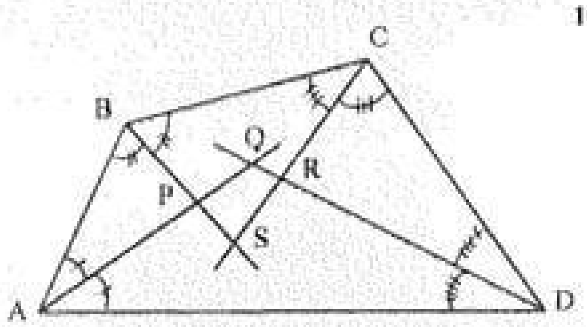


8.- H) $\overline{EF}$ Tang. Común

T) AEFC Inscriptible

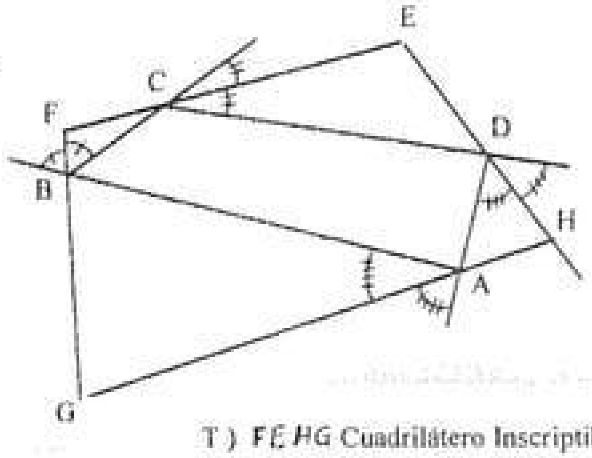


9.-



T) PQRS Cuadrilátero Inscriptible

10.-



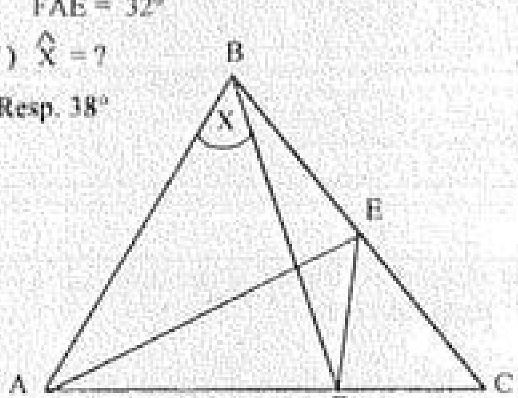
T) FEHG Cuadrilátero Inscriptible

11.- H) $\widehat{ABC} = \widehat{CFE} = 70°$

$\widehat{FAE} = 32°$

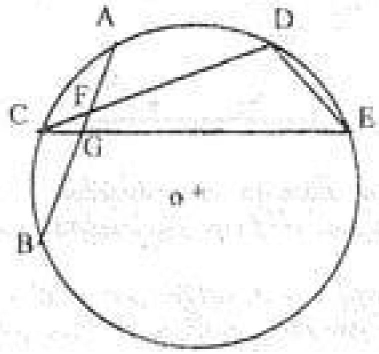
T) $\hat{X}$ = ?

Resp. 38°



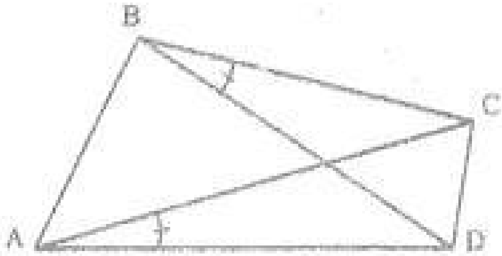
12.- H) $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB}$

T) GFDE Cuadrilátero Inscriptible



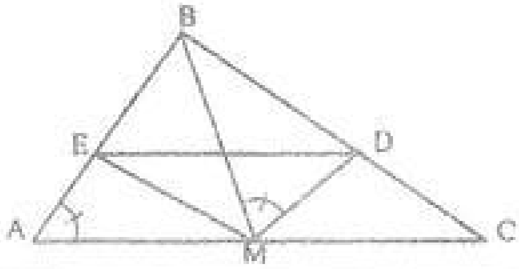
13.-

T) ABCD Cuadrilátero Inscriptible



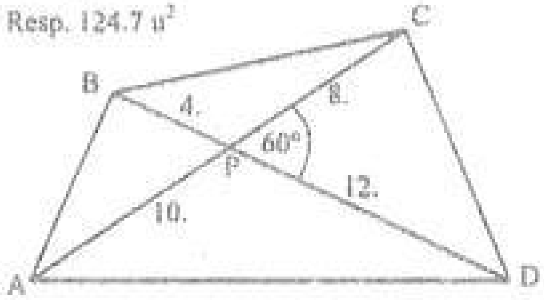
14.- H) $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{AC}$

T) BDME Cuadrilátero Inscriptible

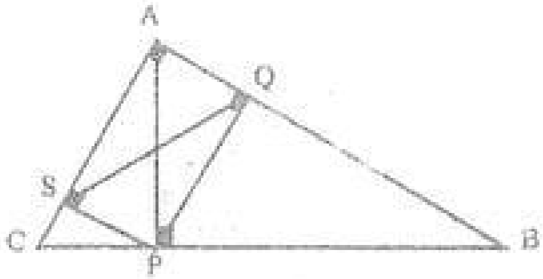


15.- T) $S_{ABCD} = ?$

Resp. 124.7 u^2



16.- T) CSQB Cuadrilátero Inscriptible



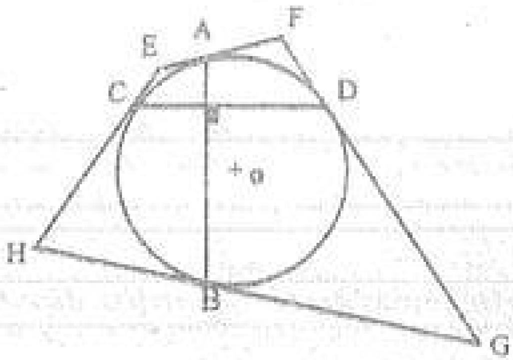
17.- Dados $\widehat{A} = 70°$, $\widehat{B} = 32°$, R = 62.43 m. y AB = 85,91 m. Hallar los otros tres lados del cuadrilátero inscriptible. Resp. 120.33 m.; 11.92 m.; 104.14 m.

18.- Encontrar el valor de los ángulos internos del triángulo formado al unir los pies de las tres alturas del triángulo ABC: $\widehat{A} = 70°$; $\widehat{B} = 85°$. Resp. 40°, 130°, 10°

19.- Demostrar que el producto de las distancias de un punto cualquiera M de un círculo a dos lados opuestos de un cuadrilátero inscrito ABCD, es igual al producto de las distancias de este mismo punto a los otros dos lados.

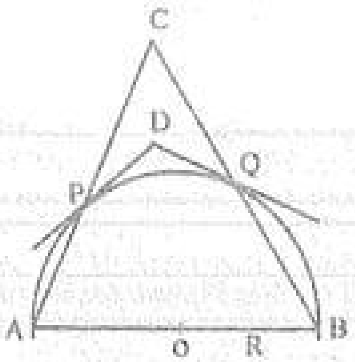
20.- H) A, B, C y D Puntos de Tangencia

T) EFGH Cuadrilátero Inscriptible



21.- H) $\overline{PD} \wedge \overline{QD}$ Tang. ⊙ (O , R)

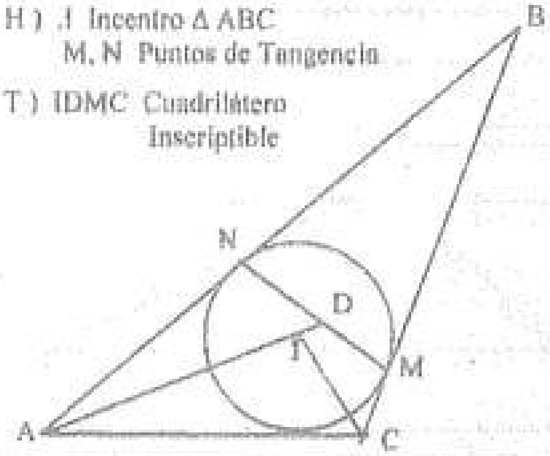
T) $P\widehat{D}Q = 2\,\widehat{C}$



22.- H) I Incentro Δ ABC

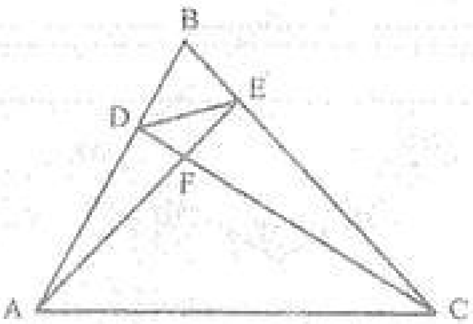
M, N Puntos de Tangencia

T) IDMC Cuadrilátero Inscriptible



23.- H) F Ortocentro Δ ABC

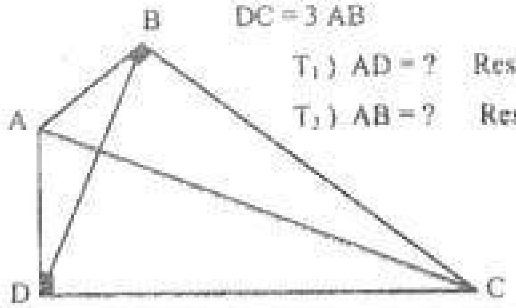
T) ADEC Cuadrilátero Inscriptible



24.- H) BD = 7 u.
AC = 8 u.
DC = 3 AB

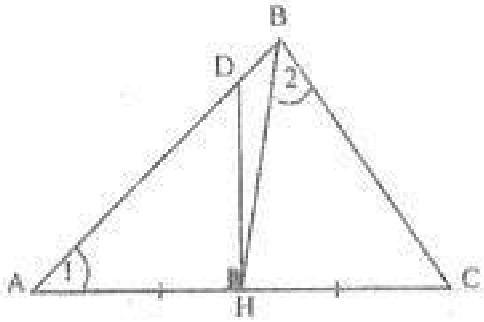
T_1) AD = ? Resp. 3.69 u.

T_2) AB = ? Resp. 3.39 u



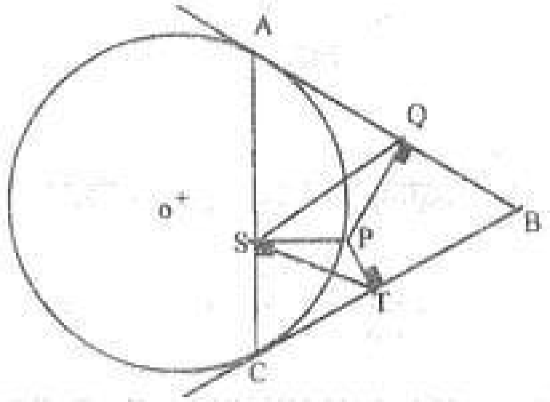
25.- H) $\hat{1} + \hat{2} = 90°$

T) DHCB Cuadrilátero Inscriptible



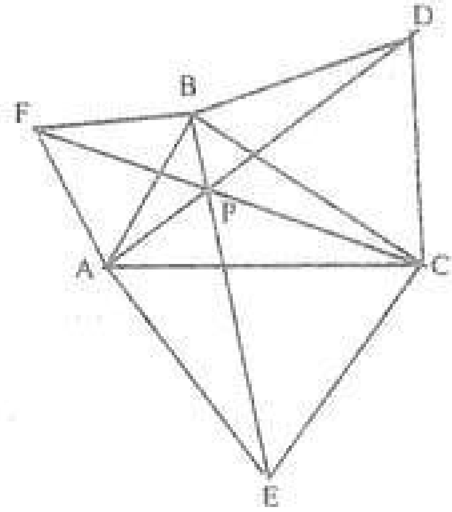
26.- H) AB y BC Tang. ⊙ (O, R)

T) Δ QPS ≈ Δ PTS



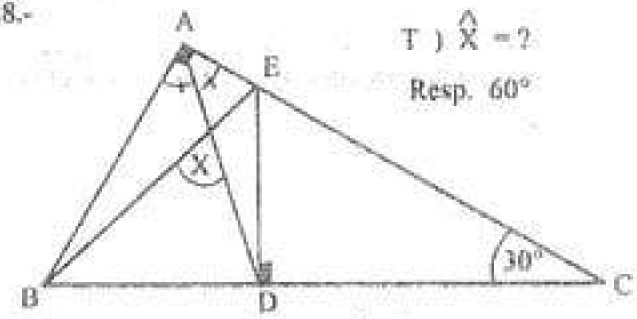
27.- H) Δ ABC Escaleno
Δ s AFB, BCD y AEC Equiláteros

T) APCE Cuadrilátero Inscriptible.



28.- T) $\hat{X}$ = ?

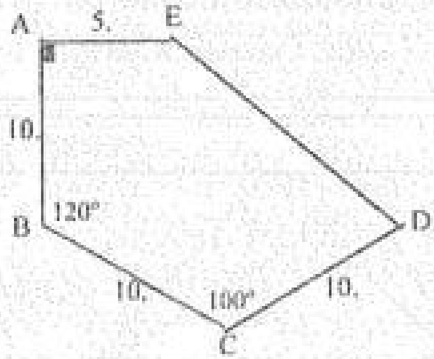
Resp. 60°



29.- Desde un punto exterior a un círculo se trazan dos secantes cuyas porciones externas miden 2 m. Determinar el área del cuadrilátero cuyos vértices son los puntos de intersección de las secantes y el círculo, sabiendo que las longitudes de sus lados opuestos respecto al punto externo son 6 m. y 2.4 m. Resp. 10.1 m^2

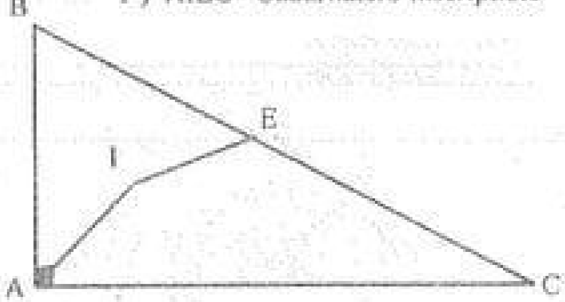
30.- En un triángulo ABC de lados: AC = 14 m. BC = 12 m. y AB = 10 m.; Q pertenece al lado AC y P pertenece al lado $\overline{BC}$. Calcular PQ para que el cuadrilátero ABPQ sea Inscriptible y Circunscriptible. Resp. 4.44 m.

31.- T) S_{ABCDE} = ? Resp. 144.73 u^2



32.- H) I Incentro Δ ABC
BA = BE

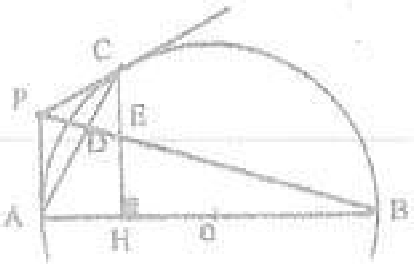
T) AIEC Cuadrilátero Inscriptible



33.- H) $\overline{AP}$ y $\overline{CP}$ Tang. ⊙ (O, R)
$AP = R/2$

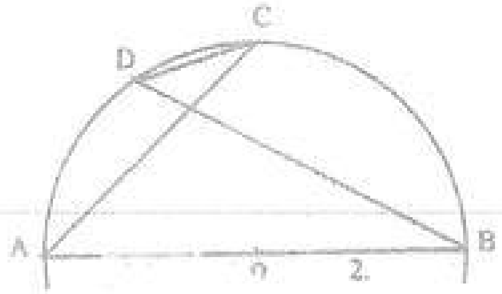
T_1) AD = ? f (R) Resp. 0.5 R

T_2) DE = ? f (R) Resp. 0.18 R



34.- H) $BD = l_3$
$AC = l_4$

T) DC = ? Resp. 1.14 u.



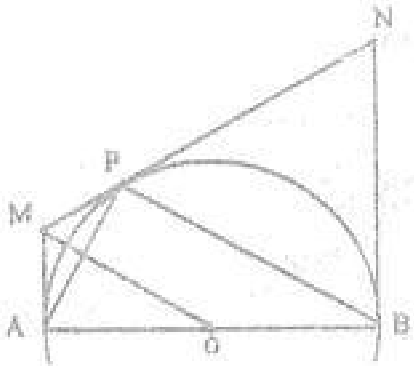
35.- H) $\overline{AM}$, $\overline{MN}$ y $\overline{NA}$ Tang. ⊙ (O, R)
$MA = R/2$

T_1) MO = ? Resp. 1.118 R

T_2) AP = ? Resp. 0.89 R

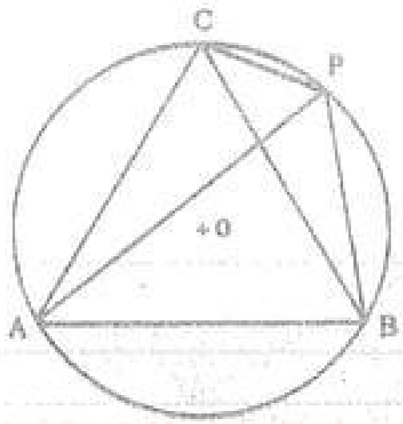
T_3) ON = ? Resp. 2.236 R

T_4) PB = ? Resp. 1.78 R



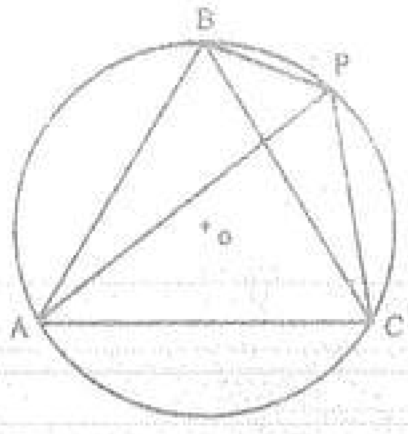
36.- H) $\triangle$ ABC Equilátero
$\widehat{BP} \neq \widehat{PC}$

T) $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 2\,AB^2$

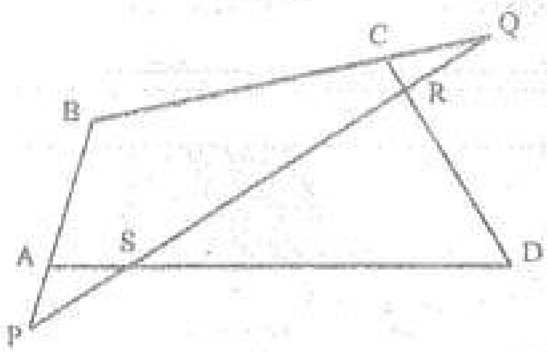


37. H) $\triangle$ ABC Equilátero

T) AP = BP + CP

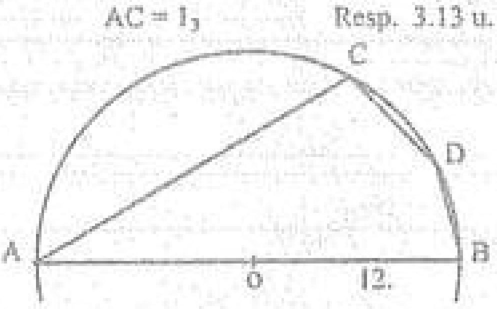


38.- T) $\dfrac{AP.BQ.CR.DS}{PB.QC.RD.SA} = 1$



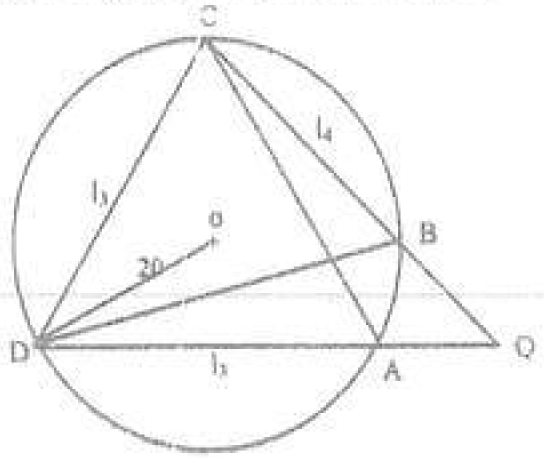
39.- H) $CD = l_8$
$AC = l_3$

T) DB = ?
Resp. 3.13 u.

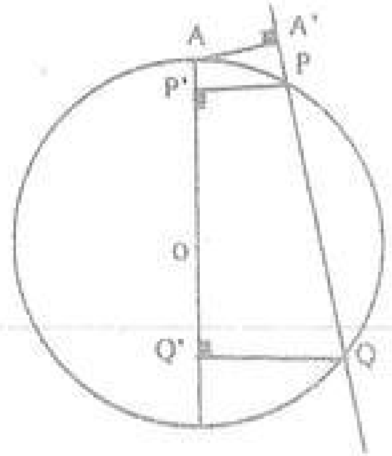


40.- T) AC ; AB ; BD ; AQ ; QB = ?

Resp. 34.6 ; 10.36 ; 38.6 ; 12.68 ; 14.15 u.

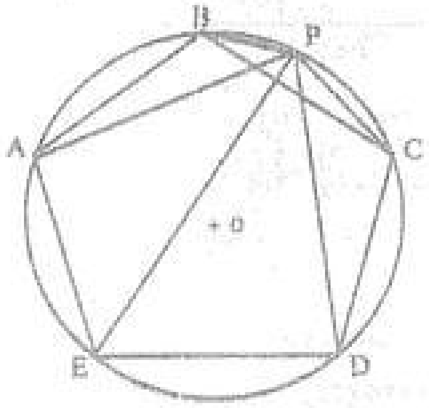


41.- T) $AA'^2 = AP' \times AQ'$



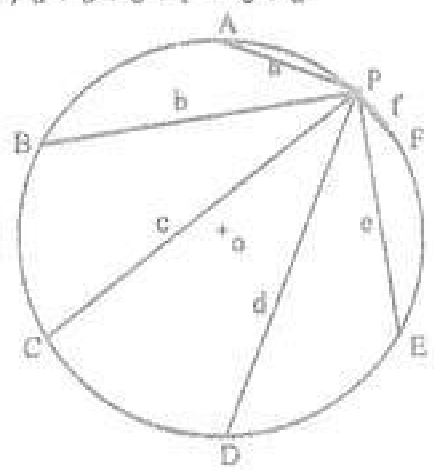
42.- H) ABCDE Regular
$\widehat{BP} \neq \widehat{PC}$

T) PB + PE + PC = PA + PD

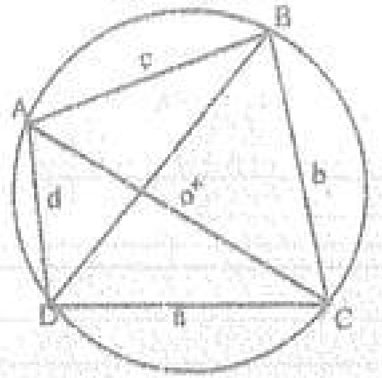


43.- H) $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE} = \widehat{EF} = \widehat{FA}$
$\widehat{AP} \neq \widehat{PF}$

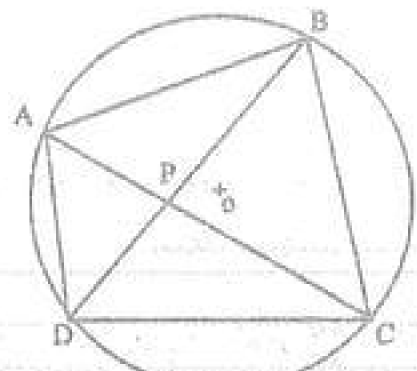
T) a + b + e + f = c + d



44.- T) $\dfrac{BD}{AC} = \dfrac{a.d + b.c}{d.c + a.b}$



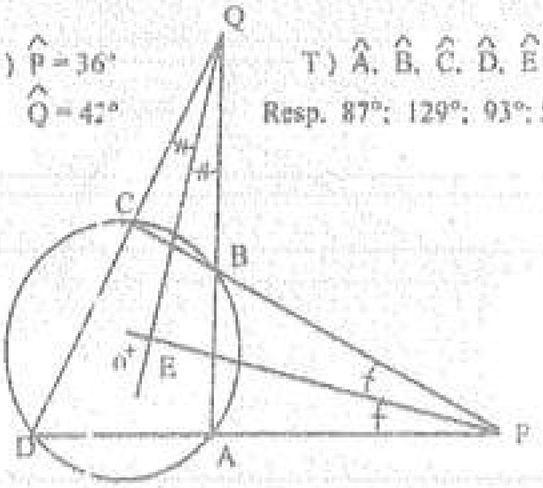
45.- T) AB x BC x PD = AD x CD x BP



46.- H) $\hat{P} = 36°$
$\hat{Q} = 42°$

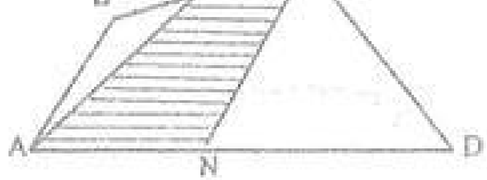
T) $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, \hat{E} = ?$

Resp. 87°; 129°; 93°; 51°; 90°

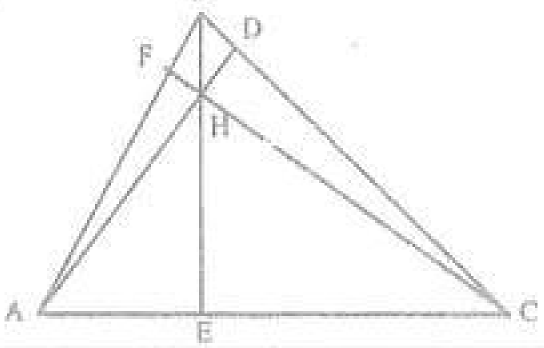


47.- H) AN = ND
BM = MC

T) $S_{////} = \dfrac{S_{ABCD}}{2}$

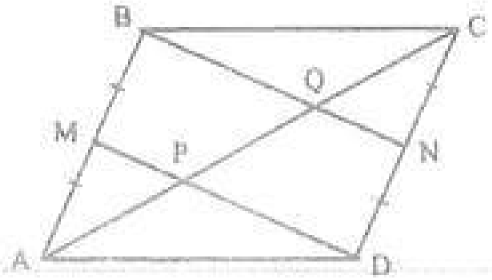


48.-



49.- H) ABCD Paralelogramo

T) AP = PQ = QC



H) H Ortocentro Δ ABC

T) $2\,(AD_x AH + BE_x BH + CF_x CH) = AB^2 + BC^2 + AC^2$

50.- Calcular los lados de un cuadrilátero circunscriptible en un círculo, dados el perímetro 2p y la suma de los cuadrados de los lados, siendo las diagonales rectangulares.

Resp. $\dfrac{p \pm \sqrt{m^2 - p^2}}{2}$

51.- Calcular la superficie de un cuadrilátero inscriptible de lados a = 54.2 m., b = 63 m., c= 26 m., d= 18.2 m. Resp. 1266.32 m^2

52.- Dados los lados a = 12 u ; b = 16 u ; c = 25 u se construyen ha y hb. Calcular la superficie del cuadrilátero formado al unir A y B los pies de ha y hb. Resp. 199.34 u^2

53.- En un círculo de radio 10, está inscrito un triángulo equilátero ABC, en el arco $\overset{\frown}{BC}$ se toma un punto P tal que : $BP = \dfrac{2}{3}$ R. Hallar el área del cuadrilátero ABPC. Resp. 167.42 u^2

54.- Dos ángulos opuestos de un cuadrilátero circunscriptible a un círculo de radio 12 m. son de 90° y otro de los ángulos mide 120°. Calcular el área del cuadrilátero. Resp. 620.5 m^2

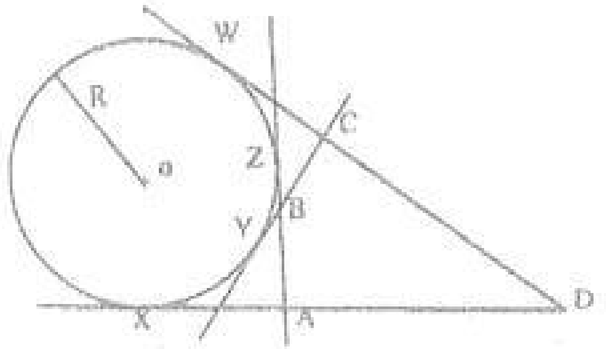
55.- Calcular las longitudes de los lados de un cuadrilátero de 20 m^2 de superficie y circunscripto a un círculo de 2 m de radio siendo rectos dos de sus ángulos opuestos. Resp. 7.23 m.; 7.23 m.; 2.76 m.; 2.76 m.

56.- En un triángulo de lados a = 91 m., b = 125 m., y c = 204 m., se prolonga c en sentido AB y en una longitud de 40 m y se toma sobre b un punto distante 50 m. de C. Se traza la recta que determina este punto y el extremo de la citada prolongación, y se desea saber cuál es el área del cuadrilátero convexo que se forma.
Resp. 2423.85 m^2

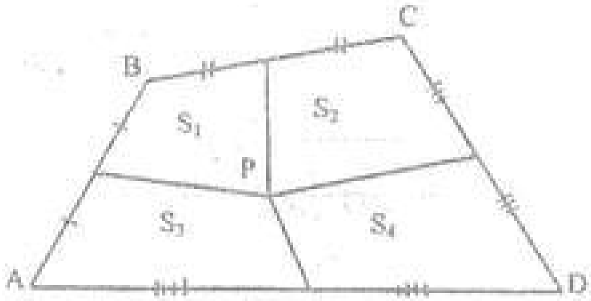
57.- Si por los vértices de un cuadrilátero se trazan paralelas a sus diagonales, resulta un cuadrilátero de área doble del dado.

58.- H) $\overline{DX}$, $\overline{CY}$, $\overline{AZ}$ y $\overline{DW}$ Tangs. $\odot$ (O, R)

T) AD – BC = CD - AB

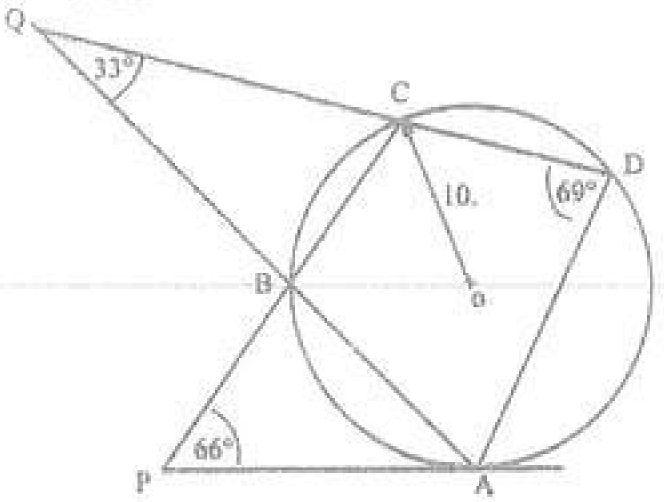


59.- T) $S_1 + S_4 = S_3 + S_2$



60.- H) $\overline{PA}$ Tang. ⊙ (O , 10)

T) S_{ABCD} = ?   Resp. 180.34 m^2

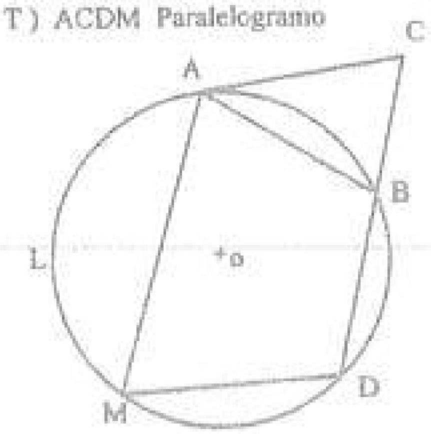


61.- H) $\overline{AC}$ Tang. ⊙ (O , R)

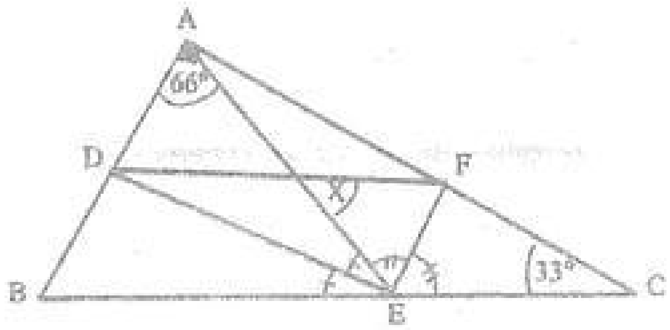
AC = AB

$\overset{\frown}{ALM} = \overset{\frown}{MDB}$

T) ACDM Paralelogramo

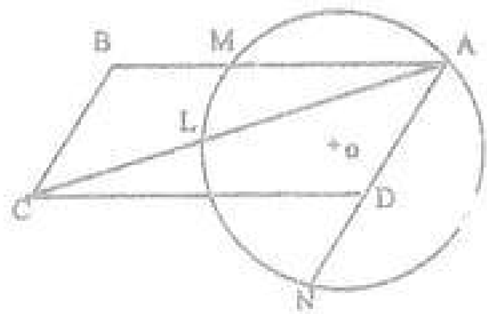


62.- T) $\hat{X}$ = ?   Resp. 52.5°



63.- H) ABCD Paralelogramo

T) $AC \times AL = AB \times AM + AD \times AN$



64.- En un triángulo isósceles de base 4 cm y la altura 6 cm se ha construido un semicírculo con uno de los lados como diámetro. Los puntos que el semicírculo corta a la base y al otro lado se une mediante una recta. Determine el área del cuadrilátero así obtenido que está inscrito en el semicírculo.   Resp. 10.88 cm^2

65.- De un cuadrilátero ABCD inscrito en un círculo, se conocen AB = 7 m., BC = 15 m., AD = 4.5 m. La tangente trazada al círculo desde el punto de encuentro de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ prolongados miden 10 m. Calcular el área.   Resp. 90.93 m^2

66.- Desde un punto exterior a un círculo se trazan dos secantes cuyas porciones externas miden 2 m. Determinar el área del cuadrilátero cuyos vértices son los puntos de intersección de las secantes y el círculo, sabiendo que las longitudes de sus lados opuestos respecto al punto externo son 6 m. y 2.4 m..   Resp. 10.08 m^2

67.- En un paralelogramo ABCD se da un lado AB = 4 m., $\hat{B}$ = 30° y el ángulo que forman las diagonales es de 143°. Hallar los demás elementos. Resp. 4.46 m; 7.46 m; 11.10 m.

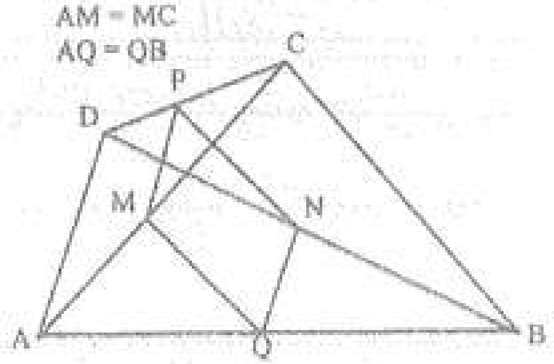
68.- H y O son el ortocentro y el circuncentro de un triángulo ABC escaleno. P y L son los puntos medios de $\overline{AH}$ y $\overline{BC}$. Demostrar que $\overline{PO}$ y $\overline{AL}$ se bisecan.

69.- H) DP = PC   T) PMQN es un Paralelogramo

DN = NB

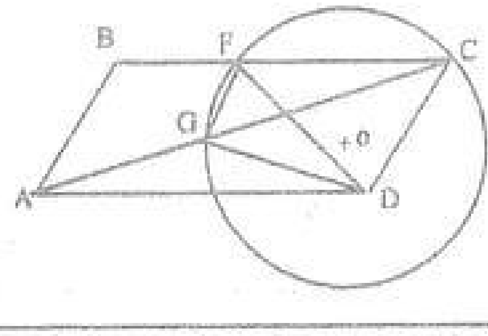
AM = MC

AQ = QB



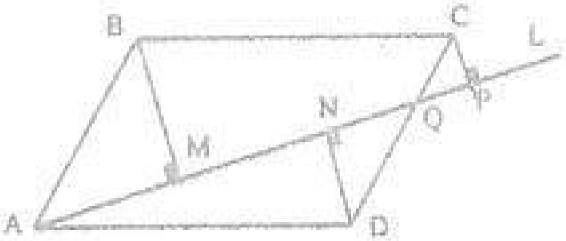
70.- H) ABCD Paralelogramo

T) $AC \times GE = EF \times AD$



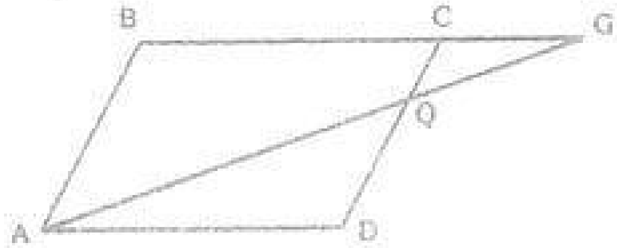
71.- H) ABCD Paralelogramo

T) ND = BM - CP



72.- H) ABCD Paralelogramo T) CG = AD/2

CQ = DQ/2

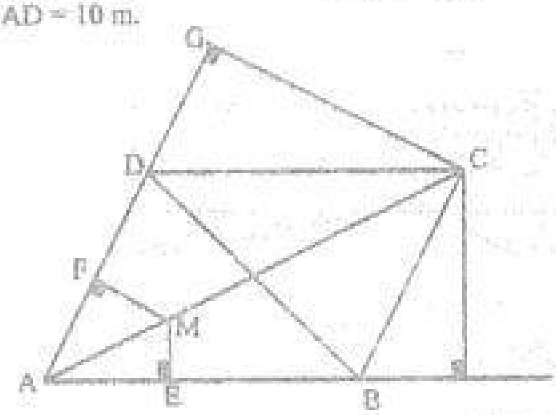


73.- H) ABCD Paralelogramo T) AB = ?

ME = 3 m

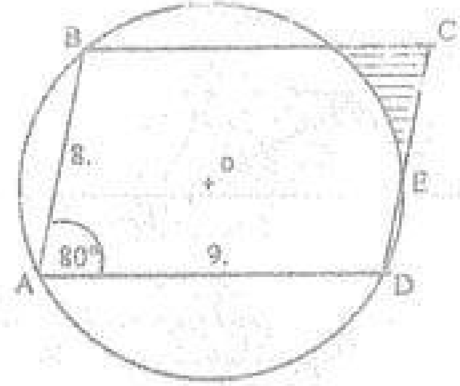
MF = 6 m. Resp. 20 m.

AD = 10 m.

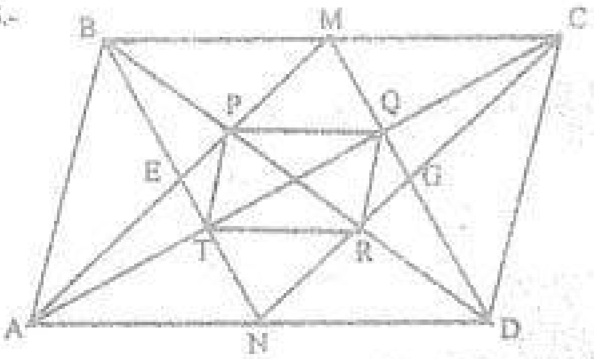


74.- H) ABCD Paralelogramo

T) S_{sh} = ? Resp. 1.37 u²



75.-



H) ABCD Paralelogramo

AN = ND

BM = MC

$S_{ABCD} = a^2$

T_1) $S_{EMGH} = a^2/4$

T_2) $S_{PQRT} = a^2/9$

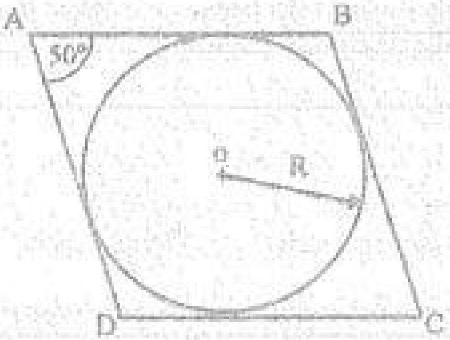
76.- Los lados de un paralelogramo son 10 u. y 6 u. el ángulo que forman las dos diagonales 40°. Determinar el área de parelelogramo. Resp. 26.85 u²

77.- La superficie de un rombo es 100 cm² y su ángulo interno es 50°. Calcular el radio del círculo inscrito.
Resp. 4.37 cm.

78.- H) ABCD Paralelogramo

S ⊙ = 314.14 u²

T) S_{ABCD} = ? Resp. 522.20 u²

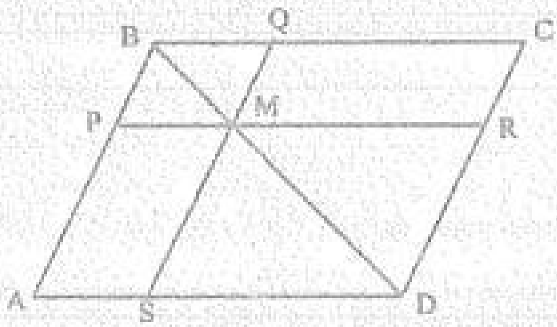


79.- H) ABCD Paralelogramo

$\overline{PR} \parallel \overline{AD}$

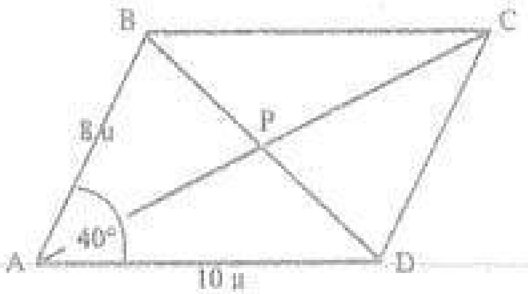
$\overline{QS} \parallel \overline{AB}$

T) $S_{APMS} = S_{CRMQ}$



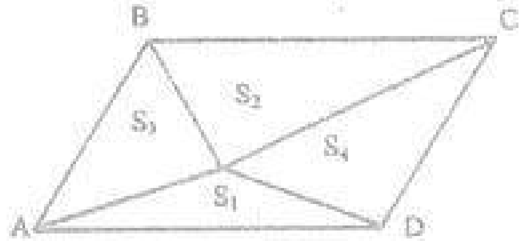
80.- H) ABCD Paralelogramo

T) $S_{ABPC} = ?$ Resp. 12.85 u^2



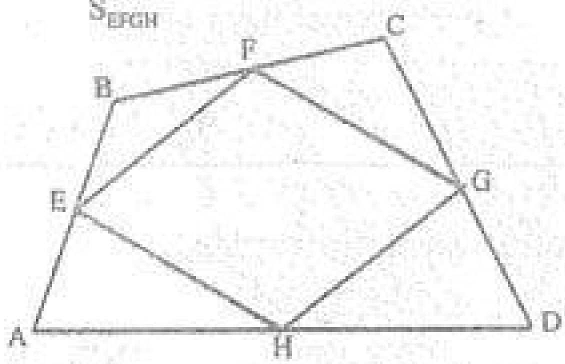
81.- H) ABCD Paralelogramo

T) $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$



82.- H) E, F, G, H Puntos Medios

T) $\dfrac{S_{ABCD}}{S_{EFGH}} = ?$ Resp. 2



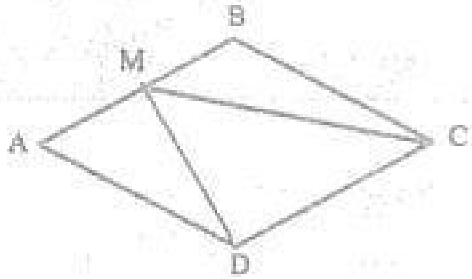
83.- H) ABCD Rombo

AM = MB

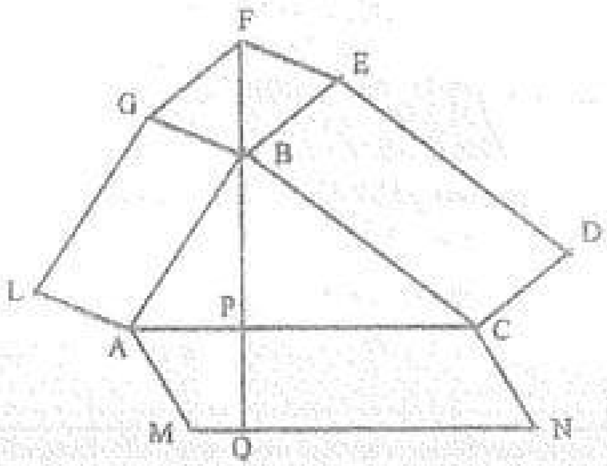
MC = 9 m.

MD = 13 m.

T) $S_{ABCD} = ?$ Resp. 89.8 m^2



84.-



H) Paralelogramos : BEDC

CNMA

BGLA

BF = PQ

T) $S_{ACNM} = S_{BEDC} + S_{BGLA}$

85.- El área de un paralelogramo es de 168 m^2 y los lados contiguos miden 10 m y 17 m. Si el área del paralelogramo semejante es 27 m^2, cuánto mide la diagonal mayor? . Resp. 8.4 m.

86.- En un paralelogramo se dan : el ángulo agudo $\hat{\alpha}$ y las distancias m y n entre el punto de intersección de las diagonales y los lados desiguales. Determinar el área del paralelogramo.

Resp. $\left(\dfrac{4mn}{\operatorname{Sen}\alpha}\right)$

87.- Se trazan perpendiculares desde el vértice del ángulo obtuso de un rombo a sus lados. La longitud de cada perpendicular es igual a a siendo la distancia entre sus pies b. Hallar el área del rombo.

Resp. $\dfrac{2a^4}{b\sqrt{4a^2 - b^2}}$

88.- Dado un rombo de lado 15 u. y ángulo de 75°. Hallar el radio del círculo inscrito. Resp. 7.24 u.

89.- El lado de un rombo mide 20 u. y la suma de sus diagonales es 56 u. Calcular el lado del triángulo equilátero equivalente al rombo. Resp. 29.78 u

90.- Si la superficie de un rombo es 200 u^2, el radio del círculo inscrito 5 u. Calcular un ángulo interno.
Resp. 30°

91.- Calcular el área común de dos rombos, en el primero de los cuales las diagonales son de 2 m. y de 3 m, mientras que el segundo se obtiene al girar el primero 90° alrededor de su centro. Resp. 2.4 m^2

92.- El perímetro y las diagonales de un rombo suma 34 m. y la relación entre el lado y una diagonal es igual a 5 / 6. Hallar el área del rombo. Resp. 24 m^2

93.- El área de un rombo es S y la suma de sus diagonales es m. Hallar el lado del rombo.

Resp. $\frac{1}{2}\sqrt{m^2-4S}$

94.- El perímetro de un rombo es igual a 140 y la suma de sus diagonales es 100. Hallar el área del rombo.
Resp 1275 u^2

95.- Hallar el área de un rombo sabiendo que las proyecciones de las diagonales sobre uno de sus lados miden 1.5 y 6.4. Resp. 12.25 u^2

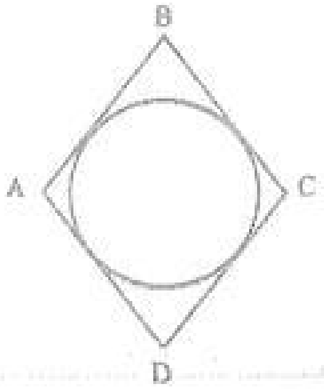
96.- Las proyecciones de las diagonales de un rombo sobre una recta que forma un ángulo de 30° con la diagonal mayor, miden 40 m. y 12 m. Calcular el área del rombo. Resp. 554.26 m^2

97.- La superficie de un rombo es de 96 m^2 y su lado de 10 m. Calcular el área de otro rombo semejante al anterior, cuya diagonal menor es de 15 m. Resp. 150 m^2

98.- H) Área del Rombo = Q
Área del Círculo = S

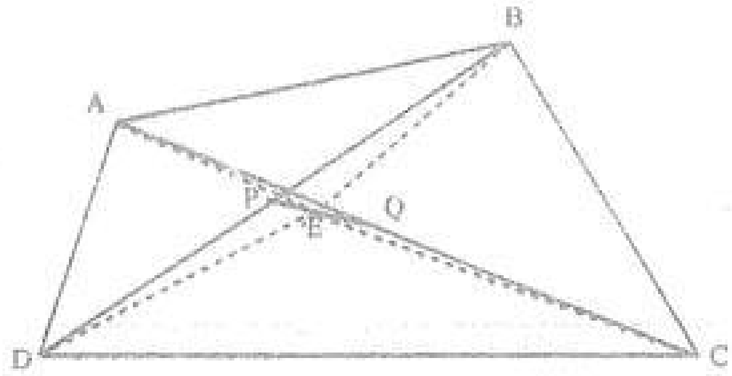
T) Hallar los ángulos del Rombo

Resp. arc Sen $\frac{4S}{\pi Q}$

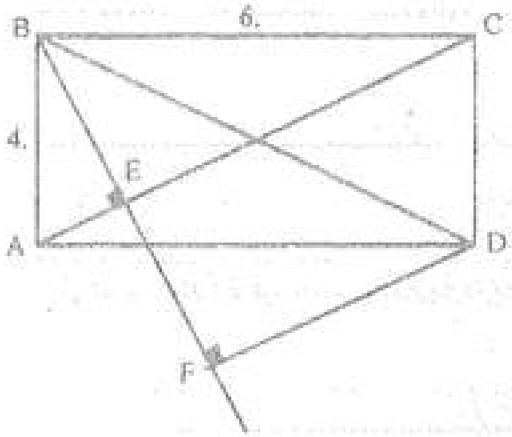


99.- H) BP = PD
AQ = QC
E ∈ PQ

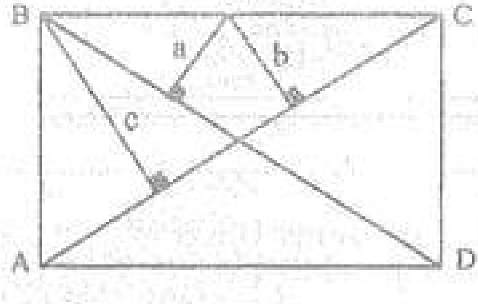
T) $S_{ABD} + S_{BDC} = S_{AEB} + S_{DEC}$



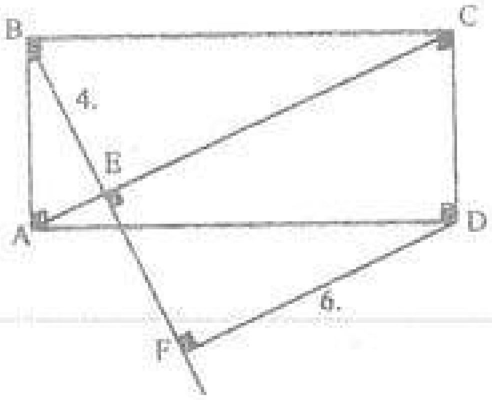
100.- H) ABCD Rectángulo
T) FD = ? Resp. 2.75 u.



101.- H) ABCD Rectángulo
T) c = a + b

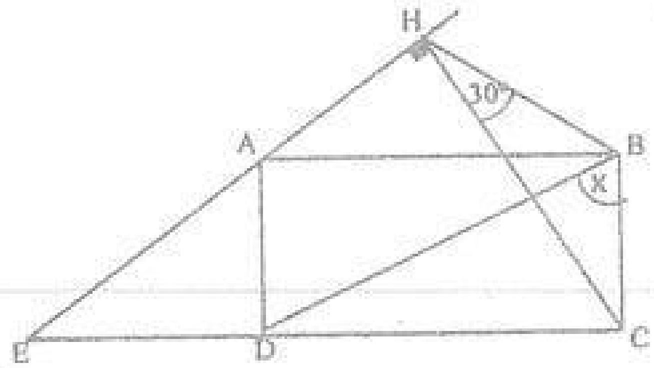


102.- T) $S_{ABCD} = ?$ Resp. $40\ u^2$



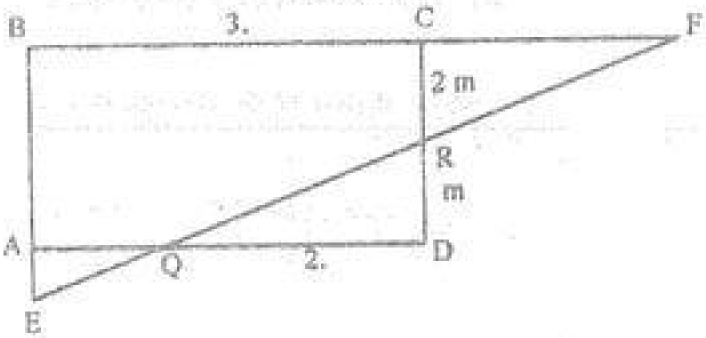
103.- H) ABCD Rectángulo

T) $\hat{X} = ?$ Resp. 60°

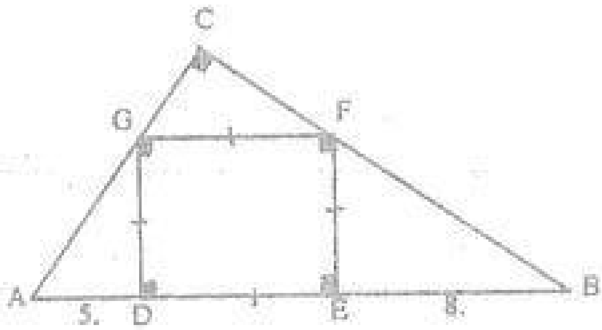


104.- H) ABCD Rectángulo

T) m = ? Resp. 1.15

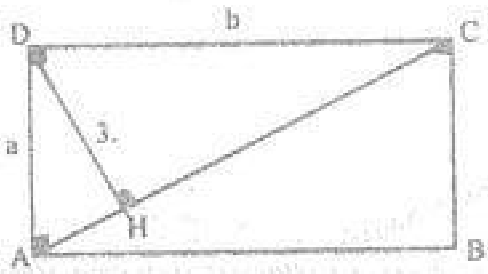


105.- T) $S_{DGFE} = ?$ Resp. $40\ u^2$



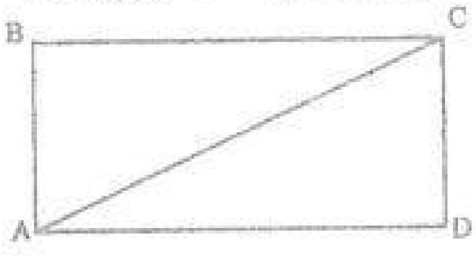
106.- H) ABCD Rectángulo
$a + b = 50\ u$

T) $S_{ABCD} = ?$ Resp. 141.27 u



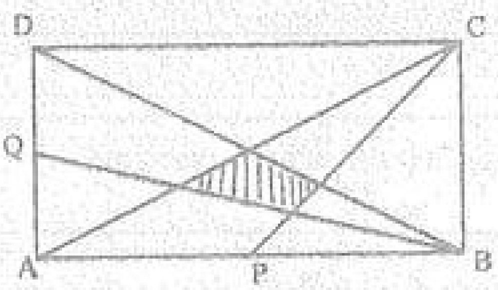
107.- H) ABCD Rectángulo
AC – AD = 2 m.
AB + BC = 84 m.

T) $S_{ABCD} = ?$ Resp. $1116.3\ m^2$



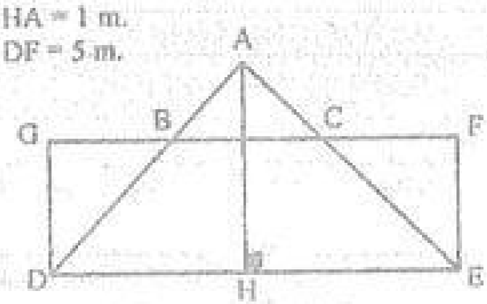
108.- H) ABCD Rectángulo
AP = PB = 8 m.
AQ = QD = 6 m.

T) $S_{rayado} = ?$ Resp. $9.6\ m^2$



109.- H) $S\,\Delta\,ADE = S\,\square\,DEFG$
Δ ABC Isósceles
$\square$ DEFG Rectángulo
HA = 1 m.
DF = 5 m.

T) $S\,\Delta ABC = ?$ Resp. $0.62\ m^2$



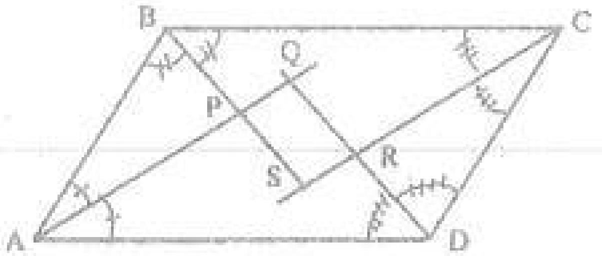
110.- En un paralelogramo ABCD: AB = 10 u; BC = 4 u.; A = 60°; se trazan las bisectrices de los cuatro ángulos internos formando el cuadrilátero PQST. Encontrar la superficie del cuadrilátero PQST.
Resp. $15.58\ u^2$

111.- El perímetro de un triángulo rectángulo es 132 m. y la suma de los cuadrados de los lados $6050\ m^2$. Hallar los lados. Resp. 55 m; 33 m; 44 m.

112.-. En un rectángulo ABCD, por el centro O del círculo inscrito al triángulo ABC se trazan las perpendiculares $\overline{OM}$ al lado $\overline{AD}$ y $\overline{ON}$ al lado $\overline{DC}$. Calcular el área del cuadrilátero OMDN, sabiendo que el área del rectángulo dado es de 100 m^2. Resp. 50 m^2

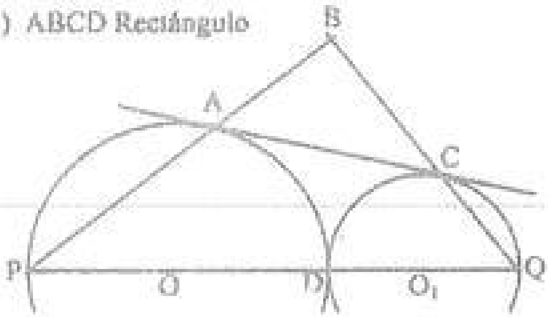
113.- H) ABCD Paralelogramo

T) PQRS Rectángulo



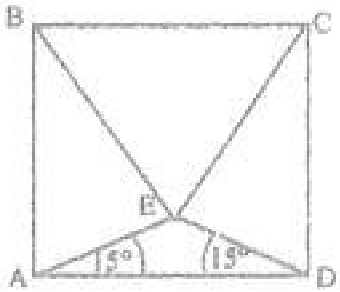
114.- H) AC Tang. Común

T) ABCD Rectángulo



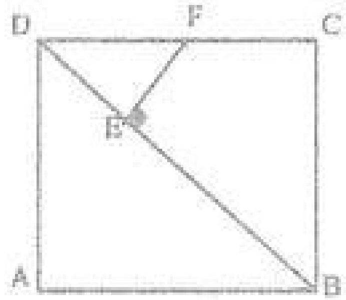
115.- H) ABCD Cuadrado

T) $\triangle$ EBC Equilátero



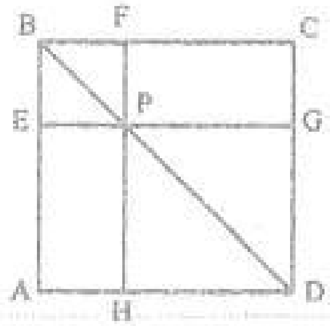
116.- H) ABCD Cuadrado
BE = BC

T) DE = EF = FC



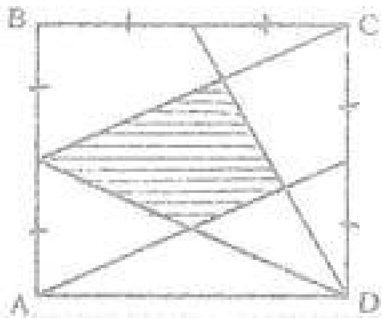
117 H) ABCD Cuadrado
$\overline{EG} \parallel \overline{AD}$
$\overline{FH} \parallel \overline{AB}$

T) EFGH Inscriptible



118.- H) ABCD Cuadrado
$S_{///} = 360\ u^2$

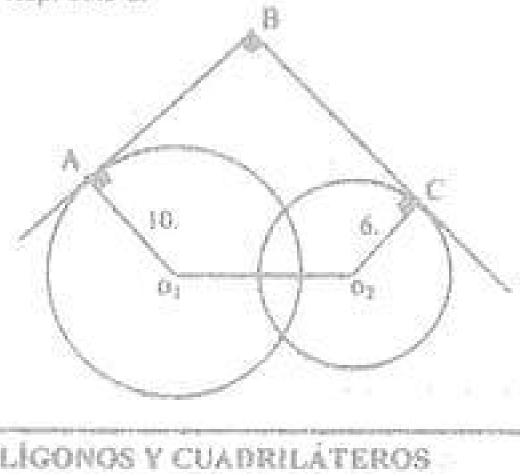
T) AB = ? Resp. 40 u.



119.- H) $O_1O_2 = 12$ u.

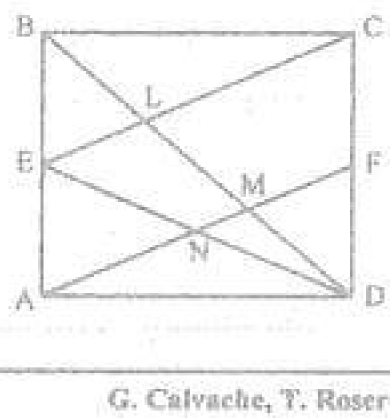
T) Perímetro del Polígono O_1ABCO_2

Resp. 60.5 u.



120.- H) ABCD Cuadrado
E y F Puntos Medios
$S_{ELMN} = 8\ u^2$

T) AB = ? Resp. 6,5u.



121.- Si en un paralelogramo se trazan las bisectrices interiores y exteriores, demostrar que se verifica :
1) Las bisectrices interiores forman un rectángulo y las exteriores otro rectángulo.
2) El área del rectángulo exterior es igual al doble del paralelogramo más el rectángulo interior.

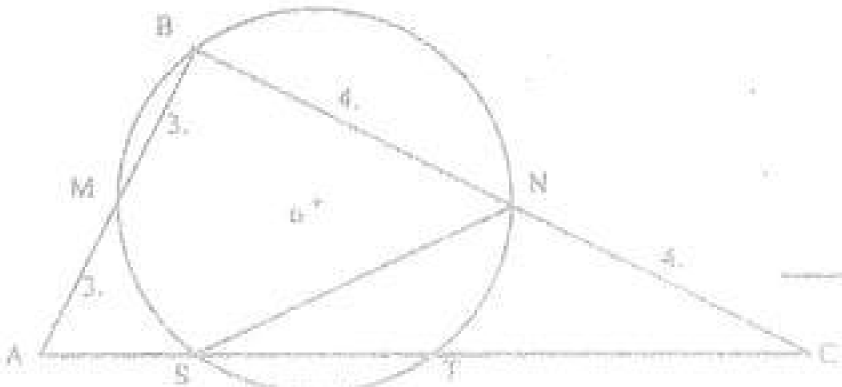
122.- Se inscribe un círculo en un rombo de lado 10 y ángulo agudo 60°, determinar el área de un rectángulo cuyos vértices son los puntos de tangencia del círculo y los lados del rombo. Resp. $32\ u^2$

123.- Si la superficie de un rectángulo es $120\ u^2$ y su perímetro es 46 u.; hallar su diagonal. Resp. 17 u

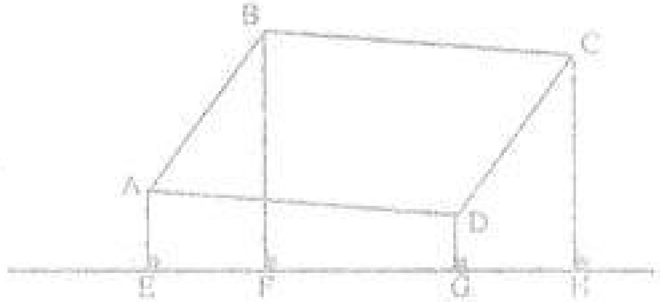
124.- En un cuadrado de lado 10 u. se inscribe otro cuyos vértices están sobre los lados del primero. Determinar los segmentos en que los vértices del segundo cuadrado dividen a los lados del primero, sabiendo que el área del segundo vale 25/49 del área del primero. Resp 4.29 u..; 5.71 u.

125.- El lado de un triángulo equilátero es a. Hallar el área del triángulo equilátero que está inscrito en el cuadrado inscrito en el triángulo original. Resp. $0.1\ a^2$

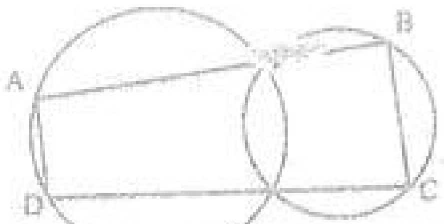
126.- H) AT = TC
T) SN = ? Resp. 4.



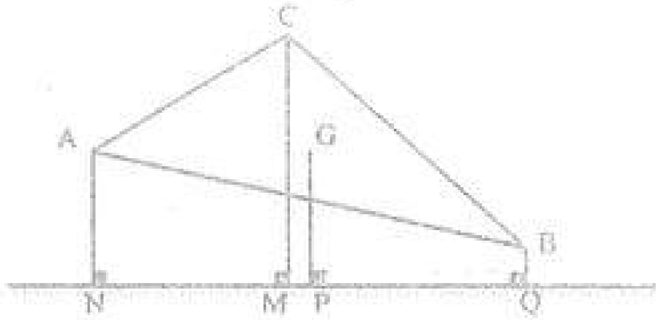
127.- H) ABCD Paralelogramo
T) BF + DG = AE + CH



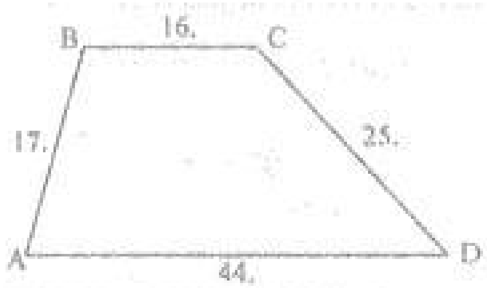
128.- H) $\overline{AB}$ // $\overline{DC}$
T) ABCD Paralelogramo



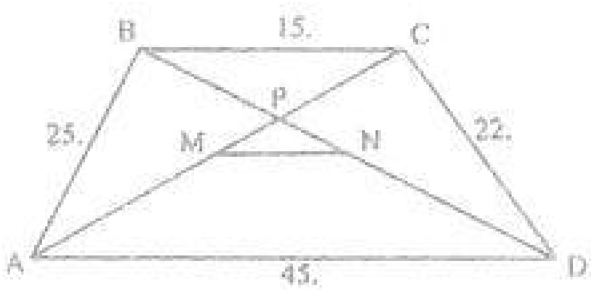
129.- H) G Baricentro △ ABC
T) $GP = \dfrac{AN + BQ + CM}{3}$



130.- H) ABCD Trapecio
T_1) AC = ? Resp. 28.3 m.
T_2) DB = ? Resp. 39 m.
T_3) S_{ABCD} = ? Resp. $450\ m^2$



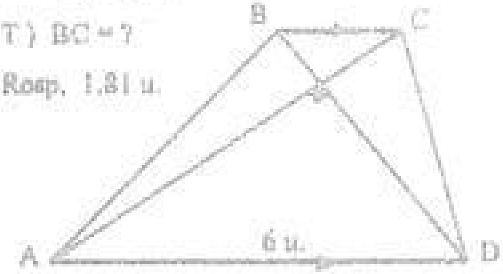
131.- H) ABCD Trapecio
M y N Puntos Medios de las Diagonales
T) PM = ? Resp. 9.25



132.- H) $AC = 6$ u.
$BD = 5$ u.

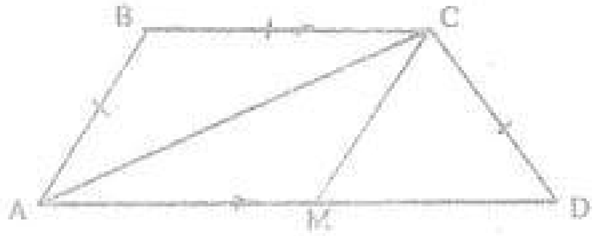
T) $BC = ?$

Resp. 1.81 u.



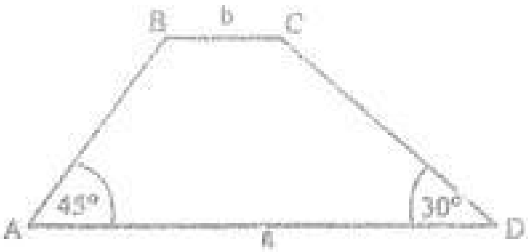
133.- H) $AM = MC = MD = 16$ u.

T) $S_{ABCD} = ?$ Resp. 332.4 u^2



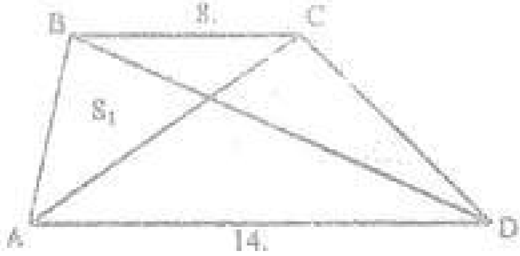
134.- H) ABCD Trapecio

T) $S_{ABCD} = ?$ Resp. $\dfrac{a^2 - b^2}{4}\left(\sqrt{3} - 1\right)$

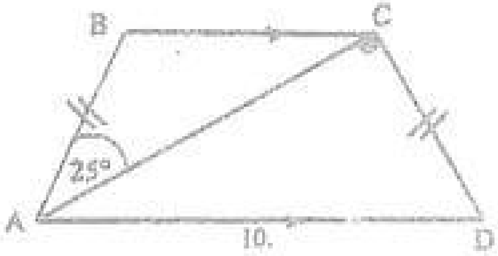


135.- H) ABCD Trapecio

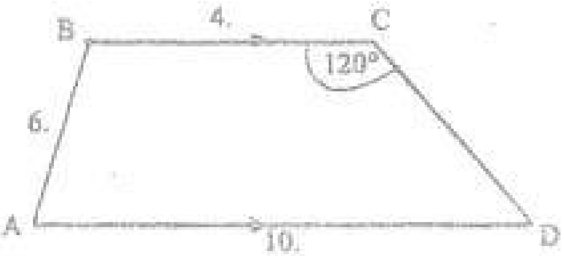
T) $\dfrac{S_1}{S_T} = ?$ Resp. 0.23



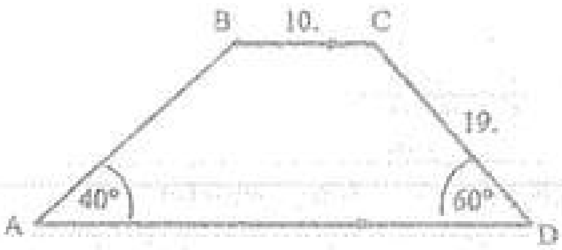
136.- T) $S_{ABCD} = ?$ Resp. 32.24 u^2



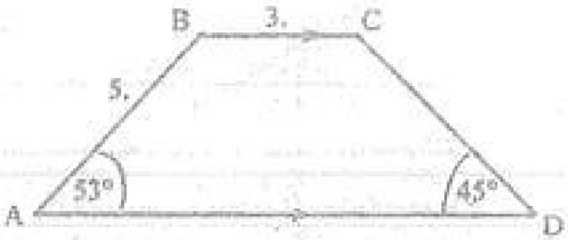
137.- T) $S_{TRAPECIO} = ?$ Resp. 36.4 u^2



138.- T) $S_{ABCD} = ?$ Resp. 403.43 u^2

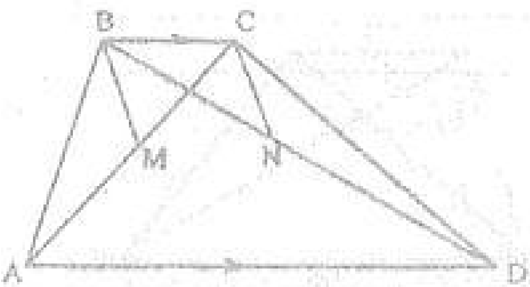


139.- T) $S_{ABCD} = ?$ Resp. 26 u^2



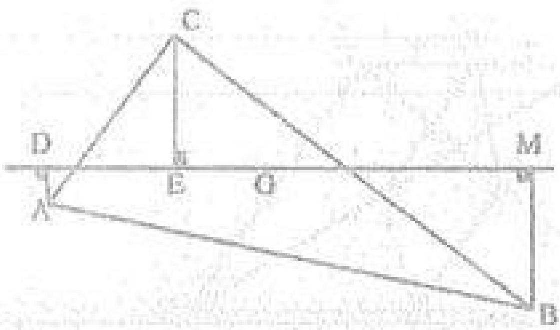
140.- H) ABCD Trapecio
M y N Puntos Medios de las Diagonales
$AD = 3\,BC$

T) $\Delta BMP \cong \Delta CNP$



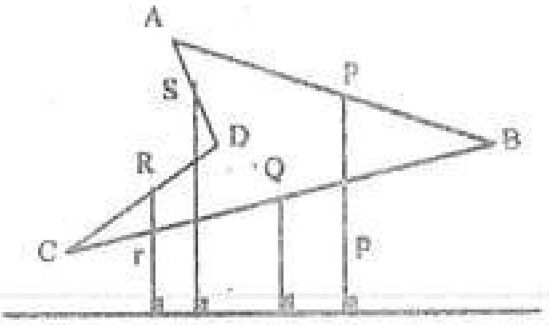
141.- H) G Baricentro ΔABC
$G \in \overline{DM}$

T) $AD + BM = CE$



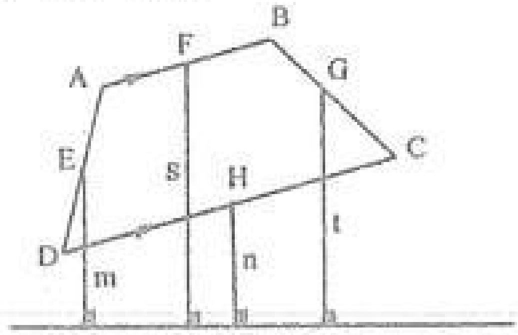
142.- H) P, Q, R, S Puntos Medios

T) $r + p = q + s$



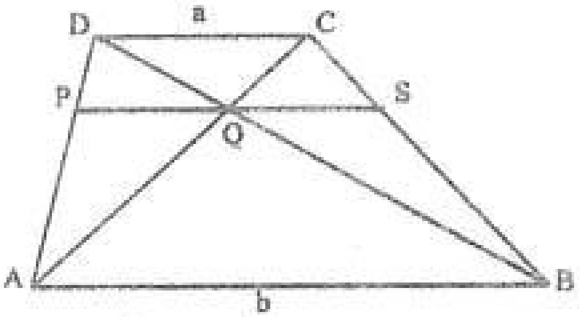
143.- H) E, F, G, H Puntos Medios

T) $n + s = m + t$



144.- H) $\overleftrightarrow{DC} \parallel \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{PS}$

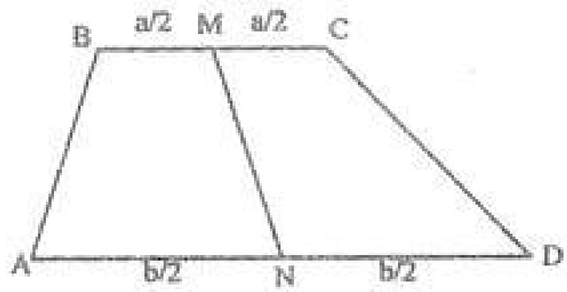
T) $MN = \dfrac{a\,b}{a+b}$



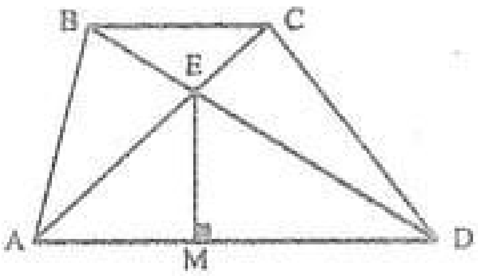
145.- H) $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{AD}$

$\hat{A} + \hat{D} = \pi / 2$

T) $MN = \dfrac{b-a}{2}$



146.-



H) ABCD Trapecio

BC = 4 u.

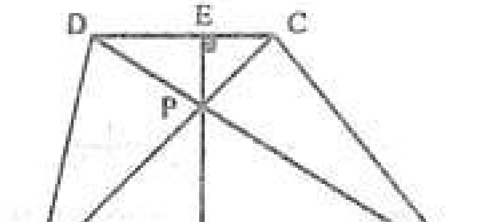
AD = 8 u.

BD = 9 u.

AC = 6 u.

T) EM = ? Resp. 2.96 u.

147.-



H) ABCD Trapecio

AB = 327 m.

DC = 153 m

AC = 305 m.

BD = 226 m.

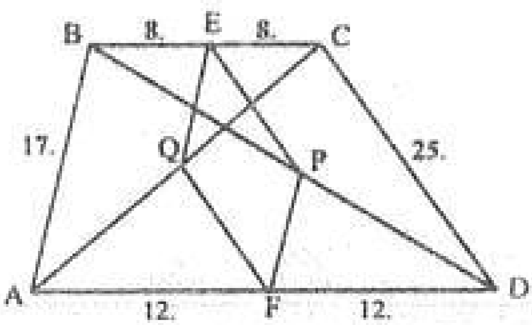
T) S_{ECBF} = ? Resp. 12550.8 m^2

148.- H) ABCD Trapecio

AQ = QC

BP = PD

T) S_{QEPF} = ? Resp. 105 m^2

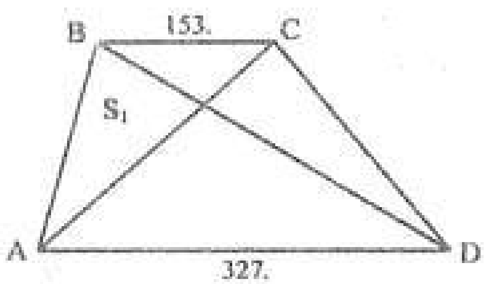


149.- H) ABCD Trapecio

BD = 305 m.

AC = 226 m.

T) S_1 = ? Resp. 5830.92 m^2



150.- En un trapecio las bases miden 7 m. y 21 m. y su altura es 10 m. Hallar el área de cada una de las partes formadas, al trazar la base media del trapecio. Resp. $52.5\ u^2$; $87.5\ u^2$

151.- Una recta perpendicular a dos lados de un paralelogramo divide a este en dos trapecios en cada uno de los cuales se puede inscribir un circulo. Hallar el ángulo agudo del paralelogramo si sus lados son de 10 u. y de 8 u. Resp. $14.5°$

152.- Se inscribe un triángulo ABC en un circulo; por el vértice A se traza una tangente que corta a la prolongación del lado $\overline{BC}$ en el punto D. Por los vértices B y C se trazan perpendiculares a la tangente, midiendo 6 cm la menor de estas perpendiculares. Determinar el área del trapecio formado por las perpendiculares, el lado $\overline{BC}$ y el segmento de la tangente, sabiendo que BC = 5 cm., AD = $5\sqrt{6}$ cm.
Resp. $31.88\ cm^2$

153.- Las bases de un trapecio son 6 m. y 10 m. y su altura es de 4 m. Determinar la longitud del segmento $\overline{EF}$ paralelo a las bases, trazado a 1 m. de distancia de la base mayor y limitado por los lados no paralelos.
Resp. 9 m.

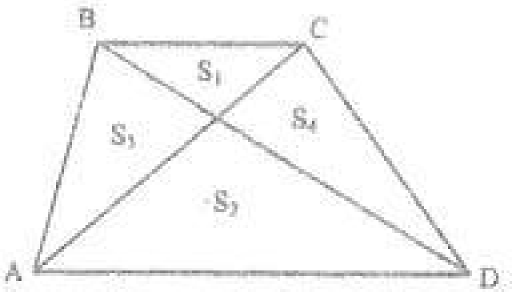
154.- Calcular las bases y la altura de un trapecio de $75\ m^2$ de área, sabiendo que la base menor es la mitad de la mayor y la altura la sexta parte de la suma de las dos bases. Resp. 2 0 m., 10 m., 5 m.

155.- Dado un trapecio de bases 10 u. y 6 u. Hallar la longitud del segmento paralelo a las bases tal que divida al trapecio en dos partes proporcionales a 3 y 5. Resp. 11.03 u.

156.- Se da un terreno rectangular ABCD de $72\ m^2$ tal que un lado $\overline{AB}$ es doble del $\overline{AD}$, se divide por $\overline{EF}$ en dos partes iguales quedando reducido a dos terrenos rectangulares, siendo el precio del metro cuadrado en el terreno AEFD de \$ 300,00 y en el EFCB de \$ 200,00. Calcular la distancia $\overline{EG}$ para que la recta $\overline{GF}$ divida el terreno en dos trapecios que tengan igual valor. Resp. GF = 2 m.

157.- Las bases de un trapecio son iguales a 10 u. y 6 u. Hallar la longitud del segmento paralelo a las bases que divide el área del trapecio en dos partes equivalentes. Resp. 8.25 u.

157.a.-



H) ABCD Trapecio
$S_1 = 3\ u^2$
$S_2 = 12\ u^2$

T$_1$) $S_3 = ?$ Resp. $6\ u^2$

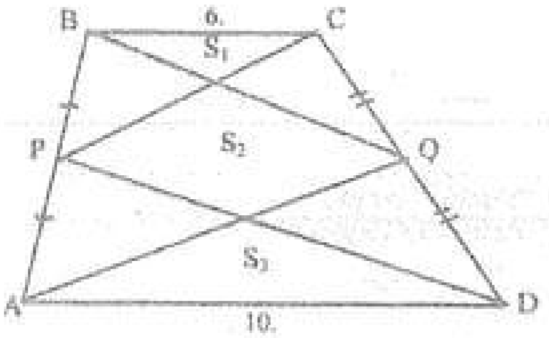
T$_2$) $S_{ABCD} = ?$ Resp. $27\ u^2$

157.b.- H) ABCD Trapecio
$S_1 = 3\ u^2$
$S_2 = 12\ u^2$

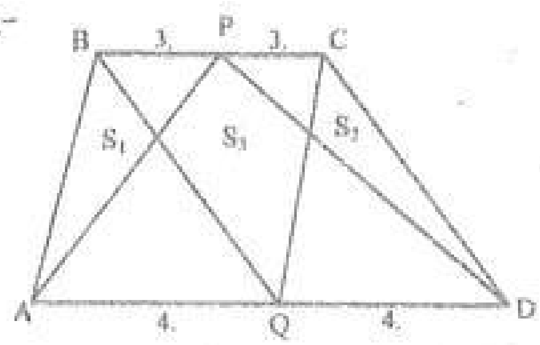
T$_1$) $S_2 = S_1 + S_3$

T$_2$) $S_{\Delta ABQ} + S_{\Delta CPD} = S_T$

T$_3$) $\dfrac{S_2}{S_T} = ?$ Resp. 0.38



157.c.-



H) ABCD Trapecio

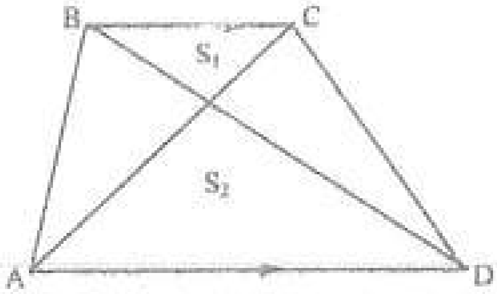
T$_1$) $S_1 = S_2$

T$_2$) $S_3 = 4\ S_2\ S_1$

T$_3$) $\dfrac{S_1}{S_T} = ?$ Resp. 0.25

157.- H) $S_1 = 9\ u^2$
$S_2 = 25\ u^2$

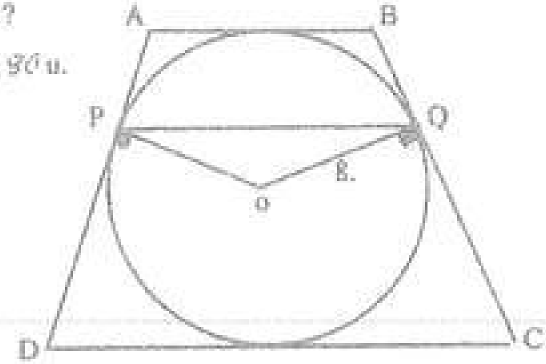
T) $S_T = ?$ Resp. $64\ u^2$



158.- H) ABCD Trapecio Isósceles
P y Q Puntos de Tangencia ; $S_{ABCD} = 320$

T) $PQ = ?$

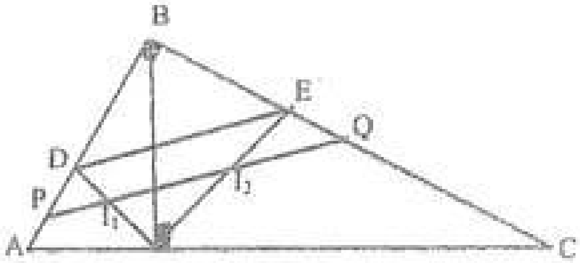
Resp. 12.90 u.



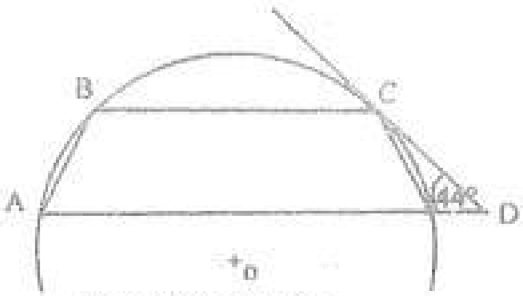
159.- H) I_1 Incentro Δ ABH
I_2 Incentro Δ BHC

T_1) $\overline{DE} \parallel \overline{PQ}$

T_2) PB = BQ = BH



160.-

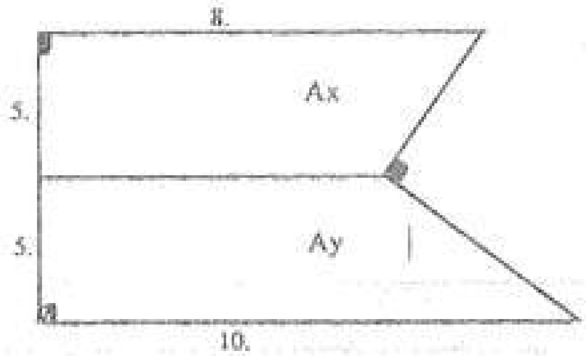


H) ABCD Trapecio
$\overline{DC}$ Tang. ⊙ (O , R)
AB = 6 u.
BC = 9 u.

T) $S_{ABCD} = ?$ Resp. $76.56\ u^2$

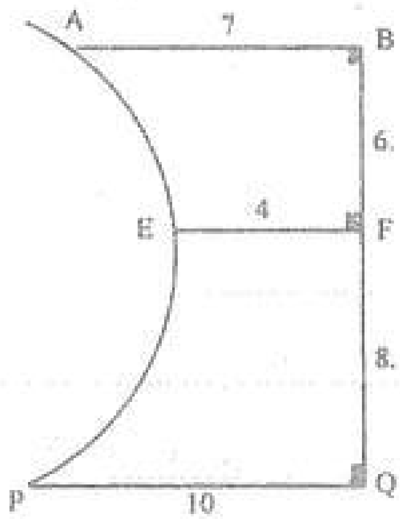
161.- T_1) $A_X = ?$ Resp. $29.75\ u^2$

T_2) $A_y = ?$ Resp. $34.75 u^2$



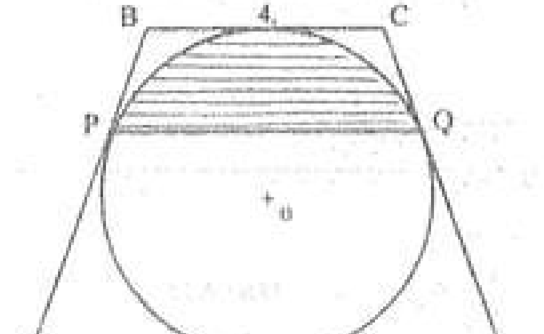
162.- H) $\widehat{AEP}$ Arco de Circunferencia

T) $S_{ABQPE} = ?$ Resp. $77.04\ u^2$



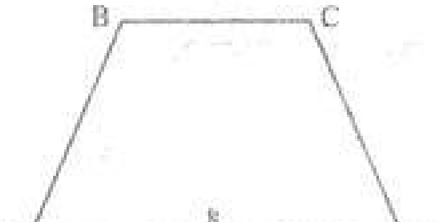
163.- H) ABCD Trapecio Isósceles
P y Q Puntos de Tangencia

T) $S_{mnr} = ?$ Resp. $7.4 u^2$



164.- H) ABCD Trapecio Isósceles Circunscriptible
r = 2.82 u.

T) BC = ? Resp. 4 u.



165.- En un trapecio isósceles sus diagonales se cortan perpendicularmente y el segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos es igual a 10 u. Hallar el área del trapecio. Resp. 100 u^2.

166.- Calcular los lados de un trapecio isósceles, si los lados no paralelos y la base menor tienen igual medida, su altura es 12 u y la superficie 288 u^2. Resp. 15 u.; 33 u.

167.- Dado un cuadrilátero cualquiera, demostrar que si por los puntos medios de cada diagonal se trazan paralelas a la otra diagonal y si se une el punto de intersección de las dos paralelas con los puntos medios de cada lado, el cuadrilátero queda dividido en cuatro partes equivalentes.

168.- Una recta paralela a la base de un triángulo de área 36 u, separa en él un triángulo de área 9 u. Determinar el área del cuadrilátero cuyos vértices coinciden en los del triángulo menor y el cuarto este en la base del triángulo mayor. Resp. 18 u^2

169.- En un terreno en forma de trapecio isósceles, las bases miden 100 m y 140 m y la altura 90 m, es atravesado por una carretera cuyo ancho es de 7 m., teniendo por eje una de las diagonales del trapecio. Hallar el área de la carretera. Resp. 1.023.53 m^2

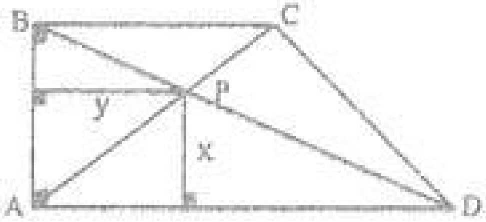
170.- En un triángulo rectángulo, los catetos miden 108 m. y 144 m. Si a la distancia de 5.6 m. de la hipotenusa se traza una paralela para obtener un trapecio. Cuál es el área del trapecio? Resp. 975 m^2

171.- En un trapecio ABCD, en el cual la base menor AB = 12 m.; la base mayor DC = 18 m. y la altura AH = 10 m. Calcular la longitud del segmento $\overline{MN}$ paralelo a las bases de modo que lo divida en dos partes equivalentes. Resp. 15.29 m.

172.- H) AB = 8 u.
BC = 6 u.
AD = 12 u.

T₁) x = ? Resp. 5.33 u.

T₂) y = ? Resp. 2.67 u.

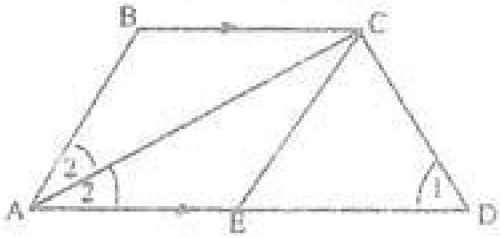


173.- H) AE = DE = EC = 40 u.
$\hat{1} = 2\hat{2}$

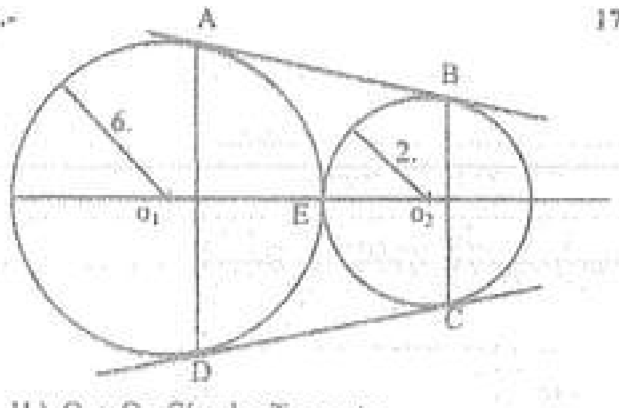
T₁) ABCD Inscriptible

T₂) Hallar los Lados del Trapecio

Resp. 80 u.; 40 u.; 40 u.; 40 u..



174.-

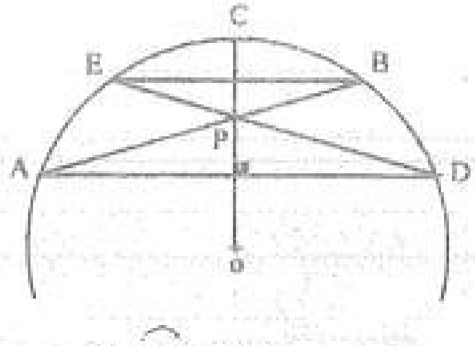


H) O_1 y O_2 Círculos Tangentes
AB y CD Tangs. Comunes

T₁) Altura del Trapecio ABCD Resp. 6.0 u

T₂) S_{ABCD} = ? Resp. 41.58 u^2

175.-



H) $\overset{\frown}{AD} = 100°$
$\widehat{BAD} = 20°$

T₁) AEBD Trapecio Isósceles

T₂) ECBP Rombo

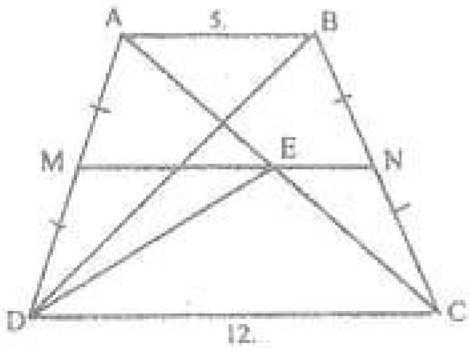
176.- En un círculo están inscritos un triángulo isósceles y un trapecio. Los lados laterales del triángulo son paralelos a los lados laterales del trapecio. Una de las bases del trapecio es el diámetro del círculo. Calcular la altura del trapecio siendo su base media igual a 10 u y el área del triángulo igual a 50 u^2.
Resp. 5 u.

177.- Un propietario tenía una finca de forma rectangular, y de 20000 m^2, cuya anchura era los ¾ de largo. Se construyó una carretera que ocupó en el terreno una franja de 10 m de ancho, siendo el eje de la carretera una de las diagonales del rectángulo. Se ofreció al propietario la compra de todo el terreno a razón de $ 600,00 el m^2, pero no quiso que se le expropiara más que el terreno ocupado por la carretera, por el que se le pagó a razón de $ 300.00 el metro cuadrado. Una vez construido el carretero, el propietario vendió el terreno sobrante a razón de $ 250.00 m^2, con el convencimiento de que había hecho un magnífico negocio. Cuánto ganó ?. Resp. Perdió $ 6900531,5

178.- Si el área de un trapecio es 20 m^2 cuyos lados son el 1/3 de los lados de otro trapecio semejante. Calcular su área Resp. 180 m^2

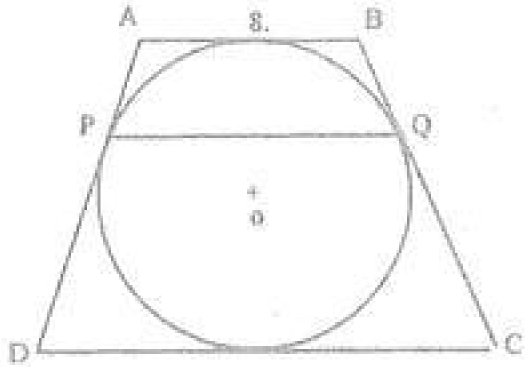
179.- H) ABCD Trapecio Isósceles
AC = BD 7 u.

T) $S_{\triangle ADE}$ = ? Resp. 15.6 u^2



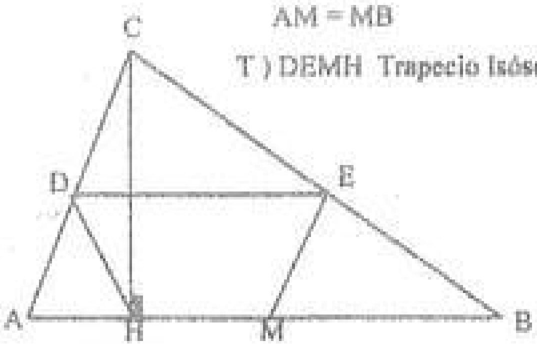
180.- H) ABCD Trapecio Isósceles
BC = 10.

T) PQ = ? Resp. 9.60 u.



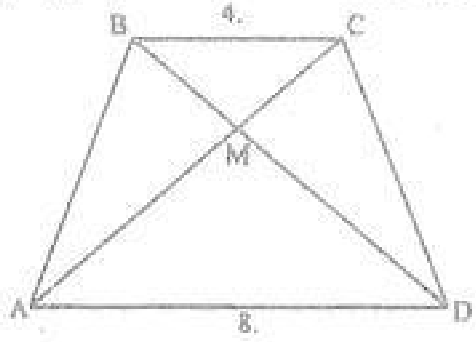
181.- H) AD = DC
CE = EB
AM = MB

T) DEMH Trapecio Isósceles



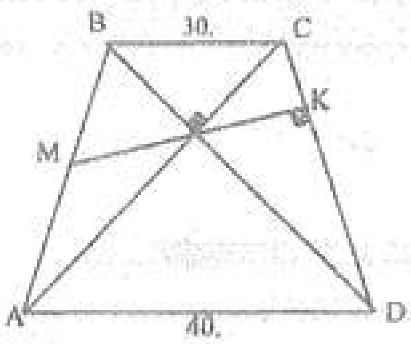
182.- H) ABCD Trapecio Isósceles Circunscriptible

T) MC = ? Resp. 2.748 u.



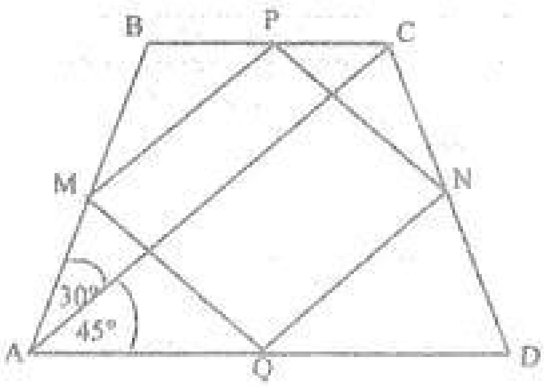
183.- H) ABCD Trapecio Isósceles

T) MK = ? Resp. 34.65 u.



184.- H) ABCD Trapecio Isósceles

T) MPNQ Cuadrado



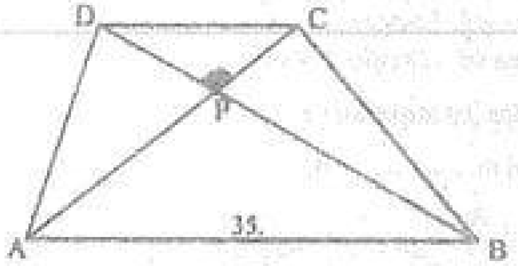
185.- Calcular las longitudes de los lados de un trapecio isósceles circunscrito a un círculo siendo, la diagonal $d = 2\sqrt{17}$ u. y el área $S = 24\sqrt{2}\ u^2$ Resp. 6 u.; 6 u.; 4 u.; 8 u.

186.- Demostrar que en un trapecio isósceles el producto de las bases es igual a la diferencia de los cuadrados de una de las diagonales y el lado no paralelo.

187.- En un trapecio ABCD, la base mayor AB = 22 u. y la base menor es $\overline{CD}$, las diagonales son bisectrices de los ángulos $D\widehat{A}D$ y $A\widehat{B}C$. Si el área del trapecio es de 128 u^2 ; Calcular CD. Resp. 10 u.

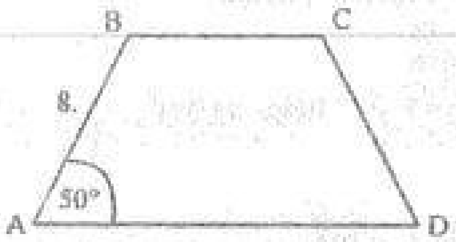
188.- H) ABCD Trapecio
AC = 30 u.
BD = 40 u.

T) $S_{\Delta DPC} = ?$ Resp. 54 u^2

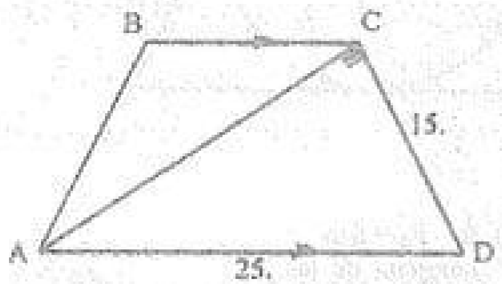


189.- H) ABCD Trapecio Isósceles Circunscriptible

T) $S_{ABCD} = ?$ Resp. 49.04 u^2

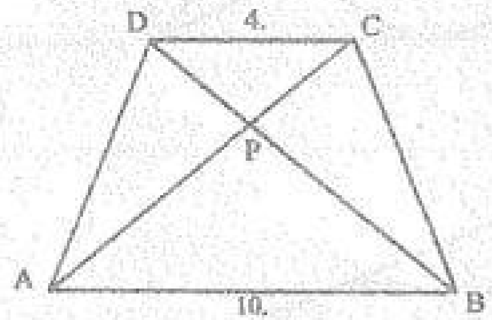


190.- T) $S_{ABCD} = ?$ Resp. 192 u^2



191.- H) ABCD Trapecio Inscriptible y Circunscriptible

T) $S_{\Delta DPC} = ?$ Resp. 3.6 u^2



192.-. El área de un trapecio isósceles circunscriptible es de 32.5 u^2 y los ángulos en la base miden 50°. Determinar las longitudes de sus lados. Resp. 6.59 u.; 2.33 u.; 10.68 u.

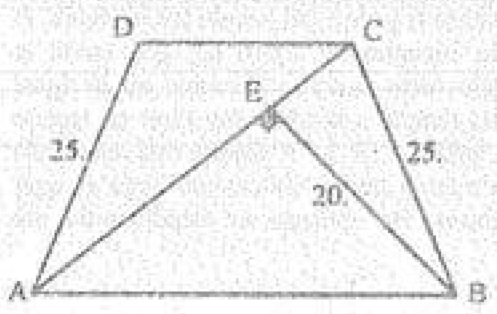
193.-. En un trapecio los lados no paralelos y la base menor tiene la misma longitud, si el área es 503.38 u^2 y el ángulo obtuso 130°. Calcular el lado menor. Resp. 20.31 u

194.- En un trapecio isósceles ABCD está circunscrito a un círculo. Si uno de sus ángulos internos en la base mayor es de 60° y el perímetro de dicho trapecio es 27.71 u. Calcular el radio del círculo. Resp. 3 u.

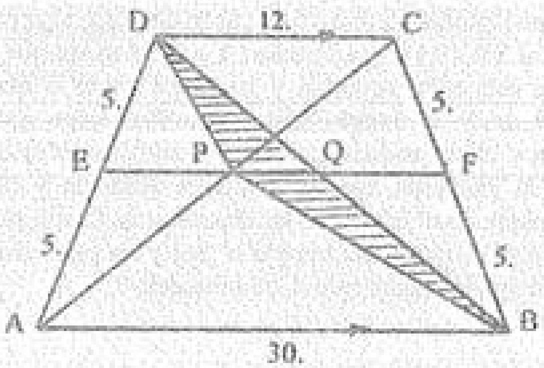
195.- Hallar el área de un trapecio isósceles, si su altura es igual a 10 u. y su lado lateral se ve desde el centro del círculo circunscrito bajo el ángulo 60° Resp. 173 u^2

196.- H) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$
AC = 40 m.

T) $S_{ABCD} = ?$ Resp. 760 m^2



197.- T) $S_{[illegible]} = ?$ Resp. 19.6 u^2



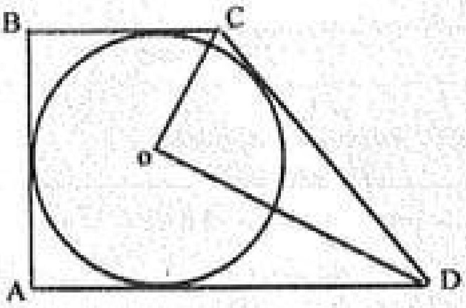
198.- En un trapecio isósceles, las bases se diferencian en 2 m. el lado es 2 m. mayor que la base menor y la altura del trapecio es el doble de la base menor. Calcular el área del trapecio. Resp. 10.72 m^2

199.- El área de un trapecio isósceles circunscrito a un circulo es igual a 32. Determinar la longitud del lado del trapecio, sabiendo que el ángulo de la base es igual a $\pi/6$. Resp. 8 u

200.-. A un circulo de radio r se circunscribe un trapecio rectángulo cuyo lado menor es $3r/2$. Hallar el área del trapecio. Resp. $9r^2/2$

201.- H) ABCD Trapecio Rectángulo
OC = 2 m.
OD = 4 m.

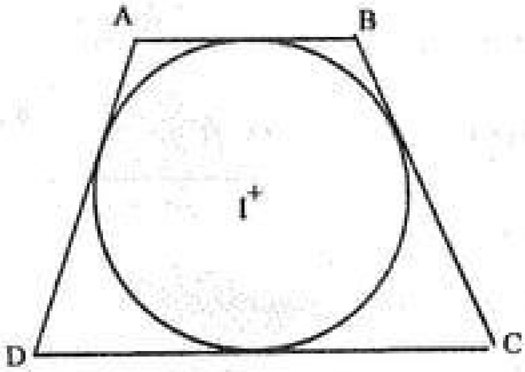
T) S_{ABCD} = ? Resp. 14.4 m^2



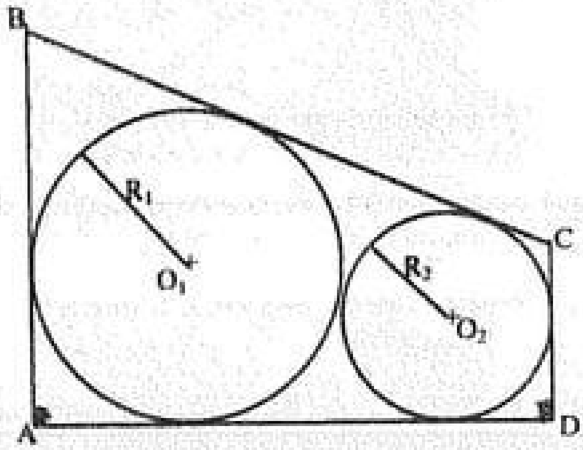
202.- H) ABCD Trapecio Isósceles
Área del Trapecio 20 m^2
Área del Círculo π 4 m^2

T) Lados del trapecio = ?

Resp. 8 m. ; 2 m. ; 5 m.



203.-



H) $R_1 - R_2 = 6$ m.
Longitud de las dos circunferencias 62.8 m.

T) S_{ABCD} = ? Resp. 596.3 m.

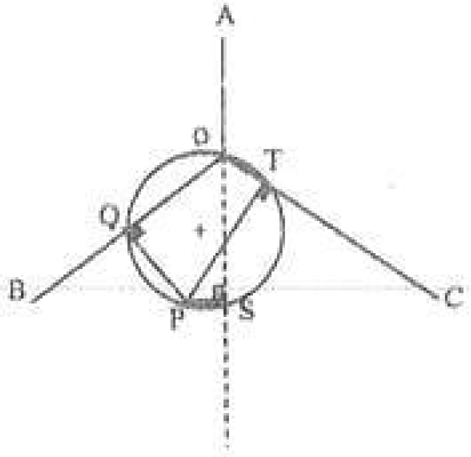
204.- La superficie del trapecio ABCD inscriptible y circunscriptible es 97.9 u^2, su base menor es 8 u. Calcular su base mayor. Resp. 12 u.

205.- Un trapecio isósceles con los ángulos de la base iguales a 60° tienen tal forma que se puede inscribirle dos circulos tangentes un o a otro, cada uno de los cuales en tangente a su vez a las bases del trapecio y a uno de sus lados laterales. El lado lateral de trapecio es igual a 2 m. Hallar el área del trapecio. Resp. 6.46 m^2

206.- Se dice que Rumiñahui enterró el tesoro de Atahualpa en cierto lugar en que existen: una Pirámide (P), un Templo al Sol (S) y una Tumba (T) de tal modo que mirando desde la puerta del templo hacia afuera, la pirámide está a la izquierda y la tumba hacia la derecha. Para encontrar el tesoro hay que medir la distancia desde el templo hasta la tumba, luego girar el ángulo recto hacia la derecha, medir igual distancia y clavar una estaca (A). Luego medir la distancia del templo a la pirámide, girar en ángulo recto a la izquierda, medir la misma distancia y clavar otra estaca (B). El tesoro está enterrado precisamente en el centro de las dos estacas. Cierta persona, tenía estos datos, más cuando llegó al lugar no encontró ni rastro del templo al Sol y no pudo dar con el tesoro. Sin embargo, un estudioso de este libro, bien pudo encontrarlo. Como hacerlo ?.

6.14.19.1.- EJERCICIOS RESUELTOS

7.-



Los cuadriláteros PQOT y PQOS son Inscriptibles, y

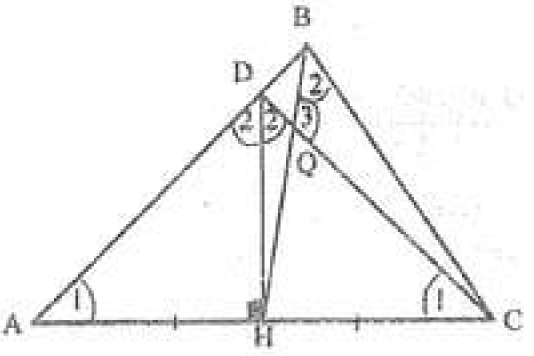
Δ QTS Equilátero

$PT \times QS = QP \times TS + QT \times PS$

$PT = QP + PS$

$\therefore \; QP = PT - PS$

25.-



Δ ADC Isósceles

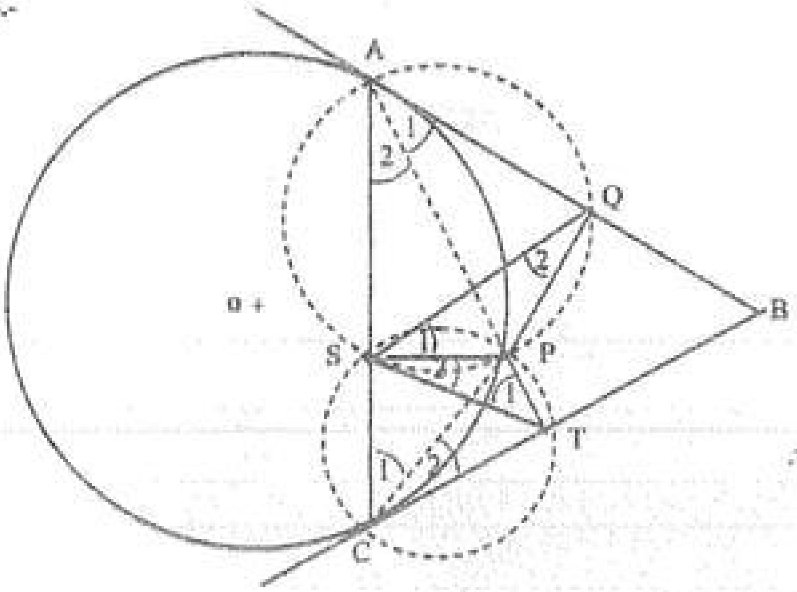
$\Delta HDQ \approx \Delta QBC$ (2 y 3)

$\dfrac{DQ}{QB} = \dfrac{QH}{QC} = \dfrac{DH}{BC}$

$DQ \times QC = QB \times QH$

$\therefore$ DHCB Inscriptible

26.-



Los cuadriláteros ASPQ y CSPT son Inscriptibles

$\therefore \; \Delta PSQ \approx \Delta SPT$ (1 y 2)

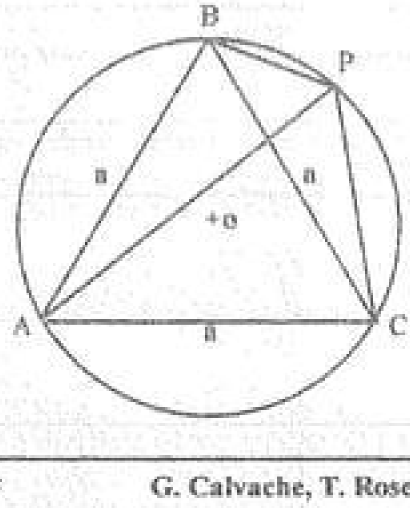
37.-

Δ ABC Equilátero

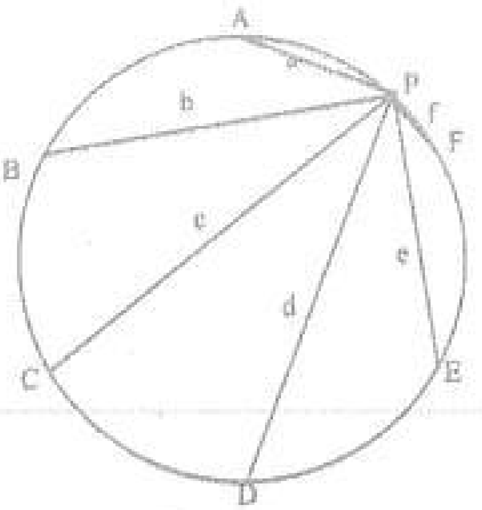
ABPC Cuadrilátero Inscrito

$AP \times a = PB \times a + PC \times a$

$\therefore \; AP = PB + PC$



43.-



Δ AEC Equilátero

$AE \times c = AC \times e + CE \times a$

$\therefore\ c = e + a \qquad (1)$

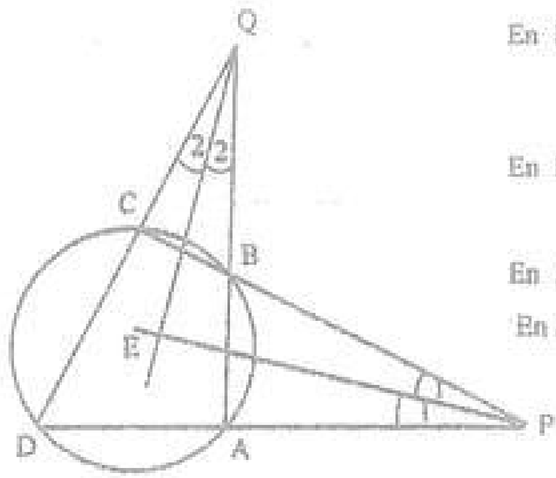
Δ BDF Equilátero

$BF \times d = BD \times f + DF \times b$

$\therefore\ d = b + f \qquad (2)$

$\Rightarrow\ d + c = b + f + e + a \qquad (1) + (2)$

46.-



En DQBP : $\hat{E} = \dfrac{(D + B)}{2}$

$\hat{E} = \dfrac{180°}{2} = 90°$

En DQEP : $90° = 21° + \hat{D} + 18°$

$\therefore\ \hat{D} = 51°$

En ABCD : $\hat{D} + \hat{B} = 180° \Rightarrow \hat{B} = 129°$

En Δ DCP : $\hat{C} = 180° - 36° - 51° = 93°$

$\hat{A} + \hat{C} = 180 \Rightarrow \hat{A} = 87°$

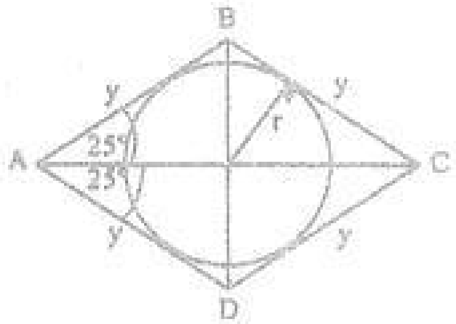
77.-

$S = 100 = y^2$ Sen $50°$

$y = 11.43$ cm.

$S = 100 = 2 \times 11.43 \times r$

$\therefore\ r = 4.37$ cm.



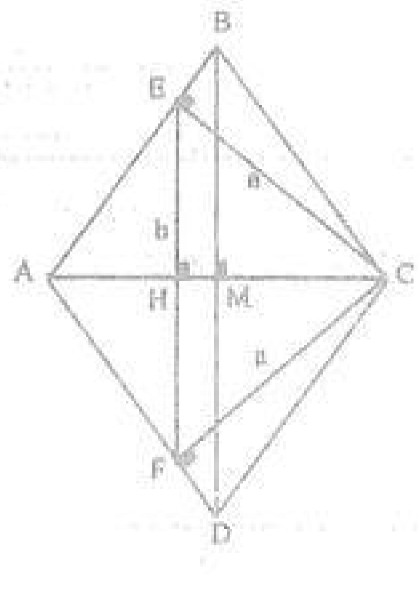
87.- $HC = \sqrt{a^2 - \dfrac{b^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}$

$a^2 = AC\,\dfrac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}$

$AC = \dfrac{2a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}$

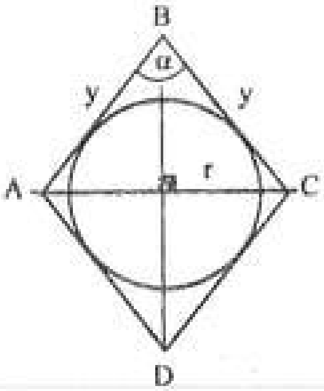
$AH = \dfrac{2a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}} - \dfrac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2} = \dfrac{b^2}{2\sqrt{4a^2 - b^2}}$

$\dfrac{BM}{EH} = \dfrac{AM}{AH} \Rightarrow \dfrac{BM}{b/2} = \dfrac{2a^2\sqrt{4a^2 - b^2}}{b^2\sqrt{4a^2 - b^2}}$



$BM = a^2/b$ y $BD = 2a^2/b \quad \therefore \quad S = \dfrac{BD \times AC}{2} = \dfrac{2a^4}{b\sqrt{4a^2 - b^2}}$

98.-



$Q = 2 \times y \times r = y^2 \times \text{Sen}\,\alpha$

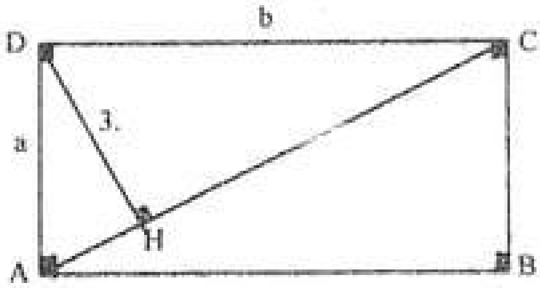
$y = 2r / \text{Sen}\,\alpha$

$S = \pi \times r^2$

$Q = 2(2r) / \text{Sen}\,\alpha$

$\therefore\ \text{Sen}\,\alpha = 4S / \pi Q$

106.-



$AC \times 3 = a \times b = S$

$a + b = 50$

$\therefore\ a^2 + 2ab + b^2 = 2500$

$AC^2 + 2S = 2500$

$S^2/9 + 2S = 2500$

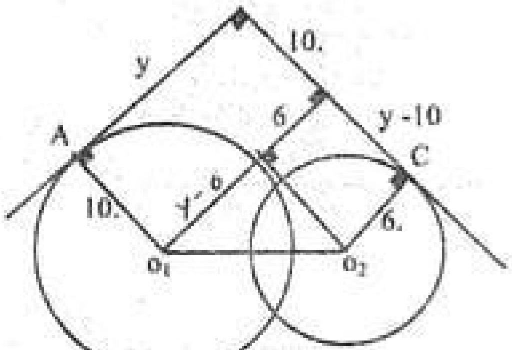
$\Rightarrow\ S = 141.27\ u^2$

119.- $144 = (y-6)^2 + (y-10)^2$

$\therefore\ y = 16.25$

$P = 16.25 + 16.25 + 6 + 12 + 10$

$\therefore\ P = 60.5\ u.$



127.-

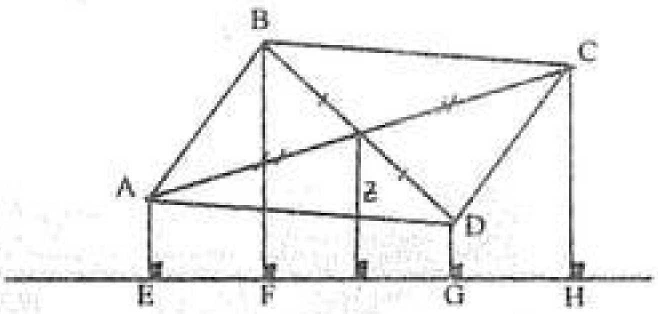
AEHC Trapecio

$Z = \dfrac{(AE + CH)}{2}$ (1)

BFGD Trapecio

$Z = \dfrac{(BF + DG)}{2}$ (2)

$\Rightarrow AE + CH = BF + DG$ (1) = (2)



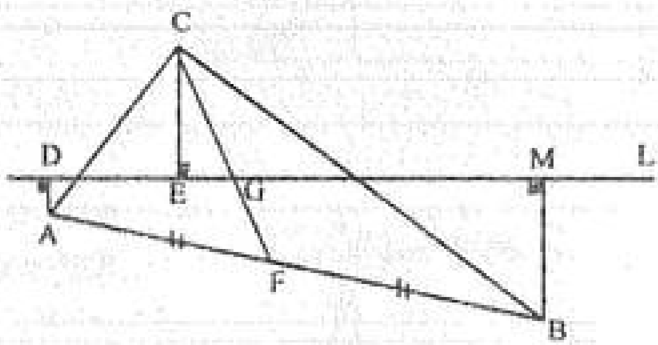
141.-

ADMB Trapecio

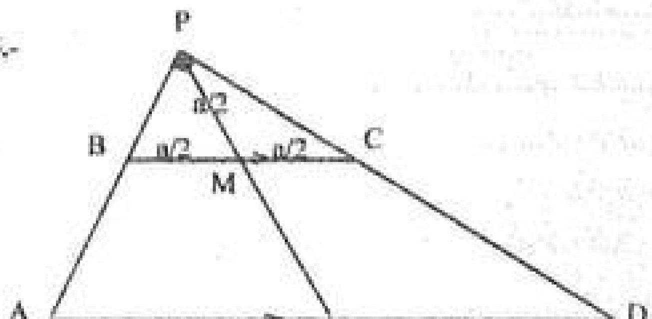
$FQ = \dfrac{(AD + BM)}{2}$ (1)

$FQ = \dfrac{CE}{2}$ (2)

$\Rightarrow CE = AD + BM$ (1) = (2)



145.-



$MN = PN - PM$

$MN = \dfrac{b}{2} - \dfrac{a}{2} = \dfrac{b-a}{2}$

148.-. $EQ = PF = AB/2 = 8.5$

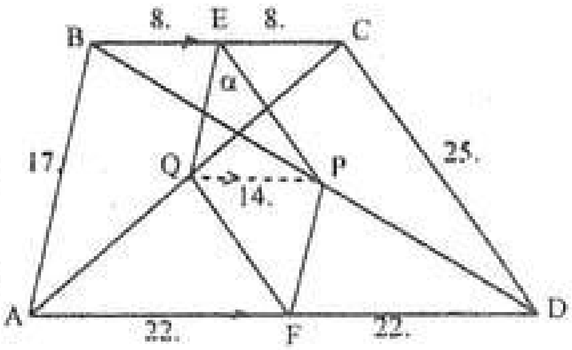
$PE = QF = CD/2 = 12.5$

$QP = (AD - BC)/2 = (44 - 16)/2 = 14$

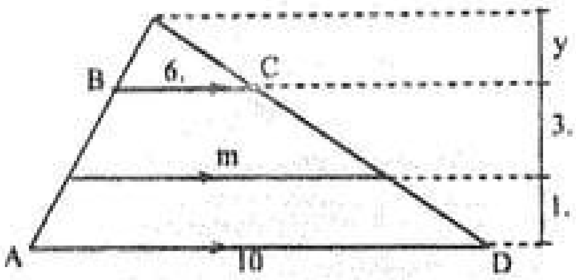
ΔEQP : $14^2 = 8.5^2 + 12.5^2 - 2(8.5)(12.5)\cos\alpha$

$\therefore\ \alpha = 81.20°$

$\Rightarrow S = 2\,S_{\Delta QEP} = (8.5)(12.5)\ \text{Sen}\ 81.20° = 105\ m^2$



153.-



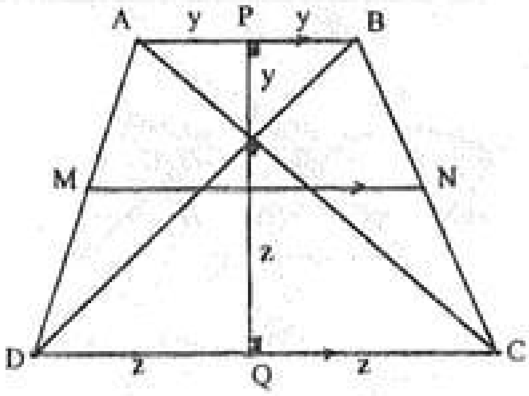
$$\frac{10}{6} = \frac{(4+y)}{y}$$

$\therefore\ y = 6$

$$\frac{m}{6} = \frac{9}{6}$$

$\therefore\ m = 9$

165.-

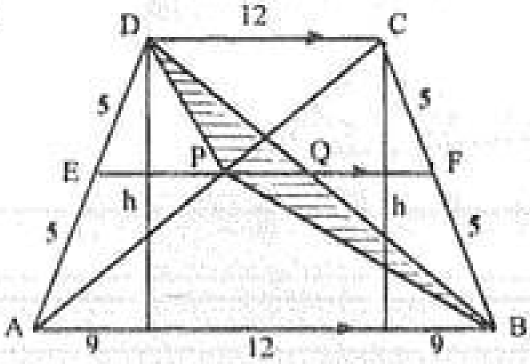


$S = MN \times PQ$

$$MN = 10 = \frac{(2y + 2z)}{2} = y + z = PQ$$

$\therefore\ S = 100\ u^2$

197.-



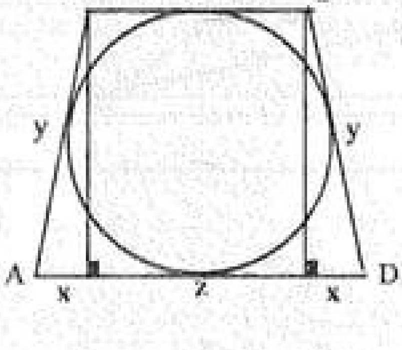
$h = \sqrt{10^2 - 9^2}$

$h = 4.36$

$$PQ = \frac{(30 - 12)}{2} = 9$$

$$\therefore\ S = \frac{PQ \cdot h}{2} = 19{,}62\ m^2$$

202.-



$BC + AD = 2y = p$

$S == p \times r = 20 = 2y \times 2$

$\therefore\ y = 5$

$x = \sqrt{y^2 - 4^2} = 3$

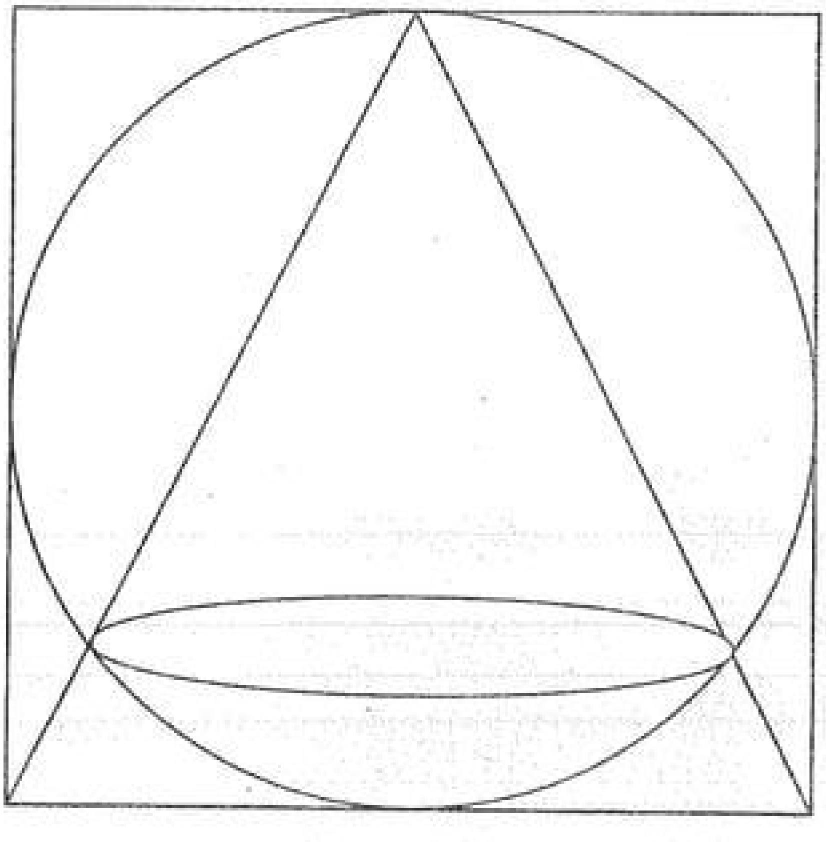
$2y = 2z + 2x$

$\therefore\ z = 2$

$\Rightarrow AD = 2x + z = 8$

GEOMETRIA
ANALITICA

EJERCICIOS PROPUESTOS

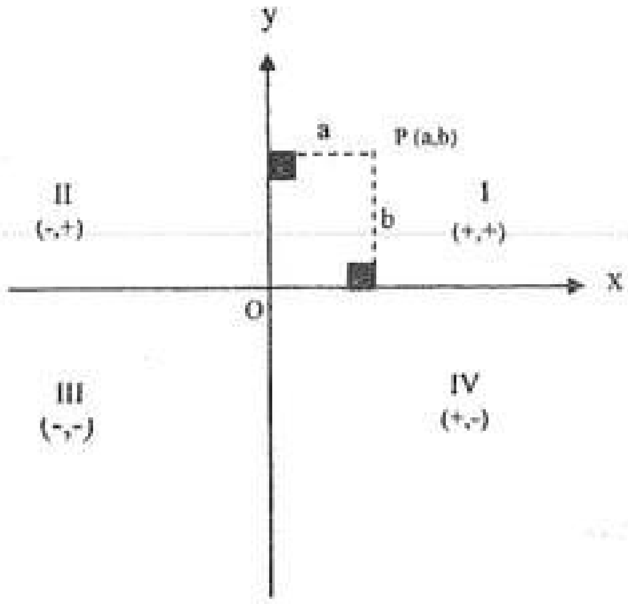


G. CALVACHE
T. ROSERO
M. YACELGA

CONTENIDOS

RECTA

SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES

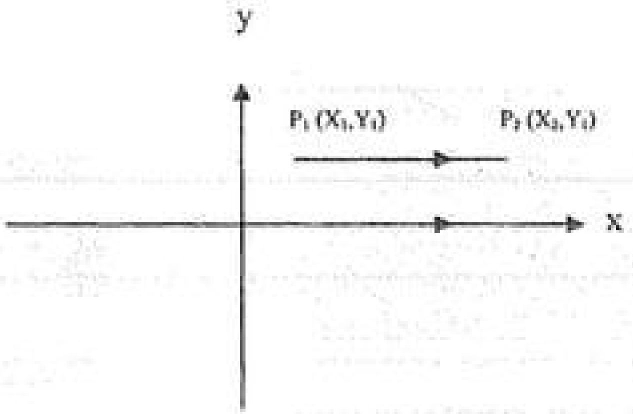


ELEMENTOS DE LOS EJES DE COORDENADAS:

Eje X ; Eje de las abscisas
Eje Y; Eje de las ordenadas
Coordenada o abscisa de P = a
Coordenada u ordenada de P = b
Origen: O
Cuadrantes: I, II, III, IV

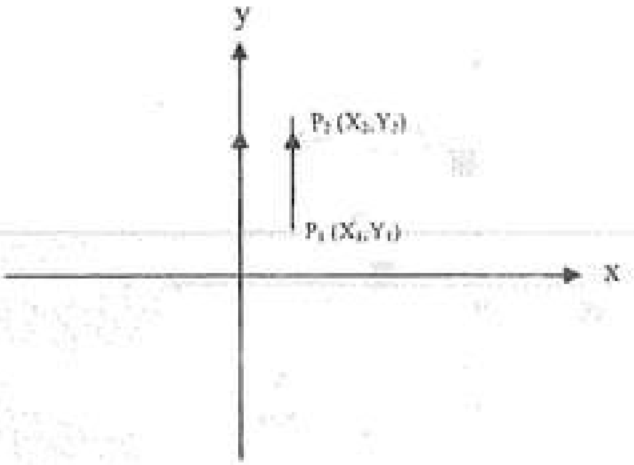
DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS- LONGITUD DE UN SEGMENTO

a) SEGMENTO HORIZONTAL



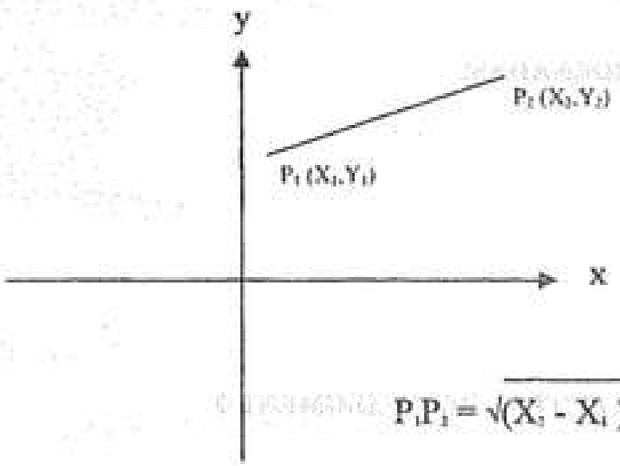
$$P_1P_2 = X_2 - X_1$$

b) SEGMENTO VERTICAL



$$P_1P_2 = Y_2 - Y_1$$

c) SEGMENTO OBLICUO



$$P_1P_2 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

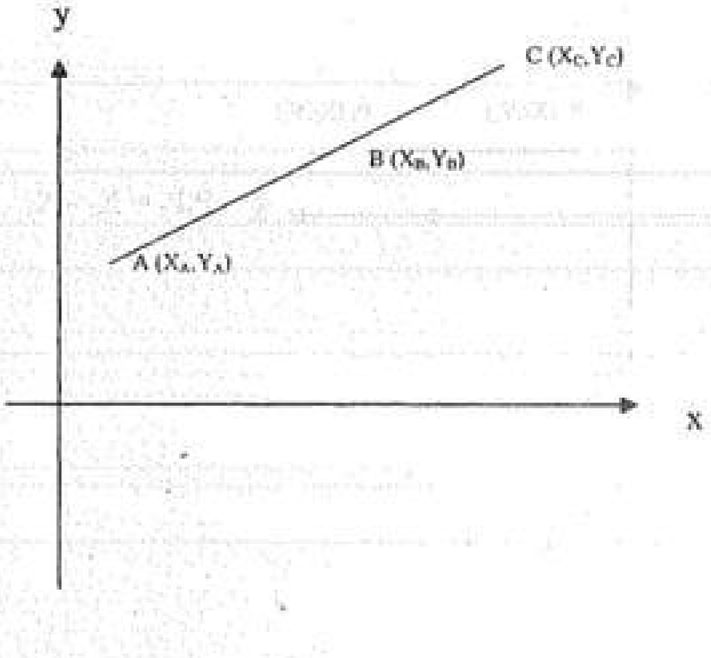
DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA (r).-

$\overline{AC}$ por B

$$\frac{AB}{BC} = r$$

$$\frac{X_B - X_A}{X_C - X_B} = r$$

$$\frac{Y_B - Y_A}{Y_C - Y_B} = r$$



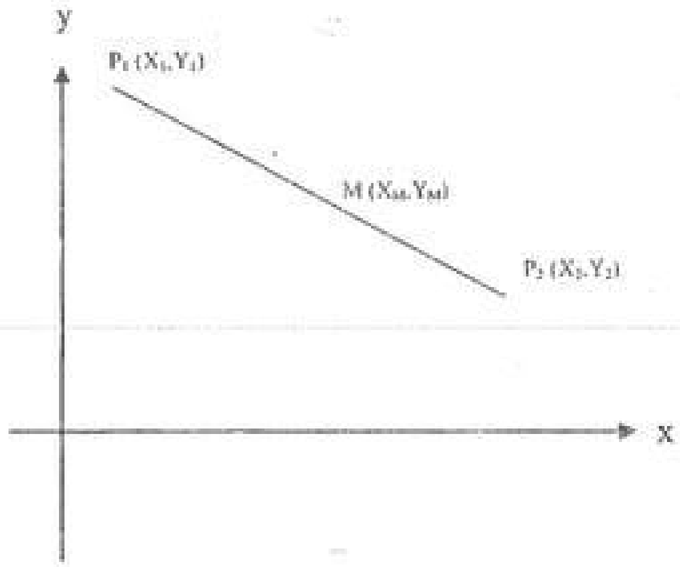
$\overline{AB}$ por C

$$\frac{AC}{CB} = -r$$

$$\frac{X_C - X_A}{X_B - X_C} = -r$$

$$\frac{Y_C - Y_A}{Y_B - Y_C} = -r$$

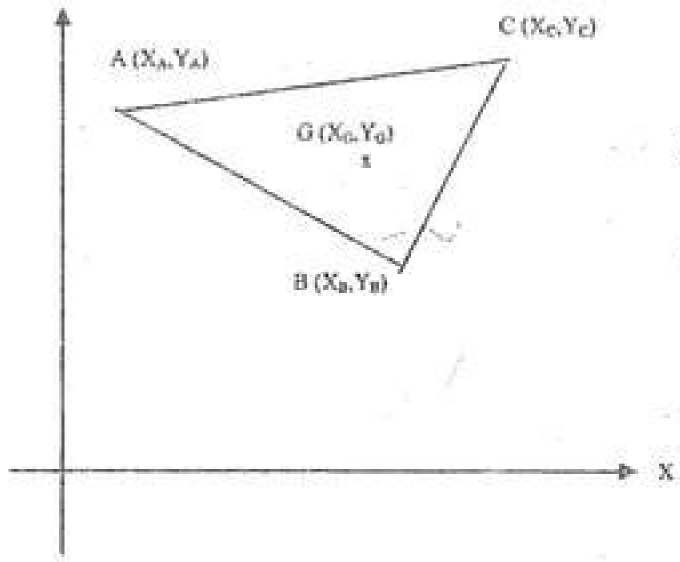
PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO



$$X_M = \frac{X_1 + X_2}{2}$$

$$Y_M = \frac{Y_1 + Y_2}{2}$$

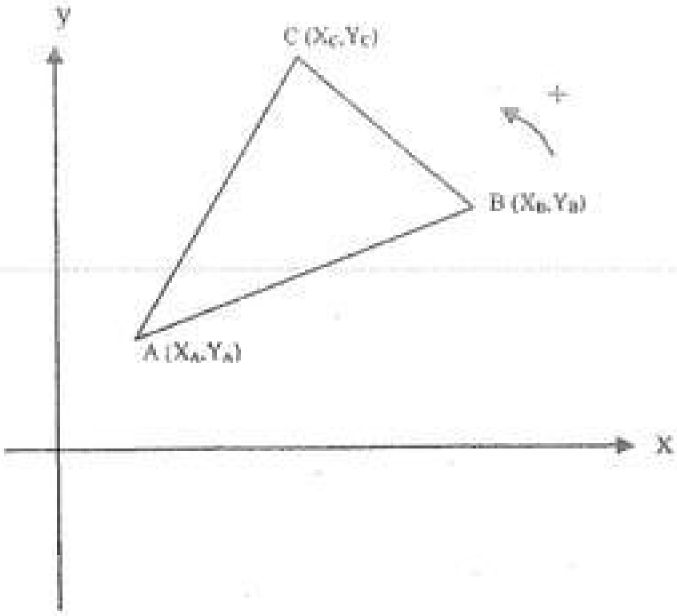
BARICENTRO DE UN TRIÁNGULO



$$X_G = \frac{X_A + X_B + X_C}{3}$$

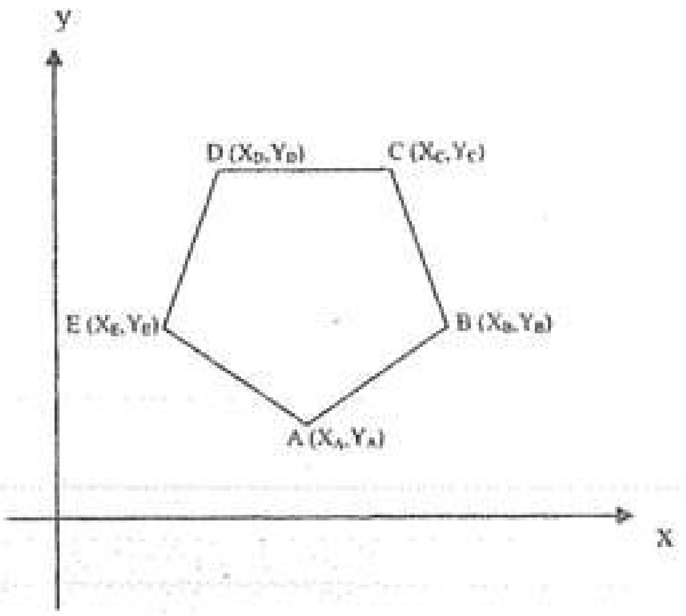
$$Y_G = \frac{Y_A + Y_B + Y_C}{3}$$

ÁREA DE UN TRIÁNGULO



$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} X_A & Y_A \\ X_B & Y_B \\ X_C & Y_C \\ X_A & Y_A \end{vmatrix}$$

ÁREA DE UN POLÍGONO CONVEXO



$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} X_A & Y_A \\ X_B & Y_B \\ X_C & Y_C \\ X_D & Y_D \\ X_E & Y_E \\ X_A & Y_A \end{vmatrix}$$

EJERCICIOS

1. Demostrar que los puntos A (7; 5); B (3; 1); C (-1; -3) son colineales.

2. H) A (7; 8)
B (3; -1)
C (-1; -6)
T) A, B, C, colineales

3. H) ABCD cuadrado
A (6; 8)
C (7; -1)
T) B =?
D =?
S_T =?
Resp. (2; 3); (11; 4)
Resp. (11; 4); (2; 3)
Resp. 41 μ^2

4. H) ABCD cuadrado
A (6; 8)
B (2; 3)
T) C =?
D =?
S_T =?
Resp. (7; -1); (-3; 7)
Resp. (1; 12); (11; 4)
Resp. 41 μ^2

5. H) Δ ABC equilátero
A (-2; 6)
B (4; 1)
T) C =?
S =?
Resp. (-3,33; -1,7); (5,33; 8,7)
Resp. 26,35 μ^2

6. H) P ∈ X
Q (6; 7)
PQ = 9 u
T) P = ?
Resp. (11,65; 0); (0,34; 0)

7. H) P ∈ Y
Q (-3; -7)
PQ = 9 u
T) P =?
Resp. (0; 1,49); (0; -15,49)

8. H) Δ ABC
AB = BC
A (-3; 5)
B (4; -7)
C ∈ Y
T) C =?
Resp. (0; 6,30); (0; -20,31)

9. H) < A = 90°
AB = AC
B (-4; -3)
C (5; 2)
T) A = ?
Resp. (-2; 4); (3; -5)

10. H) ABCD paralelogramo
A (-2; 8)
B (-6; 4)
C (4; -3)
T) D =?
S =?
Resp. (8; 1)
Resp. 68 μ^2

11. H) ABCD paralelogramo
A (6; 3)
B (-2; 1)
AC ∩ BD = P (3; 2)
T) C =?
D =?
Resp. (0; 1)
Resp. (8; 3)

12. H) ABCD Rombo
A (6; 2)
C (10; -4)
BC = 8
T) B =?
D =?
Resp. (2,06; -4,96)
Resp. (13,94; -2,96)

13. H) ABCD Rombo
B (4; 5)
AC ∩ BD = P (-1; -2)
$S_T = 8$
T) A =?
D =?
Resp. ($\pm$ 1,38, $\pm$ 1,38)
Resp. (-6; -9)

14. H) ABCD rectángulo
A (-2; -4)
AC ∩ BD = P (2; 1)
CD = 4

T)
C =? Resp. (6; 6)
D =? Resp. (2,24; 7,41)

15. H) A (6; 0)
B (0; 3)
$\frac{AB}{BP} = -2$
P ∈ AB

T) P =? Resp. (3; 3/2)

16. H) A (10; 0)
P (-3; -6)
$\frac{AB}{BP} = \frac{5}{3}$

T) B =? Resp. (15/8 ; -15/4)

17. H) A (10; -8)
B (8; 8)
AP = PQ = QB

T) P =? Resp. (-4; -8/3)
Q =? Resp. (2; 8/3)

18. H) $\overline{APQB}$
P (-3; 4) Q(2;-5)
AP = PQ = QB

T) B =? Resp. (7; -14)
A =? Resp. (-8; 13)

19. H) APQB
A (10; 2)
B (2; 14)
C (-4; 1)
AP = PB = PC

T) P =? Resp. (2,69; 5,8)

20. H) A (2; 6)
B (-4; -2)
C (-2; 8)

T) Longitud bisectriz interna de A Resp. 4,73

21. H) Δ ABC
AB = BC
A (2; -4)
B (-5; 1)
Baricentro ∈ Y

T) C =? Resp. (3; -2,16); (3; 4,16)
G =? Resp. (0; -1,72), (0; 0,39)

22. H) Δ ABC
Baricentro G ∈ X
A ∈ Y
B (-4; -3)
C (1; 4)

T) A =? Resp. (0; -1)
G =? Resp. (-1; 0)

23. H) Δ ABC
A (4; -7)
B (8; 3)
C (-2; 5)

T) ha =? Resp. 10,6 u

24. H) A (-6; 5)
B (8; 3)
C ∈ Y
S Δ ABC = 10 μ^2

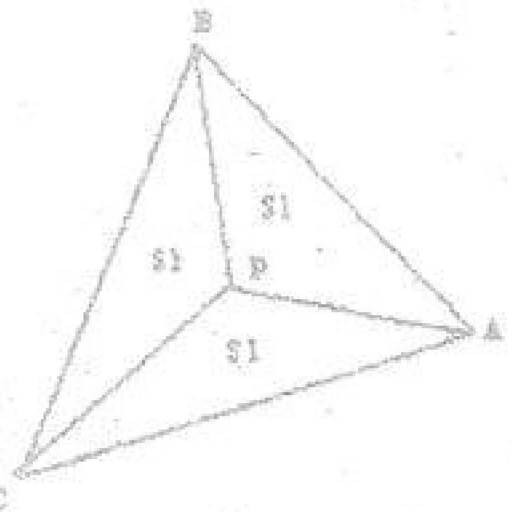
T) C =? Resp. (0; 2,71)

25. H) ABCD Paralelogramo T) C =? Resp. (4; -4)
A (6; 4) D =? Resp. (17; -2)
B (-7; 2)
$AC \cap BD = P \in X$
$S\ ABCD = 100\ \mu^2$

26. H) ABCD Rectángulo T) Centro de Gravedad del Δ CDP =?
A (6; -4)
B (2; -2)
$S\ ABCD = 8\ \mu^2$ Resp. (14/3; -5/3)
$AC \cap BD = P$

27. H) ABCD Rectángulo T) Centro de Gravedad del Δ BDC = ?
B (5; -9) A (-1; 5)
$S\ ABCD = 90\ \mu^2$ Resp. (1,41, [illegible])

28.



H) A (6 ; 2)
B (-1; 8)
C (-8;-4)
T) P =?

Resp. (-1; 2)

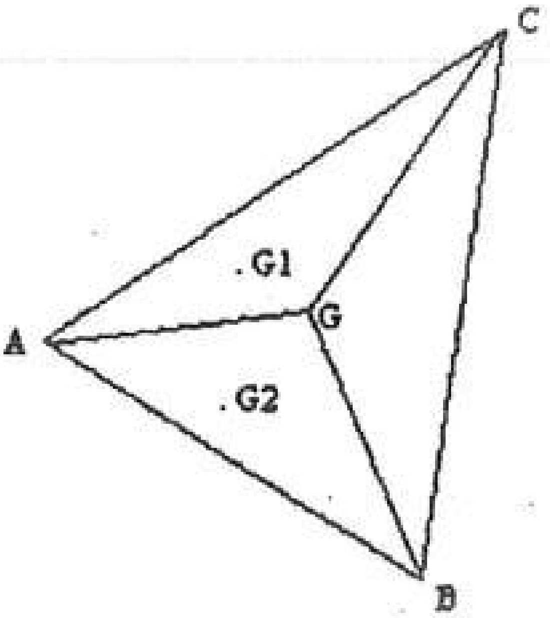
29. H) A (7; 4) T) S ABCDE = ? Resp. $78\ \mu^2$
B (3; 6)
C (-4; 3)
D (-3; -3)
E (6; -3)

30. H) A (2; 2) T) S polígono = ? Resp. $78\ \mu^2$
B (-8; 0)
C (2; -2)
D (-5; 6)
E (-6; 4)
F (-2; 4)
G (0; -8)

31. H) A (19/2; 8)
B (-9/2; 16)
C (-20/3; -4/3)
D (12; -12)

T) ABCD Circunscriptible

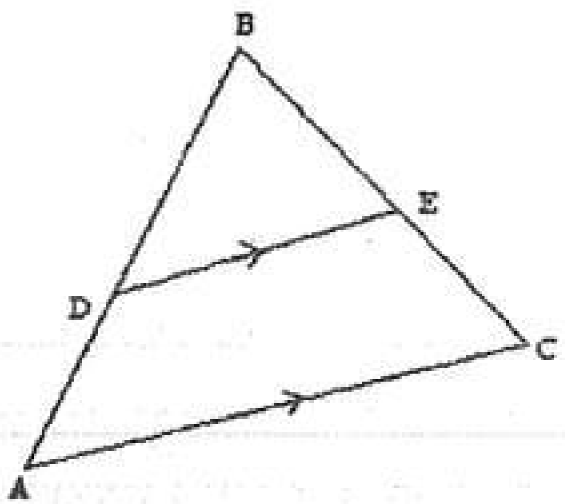
32.



H) G1 Baricentro Δ AGC
G2 Baricentro Δ AGB
G1 (4; 6)
G2 (3; -1)
G (2; 3)

T) A =? Resp. (11; 0)
C =? Resp. (-1 ; 15)
B =? Resp. (-4 ; -6)

33.



H) A (-4; -3)
B (6; 12)
C (8; 0)
D ∈ eje Y

T) E =? Resp. (36/5; 24/5)

34. H) Δ ABC
AB = BC
A (-2; 4)
B (3; 5)
G ∈ X

T) C =?

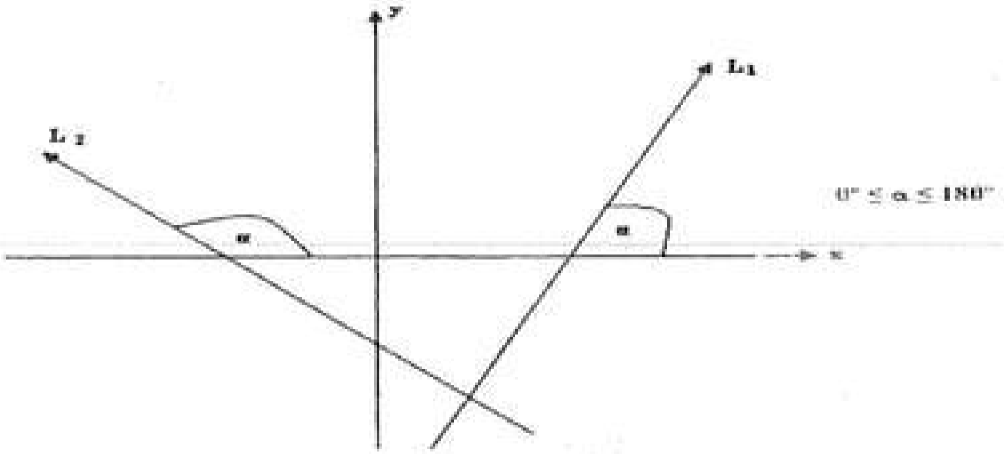
Resp. (12,49; 1) ; (-6,49 ; 1)

35. H) Δ ABC
A ∈ X
G ∈ Y
B (-4; -3)
C (1; 4)

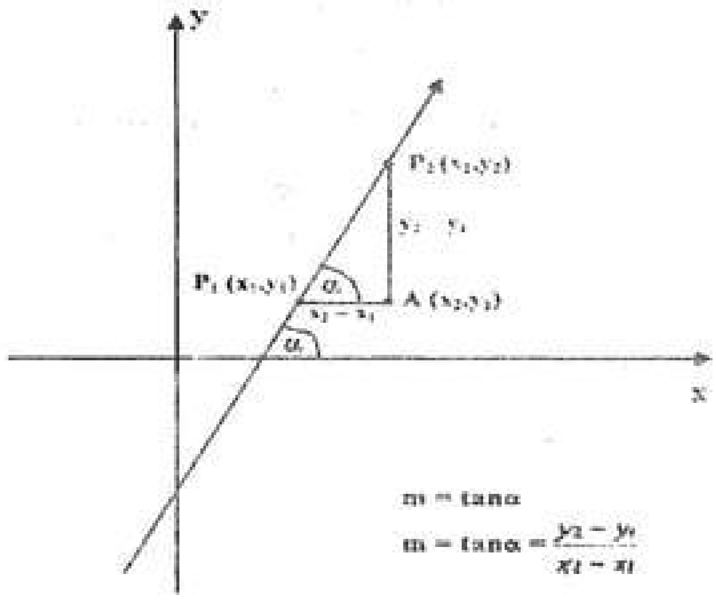
T) A =? Resp. (3; 0)
G =? Resp. (0; 1/3)

LA RECTA

ANGULO DE INCLINACION



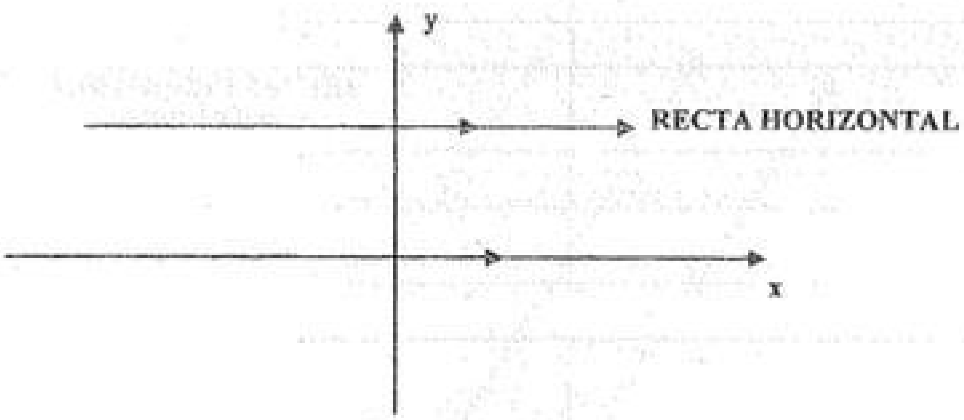
PENDIENTE DE UNA RECTA O COEFICIENTE ANGULAR



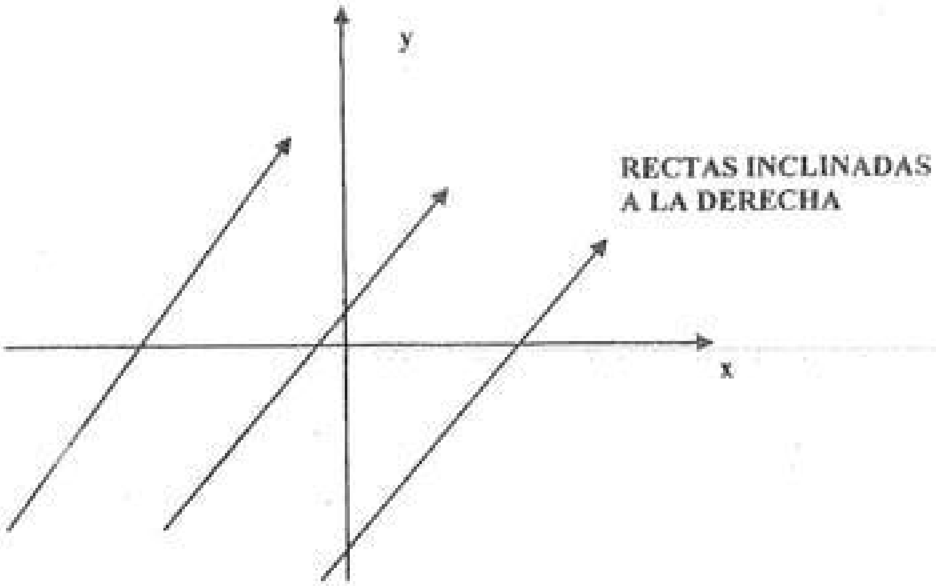
$m = \tan\alpha$

$m = \tan\alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

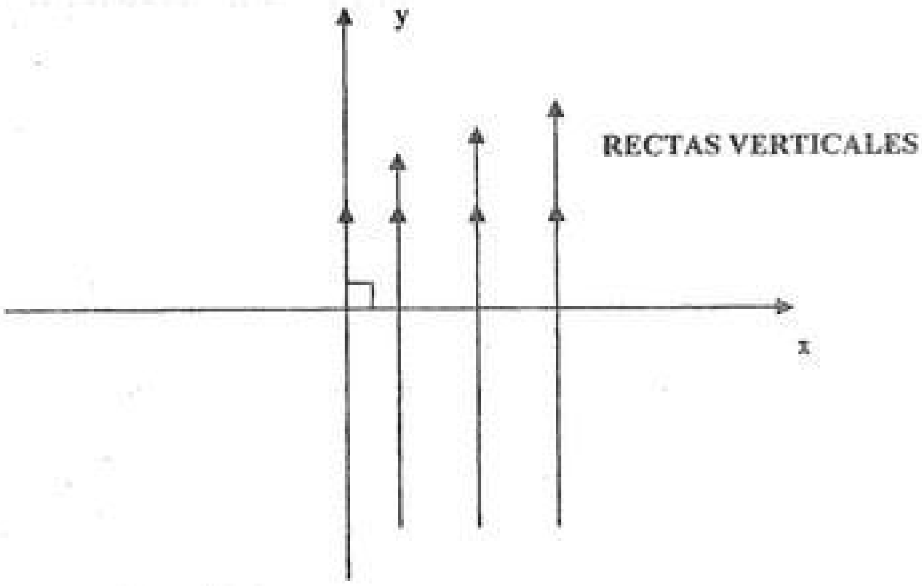
- Si $\alpha = 0$; $m = 0$:



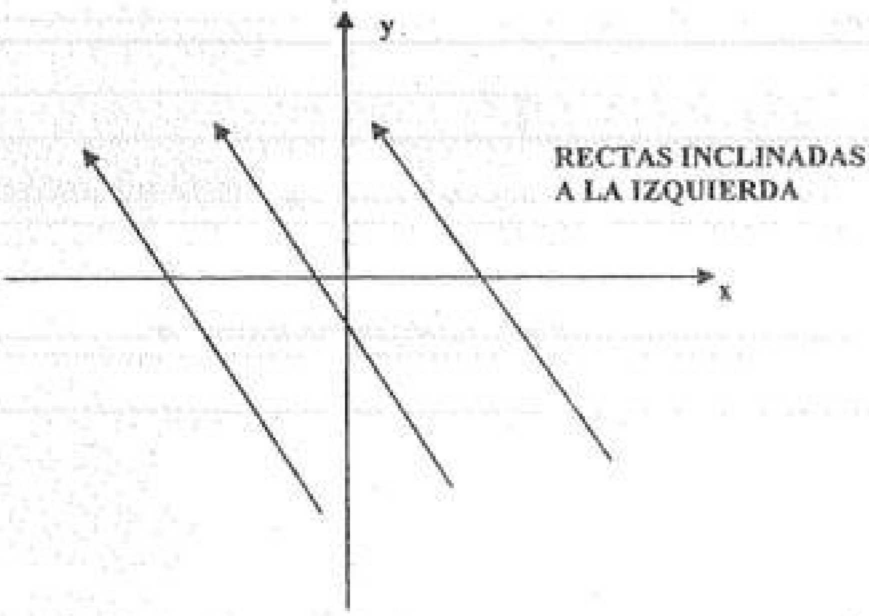
- Si $0° < \alpha < 90°$; m es positiva:



- Si $\alpha = 90°$; m no se puede determinar:

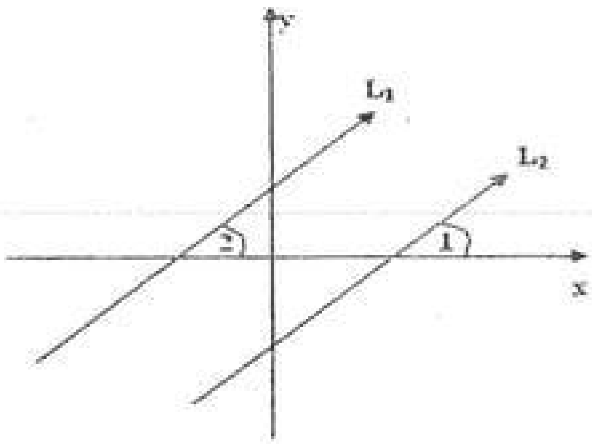


- Si $90° < \alpha < 180°$; m es negativa:



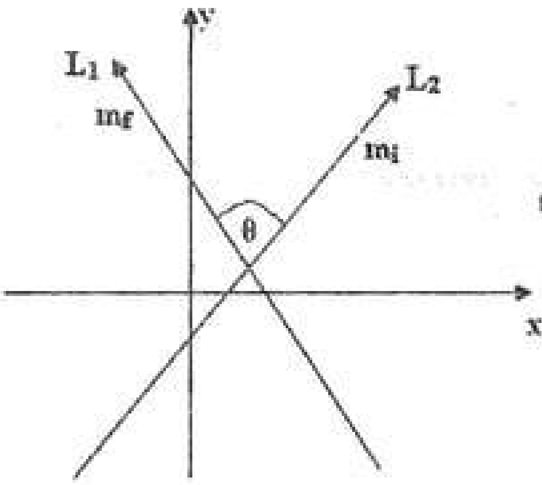
POSICION RELATIVA DE DOS RECTAS

1. PARALELAS:



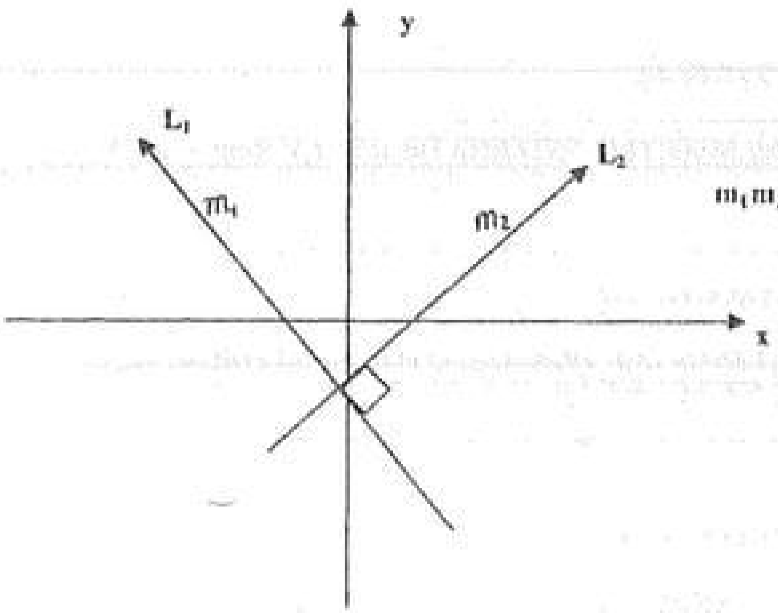
$m_1 = m_2$

2. SECANTES:



$$\tan\theta = \frac{m_f - m_i}{1 - m_i m_f}$$

3. PERPENDICULARES



$m_1 m_2 = -1$

EJERCICIOS

1. H) ABCD CUADRILÁTERO
A (-1; 12), B (13; 13), C (7; -8), D (-3; -5)
E, F, G, H PUNTOS MEDIOS DE LOS LADOS
T) S_{EFGH} =? ; EFGH PARALELOGRAMO. Resp. = $116\ \mu^2$

2. H) A (-5; 7), B (-6; 2), C (-2; -4), D (10; 2)
T) ABCD INSCRIPTIBLE

3. H) Δ ABC
A (-7; 8), B (5; 10), C (1; -14)

T) ANGULO DE INCLINACION DE BC, ANGULO ENTRE hc y ha? Resp. 80,54°; 71.07°; 108.93°

4. H) Δ ABC
A (4; 8), B (-6; 2), C (2; -5)

T) ANGULO ENTRE ha y mb? Resp. 52°

5. H) Δ ABC
A (-3; -7), B (-8; -2), C (2; 5)

T) ANGULO ENTRE mc y Va (interna)? Resp. 49.71°

6. H) Δ ABC
A (-3; -7), B (-8; -2), C (2; 5)

T) ANGULO ENTRE LA MEDIATRIZ DE AB Y BISECTRIZ EXTERNA DE C? Resp. 83,66°

7. H) Δ ABC
A (-6; 3), B (-1; 3), C (2; -6)

T) ANGULO ENTRE m_a y MEDIATRIZ DE AB? Resp. = 55.39

8. H) Δ ABC
A (-12; 3), B (7; 3), C (2;-6)

T) ANGULO ENTRE BISECTRIZ EXTERNA DE A Y h_b? Resp. = 16,35 °

9. H) Δ ABC
A (11; 10), B (-7; 6), C (1; -11)

T) ANGULOS INTERNOS DEL TRIANGULO FORMADO POR hb, ha, mc
Resp. 59.09 ; 53,36 ; 67.55

10. H) Δ ABC
A (10; 8), B (-4; 2), C (4; 12)

T) ANGULOS INTERNOS DEL TRIANGULO FORMADO POR h_c, V_A, MEDIATRIZ DE AC?
Resp. 61,60°; 61,62°; 56,78°.

LA RECTA

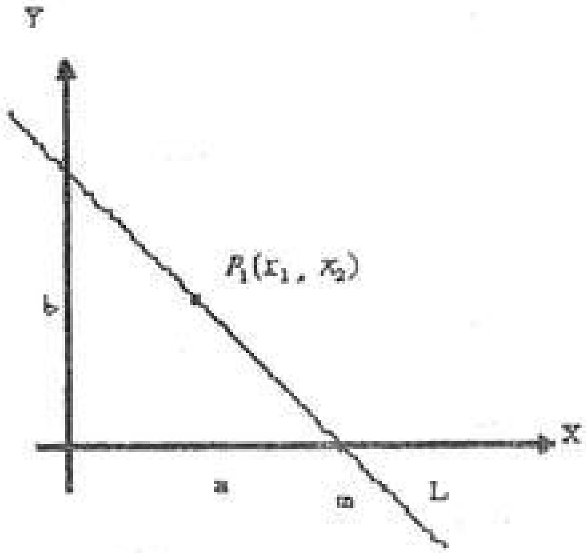
RECTA-ECUACIONES

-PUNTO-PENDIENTE.

$y - y_1 = m(x - x_1)$

-PENDIENTE ORDENADA EN EL ORIGEN

y = mx + b



-SIMETRICA

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

-GENERAL

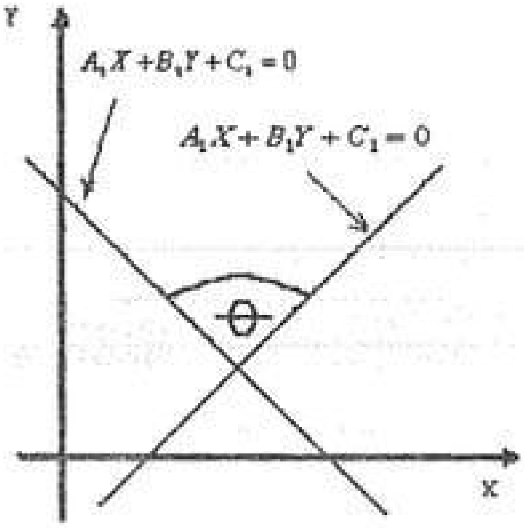
Ax + By + C = 0

$$m = -\frac{A}{B}$$

VERTICALES: $X + \frac{C}{A} = 0$

HORIZONTALES: $Y + \frac{C}{B} = 0$

PASAN POR EL ORIGEN: AX + BY = 0



ANGULO ENTRE DOS RECTAS: $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}$

RECTAS C0INCIDENTES: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = K$

EJERCICIOS

1. H) Triángulo ABC
   A (7; 3)
   B (8; -9)
   C (-4; -7)
   T) Ecuación de los lados

   Resp.
   10x–11y-37=0
   12x+y-87=0
   x+6y+46=0

2. H) Triangulo ABC
   A (2; 6)
   B (4; -4)
   C (6; -1)
   T) Ecuaciones de las alturas, Ortocentro

   Resp.
   2x+3y-22=0
   4x-7y-44=0
   x-5y-11=0
   H (11;0)

3. H) Triangulo ABC
   A (2; 9)
   B (-1; 0)
   C (14; 5)
   T) Ecuaciones de bisectrices, Incetro

   Resp.
   2x+y-13=0
   x-y+1=0
   y-5=0
   I (4; 5)

4. H) Triangulo ABC
   A (2; 2)
   B (-3; 0)
   C (16; -3)
   T) Ecuaciones de las medianas, baricentro

   Resp.
   7x+9y-32=0
   x+24y+3=0
   8x+33y-29=0
   G (5; -1/3)

5. H) Triangulo ABC
   A (8; 1)
   B (0; 5)
   C (3; 11)
   T) Ecuaciones, Bisectrices Externas, Excentro de B

   Resp.
   x-y-7=0
   y-11=0
   x-3y+15=0
   Ob (18; 11)

6. H) Triangulo ABC
   A (2; -3)
   C (-4; 5)
   L. 4x-7y-12=0
   S Δ ABC=9
   B C L
   T) Baricentro Δ ABC

   Resp.
   (1/10; 8/15)

7. H) Triangulo ABC
   AB=BC
   A (-3; -2)
   C (2; 5)
   SΔ ABC= 18,5
   $\frac{BE}{BC} = \frac{1}{2}$
   T) Ecuación de GE

   Resp.
   8x-11y+2=0
   13x-4y+31=0

8. H) Cuadrado ABCD
   A (-8; 3)
   B (3; 10)
   T) Ecuaciones de lados y diagonales

   Resp.
   7x-11y+89=0; 9x-2y-7=0
   7x-11y-81=0; 2x+9y-11=0
   11x+7y+67=0
   11x+7y-103=0

9. H) Cuadrado ABCD
A (-1; 3)
C (6; 2)

T) Ecuaciones de Lados y Diagonales

Resp.
$x+7y-20=0$
$3x-4y+15=0$
$4x+3y-5=0$
$4x+3y-30=0$
$7x-y-15=0$
$3x-4y-10=0$

10. H) A (6; -4)
Centro del cuadrado O (-2; -1)

T) Ecuaciones de lados y diagonales

Resp.
$5x-11y-74=0$
$5x-11y+72=0$
$11x+5y-46=0$
$11x+5y+100=0$
$8x-3y+13=0$
$3x+8y+14=0$

11. H) Cuadrado ABCD
Un lado: $3x+2y-6=0$
Centro del cuadrado: O (6; 4)

T) Ecuaciones de los lados y diagonales

Resp.
$x+5y-26=0$
$5x-y-26=0$
$3x+2y-46=0$
$2x-3y-20=0$
$2x-3y+20=0$

12. H) rectángulo ABCD
AB: $2x-3y+4=0$
AD: $3x+2y+2=0$
$AC \cap BD = P(-1; 2)$

T) Ecuaciones de lados y diagonales

Resp.
$2x-3y+12=0$
$3x+2y-4=0$
$6x+17y-28=0$
$18x-y+20=0$

13. H) Rectángulo ABCD
AB: $x+y-5=0$
AD: $x-y+3=0$
C (-2;-5)

T) Ecuaciones de lados y diagonales

Resp.
$x-y-3=0$
$x+y+7=0$
$x-3y-1=0$
$3x-y+1=0$

14. H) Rectángulo ABCD
A (1; 4)
B (13; 8)
$AC \cap BD = P(8; 2)$

T) Ecuaciones de lados y diagonales

Resp.
$x-3y+11=0$
$2x+7y-30=0$
$4x+y-60=0$
$6x-5y-38=0$
$x-3y-15=0$
$4x+y-8=0$

15. H) Rectángulo ABCD
A (1; 2)
B (2; 5)
SABCD= 40

T) Ecuaciones de lados y diagonales

Resp.
$x+3y-17=0$
$3x-y-79=0$
$3x-y-1=0$
$x+3y-7=0$
$x+5y-27=0$
$14x+23y-57=0$

16. H) Paralelogramo ABCD
AB: $x-7y+39=0$
AD: $5x-y-9=0$
$AC \cap BD = P(6; 4)$

T) Ecuaciones de lados y diagonales

Resp.
$2x+3y-24=0$
$x-7y+5=0$
$3x-4y-2=0$
$5x-y-43=0$

17. H) Paralelogramo ABCD
AB: $3x+2y+5=0$
AD: $x+3y+4=0$
C: (-6; 4)
T) Ecuaciones de lados y diagonales

Resp.
$x+y+2=0$
$x+3y-6=0$
$3x+2y+10=0$
$5x+y+16=0$

18. H) Paralelogramo ABCD
A (-1; 1)
B (1; 3)
SABCD= 15 μ^2
T) Ecuaciones de lados y diagonales

Resp.
$x-y+2=0$
$2x-2y-11=0$
$y-3=0$
$y-1=0$
$4x+11y-37=0$
$4x-19y+23=0$

19. H) Rombo ABCD
AC: $x+y-12=0$
BD: $x-y-2=0$
AB: $x-4y+28=0$
T) Ecuaciones de lados; SABCD

Resp.
$x-4y-2=0$
$4x-y-38=0$
$4x-y-8=0$
S= 60 μ^2

20. H) Rombo ABCD
AB: $3x-4y=0$
BD: $x-3=0$
C (6; 0)
T) Ecuaciones de lados y diagonales, SABCD

Resp.
$3x+4y-24=0$
$3x-4y-24=0$
S= 24
$3x+4y=0$
$y= 0$

21. H) ABCD Trapecio isósceles
AD: $3x-5y-13=0$
AC: $7x-6y-19=0$
B (2; 2)
T) Ecuaciones de lados y diagonales, SABCD

Resp.
$3x-5y+4=0$
$4x-y-6=0$
$2x-9y+14=0$
S= 25,5 μ^2

22. H) ABCD Trapecio isósceles
AD: $5x+6y+14=0$
AB: $3x-5y+17=0$
$C\left(4;\dfrac{3}{2}\right)$
T) Ecuaciones de lados y diagonales

Resp.
$5x+6y-29=0$
$x-16y+20=0$
$5{,}32x-2y-18{,}28=0$
$8{,}38x+y-12{,}38=0$

23. H) Triángulo ABC
A (2; 2)
hb: $14x-5y+42=0$
Mb: $6x+y+18=0$
T) Ecuaciones de lados

Resp.
$5x+14y-38=0$
$2x-5y+6=0$
$0{,}95x+y+2{,}85=0$

24. H) Triángulo ABC
C (3; 11)
Ma: $14x+13y-125=0$
Bisectriz externa de A: $x-y-7=0$
T) Ecuaciones Lados
G Triangulo ABC

Resp.
$2x+y-17=0$
$x+2y-10=0$
$2x-y+5=0$
$G\left(\dfrac{11}{3};\dfrac{17}{3}\right)$

25. H) Triángulo ABC
A (8; 1)
Mb: $2x-11y+55=0$
Hc: $2x-y+5=0$

T) Ecuaciones Lados; G Triangulo ABC

Resp.
$x+2y-10=0$
$2x-y+5=0$
$2x+y-17=0$
$G\left(\frac{11}{3};\frac{17}{3}\right)$

26. H) Triángulo ABC
B (3; 5)
Vc: 3x2y-1=0 (interna)
Ha: $2x-y+5=0$
T) Ecuaciones de Lados

Resp.
$x+2y-13=0$
$5x-4x+5=0$
$29x+2y+155=0$

27. H) Triángulo ABC
C (9; -2)
Mb: $x-3y-7=0$
VextA: $y-2=0$

T) Ecuaciones Lados; $S\Delta=?$

Resp.
$x+y-7=0$
$x-y-3=0$
$y+2=0$
$S\Delta = 16\ \mu^2$

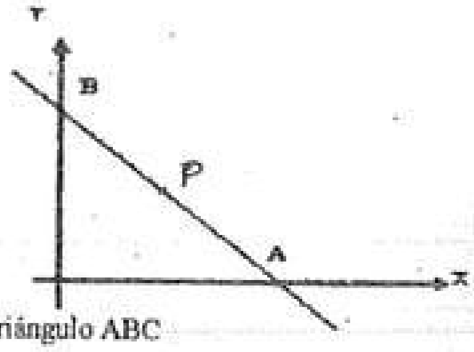
28. H) P (2; 2)
$P \in L$
L forma con los ejes un
Triángulo de área= 1
T) Ecuación Recta L

Resp.
$2x-y-2=0$
$x-2y+2=0$

29. H) L1: $ax+9y+(a-3)=0$
L2: $4x+ay+b=0$
L1 $\wedge$ L2 coincidentes
T) a=?; b=?

Resp.
$a=\pm 6$
b= 2 o 6

30.



H) P (8; 9)

$$\frac{PA}{PB}=-\frac{3}{2}$$

T) AB=?

$3x+4y-60=0$

31. H) Triángulo ABC

A (-5; 12)

B (-17; 0)

C (-1, 0)

DEFG cuadrado inscrito

en el triangulo

T) D=?; E=?; F=?; G=?

Resp.
$\left(-\frac{23}{7};\frac{48}{7}\right)$
$\left(-\frac{71}{7};\frac{48}{7}\right)$
$\left(-\frac{71}{7};0\right)$
$\left(-\frac{23}{7};0\right)$

32. H) Triángulo ABC
AB = BC
AB: $2x+9y-6=0$
BC: $7x-6y+10=0$
P: $(5; 2) \in AC$
T) Ecuación AC

Resp.
$x-3y+1=0$
$3x+y-17=0$

33. H) L forma con los ejes de coordenadas un Δ de perímetro 12
$P\left(2;\frac{4}{3}\right) \in L$
T) Ecuación de la recta L

Resp.
$4x+3y-12=0$
$8x+15y-36=0$

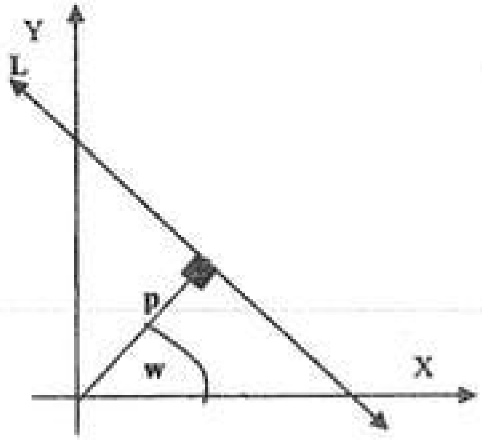
34. H) L1: $3x+y-2=0$
L2: $x-5y+10=0$
$A \in L1$; $B \in L2$
$P(2; -3) \in AB$
AP = PB
T) Ecuación AB= ?

Resp.
$4x-y-11=0$
$41x+11y-49=0$

35. H) Oa (-11; 4)
Ob (5; -8)
Oc (10; 7)
T) A=?
B=?
C=?

Resp.
(7; -2)
(3; 6)
(1; -5)

LA RECTA: FORMA NORMAL



$$x.\cos(w) + y.sen(w) - p = 0$$

$$0 \leq w \leq 360$$

RELACIÓN ENTRE LA ECUACIÓN GENERAL Y NORMAL

L: $Ax + By + C = 0$

$$x.\cos(w) + y.sen(w) - p = 0$$

$$\begin{cases} \cos(w) = \dfrac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \\ sen(w) = \dfrac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \\ p = -\left(\dfrac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}\right) \end{cases}$$

$$\frac{A.x}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{B.x}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

Signos del Radical

- Si, $c \neq 0$ Signo Contrario al de c
- Si, $c = 0 \wedge B \neq 0$ Signo igual al de B

DISTANCIA DE LA RECTA L A UN PUNTO P

L: $A.x + B.y + C = 0$; P (X1, Y1)

$$d = \frac{Ax1 + By1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d = \frac{mx1 - y1 + b}{\pm\sqrt{m^2 + 1}}$$

Signo de d

1. Recta no pasa por el Origen

   Positiva, Si el punto y el origen distinto lado de L

   Negativa, Si punto y origen mismo lado de L

2. Recta pasa por el origen.

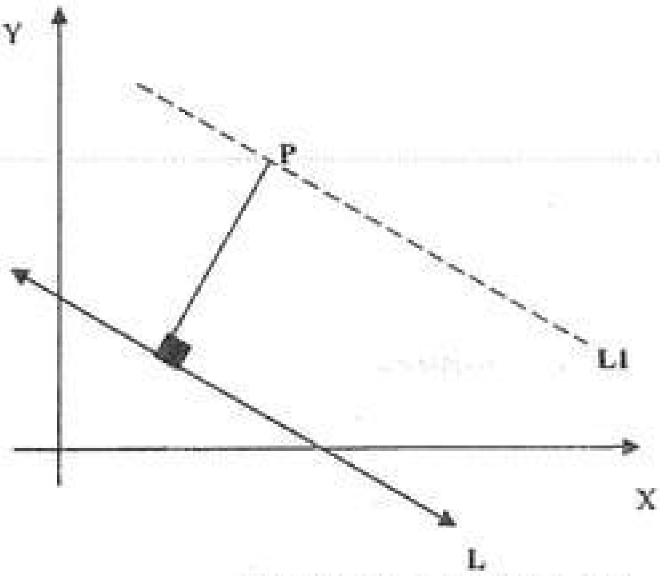
   Positiva: El punto arriba de L

   Negativa: El punto debajo de L

$$p = \frac{c}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{b}{\pm\sqrt{m^2 + 1}}$$

PARALELA A UNA RECTA L A UNA DISTANCIA DADA d

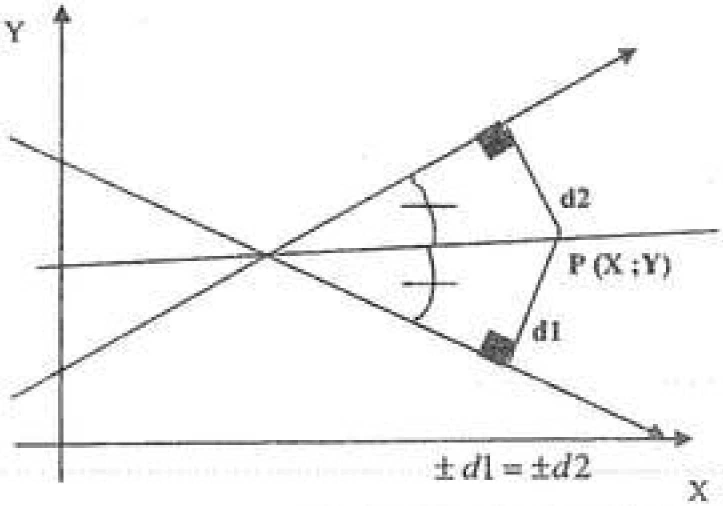
L: Ax + By + C = 0 **P (X ; Y)**



$$\pm d = \frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

BISECTRIZ DE UN ÁNGULO

L1: A1x + B1y + C1 = 0
L2: A2x + B2y + C2 = 0



$$\pm d1 = \pm d2$$

$$\pm\left(\frac{A1x + B1y + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}\right) = \pm\left(\frac{A2x + B2y + C2}{\pm\sqrt{A2^2 + B2^2}}\right)$$

EJERCICIOS

1) H) L1: 7x-6y-7=0
L2: 4x+3y+2=0
L3: 5x+3y=0
L4: 6x-7y-3=0
L5: 3x+7y-6=0

T) p=?
ω=?
Resp. $7/\sqrt{85}$; $2/5$; 0; $3/\sqrt{85}$; $6/\sqrt{58}$
319.4°; 216.86°; 30,96°; 310,6°; 66,8°

2) H) L1: 3x+2y-3=0; P1 (-4; 2)
L2: 2x-5y+4=0; P1 (-3; -4)
L3: 3x-6y+15=0; P1 (1; 5)

T) Distancia punto- recta.
Resp. $-11/\sqrt{13}$; $-18/\sqrt{29}$; $4/\sqrt{5}$

3) H) L1: 3x+2y+5=0
L2: 3x+2y+10=0

T) Distancia entre L1 Λ L2
Resp. $5/\sqrt{13}$

4) H)
L1: 50x+23y-50=0
L2: 50x+109y-50=0

L3: x+2y-4=0
L4: x+y-4=0

L5: 4x-3y+8=0
L6: 3x-10y+10=0

T) Ecuaciones de las bisectrices de los: Ángulos agudos, y Ángulos obtusos.

Resp.
x+y-1=0
x-y-1=0

0,83x-0,58y-3,32=0
0,69x+y-2,76=0

56,76x-81,32y+133,52=0
26,76x+18,68y+33,52=0

5) H) L1:4X+3Y-5=0
L1 ‖ L2
d= -4 entre L1 Λ L2

T) Ecuación de L2 =?
Resp.
4X+3Y+15=0

6) H) L1: 4X+3Y-5=0
L2: 4X+3Y+10=0
L1 ‖ L2 ‖ L3
L3 pasa por la mitad de L1 Λ L2.

T) Ecuación de L3 =?
Resp. 8X+6Y+5=0

7) H) p= 2
A (3; 1)
A ∈ L

T) Ecuación de L=?
Resp. 1,57X-Y-3,73=0
0,38X+Y-2,14=0

8) H) A (5; 5)
B (2; 4) ∈ L
d = 3 distancia de A a L

T) Ecuación de L=?
Resp. 4X+3Y-20=0
X=2

9) H) A (2; 2)
d1= 4 distancia de A a L
B (-2; 4)
d2= 5 distancia de B a L

T) Ecuación de L= ?
Resp. 0,24X+Y+1,08=0
0,82X+Y-8.76=0

10) H) p= $12/\sqrt{13}$
L forma con los ejes un Δ de Área = 12 μ^2

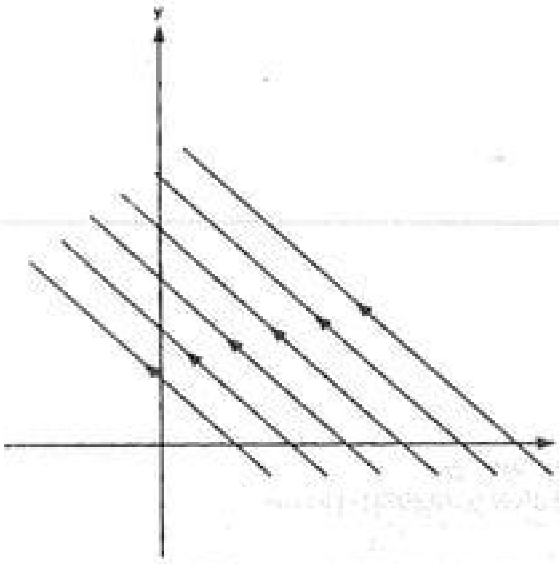
T) Ecuación de L=?
Resp. 0,67X+Y-4=0
1,5X+Y-6=0

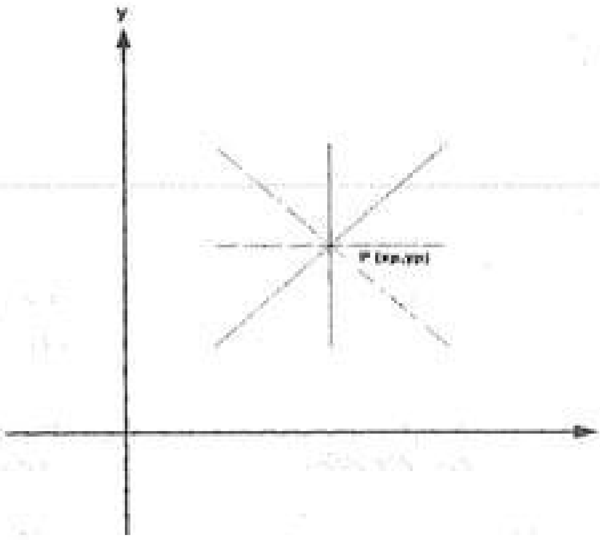
11) H) A (3; 2)
d= 1,87 de A a L
L forma con los ejes un Δ de S=2,5 μ^2

T) Ecuación de L=?
Resp. 2X+2,5Y-5=0
0.14X+35,43Y-5=0

FAMILIA O HAZ DE RECTAS

Para que una recta esté determinada, se necesitan dos condiciones.
Si se conoce una condición, puede existir un infinito número de rectas que cumplan con esta condición, a éste infinito número de rectas se les denomina familia o haz de rectas.





Ecuación de la familia de rectas que pasan por un mismo punto

Procedimiento:

1. Se escribe la primera recta, y se le suma la otra multiplicada por k que se conoce como parámetro.

$$A_1x + B_1y + C_1 + k\,(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

2. Se escribe la ecuación anterior como ecuación general de la recta.

$$x\,(A_1 + A_2k) + y\,(B_1 + B_2k) + (C_1 + C_2k) = 0$$

3. Se determina k (parámetro de la familia de rectas) aplicando las condiciones dadas.

4. Se reemplaza el valor de k en la ecuación 2 y se obtiene la recta.

Ejercicios

1) H) L1: $3x+2y+5=0$
L2: $4x+7y+12=0$
L pasa por la intersección
de $L1 \wedge L2$
$A\,(2;\,3) \in L$

T) Ecuación de L=? sin determinar el el punto de intersección

Resp. $55x-37y+1=0$

2) H) L1: $3x-2y+12=0$
L2: $x+4y-8=0$
L pasa por la intersección
De $L1 \wedge L2$
L paralela eje x

T) Ecuación de L=? sin determinar el punto de intersección

Resp. $7y-18=0$

3) H) L1: $3x+5y-4=0$
L2: $4x+3y-7=0$
L pasa por la intersección
de $L1 \wedge L2$ y tiene $m = \dfrac{1}{3}$

T) Ecuación de L=? sin determinar el punto de intersección

Resp. $11x-33y-38=0$

4) H) L1: $2x-y+2=0$
L2: $x-y+1=0$
$L1 \cap L2 = P$
$P \in L$
L forma con los
ejes un triángulo de $S=4$

T) Ecuación de L=? sin determinar el punto de intersección

Resp. $8x+y+8=0$

5) H) Δ ABC
A (5; 2)
hb: $3x+2y-2=0$
Vb: $3x-y-4=0$

T) Ecuaciones de los lados sin determinar B Λ C
Resp. $2x-3y-4=0$
$24x-35Y-50=0$
$4{,}44x+1{,}51y-3{,}96=0$

6) H) Δ ABC
C (-5; -3)
ha: $10x-3y-15=0$
Vb: $28x+25y+10=0$

T) Ecuaciones de los lados sin determinar A Λ B
Resp. $3x+10y+45=0$
$10.16x+1.75y-40.3=0$
$7x-6.9y+14.3=0$

7) H) ABCD Rectángulo
AB: $3x+y-4=0$
AD: $x-3y+2=0$
$AC \cap BD = P\left(\frac{7}{2};\frac{7}{2}\right)$

T) Ecuaciones lados y diagonales sin encontrar los vértices
Resp. $x-y=0$
$x+7y-28=0$
$x-3y+12=0$
$3x+y-24=0$

8) H) ABCD Rombo
AC: $x+3y-8=0$
BD: $3x-y-14=0$
AB: $x-y=0$

T) Ecuaciones de los lados sin determinar los vértices
Resp. $7x+y-56=0$
$7x+y-16=0$
$x-y-8=0$

9) H) L1: $x+2y-1=0$
L2: $2x-y+3=0$
Distancia de P (0; 1) a L $\frac{\sqrt{5}}{5}$
L pasa por intersección de L1 Λ L2

T) Ecuaciones de L=? sin determinar el punto de intersección

Resp. $x+2y-1=0$
$x-2y+3=0$

10) H) L1: $3x-y+C=0$
L2: $3x-4y+6=0$
L3: $x-5=0$
L1 pasa por la intersección
de L2 Λ L3

T) C=? sin determinar el punto de intersección

Resp. $-\frac{39}{4}$

11) H) L1: $4x-5y-12=0$
L2: $3x+2y-16=0$
L pasa por la intersección
de L1 Λ L2 y las intersecciones
con los ejes de coordenadas son iguales

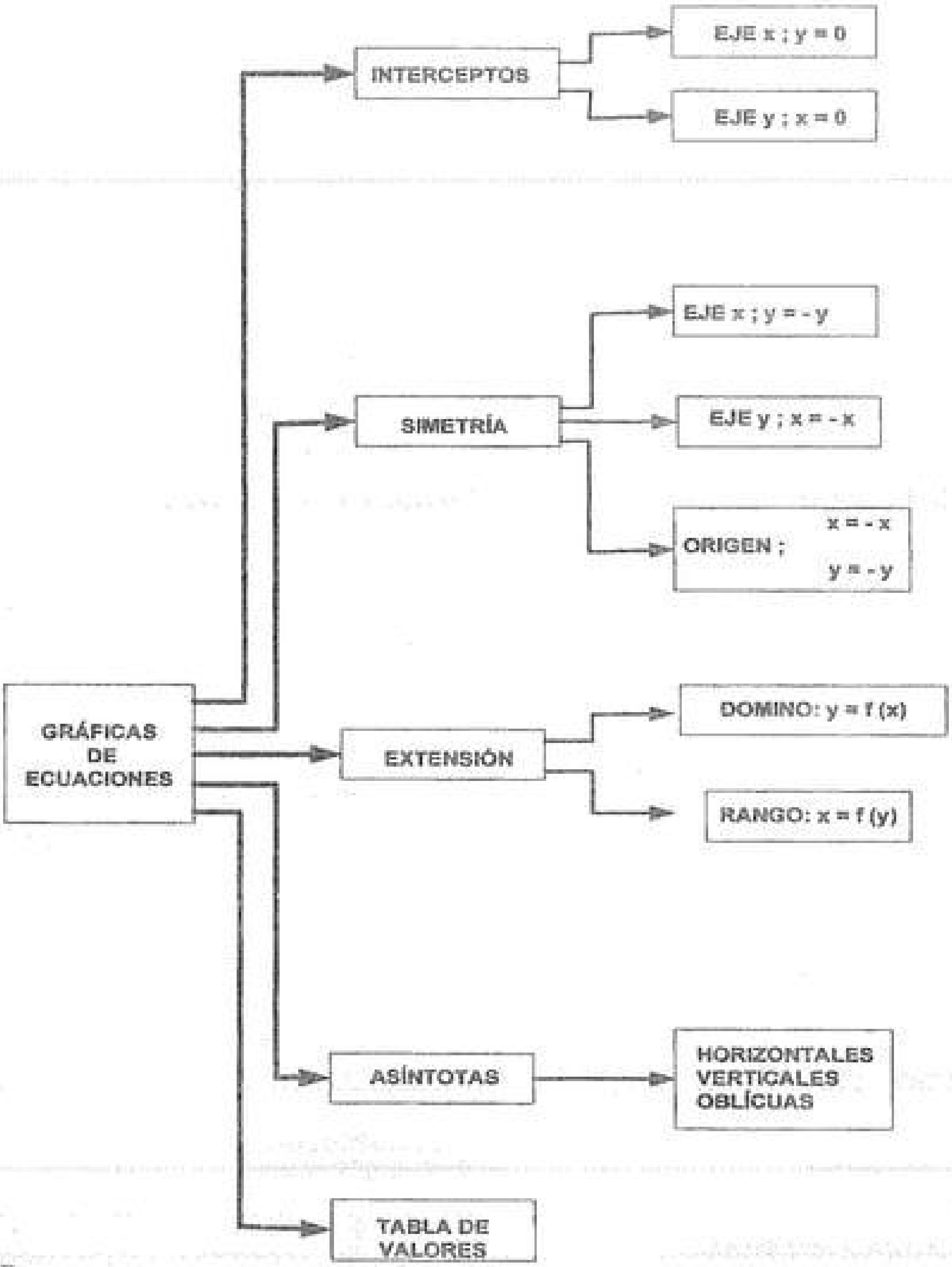
T) Ecuación de L=? sin determinar el punto de intersección
Resp. $7x-26y=0$
$23x-23y-76=0$

12) H) L1: $x-3y-12=0$
L2: $5x-2y-1=0$
$L1 \cap L2 = P$
L3: $x+y-6=0$
L4: $4x-5y-3=0$
$L3 \cap L4 = Q$

T) Encontrar la ecuación de PQ sin determinar P Λ Q

Resp. $1{,}3x-y-2{,}43=0$

GRÁFICAS DE ECUACIONES



GRAFICAR:

1) $xy-2y-x+1=0$

2) $x^2y-4y+x=0$

3) $x^2y-x^2-y=0$

4) $2x^2y-3xy-5y-1=0$

5) $yx^2-3x^2+8x-4=0$

6) $2x^2y-5xy+2y-x^2-1=0$

7) $y^2x^2-2xy^2-y^2-x=0$

8) $3x^2y-30yx-2x^2+5x+3y-2=0$

9) $y+2xy+yx^2-x=0$

10) $y^3+x^3-30xy=0$

11) $x^2-xy-y-25=0$

12) $x^2y-4y-8=0$

13) $y=\dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-2)}$

14) $y=\dfrac{3x+2}{(x-1)^2}$

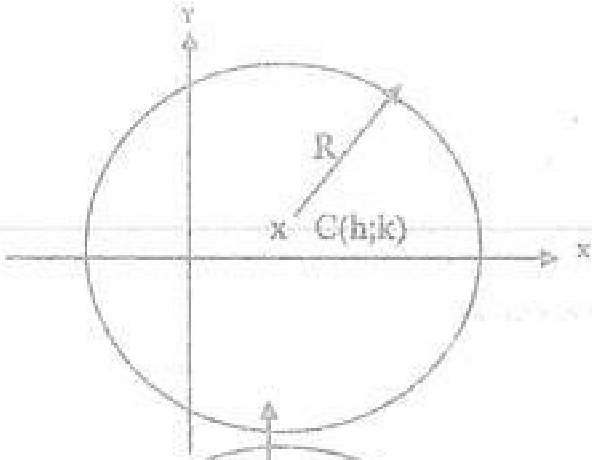
15) $2xy-x^2+6x-4y-10=0$

16) $x^2-xy+2x-1=0$

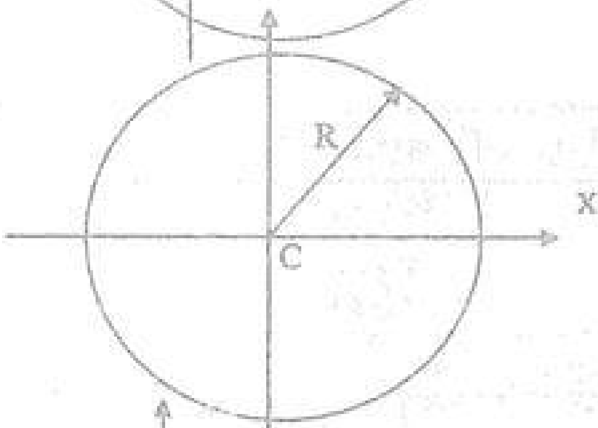
CIRCUNFERENCIA

ECUACIONES

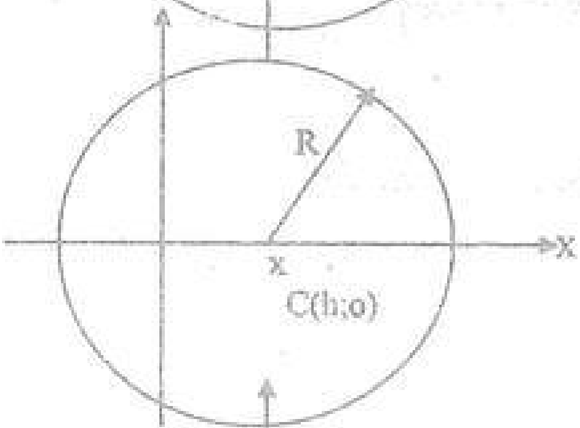
$$(x-h)^2+(y-k)^2=R^2$$



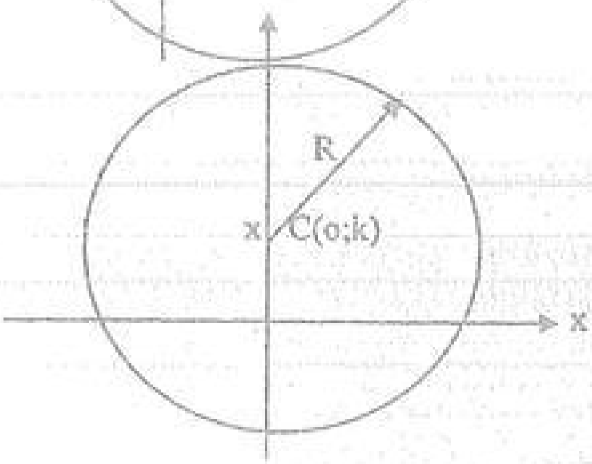
$$x^2+y^2=R^2$$



$$(x-h)^2+y^2=R^2$$



$$x^2+(y-k)^2=R^2$$



Ecuación General de segundo grado

$AX^2+BXY+CY^2+DX+EY+F=0$

Ecuación General Circunferencia

Si: $B=0$; $A=C$; $X^2+Y^2+DX+EY+F=0$

C (-D/2; -E/2)   R=1/2($\sqrt{D^2+E^2-4F=0}$)

$D^2+E^2-4F>0$	Circunferencia real.
$D^2+E^2-4F<0$	Circunferencia imaginaria
$D^2+E^2-4F=0$	punto (-D/2;-E/2)

EJERCICIOS

1. H) Δ ABC
   A (8; 4)
   B (-1; 7)
   C (4; -8)

   T) Ecuación circulo inscrito

   Resp. $(x-4)^2+(y-2)^2=10$

2. H) Δ ABC
   A (-1; 1)
   B (3; 5)
   C (-4; 3)

   T) Ecuación circulo circunscrito

   Resp. $x^2+y^2-5x-3y-4=0$
   $x^2+y^2+15x+11y+2=0$

3. H) Δ ABC
   A (-1; -3)
   B (7; 1)
   C (-4; 3)

   T) Ecuaciones circunferencias exinscritas

   Resp. $(x-5)^2+(y-15)^2=180$
   $(x+7)^2+(y+1)^2=20$
   $(x-3)^2+(y+6)^2=45$

4. H) A (15; 2)
   B (7; 6)
   A ∈ ⊙
   B ∈ ⊙
   C ∈ L
   L: x+2y-4=0

   T) Ecuación de la circunferencia=?

   Resp. $(x-8)^2+(y+2)^2=65$
   $(x-10)^2+(y-2)^2=25$

5. H) L1: 4x-3y+16=0
   L2: 4x-3y-20=0
   A (2; 6) ∈ ⊙

   T) Ecuación circunferencia tg a L1 Λ L2

   Resp. $25x^2+25y^2-100x-300y+676/25=0$

6. H) L1: x+y+4=0
   L2:7x-y+4=0
   L3: 4x+3y-2=0
   C ∈ L3

   T) Ecuación circunferencia tg a L1 Λ L2

   Resp. $(x-2)^2+(y+2)^2=8$
   $(x+4)^2+(y-6)^2=18$

7. H) A (3; 1) ∈ ⊙
   L1: 4x-3y-14=0
   C ∈ L2: 2x+y+3=0

   T) Ecuación circunferencia tg a L

   Resp. $x^2+y^2+4xy-2y-20=0$
   $x^2+y^2+24x-41y-40=0$

8. T) Posición Relativa de la siguientes circunferencias

   a) $x^2+y^2-5x+7y-10=0$
   $x^2+y^2-5x+7y-50=0$ Resp. Concéntricas

   b) $x^2+y^2+2x-4y-11=0$
   $x^2+y^2-12x-4y+31=0$ Resp. tg externamente

   c) $x^2+y^2+6x+4y-12=0$
   $x^2+y^2+10x-2y+10=0$ Resp. Secantes

   d) $x^2+y^2-6x+8y-11=0$
   $x^2+y^2-6x-6y+5=0$ Resp. Ortogonales

9. H) C1: $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$
   C1 C2= 8
   C1 C2: 3x+y-3=0
   C1 A C2: ORTOGONALES

   T) Ecuación de C2

   Resp. $(x - 37/100)^2 + (y - 47/25)^2 = 48$

10. H) C1: $x^2 + y^2 - 18x - 16y + 45 = 0$
    C2: $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 20 = 0$
    C1 ∩ C2= AB

    T) Circunferencia de diámetro AB

    Resp. $x^2 + y^2 - 2x - 8y - 3 = 0$
    $x^2 + y^2 - 6x - 9y - 19 = 0$

11. H) A (-2; -2) ∈ ⊙
    C ∈ L: 2x-y=0
    ⊙ tg a 3x-4y-20=0

    T) Ecuación de la circunferencia=?

    Resp. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$
    $(x+2)^2 + (y+4)^2 = 4$

12. H) C1: (-4; 3)
    C2: $x^2 + y^2 - 4x + 3y = 0$

    T) Ecuación de C1 tg a C2

    Resp. $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$
    $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 100$

13. H) A (5; -6) ∈ ⊙
    B (7; 2) ∈ ⊙
    ⊙ tg a 3x-5y+23=0

    T) ecuación de la circunferencia=?

    Resp. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 34$
    $(x-34)^2 + (y+9)^2 = 850$

14. H) A (-1; 2) ∈ ⊙
    R=5
    L: 3x-4y+1=0

    T) Ecuación de la circunferencia Tg L

    Resp. $(x+6)^2 + (y-2)2 = 25$
    $(x-2/5)^2 + (y-34/5)^2 = 25$

15. H) L1:3x-4y+50=0
    L2: 4x+3y-50=0
    R= 10

    T) Ecuación de la circunferencia tg a L1 A L2

    Resp.
    $x^2 + y^2 = 100$
    $(x-16)^2 + (y-12)^2 = 100$
    $(x+12)^2 + (y-16)^2 = 100$
    $(x-4)^2 + (y-28)^2 = 100$

16. H) ⊙ tg a .x-2y-2=0 en P(8; 3)
    A (12; 7) ∈ ⊙

    T) Ecuación de la circunferencia=?

    Resp. $(x-4)^2 + (y-11)^2 = 80$

17. H) ⊙ Tg a los ejes
    A (3; 6) ∈ ⊙

    T) Ecuación de la circunferencia=?

    Resp.
    $(x-15)^2 + (y-15)^2 = 225$
    $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$

18. H) Δ ABC
    ⊙ Inscrito $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 8 = 0$
    ⊙ exinscrito $x^2 + y^2 - 10x + 8y - 4 = 0$

    T) A=? (4; 2); (-2/5; 19/5)
    B=? (-4; 1); (-2; -5)
    C=? (-7; -5); (-7; -5)

19. H) A (-1;2) ∈ L
    L Determina en la⊙ . $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 1 = 0$
    una cuerda de longitud 8

    T) L=?

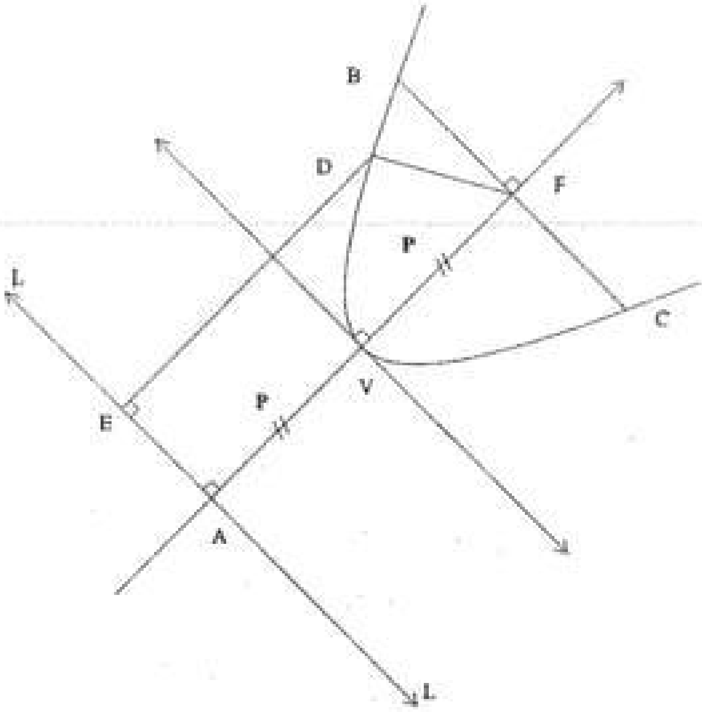
    Resp. 0.81x+y-1.18=0
    0.37x-y+2.53=0

20. H) M (8; -6) punto medio de AB
    Cuerda de⊙ : $x^2 + y^2 - 12x - 4y - 6 = 0$

    T) Ecuación AB

    Resp. x-4y-32=0

PARABOLAS



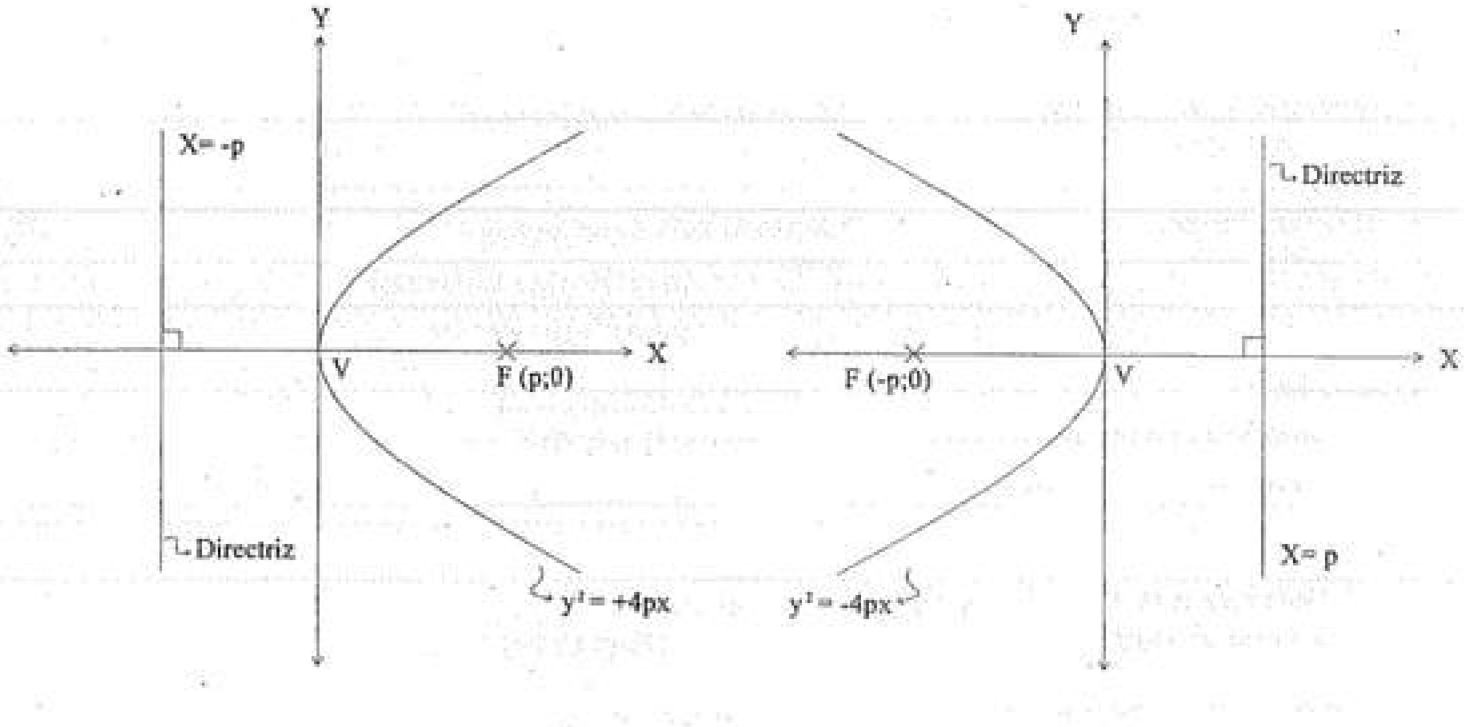
ELEMENTOS

FOCO: F
DIRECTRIZ: L
PARAMETRO: P=AV=VF
LADO RECTO: BC
VERTICE: V
EJE FOCAL: AF
CUERDA FOCAL: BC
RADIO FOCAL: FD
EXCENTRICIDAD: e=1

ECUACIONES

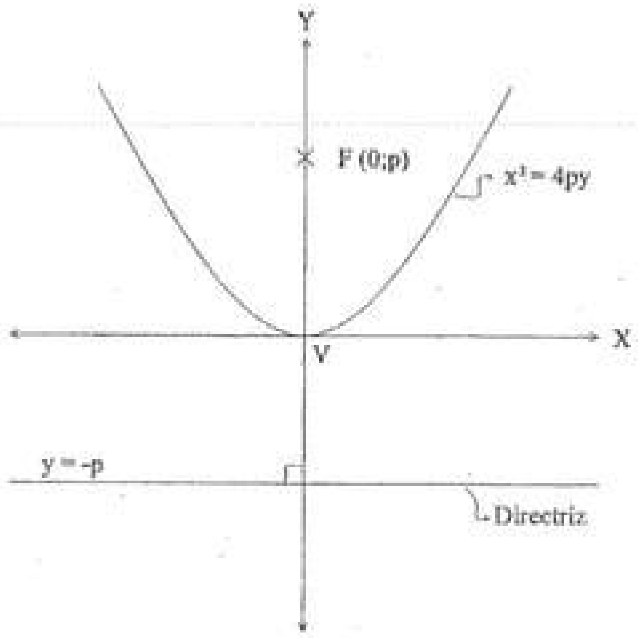
1) EJE FOCAL ES EL EJE " X "

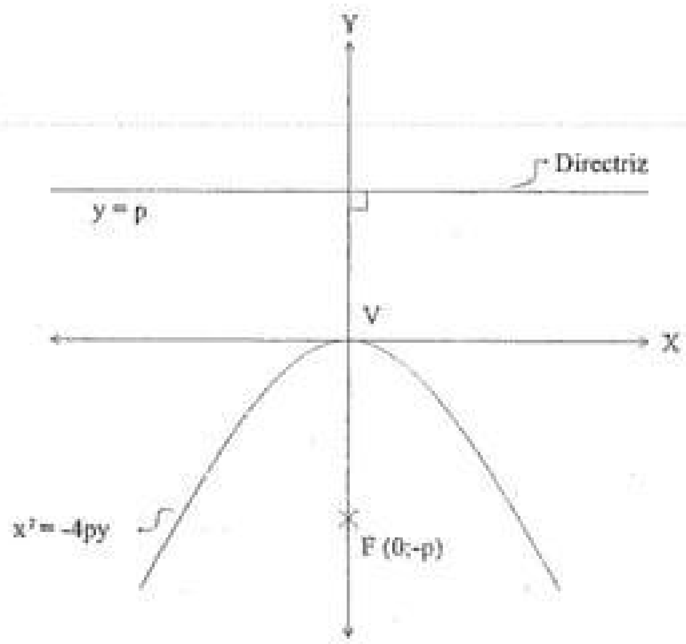
VERTICE (0 ; 0)



2) EJE FOCAL ES EL EJE " Y "

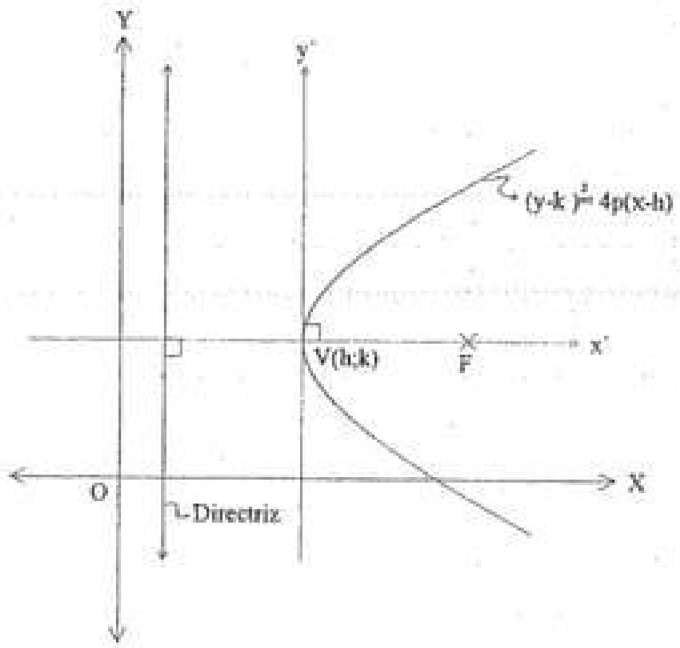
VERTICE (0 ; 0)

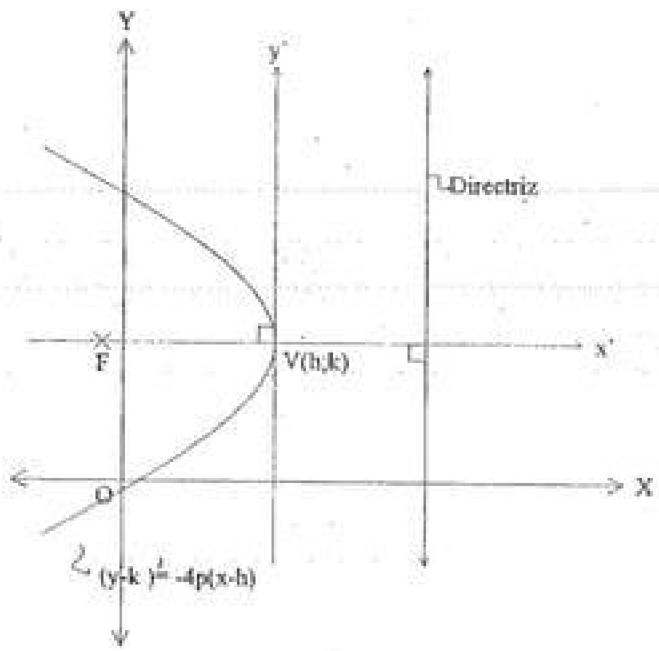




3) EJE FOCAL PARALELO EJE " X "

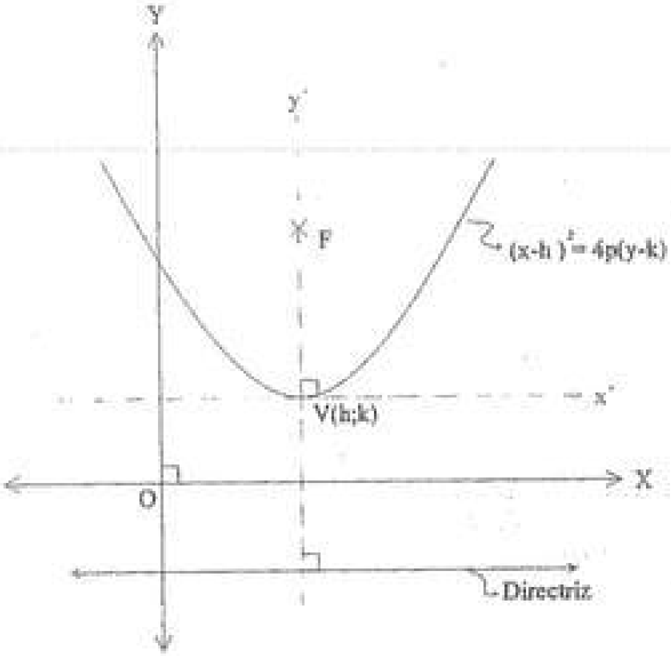
VERTICE V (h ; k)

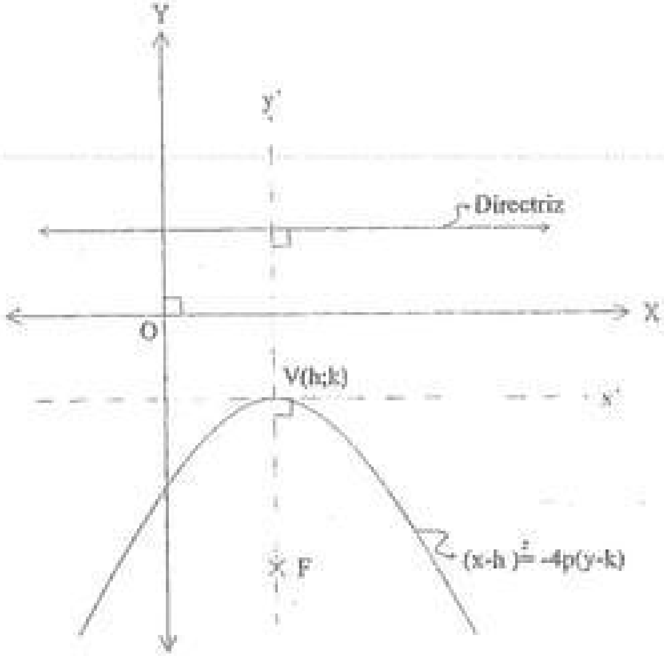




4) EJE FOCAL PARALELO EJE " Y "

VERTICE $V(h;k)$

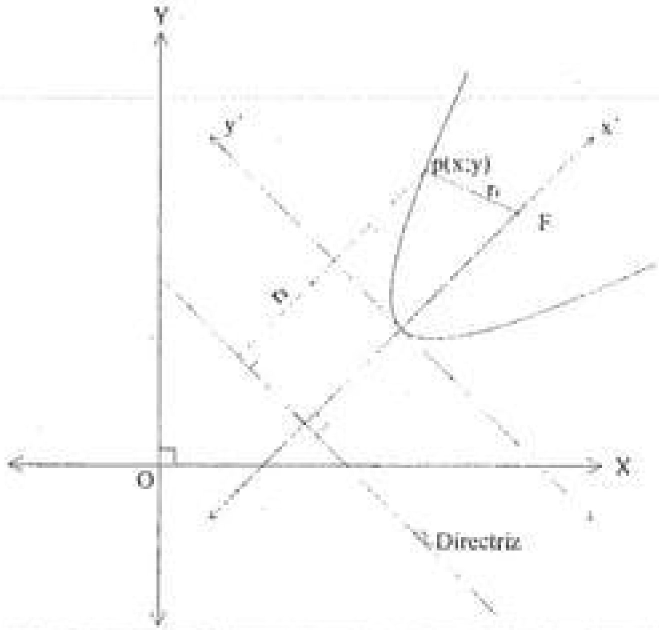
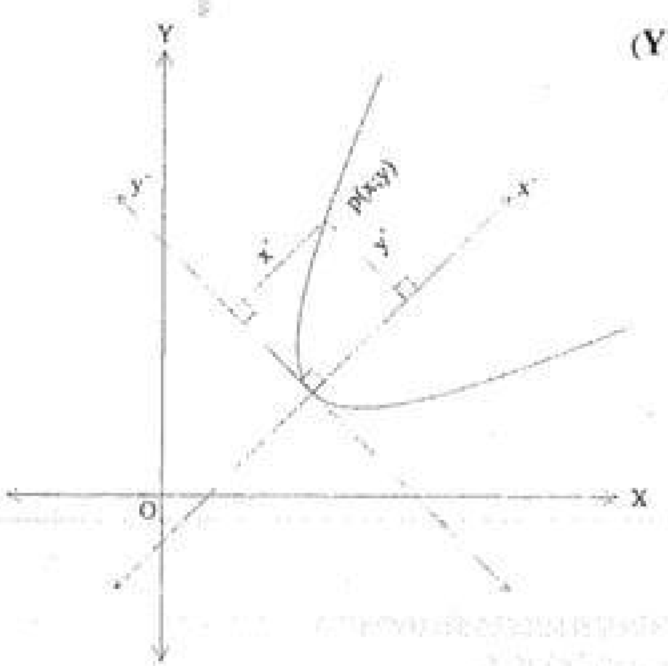




RELACIÓN CON LA ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \begin{cases} B = 0 \\ A = 0 \text{ ó } C = 0 \end{cases}$$

$Si: B^2 - 4AC = 0 \Longrightarrow$ Ecuación general de la Parábola si el eje focal no es paralelo a los ejes de coordenadas.

DATOS	ECUACIONES DE LA PARABOLA
Foco Directriz	 $(y')^2 = 4px'$ $r_1 = r_2$
Ecuaciones de los Ejes: (x'; y') P	 $(Y')^2 = 4pX'$

EJERCICIOS

1. H) Parábola
   V (0; 0)
   A (3; 6)
   AB Lado recto
   Eje Focal el eje X
   T) Ecuación
   Resp: y2 = 12x

2. H) Parábola
   V (0; 0)
   A (2; -4) Є Parábola
   Eje Focal el eje X

   T) Ecuación
   Resp: $y^2 = 8x$

3. H) Parábola
   V (-6; 6)
   F (-6; 8)

   T) Ecuación
   Resp: $x^2+12x-8y+84 = 0$

4. H) Parábola
   V (7; -4)
   Directriz: X= -3

   T) Ecuación
   Resp: $y^2-40x+8y+296 = 0$

5. H) Parábola
   F (3; 5)
   Directriz: X= -5

   T) Ecuación
   Resp: $y^2-16x-10y+9= 0$

6. H) Parábola
   F (1; 9)
   A (7; 1) Є curva abierta hacia arriba
   Eje focal paralelo al eje Y

   T) Ecuación
   Resp: $x^2-2x-36y+1= 0$

7. H) Parábola
   F (1; 9)
   A (7; 1) Є curva abierta a la izquierda
   Eje focal paralelo al eje X

   T) Ecuación
   Resp: $y^2+32x-18y-207= 0$

8. H) Parábola
   V (3; 4)
   A (-2; 3/2) Extremo del Lado Recto
   Eje focal paralelo eje Y

   T) Ecuación
   Resp: $x^2-6x+10y-31= 0$

9. H) Parábola
   V (4; 5)
   F (-10; 5)

   T) Ecuación
   Resp: $y^2-10y+56x-199= 0$

10. H) Parábola
    V (-3; -6)
    Directriz: Y-8= 0

    T) Ecuación y Elementos
    Resp:
    Ecuación: $(x+3)^2=-56(y+6)$
    Elementos:
    F (-3; -20); P=14; L.R: 56;
    Eje focal: X+3=0

11. H) Parábola
    F (-8; 4)
    Directriz: Y=2

    T) Ecuación
    Resp: $(x+8)^2= 4(y-3)$

12. H) Parábola
    A (-2; 4) } Elementos de la curva
    B (8; -1)
    Directriz: Y= -6

    T) Ecuación
    Resp: $(x-4)^2 = 4 (y+5)$
    $(x-8)^2 = 20 (y+1)$

13. H) Parábola
    B (0; 6) extremo lado recto
    Y=-1, Tangente en el vértice

    T) Ecuación y Elementos
    Resp:
    Ecuación: $(x-14)^2=28(y+1)$
    Elementos:
    F (-11; 6); V (-11; -1)
    P=7; L.R =28; Directriz: y+8=0
    Eje focal: X+11=0

14. H) Parábola
    A (6; 2) } Extremos del lado recto
    B (6;-8)
    Se abre a la derecha

    T) Ecuación
    Resp: $(y+3)^2 = 10\left(x - \frac{17}{2}\right)$

15. H) Parábola
    F (5; 0)
    L.R. = 12
    Eje Focal: x

    T) Ecuación
    Resp: $y^2=12(x-2)$
    $y^2=-12(x-8)$

16. H) Parábola
    L.R. = 4
    A (-1; -2) ∈ Parábola
    V ∈; x-3 =0

    T) Ecuación
    Resp: $y^2-4y+4x-8=0$
    $y^2+4x+12y+24=0$

17. H) Parábola
    L.R. = 1
    Eje focal ∥ eje X
    A (-6; 4) ∈ Cónica
    B (9; 1) ∈ Cónica

    T) Ecuación
    Resp: $(y-5)^2 = x+7$
    $y^2 = -x+10$

18. H) Parábola
    Eje focal ∥ eje Y
    A (1; 1) ∈ Curva
    B (3; 0) ∈ Curva
    C (4; -4) ∈ Curva

    T) Ecuación
    Resp: $7x^2-25x+6y+12=0$

19. H) Parábola
    A (7; 3)
    B (-1; -5)
    F (11; 0)

    T) Ecuación
    Resp: $y^2+2x-23=0$
    $x^2-22x+16y+57=0$

20. H) Parábola
    A (4; -2)
    B (-2; 4)
    Y+4= 0 tg en V

    T) Ecuación
    Resp: $x^2+4x-2y-4=0$
    $x^2-20x-18y+28=0$

21. H) Parábola
    A (-8; -1) ∈ Curva
    F (-2; 1)
    D (2; 9) ∈ de la tg en el vértice

    T) Ecuación
    Resp: $9x^2+6xy+y^2-10x+130y-575=0$
    $x^2+6xy+9y^2+22x-14y+41=0$

22. H) Parábola
    F (-5;-1)
    Directriz: x+y-2 = 0

    T) Ecuación
    Resp: $x^2-2xy+y^2+24x+8y+48=0$

23. H) Parábola
    F (5; 1)
    V (3; 2)

    T) Ecuación
    Resp: $x^2+4xy+4y^2-54x-8y+129=0$
    Directriz: 2x-y +1=0
    $P=\sqrt{5}$; L.R. = $4\sqrt{5}$
    Extremos lado Recto: L (7; 5)
    R (3; -3)

24. H) Parábola
    Eje focal: 4x+5y-20 = 0x²-
    Tg en el vértice: 5x-4y+12=0
    p= 4

    T) Ecuación
    Resp:
    $16x^2+40xy+25y^2+352.25x-609{,}8y+1629{,}4=0$

25. H) Parábola
    F (-6; 8)
    Directriz: $4x-3y+12 = 0$

T) Ecuación
Resp: $9x^2+24xy+16y^2+204x-328y+2356=0$

26. H) Parábola
    $\left.\begin{array}{l} A\ (-9;\ 3) \\ B\ (-1;\ -5) \end{array}\right\}$ extremo lado recto

T) Ecuación
Resp: $x^2-2xy+y^2+24x+8y+48=0$
$x^2-2xy+y^2-8x-24y-144=0$

27. H) Parábola
    V (3; 4))
    A (-2; 3/2) extremo lado recto
    Eje focal coincide con Y'

T) Ecuación
Resp: $9x^2+24xy+16y^2+50x-350y+625=0$

28. H) Parábola
    A (7; 5) Є Cónica
    Directriz: $2x-y+1 = 0$
    Tg en el vértice: $2x-y-4=0$

T) Ecuación
Resp: $x^2+4xy+4y^2-54x-8y+129=0$
$x^2+4xy+4y^2-94x-88y+809=0$

29. H) Parábola
    A (-5; 5) Є Cónica
    F (-9; 5)
    B (-2;-1) Є tg vértice

T) Ecuación
Resp: $4x^2-4xy+y^2+72x-86y+449=0$
$x^2-4xy+4y^2+102x-44y+521=0$

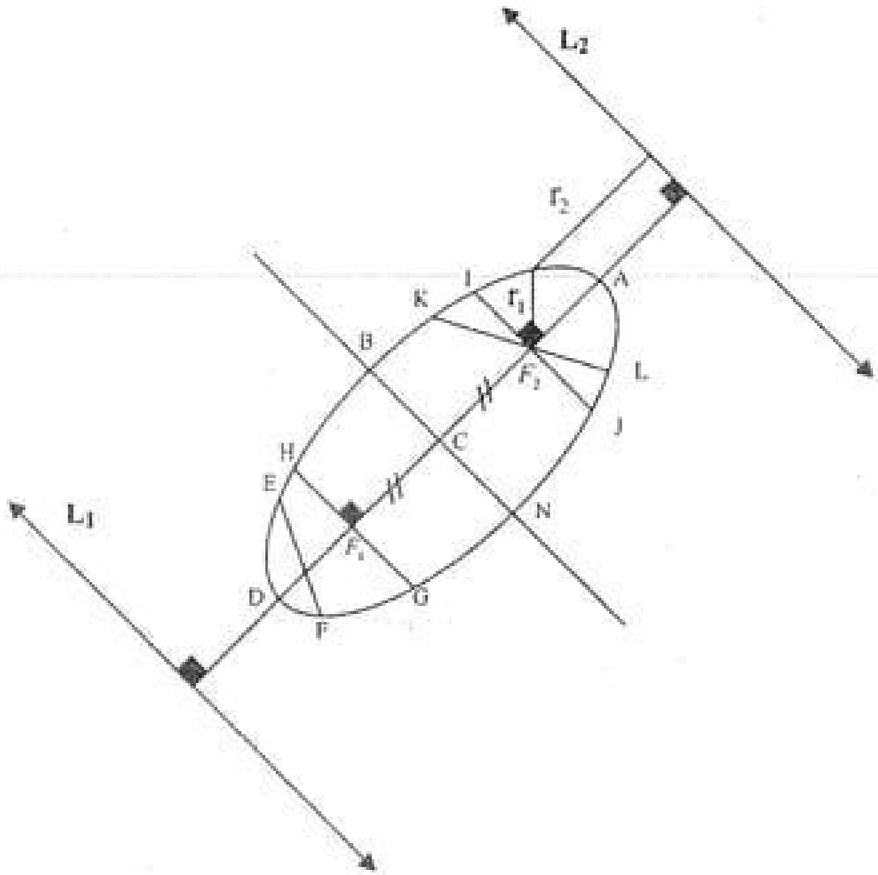
30. H) Parábola
    A (-6; 9) Є Directriz
    F (2; 5)
    B (4; -1) Є Curva

T) Ecuación
Resp: $x^2-6xy+9y^2-94x-118y+209=0$
$9x^2-6xy+y^2+2x+26y-151=0$

31. H) Parábola
    V (3; 7)
    A (5; 11) Є Curva
    Eje focal: $4x-3y+9= 0$

T) Ecuación
Resp: $176x^2-264xy+99y^2+768x-626y+1187=0$

ELIPSE



ELEMENTOS

Focos: $F_1 \wedge F_2$

Eje Focal: $\overline{F_1F_2}$

Eje Mayor: $\overline{AD}$

Eje Menor: $\overline{BN}$

Vértices: A, B, D, N

Cuerda: $\overline{EF}$

Cuerda Focal: $\overline{KL}$

Lado Recto: $\overline{HG} \wedge \overline{IJ}$ = L.R.

Radio Focal: $\overline{F_1K}$

Excentricidad: $\dfrac{r_1}{r_2} = e$

Directriz: $\overline{L_1} \wedge \overline{L_2}$

ECUACIONES

1) C (0;0)

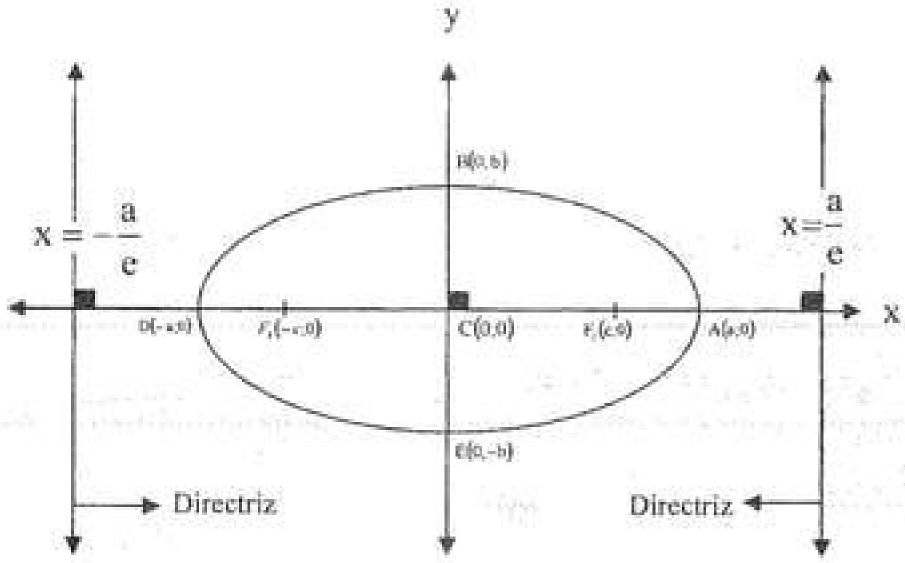
Eje Mayor: Eje x

Eje Menor: Eje y

$a^2 = b^2 + c^2$

$e = \dfrac{c}{a}$

$L.R. = \dfrac{2b^2}{a}$



ECUACION $\Longrightarrow$ $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2) C(0;0)

Eje Mayor: Eje y

Eje Menor: Eje x

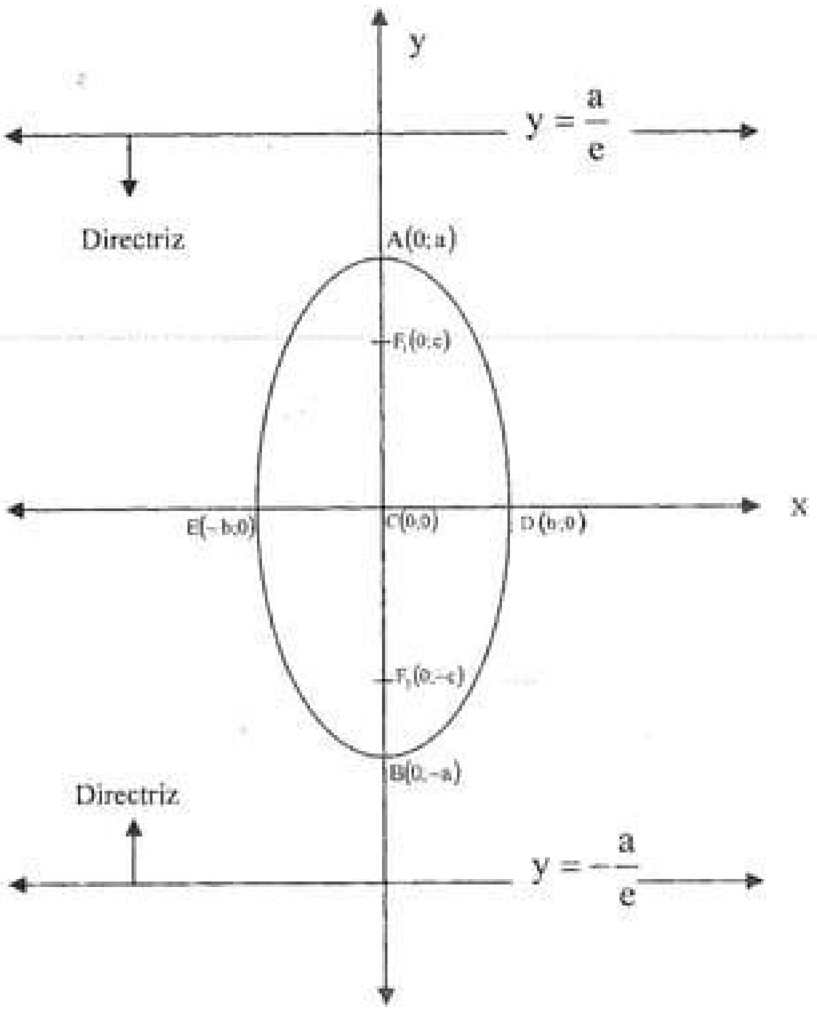
$a^2 = b^2 + c^2$

$e = \frac{c}{a}$

$L.R. = \frac{2b^2}{a}$

ECUACIÓN

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$



3) C (h;k)

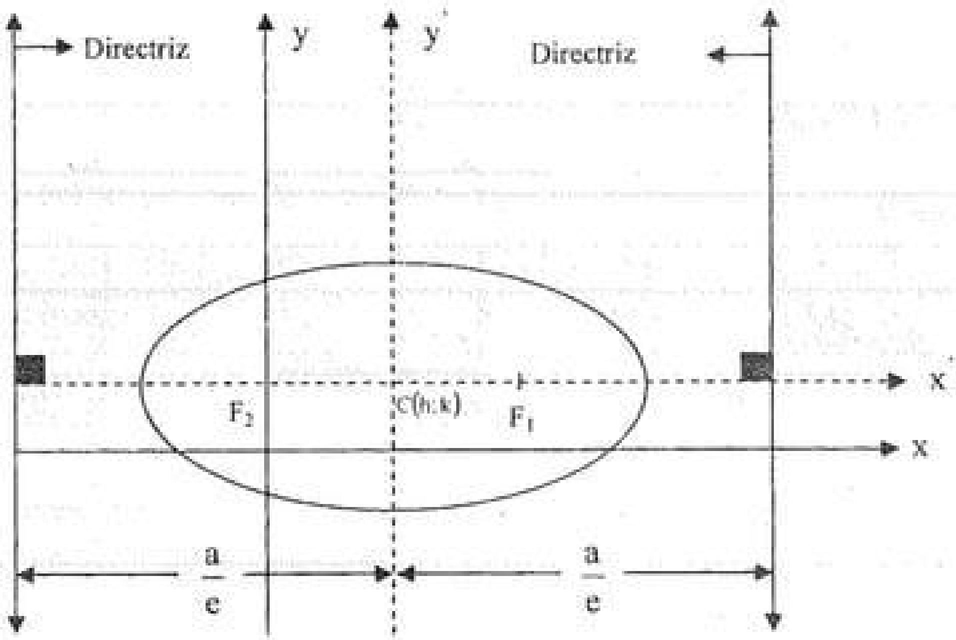
Eje Mayor ∥ Eje x

Eje Menor ∥ Eje y

$a^2 = b^2 + c^2$

$e = \frac{c}{a}$

$L.R. = \frac{2b^2}{a}$



ECUACION $\Longrightarrow$ $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

4) C (h;k)

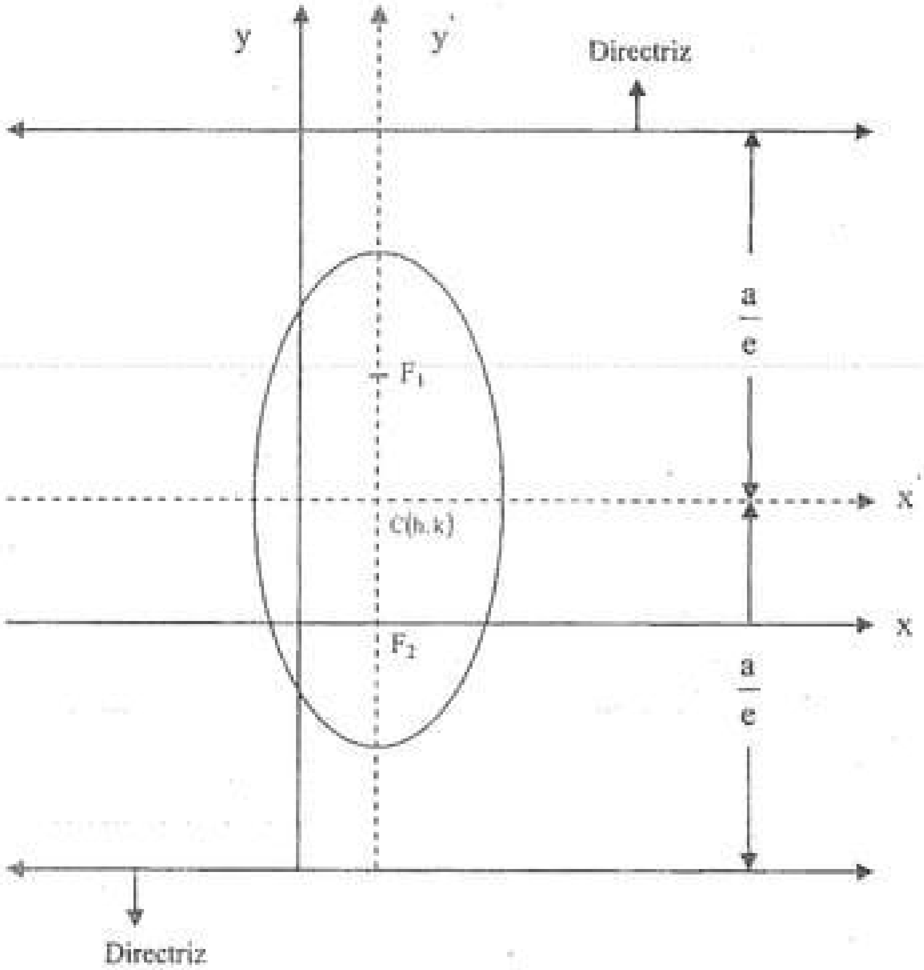
Eje Mayor $\parallel$ Eje y

Eje Menor $\parallel$ Eje x

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$e = \frac{c}{a}$$

$$L.R. = \frac{2b^2}{a}$$



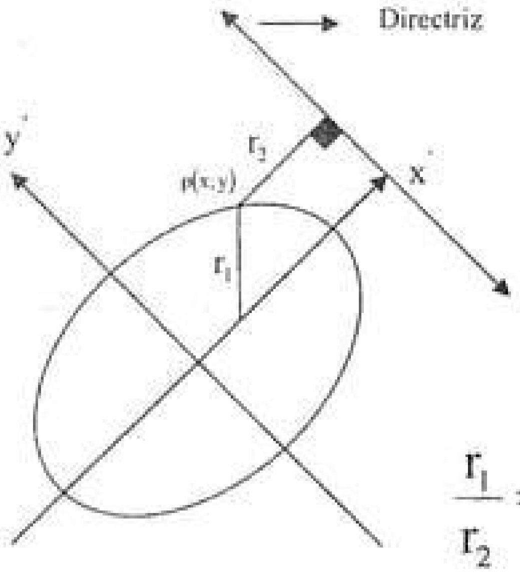
ECUACION $\Longrightarrow$ $\dfrac{(x-h)^2}{b^2} + \dfrac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

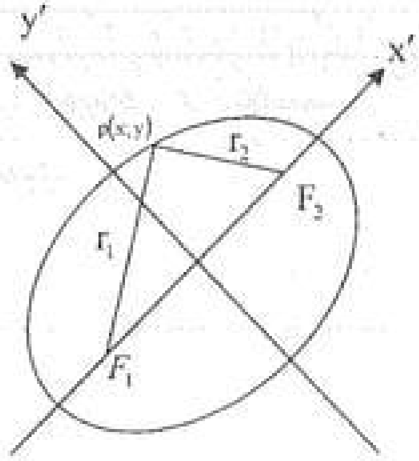
RELACION CON LA ECUACION GENERAL DE SEGUNDO GRADO

$$Ax^2 + Bxy + 2y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

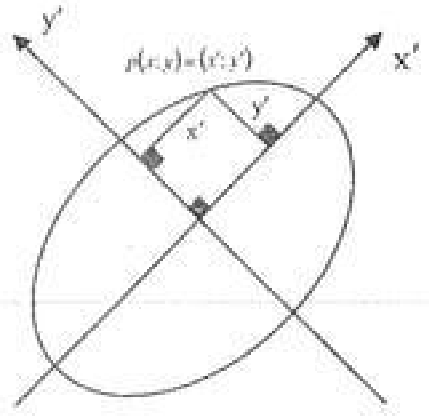
Si $B^2 - 4AC < 0$ $\Longrightarrow$ Elipse con los ejes no paralelos a los ejes de Coordenadas.

PROCEDIMIENTOS PARA ENCONTRAR ECUACIONES DE ELIPSES

DATOS	PROCEDIMIENTO
• FOCO • DIRECTRIZ CORRESPONDIENTE • EXCENTRICIDAD	 $$\frac{r_1}{r_2} = e$$

DATOS	PROCEDIMIENTO
• FOCOS • EJE MAYOR	 $$r_1 + r_2 = 2a$$

- ECUACIÓN EJE x'
- ECUACIÓN EJE y'
- EJE MAYOR
- EJE MENOR



$$\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=1$$

EJERCICIOS

1. H) Elipse

   Distancia entre las directrices $=\dfrac{25}{4}$

   Eje Focal X

   $e=\dfrac{4}{5}$

   C (0; 0)

   T) Ecuación

   Resp $\dfrac{x^2}{25/4}+\dfrac{y^2}{9/4}=1$

2. H) Elipse

   Distancia entre directrices = 54

   Eje Focal Y

   L.R=16

   C (0; 0)

   T) Ecuación

   Resp. $\dfrac{x^2}{72}+\dfrac{y^2}{81}=1$

3. H) Elipse

   Eje Mayor Y

   Eje menor X

   $a=5$

   $e=\dfrac{2}{3}$

   T) Ecuación

   Resp. $\dfrac{x^2}{13.89}+\dfrac{y^2}{25}=1$

4. H) Elipse
   Eje mayor Y
   Eje menor X

   $e = \dfrac{\sqrt{12}}{4}$

   $LR = 2$

   T) Ecuación

   Resp. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

5. H) Elipse

   $e = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

   $F_1(0;-2)$

   C (0; 0)

   T) Ecuación

   Resp. $\dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{5} = 1$

6. H) Elipse

   $e = \dfrac{3}{5}$

   $D_1 \Rightarrow X = \dfrac{50}{3}$

   C (0; 0)

   T) Ecuación

   Resp. $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{64} = 1$

7. H) Elipse

   $A\left(\sqrt{5}; 6{,}24\right) \in Elipse$

   $D_1 \Rightarrow Y = 10$

   C (0; 0)

   T) Ecuación

   Resp. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{49} = 1$

8. H) Elipse

   $A\left(0; 2\sqrt{10}\right) \in Elipse$

   $D_1 \Rightarrow Y = \dfrac{49\sqrt{10}}{20}$

   C (0; 0)

   T) Ecuación

   Resp. $\dfrac{x^2}{49} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

9. H) Elipse
   X^1: x= -4
   Y^1: y= 1

   Eje focal ∥ Eje X

   a = 3
   b= 2

   T) Ecuación

   Resp. $\dfrac{(x+4)^2}{9} + \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1$

10 H) Elipse
$X^1 = 10$
$Y^1 = 4$

Eje focal ∥ Eje Y

a = 8

$b = \sqrt{28}$

T) Ecuación

Resp. $\frac{(x-10)^2}{28} + \frac{(y-4)^2}{64} = 1$

11. H) Elipse
$F_1\ (1;\ 3)$
$F_2\ (-3;\ 3)$

$D_1 \Rightarrow X = 3$

$D_2 \Rightarrow X = -5$

T) Ecuación

Resp. $\frac{(x+1)^2}{8} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$

12. H) Elipse
$F_1\ (1;\ 6)$
$F_2\ (1;\ -4)$

$D_1 \Rightarrow Y = 16$

$D_2 \Rightarrow Y = -8$

T) Ecuación

Resp. $\frac{(x-1)^2}{20} + \frac{(y-1)^2}{45} = 1$

13. H) $F_1\ (1;\ -3)$
$V_1\ (10;\ -3)$
$e = \frac{4}{5}$

T) Ecuación

Resp. $\frac{(x+35)^2}{2025} + \frac{(y+3)^2}{729} = 1$

14. H) $F_1\ (-2;\ 3)$
$V_1\ (-2;\ 6) \in$ a la curva
$e = \frac{3}{4}$

T) Ecuación

Resp. $\frac{(x+2)^2}{63} + \frac{(y+6)^2}{144} = 1$

15 H) Elipse
$F_1\ (4;\ -5)$
Directriz $x = 1$
$e = \frac{2}{3}$

T) Ecuación

Resp. $\frac{(x-6{,}4)^2}{12{,}96} + \frac{(y+3)^2}{7{,}2} = 1$

16. H) Elipse
$F_1\ (4;\ 6)$
D_1: $Y = \frac{25}{3}$
P (1; 6,7) ∈ Curva

T) Ecuación

Resp. $16x^2 + 7y^2 - 128x - 42y + 207 = 0$

17. H) Elipse
$F_1\ (2;\ 3)$
$F_2\ (-2;\ 1)$
Eje mayor = 8

T) Ecuación elipse

Resp. $5x^2 + 16xy + 15y^2 + 8x - 60y - 116 = 0$

18. H) Elipse
$F_1(12; 5)$
$F_2(-8; 15)$
$A(0; 0) \in$ curva

T) Ecuación elipse

Resp. $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 60x - 168y = 0$

19. H) Elipse
Ejes: $x + y - 2 = 0$
$x - y + 2 = 0$
Longitud eje menor = 2
Longitud eje mayor = 8
Eje focal coincide con X'

T) Ecuación elipse

Resp. $17x^2 - 30xy + 17y^2 + 60x - 68y + 36 = 0$

20. H) Elipse
$e = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$F_1(2; 3)$
D: $x + y - 9 = 0$

T) Ecuación elipse

Resp. $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 6y - 29 = 0$

21. H) Elipse
$F_1(1; 0)$ pasa por $P(2; -1)$
D: $2x - y - 10 = 0$

T) Ecuación elipse

Resp. $17x^2 + 8xy + 23y^2 + 30x - 40y - 175 = 0$

22. H) Elipse
$F_1(2; 3)$
$F_2(-2; -1)$
D_1: $x + y - 9 = 0$
D_2: $x + y + 7 = 0$

T) Ecuación elipse

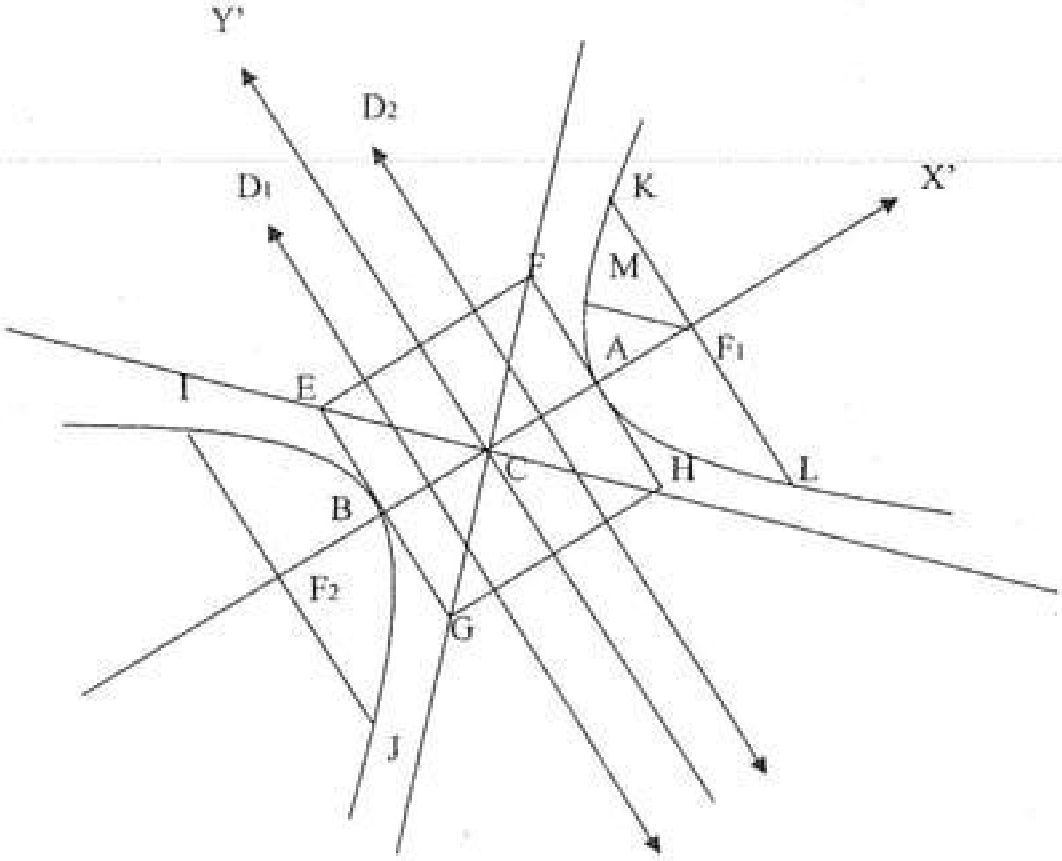
Resp. $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 6y - 29 = 0$

23. H) Elipse
$F_1(3; -1)$
$V_1(5; -2)$
$e = \dfrac{4}{5}$

T) Ecuación elipse

Resp. $61x^2 + 64xy + 109y^2 + 418x - 334y - 4079 = 0$

HIPÉRBOLA



ELEMENTOS

FOCOS: F1; F2

EJE FOCAL: $\overline{F1, F2}$

VÉRTICES A, B

RECTÁNGULO PRINCIPAL: E, F, G, H

CUERDAS: K, L

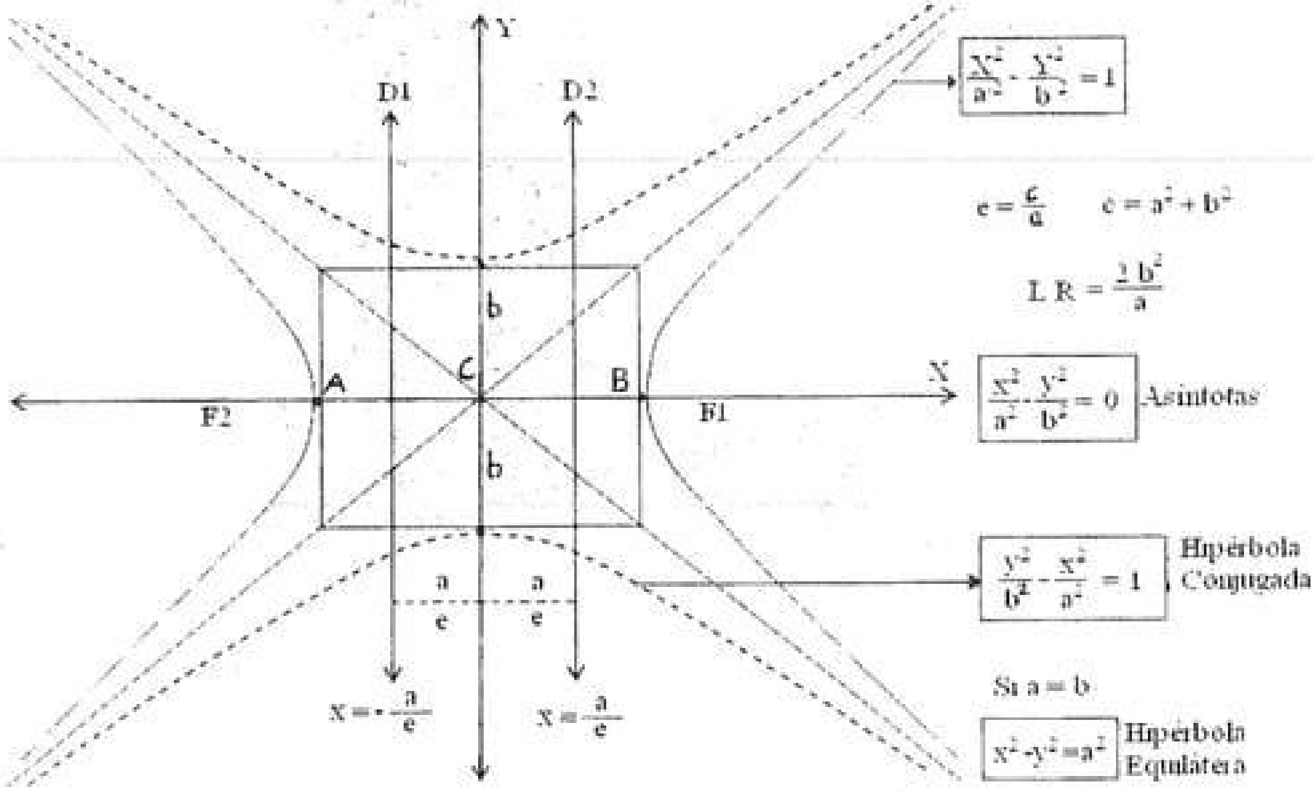
RADIO FOCAL: F, M

ASÍNTOTAS: FG, EG

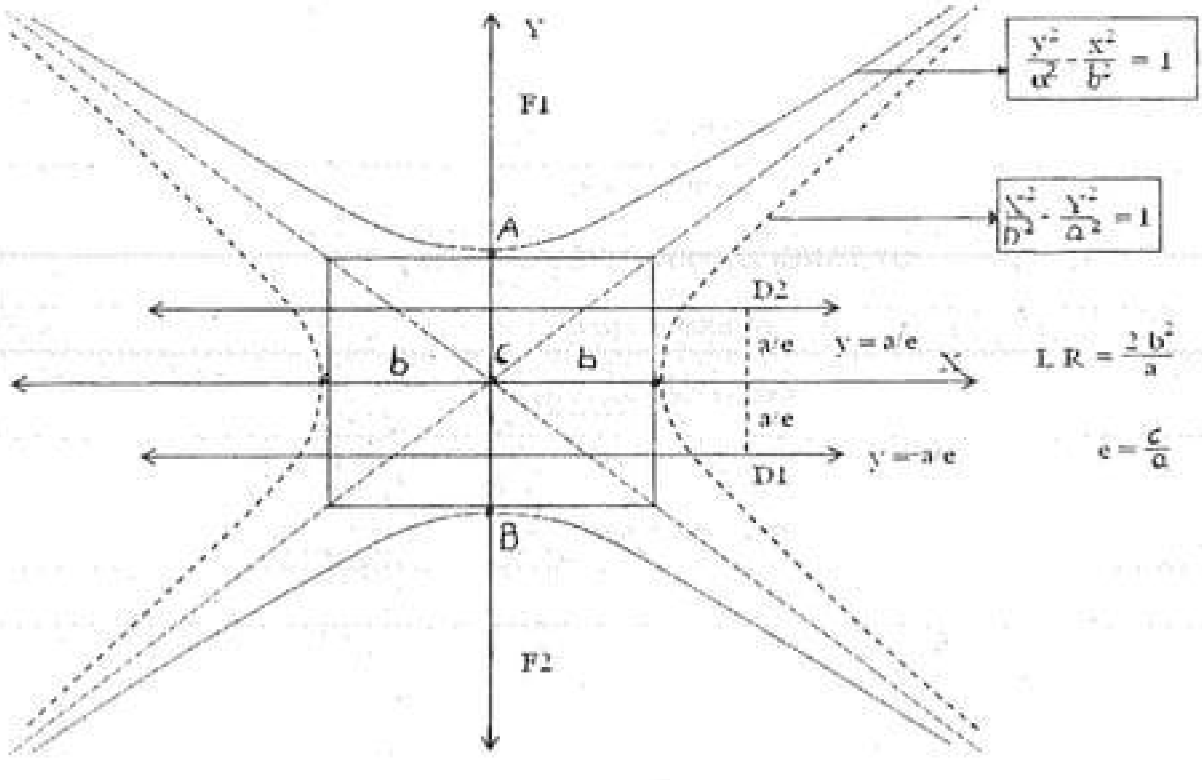
DIRECTRICES: D1, D2

ECUACIONES

1.- DATOS: C (0,0)
EJE FOCAL: EJE X

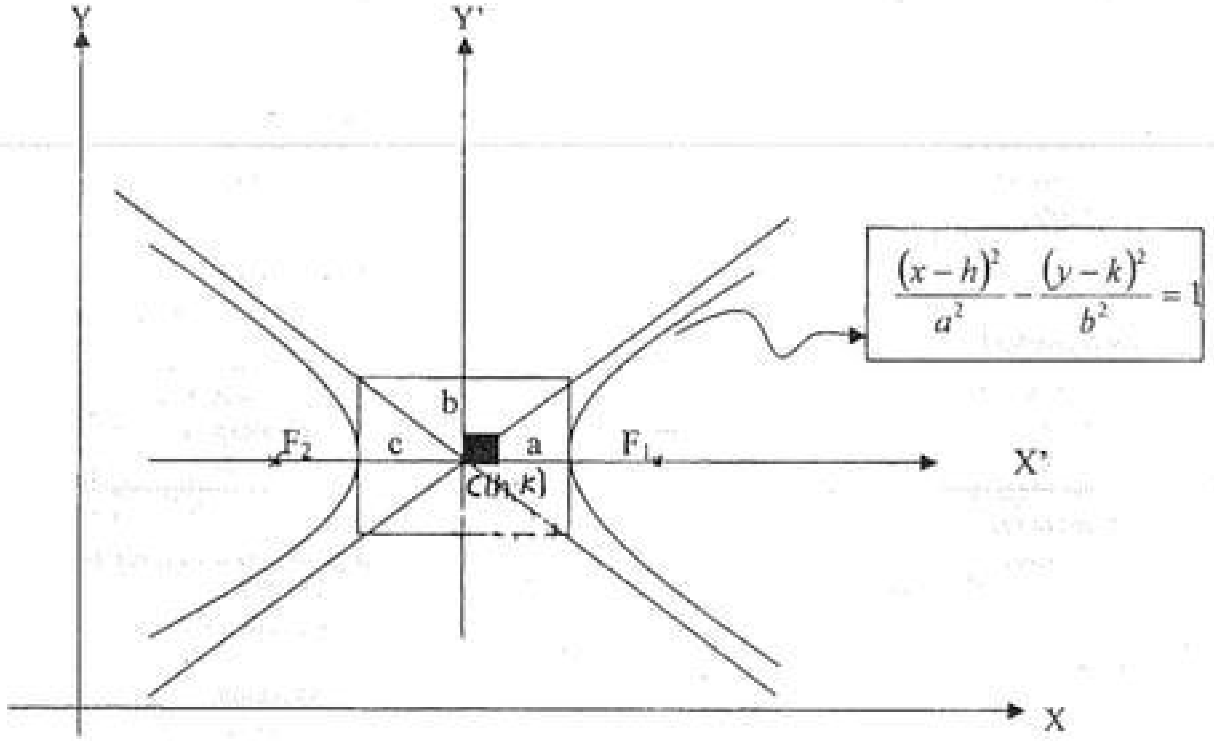


2.- DATOS: C (0,0)
EJE FOCAL: EJE Y

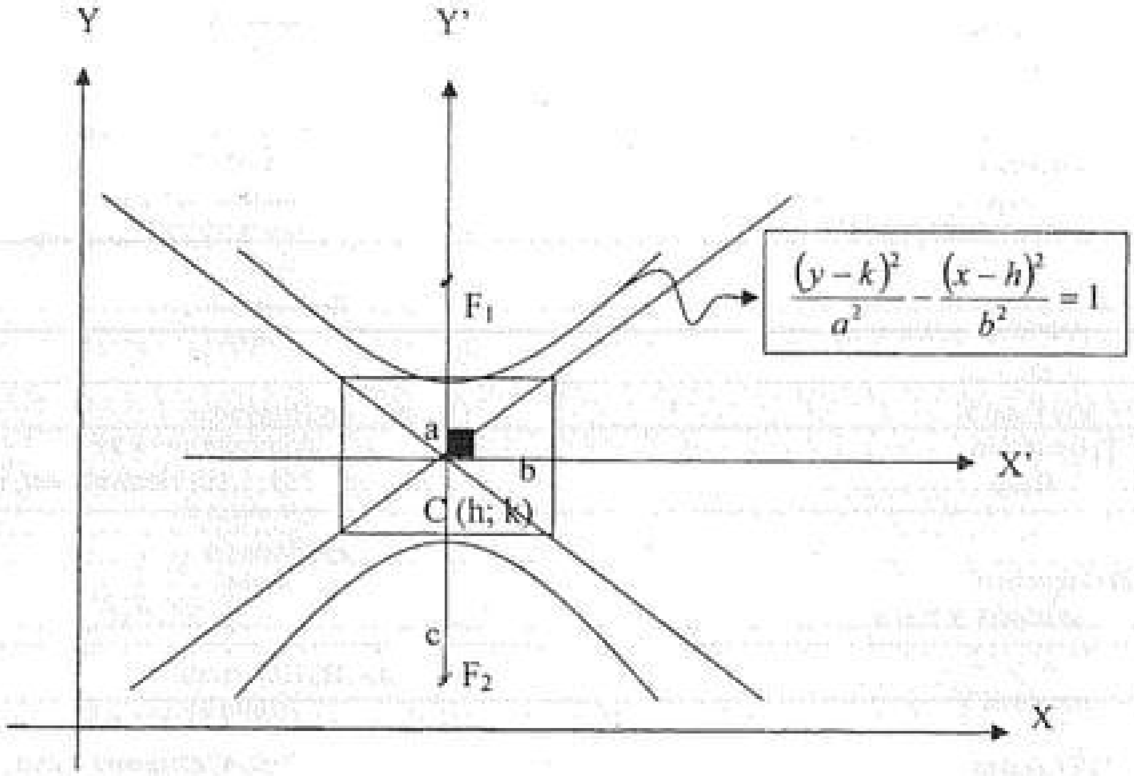


HIPÉRBOLAS TRASLADADAS

1. **DATOS:** C (h; k)
   EJE FOCAL // EJE X



2. **DATOS:** C (h; k)
   EJE FOCAL // EJE Y



3. **DATOS:** EJE FOCAL NO PARALELO EJES DE COORDENADAS

$$x^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

$$B^2-4AC>0$$

EJERCICIOS

1.- H) $D_1D_2 = 4$

$e = \frac{4}{3}$

C (0; 0)

Eje focal X

T) Ecuación

Resp. $\frac{x^2}{\frac{64}{9}} - \frac{y^2}{\frac{448}{81}} = 1$

2.- H) Hipérbola

$D_1D_2 = 6$

a = 4

C (0; 0)

Eje focal Y

T) Ecuación

Resp. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{12,44} = 1$

3.- H) Asíntotas $y = \pm\frac{4}{3}x$

L.C = $\frac{32}{9}$

$e = \frac{5}{3}$

Eje focal X

T) Ecuación

Resp. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

4.- H) Hipérbola

Asíntotas $y = \pm 2x$

L.R. = 2

Eje focal Y

T) Ecuación

Resp. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$

5.- H) Hipérbola

Asíntotas $y = \pm x$

$D_1D_2 = 2$

Eje focal X

T) Ecuación

Resp. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$

6.- H) Hipérbola

Asíntotas $y = \pm x$

$D_1D_2 = 2$

Eje focal Y

T) Ecuación

Resp. $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = 1$

7.- H) Hipérbola

Asíntotas $y = \pm\frac{2}{3}x$

D_1: x = 2

D_2: x = -2

T) Ecuación

Resp. $\frac{x^2}{5,78} - \frac{y^2}{2,57} = 1$

8.- H) Hipérbola

Asíntotas $y = \pm\frac{3}{2}x$

D_1: y = 2

D_2: y = -2

T) Ecuación

Resp. $\frac{y^2}{5,78} - \frac{x^2}{2,57} = 1$

9.- H) Hipérbola equilátera

C (0; 0)

Eje focal X

L.R. = 4

T) Ecuación

Resp. $x^2 - y^2 = 4$

10.- H) Hipérbola equilátera

C (0; 0)

Eje focal Y

a = 4

T) Ecuación

Resp. $y^2 - x^2 = 16$

11.- H) Hipérbola equilátera

C (0; 0)

Asíntota: $x - y = 0$

P (2; 1) elemento curva

Eje focal X

T) Ecuación

Resp. $x^2 - y^2 = 3$

12.- H) Hipérbola

Asíntotas $y = \pm 2x$

P (3; 1,12) elemento curva

Eje focal X

T) Ecuación

Resp. $\frac{x^2}{8,69} - \frac{y^2}{34,75} = 1$

13.- H) Hipérbola

Asíntotas $y = \pm\frac{4}{3}x$

P (0; 4) elemento curva

Eje focal Y

T) Ecuación

Resp. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

14.- H) $F_1\ (0;3)$

D_1: $x = \frac{4}{3}$

$C\ (0;0)$

$e = \frac{3}{2}$

T) Ecuación

Resp. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

15.- H) $F_1\ (0;5)$

D_1: $y = \frac{9}{5}$

$C\ (0;0)$

$L.R. = \frac{32}{2}$

T) Ecuación

Resp. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

16.- H) Hipérbola

$D_1D_2 = 2$

$P\ (4;6)$ elemento curva

$C\ (0;0)$

T) Ecuación

Resp. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

17.- H) Hipérbolas conjugadas

T) $e^2 \cdot e_1^2 = e^2 + e_1^2$

18.- H) Una elipse tiene por eje menor los focos de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 + 144 = 0$ y su excentricidad es recíproca a la excentricidad de la hipérbola.

T) Calcular la ecuación de la elipse

Resp. $\frac{x^2}{\frac{625}{4}} - \frac{y^2}{25} = 1$

19.- H) $D_1: x = -1$

$F_1\ (6;0)$

$C\ (0;0)$

$e = 3$

T) Ecuación

Resp. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{32} = 1$

20.- H) Hipérbola

$D_1: y = 1$

$F_1\ (0;4)$

$C\ (0;0)$

T) Ecuación

Resp. $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$

21.- H) Hipérbola

$D_1D_2 = 2$

$C\ (2;1)$

$a = 3$

Eje focal paralelo al eje X

T) Ecuación

Resp. $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{72} = 1$

22.- H) $D_1D_2 = 4$

$C = (4;3)$

$e = \frac{3}{2}$

Eje focal paralelo al eje Y

T) Ecuación

Resp. $\frac{(y-3)^2}{9} - \frac{(x-4)^2}{\frac{45}{4}} = 1$

23.- H) Hipérbola

Asíntota 1: $3x - 2y - 8 = 0$

Asíntota 2: $3x + 2y - 16 = 0$

$L.R. = \frac{3}{2}$

Eje focal // eje X

T) Ecuación

Resp. $\frac{(x-4)^2}{\frac{1}{9}} - \frac{(y-2)^2}{\frac{1}{2}} = 1$

24.- H) Asíntota 1: $4x - 3y - 24 = 0$

Asíntota 2: $4x + 3y = 0$

$e = \frac{5}{4}$

$L.R. = \frac{9}{2}$

Eje focal // eje Y

T) Ecuación

Resp. $\frac{(y+4)^2}{16} - \frac{(x-3)^2}{9} = 1$

25.- H) Hipérbola

Asíntota 1: $4x - 3y - 12 = 0$

Asíntota 2: $3x + 4y - 12 = 0$

$D_1D_2 = 4$

Eje focal // eje Y

T) Ecuación

Resp. $\frac{(y-0.48)^2}{[illegible]} - \frac{(x-3.36)^2}{[illegible]} = 1$

26.- H) Hipérbola

Asíntota 1: $\sqrt{3}x - y + 2(3 - \sqrt{3}) = 0$

Asíntota 2: $\sqrt{3}x + y - 2(3 + \sqrt{3}) = 0$

$D_1D_2 = 6$

Eje focal // eje Y

T) Ecuación

Resp. $\frac{(y-6)^2}{12} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1$

27.- H) Hipérbola
Asíntota 1: 2x + 3y + 2 = 0
Asíntota 2: 2x − 3y + 14 = 0
$D_1: x = -6$
$D_2: x = -2$
T) Ecuación
Resp. $\frac{(x+4)^2}{5,76} - \frac{(y-2)^2}{2,56} = 1$

28.- H) Hipérbola
Asíntota 1: 2x − 3y + 5 = 0
Asíntota 2: 2x + 3y − 25 = 0
$D_1: y = 6$
$D_2: y = -4$
T) Ecuación
Resp. $\frac{(y-5)^2}{\frac{325}{4}} - \frac{(x-5)^2}{\frac{1525}{16}} = 1$

29.- H) Hipérbola equilátera
C (4; 2)
Asíntota 1: x + y − 6 = 0
P (1; 2) elemento curva

T) Ecuación
Resp. $(x-4)^2 - (y-2)^2 = 9$

30.- H) Hipérbola equilátera
$c\left(3; \frac{6}{5}\right)$
Asíntota 1: 4x + 5y − 22 = 0
P (3; 5) elemento curva

T) Ecuación
Resp. $20x^2 - 20y^2 + 17xy - 158x + 45y + 393 = 0$

31.- H) Hipérbola
Asíntota 1: 2x + y − 3 = 0
Asíntota 2: 2x − y − 1 = 0
P (4; 6) elemento curva
T) Ecuación
Resp. $\frac{(x-1)^2}{\frac{11}{4}} - \frac{(y-1)^2}{11} = 1$

32.- H) Hipérbola
Asíntota 1: x − y − 5 = 0
Asíntota 2: x + y + 1 = 0
P (− 3; 1) elemento curva
T) Ecuación
Resp. $(x-2)^2 - (y+3)^2 = 9$

33.- H) Hipérbola
F_1 (1; −5)
$D_1: x = -5$
L.R. = 8
T) Ecuación

Resp. $\frac{(x+3)^2}{7,4} - \frac{(y+5)^2}{10,88} = 1$

34.- H) F_1 (3; 4)
$D_1: y = 2$
$e = \frac{5}{4}$
T) Ecuación
Resp. $\frac{(y-1,55)^2}{19,7} - \frac{(x-3)^2}{11,1} = 1$

35.- H) Hipérbola
Asíntota 1: x + 2y − 4 = 0
Asíntota 2: x − 2y = 0
F_1 (2; 5)
T) Ecuación
Resp. $\frac{(y-1)^2}{3,16} - \frac{(x-2)^2}{12,9} = 1$

36.- H) Hipérbola
F_1 (3; 2)
F_2 (-2; -1)
$e = \frac{3}{2}$
T) Ecuación
Resp. $x^2 + 3,3xy - 0,62y^2 - 2,32x - 0,89y - 6,36 = 0$

37.- H) Hipérbola
F_1 (-2; 4)
F_2 (2; -4)
L.R. = 3
T) Ecuación
Resp. $x^2 + 1,34xy - 0,16y^2 + 7,87 = 0$

38.- H) Hipérbola
C (3; 1)
F_2 (7; 3)
Vértice (5; 2)
T) Ecuación
Resp. $11x^2 + 16xy - y^2 - 82x - 46y + 71 = 0$

39.- H) Hipérbola
$D_1 D_2 = \frac{5}{2}$
C (3,5)
$a = \frac{29}{5}$
Eje focal x − 2y + 7 = 0
T) Ecuación
Resp. $x^2 + xy + 0,2y^2 - 11x - 5,7y - 12,32 = 0$

40.- **H)** Hipérbola
Asíntota 1: $25x - 20y + 41 = 0$
Asíntota 2: $27x + 50y - 13 = 0$
L.R. = 4
Eje focal $x - 5y + 5=0$
T) Ecuación
Resp.
$15225x^2 +$ [illegible]

41.- **H)** Hipérbola
Asíntota 1: $5x + 4y - 5 = 0$
Asíntota 2: $4x - 5y + 5 = 0$
$D_1 D_2 = 20$
Eje focal Y'
T) Ecuación
Resp. $x^2 - 0{,}45xy - y^2 + 0{,}5x + 1{,}26y + 106{,}2$

42.- **H)** Hipérbola
Asíntota 1: $3x + y - 3 = 0$
Asíntota 2: $x + 3y = 0$
D_1: $2x - 2y - 1 = 0$
D_2: $2x - 2y - 5 = 0$
T) Ecuación
Resp. $48x^2 - 160xy + 48y^2 - 168x + 216y + 155 = 0$

43.- **H)** Hipérbola
C (2; 7)
Asíntota 1: $x - 2=0$
P (0; 3) Elemento curva
T) Ecuación
Resp. $xy - 2y - 7x + 6 = 0$

44.- **H)** Hipérbola
Asíntota 1: $y = 3x$
Asíntota 2: $y = \dfrac{x}{3}$
P (2; 2) Elemento curva
T) Ecuación
Resp. $3x^2 - 10xy + 3y^2 + 16 = 0$

45.- **H)** Hipérbola
F_1 (4; 3)
D_1: $2x + y - 3 = 0$
L.R. = 8
T) Ecuación
Resp. $15y^2 - 20xy + 0x - 90y + 455 = 0$

46.- **H)** Hipérbola
X': $x - 3y + 3 = 0$
Y': $3x + y - 11 = 0$
$e = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$
L.R. = 2
Eje focal coincide con X'
T) Ecuación
Resp. $7x^2 + 18xy - 17y^2 - 78x + 14y + 108 = 0$

47.- **H)** Hipérbola
F_1 (5; 7)
F_2 (-3; -5)
$D_1 D_2 = 12$
T) Ecuación
Resp. $x^2 - 1{,}76xy + 0{,}26y^2 - 0{,}23x + 1{,}24y + 13{,}33 = 0$

48.- **H)** Hipérbola
F_1 (5; -2)
D_1 $2x - y - 3 = 0$
P (3; -2) Elemento curva
T) Ecuación
Resp. $496x^2 + 4xy + 496y^2 - 4988x + 1994y + 14491 = 0$

49.- **H)** Hipérbola
C (3; 1)
F_1 (7; 3)
A (2; 3) extremo eje imaginario
T) Ecuación
Resp. $x^2 + 16xy - 11y^2 - 22x - 26y - 29 = 0$

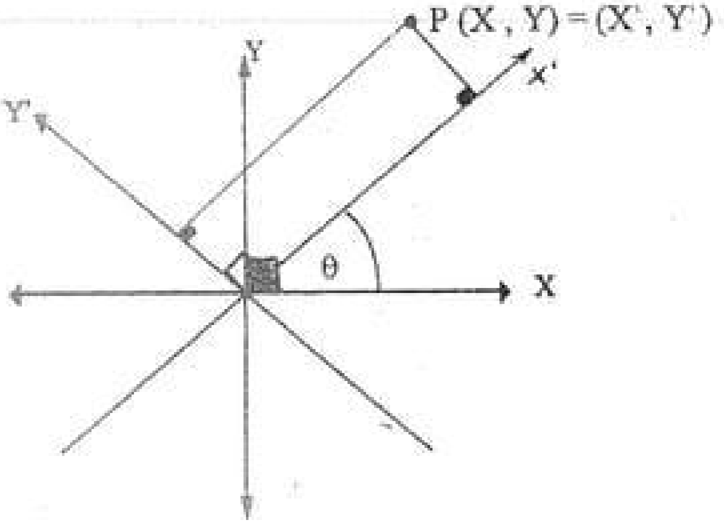
50.- **H)** Hipérbola equilátera
F_1: (-1; 2)
D_1: $2x + y - 5 = 0$
T) Ecuación
Resp. $3x^2 + 8xy - 3y^2 - 50x + 25 = 0$

ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
Si: $B = 0 \Rightarrow Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

1) $AC = 0$ Si $A \neq 0$ ó $C \neq 0$ PARÁBOLA
2) $AC > 0$ Si $A \neq C$ ELIPSE
Si $A = C$ CIRCUNFERENCIA
3) $AC < 0$ Si $A \neq C$ Si $A \neq 0$ ó $C \neq 0$ HIPÉRBOLA

ROTACIÓN DE EJES



$X = X' \cos\theta - Y' \operatorname{Sen}\theta$
$Y = X' \operatorname{Sen}\theta + Y' \cos\theta$

$\operatorname{Cot} 2\theta = \dfrac{A - C}{B}$

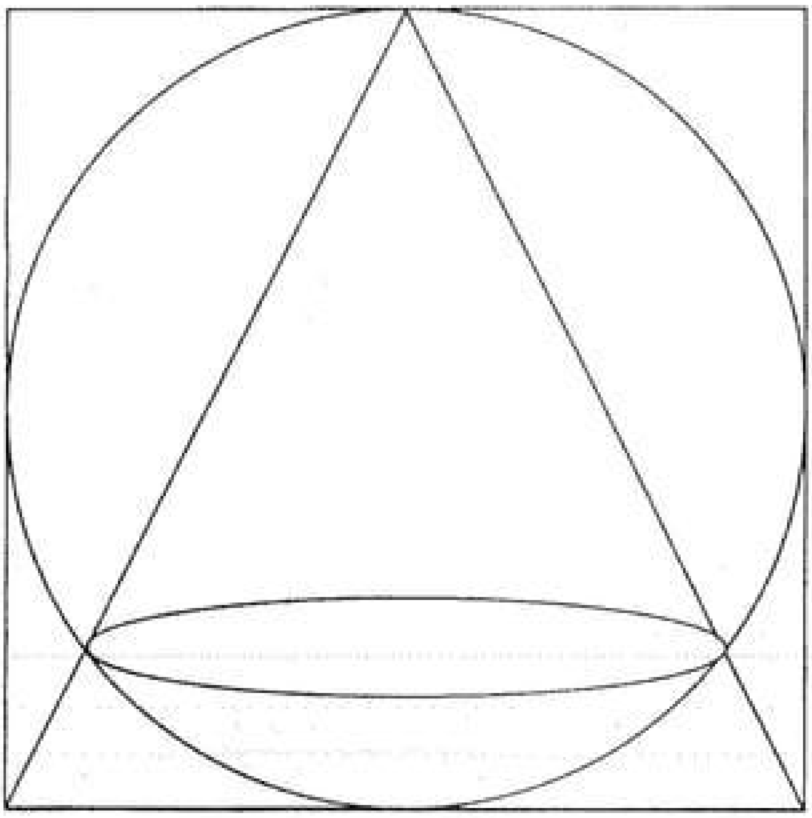
EJERCICIOS

IDENTIFICAR QUE FIGURA REPRESENTA LA SIGUIENTE ECUACIÓN Y ENCONTRAR SUS ELEMENTOS

1) $5X^2 + 2Y^2 - 10X + 4Y + 7 = 0$
2) $3X^2 + 5Y^2 - 6X - 10Y + 50 = 0$
3) $4X^2 - 9Y^2 + 24X + 36Y = 0$
4) $4X^2 + 4XY + Y^2 - 16X - 8Y + 14 = 0$
5) $4X^2 + 4XY + Y^2 - 16X - 8Y + 18 = 0$
6) $3X^2 + 4Y^2 - 24X + 40Y + 100 = 0$
7) $X^2 + 4XY + Y^2 - 3 = 0$
8) $13X^2 - 6\sqrt{3}XY + 7Y^2 - 16 = 0$
9) $16X^2 + 24XY + 9Y^2 - 130X + 90Y = 0$
10) $X^2 - 2XY + 4Y^2 + 2Y - 14X + 13 = 0$
11) $5X^2 + 4XY + Y^2 - 10X - 2Y + 10 = 0$
12) $2X^2 - XY - 3Y^2 = 0$
13) $X^2 - XY - 4Y = 0$
14) $X^2 + Y^2 + 4X - 6Y + 14 = 0$
15) $3X^2 + 3Y^2 - 4X + 2Y + 6 = 0$

GEOMETRIA
DEL ESPACIO

EJERCICIOS PROPUESTOS Y EJERCICIOS RESUELTOS



G. CALVACHE
T. ROSERO
M. YACELGA

CONTENIDOS

UNIDAD 1
CONCEPTOS FUNDAMENTALES

UNIDAD 2
POLIEDROS

UNIDAD 3
PRISMAS

UNIDAD 4
CILINDROS

UNIDAD 5
PIRAMIDES

UNIDAD 6
CONOS

UNIDAD 7
ESFERAS

UNIDAD 1

1. CONCEPTOS FUNDAMENTALES

1.1. - ESPACIO

Es el ambiente que nos rodea, es continuo y homogéneo, divisible, ilimitado y accesible en su totalidad. Es el conjunto de todos los puntos.

1.2. - CUERPO GEOMÉTRICO

Es una porción del espacio totalmente limitado.

1.3. - SUPERFICIE

Es lo que limita al cuerpo geométrico del resto del espacio.

1.4. - PLANO

Es un término no definido. La superficie de una mesa, la superficie de un espejo, etc. dan la idea de un plano.

Las propiedades que caracterizan a un plano son:

a) En todo plano existen infinitos puntos y rectas.
b) Fuera de todo plano existen infinitos puntos y rectas que no pertenecen a él.
c) Si dos puntos de una recta están en un plano, todos los puntos de esta recta pertenecen al plano.

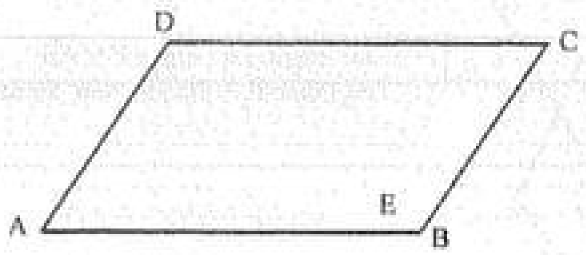
1.4.1.- DETERMINACIÓN

Es la propiedad fundamental que sirve para conocer cuando hay un plano y solo uno, que satisface ciertas condiciones.

a) Tres puntos no colineales.
b) Una recta y un punto externo a ella.
c) Dos rectas secantes.
d) Dos rectas paralelas

1.4.2. - REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Puede representarse por un triángulo, un círculo, o cualquier figura geométrica cerrada, pero generalmente se representa por un paralelogramo.



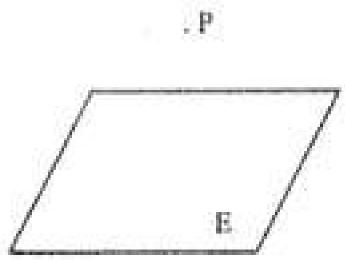
1.4.3. - DENOMINACIÓN

a) Con una letra mayúscula localizada en el interior de su representación. **Plano E.**
b) Por las letras de los vértices de su representación. **Plano ABCD.**
c) Por las letras de dos vértices opuestos. **Plano A - C; Plano B - D.**

1. 5. - POSICIÓN RELATIVA PUNTO - PLANO

1.5.1. - PUNTO EXTERNO

Si el punto no es elemento del plano.



Si: $P \notin$ Plano E
$\rightarrow$ P es Externo

1.5.2. - COPLANAR

Si el punto es elemento del plano.

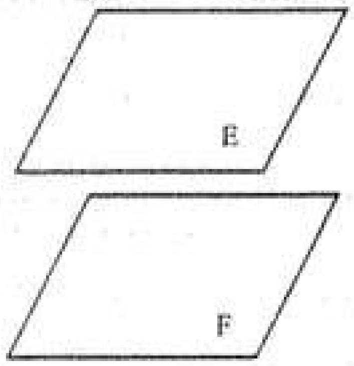
Si: $P \in$ plano E
$\Rightarrow$ P es Coplanar

1.6. - POSICIÓN RELATIVA PLANO - PLANO

1.6.1. - PARALELOS

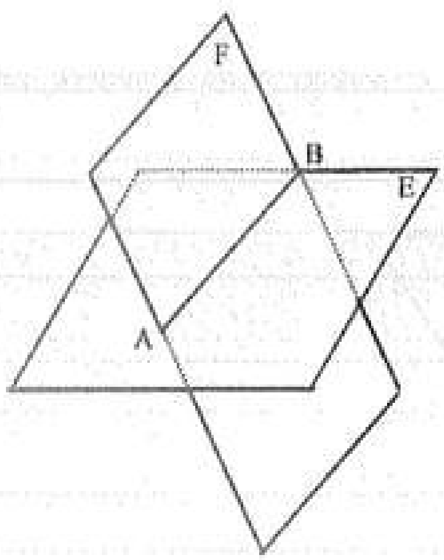
Si no tienen ningún punto en común.

Si: Plano E $\cap$ Plano F = $\varnothing$
$\Rightarrow$ Plano E $\parallel$ Plano F



1.6.2. - SECANTES

Si tienen en común una recta. La intersección entre dos planos es una recta.



Si: Plano E $\cap$ Plano F = $\overline{AB}$
$\Rightarrow$ Plano E $\wedge$ Plano F son Secantes

PROPIEDAD. - Si dos planos distintos tienen común un punto, tienen en común una recta.

1.6.3. - COINCIDENTES

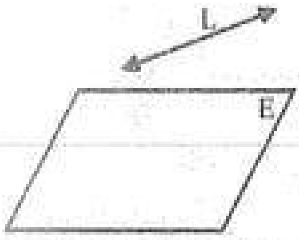
Si tienen tres puntos no colineales comunes.

1.7. - POSICIÓN RELATIVA RECTA - PLANO

1.7.1. - PARALELOS

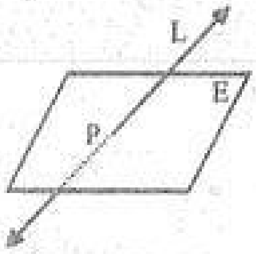
Si no tienen ningún punto común.

Si: $\overleftrightarrow{L} \cap$ Plano E = $\varnothing$
$\Rightarrow \overleftrightarrow{L} \parallel$ Plano E



1.7.2. - SECANTES

Si tienen un punto común. La intersección entre una recta y un plano es un punto.

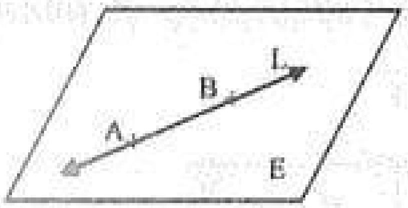


Si: $\overleftrightarrow{L} \cap$ Plano E = Punto P
$\Rightarrow \overleftrightarrow{L} \wedge$ Plano E, son Secantes

1.7.3. - COPLANARES

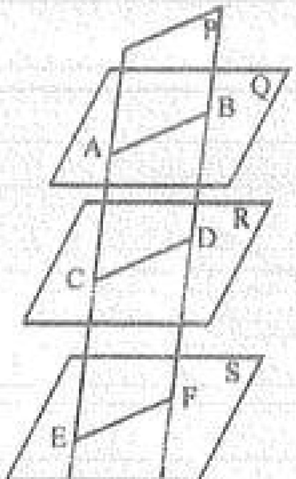
Si tienen dos puntos comunes.

Si: A $\in$ Plano E $\wedge$ B $\in$ Plano E
$\Rightarrow \overleftrightarrow{L} \in$ Plano E



1.8. - RECTAS Y PLANOS PARALELOS

- Las intersecciones de dos o más planos paralelos con un tercero son paralelos.
- Los segmentos de rectas que intersecan a tres o más planos, son proporcionales.

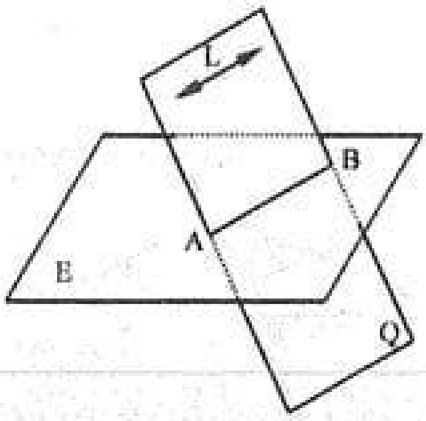


Si: Plano Q $\parallel$ Plano R $\parallel$ Plano S

$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF}$

y $$\frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DF}$$

- Si una recta es paralela a un plano, todo plano que pasa por esa recta y corta al primero, determina que la intersección entre los planos y la recta son paralelas.

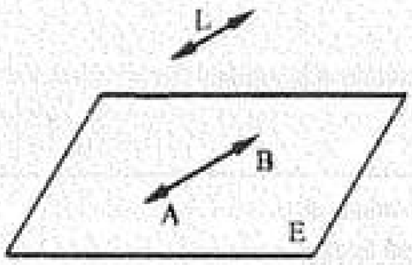


Si: $\overleftrightarrow{L} \parallel$ Plano E

$\wedge\ \overleftrightarrow{L} \in$ Plano Q

$\Rightarrow \overleftrightarrow{L} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

- Si una recta es paralela a una recta contenida en un plano, la recta es paralela al plano.



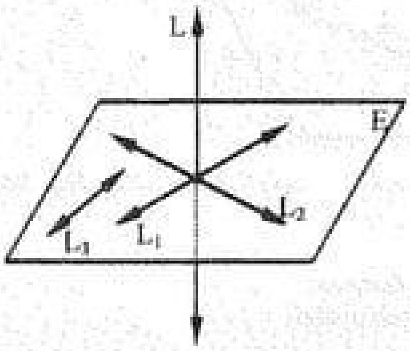
Si: $\overleftrightarrow{AB} \in$ Plano E

$\wedge\ \overleftrightarrow{L} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{L} \parallel$ Plano E

1.9. - RECTAS Y PLANOS PERPENDICULARES

- Si una recta es perpendicular a un plano, es perpendicular a todas las rectas contenidas en el plano.



Si: $\overleftrightarrow{L} \perp$ Plano E

$\Rightarrow \overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{L_1}$

$\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{L_2}$

$\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{L_3}$

- Para que una recta sea perpendicular a un plano, basta que sea perpendicular a dos rectas no paralelas situadas en el plano.

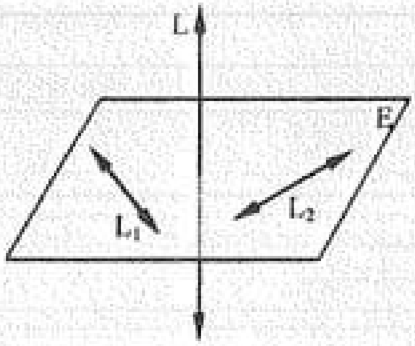
Si: $\overleftrightarrow{L_1} \in$ Plano E

$\overleftrightarrow{L_2} \in$ Plano E

$\overleftrightarrow{L} \perp L_1$

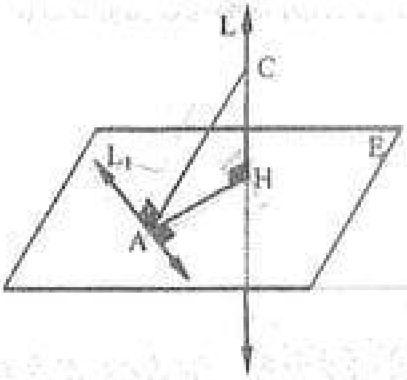
$\overleftrightarrow{L} \perp L_2$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{L} \perp$ Plano E



- TEOREMA DE LAS TRES PERPENDICULARES

Si desde el pie de una perpendicular a un plano se traza una perpendicular a una recta contenida en el plano, toda recta que une un punto cualquiera de la primera con el pie de la segunda perpendicular es perpendicular a la recta contenida en el plano.



H) $\overleftrightarrow{L} \perp$ Plano E

$\overline{HA} \perp \overleftrightarrow{L_1}$

T) $\overline{AC} \perp \overleftrightarrow{L_1}$

D) $\overleftrightarrow{L_1} \perp \overleftrightarrow{L}$

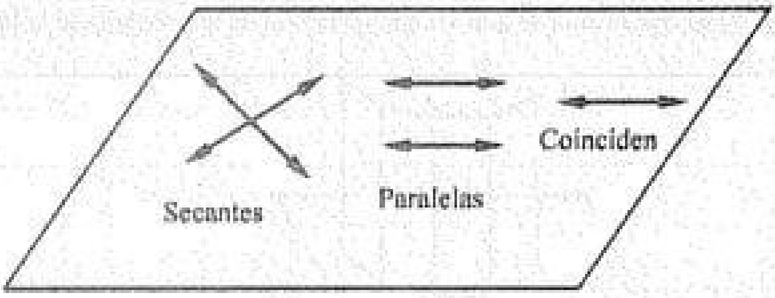
$\overleftrightarrow{L_1} \perp \overline{HA}$

$\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{L_1} \perp$ Plano AHC

$\therefore$ $\overleftrightarrow{L_1} \perp \overline{CA}$

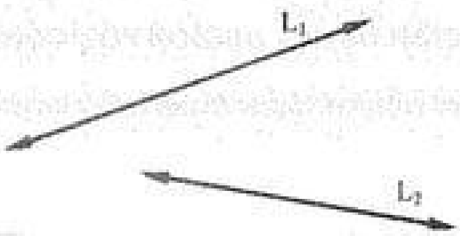
1.10. - POSICIÓN RELATIVA RECTA - RECTA

1.10.1. - COPLANARES



1.10.2. - NO COPLANARES

Se cruzan. No tienen un punto común.



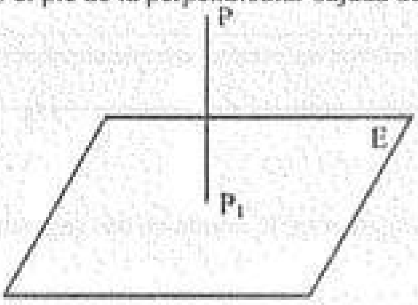
1.11. - PROYECCIONES

Para representar un objeto por medio de un dibujo en un plano, se construyen rectas imaginarias que proceden de varios puntos del objeto y que llegan al plano. El plano en el cual se va a representar el objeto se denomina **Plano de Proyección.** Las rectas imaginarias se denominan **Proyectantes.** La representación del cuerpo en el plano de proyección se denomina **Proyección.**

- PROYECCIONES PARALELAS ORTOGONALES.
  Cuando las proyectantes son perpendiculares al plano de proyección.
  En el presente estudio se utilizará únicamente las proyecciones paralelas ortogonales.

1.11.1. - PROYECCIÓN DE UN PUNTO EN UN PLANO

Es el pie de la perpendicular bajada desde el punto al plano.



Objeto: El punto P

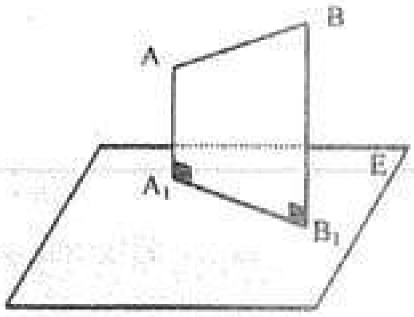
Proyectante: $\overline{PP_1}$

Plano de Proyección: Plano E

Proyección: P_1

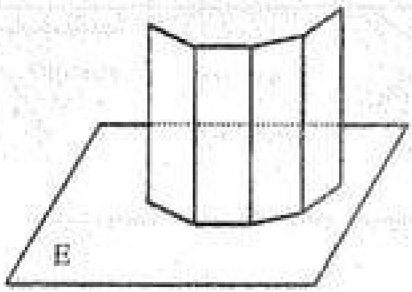
1.11.2. - PROYECCIÓN DE UN SEGMENTO EN UN PLANO

Es otro segmento que resulta de unir las proyecciones de los extremos del segmento dado, excepto en el caso de que el segmento sea perpendicular al plano.



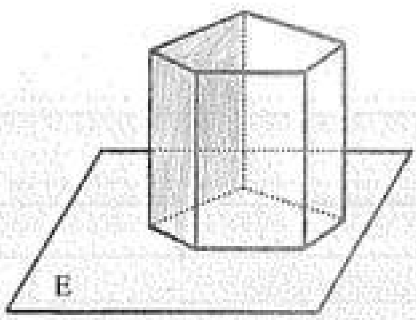
1.11.3. - PROYECCIÓN DE UNA LINEA POLIGONAL EN UN PLANO

Es otra poligonal que resulta de unir las proyecciones de los vértices de la línea poligonal dada.



1.11.4. - PROYECCIÓN DE UNA REGIÓN POLIGONAL EN UN PLANO

Es otra región poligonal que se forma al unir las proyecciones de los vértices de la región poligonal dada.



1.11.5. - PROPIEDADES.

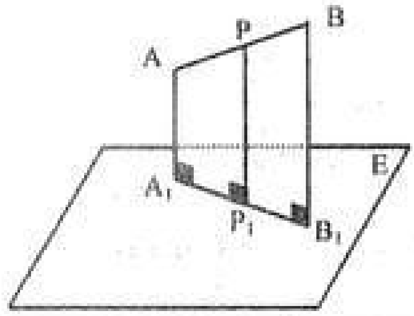
Las proyecciones de dos rectas paralelas sobre un plano, son paralelas.

Si dos rectas son perpendiculares entre sí, y una de ellas es paralela a un plano, sus proyecciones en este plano son también perpendiculares entre sí.

Cada punto y recta en el espacio tienen una sola proyección.

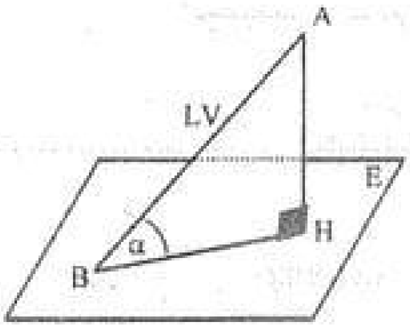
Regla de Proporcionalidad : Un punto cualquiera situado en un segmento, le divide en dos segmentos cuya razón es la misma en todas las proyecciones del segmento.

$$\frac{AP}{PB} = \frac{A_1P_1}{P_1B_1}$$



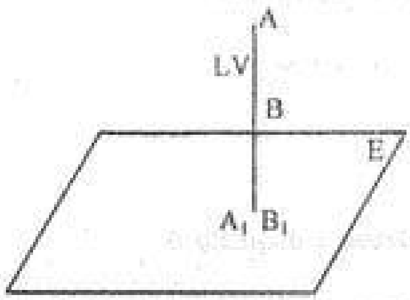
1.12. - ÁNGULO RECTA – PLANO

Es el ángulo formado entre la recta y su proyección en el plano.



$BH = AB \cos \alpha$
La proyección es menor

- Si la recta es perpendicular al plano, su proyección es un punto.

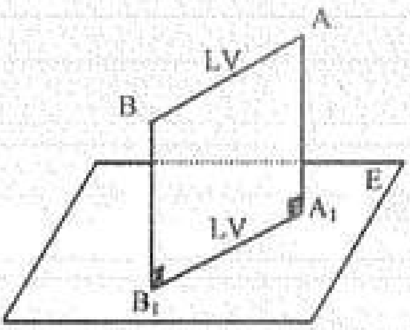


Si: $\hat{\alpha} = 90°$

$A_1B_1 = AB \cos 90°$

$A_1B_1 = 0$ es un punto.

- Si un segmento es paralelo al plano, su proyección tiene la misma longitud que el segmento.



Si: $\hat{\alpha} = 0°$

$A_1B_1 = AB \cos 0°$

$A_1B_1 = AB$

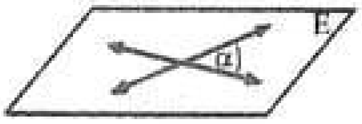
El segmento esta proyectado en longitud verdadera

1.13. - ÁNGULO RECTA – RECTA

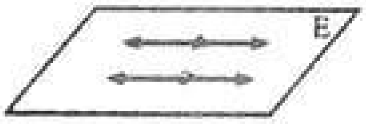
Es el ángulo agudo formado entre las dos rectas, medido cuando las dos rectas están en longitud verdadera.

1.13.1. - COPLANARES

a) Secantes

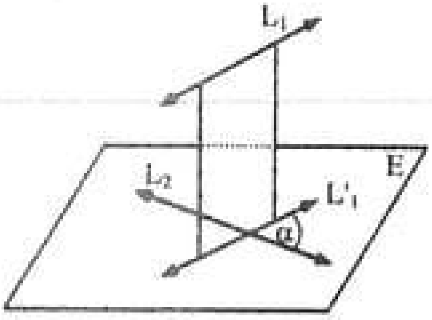


b) Paralelas



$\hat{\alpha} = 0°$

1.13.2. - NO COPLANARES (SE CRUZAN)

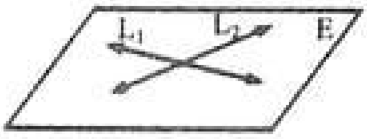


1.14. - DISTANCIA MÍNIMA ENTRE DOS RECTAS

Es la longitud de la perpendicular común a las dos rectas.

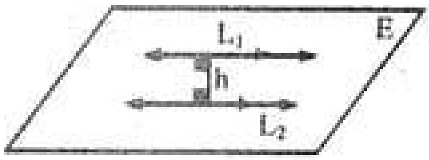
COPLANARES

a) Secantes

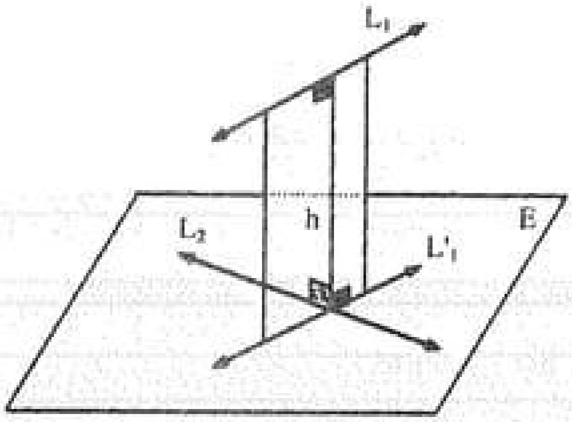


Distancia mínima cero.

b) Paralelas



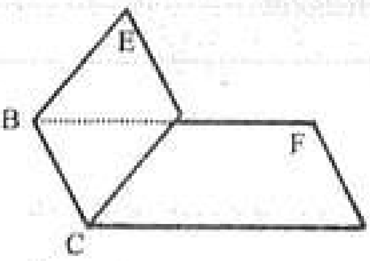
Distancia mínima h.



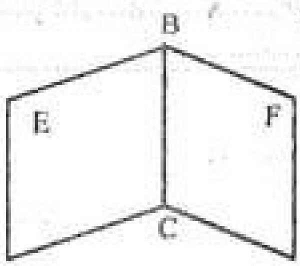
Distancia mínima h.

1.15. - ÁNGULO DIEDRO

1.15.1. - REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y ELEMENTOS



La arista es la recta común BC



Las caras son los Planos E y F

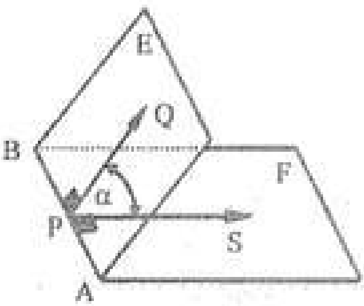
1.15.2. - DENOMINACIÓN

a) Por las letras de la arista: Diedro B – C

b) Por las letras de las caras y la arista: Diedro E - BC - F

1.15. 3. - ÁNGULO PLANO DE UN ÁNGULO DIEDRO . MEDIDA

Es el ángulo formado por dos perpendiculares a la arista en un mismo punto y una en cada cara. La medida de un ángulo diedro es igual a la medida de su ángulo plano.



Si: $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$

$\overline{PQ} \in$ Plano E

$\overline{PS} \perp \overline{AB}$

$\overline{PS} \in$ Plano F

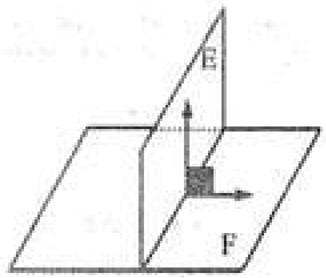
$\widehat{\alpha} =$ Ángulo Diedro

1.15.4. - CLASIFICACIÓN

- Por su Medida; Recto, Agudo, Obtuso, Llano, Complementarios, Suplementarios.
- Por su Posición; consecutivos, Adyacentes, Opuestos por la Arista.

1.15.5. - PLANOS PERPENDICULARES

Si la medida del ángulo diedro es igual a 90°.



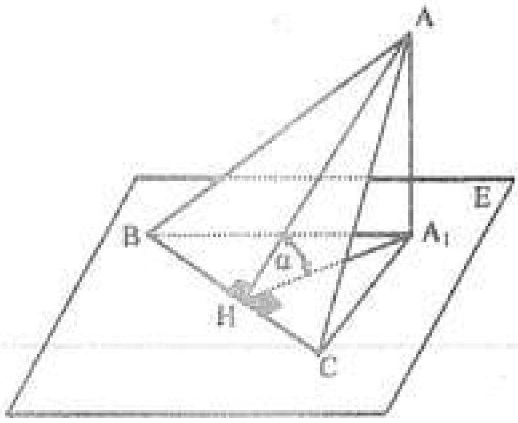
1.15.6. - PROPIEDADES

- Si dos planos son perpendiculares, toda perpendicular a su intersección trazada en uno de ellos es perpendicular al otro plano.
- Si una recta es perpendicular a un plano, todo plano que pase por dicha recta o paralela a ella, es perpendicular al mismo plano.
- Un plano y una recta perpendiculares a un mismo plano son paralelas.

1.15.7. - PROYECCIÓN DE UN REGIÓN POLIGONAL

La proyección de una región poligonal sobre un plano tiene por medida el área proyectada multiplicada por el coseno del ángulo entre los dos planos.

a) Un lado es Paralelo al Plano de Proyección.

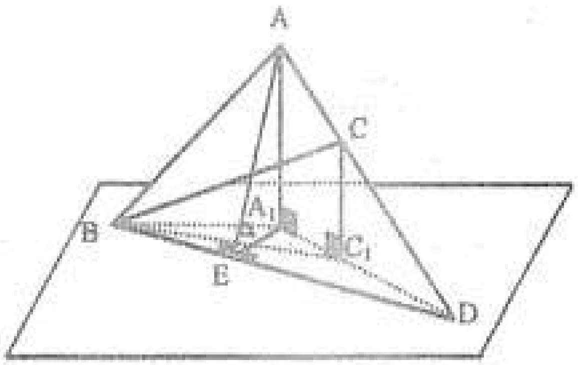


T) $S_{\Delta ABC} \times Cos\,\alpha = S_{\Delta BA_1C}$

D) $\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta BA_1C}} = \dfrac{AH}{A_1H} = \dfrac{1}{Cos\,\alpha}$

$$S_{\Delta ABC} \times Cos\,\alpha = S_{\Delta BA_1C}$$

b) Ninguno de los lados es Paralelo al Plano de Proyección.



T) $S_{\Delta ABC} \times Cos\,\alpha = S_{\Delta BA_1C_1}$

D) $S_{\Delta ABD} \times Cos\,\alpha = S_{\Delta BA_1D}$

$S_{\Delta BCD} \times Cos\,\alpha = S_{\Delta BC_1D}$

$Cos\,\alpha(S_{\Delta ABD} - S_{\Delta BCD}) = S_{\Delta BA_1C_1}$

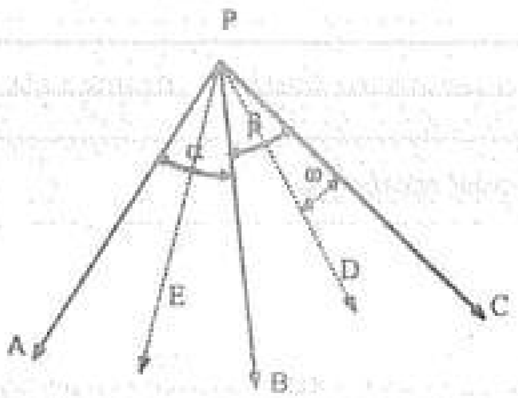
$$S_{\Delta ABC} \times Cos\,\alpha = S_{\Delta BA_1C_1}$$

Si se tiene un polígono cualquiera, se descompone en triángulos, y como la relación es la misma para los triángulos proyectados y para sus respectivas proyecciones, lo será para el polígono entero y su proyección.

1.16. - ÁNGULOS POLIEDROS

Es la figura formada por varios planos que pasan por un mismo punto, y limitado por sus intersecciones sucesivas.

1.16.1. - REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y ELEMENTOS



Vértice: P

Aristas: $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$,...

Caras: PAB, PBC, PCD,...

Angulos caras: $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\omega}$,...

1.16.2. - DENOMINACIÓN

Por la letra del vértice y por las letras de las aristas.

Angulo Poliedro P - ABCDE...

1.16.3. - CONGRUENCIA

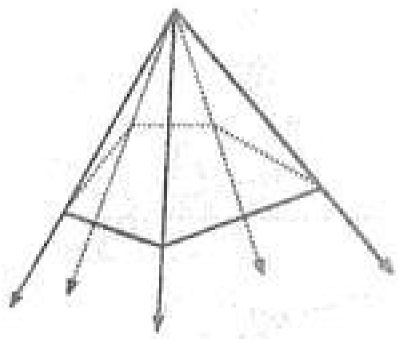
Dos ángulos poliedros son congruentes cuando tienen respectivamente congruentes sus ángulos caras y sus ángulos diedros.

1.16.4. - CLASIFICACIÓN

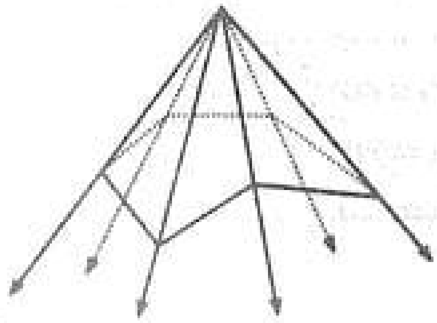
a) Por su Posición en el Espacio:

- Cóncavo y convexo.

  Si todos los puntos están situados en el mismo semiespacio con relación al plano de cada una de sus caras, el ángulo poliedro es convexo, caso contrario es cóncavo.



CONVEXO



CONCAVO

b) Por el número de caras.

Número de Caras	Nombre
3 caras	Angulo Triedro
4 caras	Angulo Tetraedro
5 caras	Angulo Pentaedro
6 caras	Angulo Hexaedro
7 caras	Angulo Heptaedro

c) Ángulos Poliedros Regulares.

Si todos los ángulos diedros y los ángulos caras son respectivamente congruentes.

d) Triedro Trirrectángulo.

Si los ángulos cara y los ángulos diedros miden 90°

1.16.5. - PROPIEDADES

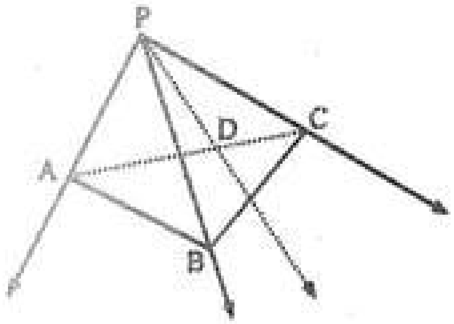
a) En un ángulo triedro, la suma de los ángulos cara es mayor que el tercero.

T) $m\,\widehat{APB} + m\,\widehat{BPC} > m\,\widehat{APC}$

D) $m\,A\hat{P}B = m\,A\hat{P}D$ (construcción)
PA = PB = PD (construcción)
$\Delta APB \cong \Delta APD$
AB = AD
AB + BC > AC
AB + BC > AD + DC
BC > DC
$\therefore\ m\,B\hat{P}C > m\,D\hat{P}C$

$m\,A\hat{P}B + m\,B\hat{P}C > m\,A\hat{P}D + m\,D\hat{P}C$

$m\,A\hat{P}B + m\,B\hat{P}C > m\,A\hat{P}C$



b) La suma de los ángulos caras de un ángulo poliedro es menor a 360°

T) $m\,A\hat{P}B + m\,B\hat{P}C + m\,C\hat{P}D + m\,D\hat{P}E + \ldots\ldots\ldots\ldots < 360°$

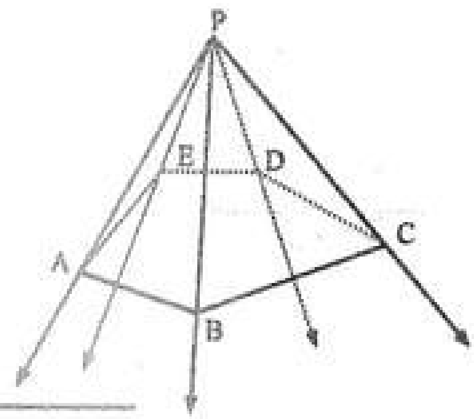
D) $m\,E\hat{A}B < m\,E\hat{A}P + m\,B\hat{A}P$

$m\,A\hat{B}C < m\,A\hat{B}P + m\,C\hat{B}P$

$m\,B\hat{C}D < m\,B\hat{C}P + m\,D\hat{C}P$

. . .
. . .

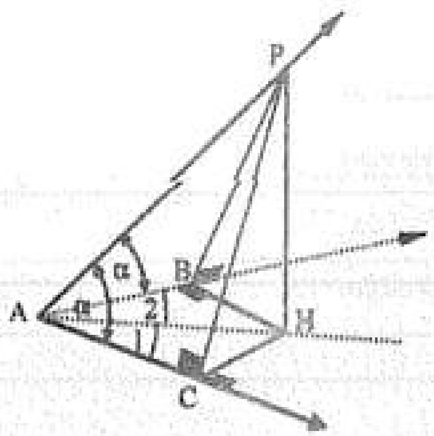
. . .



$180°(n-2) < 180°n - \left(m\,A\hat{P}B + m\,B\hat{P}C + m\,C\hat{P}D + \ldots\ldots \right)$

$m\,A\hat{P}B + m\,B\hat{P}C + m\,C\hat{P}D + m\,D\hat{P}E + \ldots\ldots\ldots\ldots < 360°$

c) Si dos ángulos planos de un ángulo triedro son iguales, la proyección de un punto de la arista que determinan estos dos ángulos es elemento de la bisectriz del tercer ángulo plano.



T) $\hat{1} = \hat{2}$

D) Δ APB $\cong \Delta$ APC (Rectángulos, AP, α)
$\therefore$ AB = AC
Δ ABH $\cong \Delta$ AHC (Rectángulos, AB = AC, AH)
$\therefore\ \hat{1} = \hat{2}$

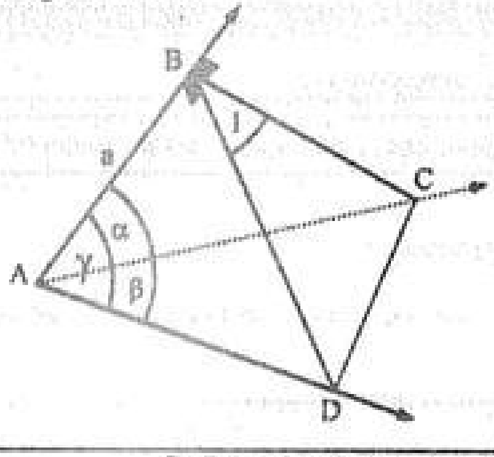
d) Ángulo diedro en función de los ángulos planos de un ángulo Triedro.

Δ ABC

$BC = a Tag.\hat{\alpha}$

$AC = \dfrac{a}{Cos\,\hat{\alpha}}$

Δ ABD



$BD = aTag.\hat{\gamma}$

$AD = \dfrac{a}{Cos\,\hat{\gamma}}$

ΔACD

$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2\times AC \times AD \times Cos\,\hat{\beta}$

$CD^2 = \dfrac{a^2}{Cos^2\hat{\alpha}} + \dfrac{a^2}{Cos^2\hat{\gamma}} - \dfrac{2\times a^2 \times Cos\,\hat{\beta}}{Cos\,\hat{\alpha}\,Cos\,\hat{\gamma}}$

ΔBCD

$CD^2 = BD^2 + BC^2 - 2\times BD \times BC \times Cos\,\hat{1}$

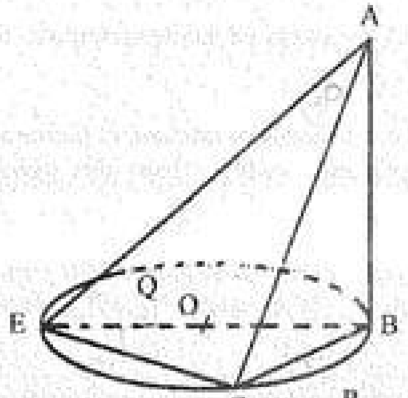
$CD^2 = a^2Tag^2\,\hat{\gamma} + a^2Tag^2\,\hat{\alpha} - 2\times aTag\,\hat{\gamma} \times aTag\,\hat{\alpha} \times Cos\,\hat{1}$

$$\frac{a^2}{Cos^2\hat{\alpha}} + \frac{a^2}{Cos^2\hat{\gamma}} - \frac{2\times a^2\times Cos\,\hat{\beta}}{Cos\,\hat{\alpha}\,Cos\,\hat{\gamma}} = a^2Tag^2\,\hat{\gamma} + a^2Tag^2\,\hat{\alpha} - 2\times aTag\,\hat{\gamma}\times aTag\,\hat{\alpha}\times Cos\,\hat{1}$$

$$\therefore\ Cos\,\hat{1} = \frac{Cos\,\hat{\beta} - Cos\,\hat{\alpha}\,Cos\,\hat{\gamma}}{Sen\,\hat{\alpha}\,Sen\,\hat{\gamma}}$$

1.17. - EJERCICIOS

1. -



H) $\overline{AB} \perp$ Plano Q

$\widehat{EAC} = 30°$

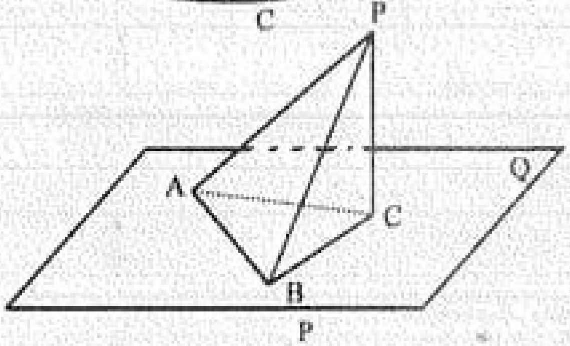
EO = OB = 7 m

CB = 10 m

T) $S_{\Delta EAC}$ =?

Resp. 83.13 m²

2. -



H) $\overline{PC} \perp$ Q

AB = 8 cm

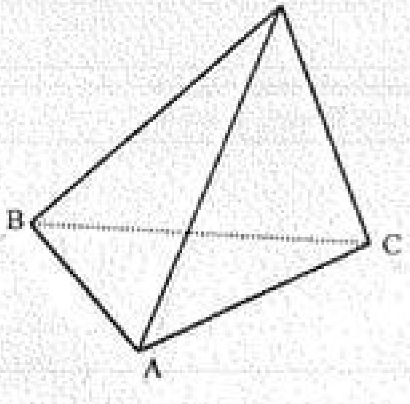
PA = PB = 13 cm

PC = 12 cm

T) Distancia de C a $\overline{AB}$ = ?

Resp: 3 cm

3. -



H) AB =6 u

BC = 8 u

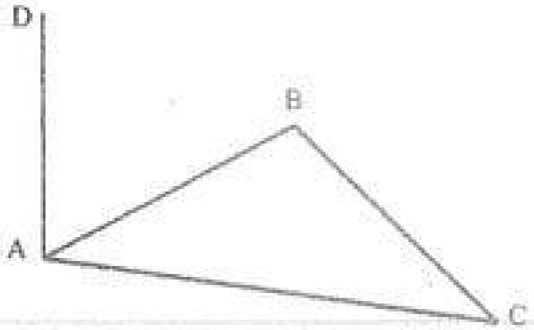
AC = 10 u

Los ángulos entre $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ y $\overline{PC}$ con el Plano del Δ ABC es 40°

T) Distancia de P al Plano del Δ ABC

Resp: 4.19 u

4. -

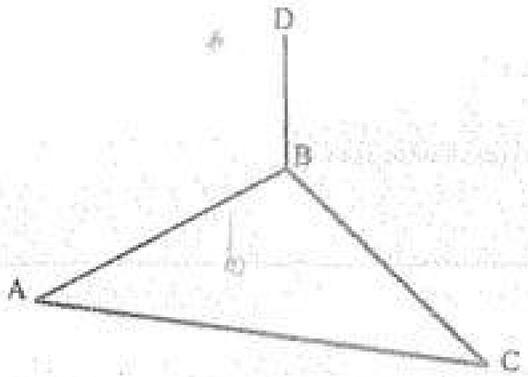


H) $\triangle$ ABC rectángulo en A
BA = AC = 10 u
AD = 15 u y $\perp$ Plano $\triangle$ABC

T) Distancia del punto D a $\overleftrightarrow{BC}$

Resp: 16.58 u

5. -



H) $\hat{A} = 90^o$
BD $\perp$ Plano $\triangle$ABC
AC = 8 u
DC = 10 u

T) Distancia del punto D a AC

Resp: 6u

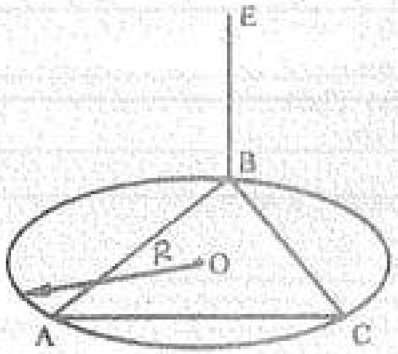
6. - En un plano P se tiene un ángulo, $B\hat{A}C = 60^o$. Un punto S en el espacio dista **25 m.** del vértice del ángulo A, 7 m. del lado $\overline{AB}$ y 20 m. del lado $\overline{AC}$. Hallar la distancia del punto S al plano P. Resp: 6.04 m

7. - Demostrar que la distancia del centro de gravedad de un triángulo a un plano es media aritmética de las distancias de los tres vértices del mismo triángulo al plano dado.

8. - Un triángulo equilátero ABC es perpendicular a un cuadrado ABDE. El segmento que une el punto medio del lado $\overline{AC}$ con el punto medio del lado $\overline{BD}$ mide 10 m. ¿Cuánto mide el lado del triángulo? Resp: 10 m

9. - La proyección del triángulo ABC sobre un plano P resulta un triángulo AB'C' equilátero de lado 8 m. Las proyectantes CC' = 4 m y BB' = 8 m. Hallar el valor de la proyectante del ortocentro. Resp: 4 m.

10. -

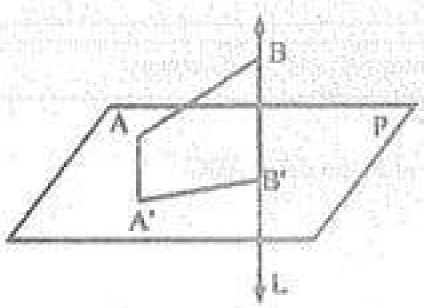


H) $R = \sqrt{3}$
BE $\perp$ Plano $\triangle$ ABC (EQUILÁTERO)
BE = 1 u

T) $S_{\triangle ABC}$ =?

Resp: 4.17 u²

11. -



H) Proyección de $\overline{AB}$ sobre el Plano P es 8 u
Proyección de $\overline{AB}$ sobre la recta L es 6 u
$\overleftrightarrow{L} \perp$ Plano P

T) AB =?

Resp: 10u

12. - Un triángulo rectángulo ABC, tiene: $\hat{A} = 90°$; $\hat{B} = 30°$ se proyecta en un plano P obteniéndose el Δ A'B'C', si $\hat{B'} = 45°$; AC = A'C' y AB = 6u. Hallar el ángulo entre el plano P y el Δ ABC. Resp: 54,76°

13. - Dos puntos A y B situados a distinto lado de un plano P distan de este plano 6u y 2u respectivamente. Si la proyección del $\overline{AB}$ en el plano P es 15 u. Encontrar la distancia entre los puntos A y B. Resp: 17u

14. - Tres segmentos miden 13u, 14u y 15u y están contenidos en tres planos paralelos respectivamente. Si la proyección de los segmentos en un cuarto plano paralelo es un triángulo. Calcular el área de este triángulo. Resp: 84 u^2.

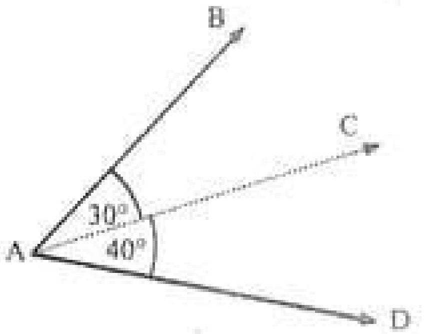
15. - Un plano A forma un ángulo de 60° con un plano B. A qué distancia del plano B se debe trazar otro plano C que interseque al plano A, tal que sus intersecciones disten 42u.

Resp: $21\sqrt{3}$.

16. - Se tiene un triángulo rectángulo ABC; AB = AC = 4m. Por el vértice A se levanta la perpendicular $AD = 2\sqrt{6}$ m luego D se une con los vértices B y C. Calcular el ángulo diedro formado por los planos ABC y BDC. Resp: 60°.

17. - Se tiene un ΔABC; b = 12u; c = 10u y un plano P. El lado $\overline{AC}$ pertenece al Plano P, el lado $\overline{AB}$ forma 40° con el Plano P, el $\overline{BC}$ forma 30° con el plano P. Hallar el ángulo diedro entre los planos ABC y P.
Resp: 54,55°

18. -



H) Diedro A - C = 50°

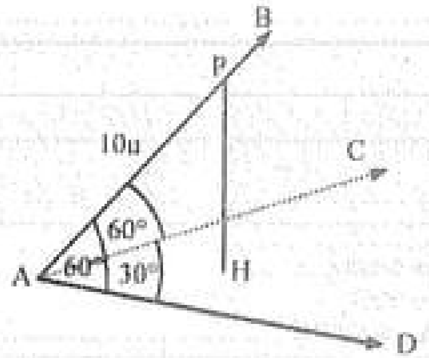
T) Diedro A - D = ?

Resp: 50.97°

19. - Un Δ ABC se encuentra en un plano que forma un ángulo de 45° con otro plano P. Si la proyección del triángulo en el plano P es de $20cm^2$. Calcular el área del triángulo.

Resp: $20\sqrt{2}\ cm^2$

20. -

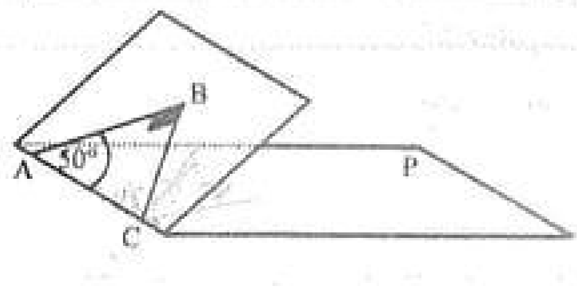


H) PH ⊥ Plano CAD

T) PH =?

Resp: 8.56

21. -

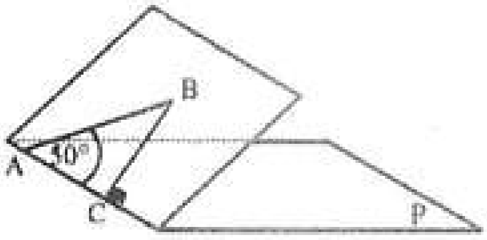


H) Diedro A - C = 51°

T) Ángulo entre $\overline{BC}$ y Plano P

Resp: 30°

22. -

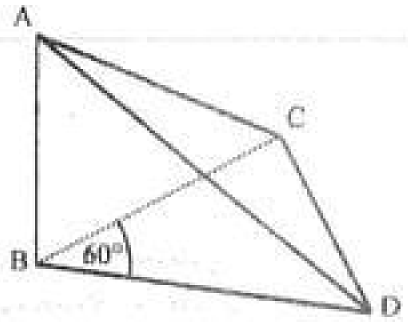


H) Ángulo Diedro A - C = 57°

T) Ángulo entre $\overline{AB}$ y el Plano P

Resp: 40°

23. -

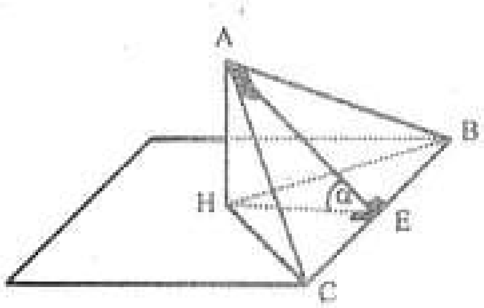


H) $\overline{AB} \perp \Delta BCD$
AB = BC = BD = 20u

T) Diedro D - C = ?

Resp: 49.1°

24. -

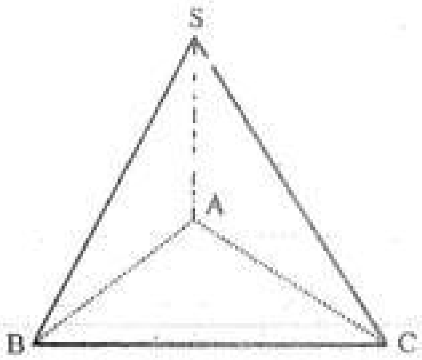


H) AH ⊥ Plano P
AC = AB
BC = 15m
$\hat{\alpha} = 30°$

T) HB = ?
HC = ?

Resp: 9.91 ; 9.91

25. -

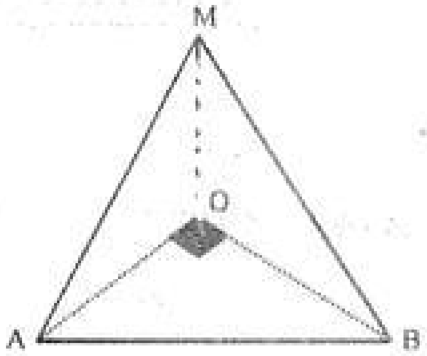


H) SA = 120m
$A\hat{S}B = A\hat{S}C = 45°$
$B\hat{S}C = 60°$

T) Diedro S - A =?

Resp: 90°

26. -

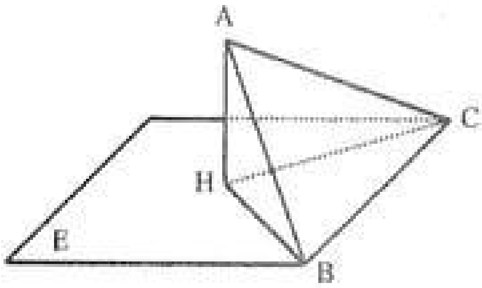


H) OA = OB = 6m
$\overline{OM} \perp \Delta AOB$
Diedro A - B = 60°

T) OM =?

Resp: 7.35m

27. -

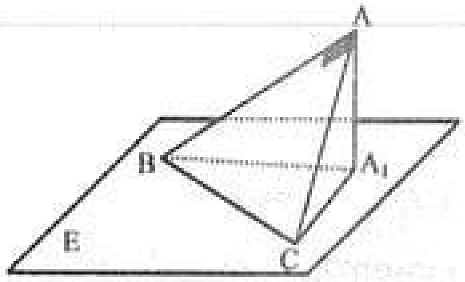


H) AB = BC = CA = 13.84 m
Diedro B - C = 60°
$\overline{AH}$ ⊥ Plano E

T) S_{ABCH} =?

Resp: 41.52 m^2

28. -



H) $\overleftrightarrow{AA_1}$ ⊥ Plano E

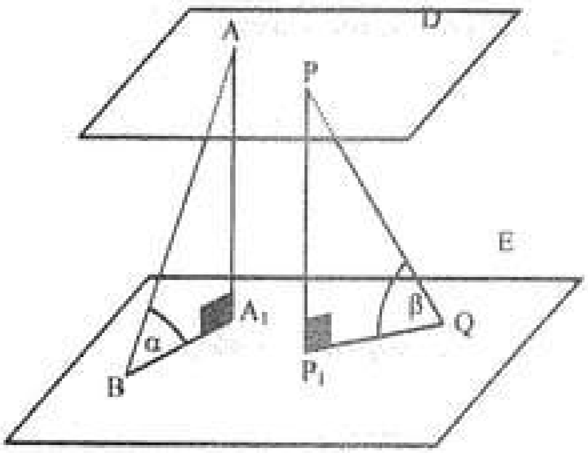
$\widehat{ACA_1} = 45°$

$\widehat{ABA_1} = 22.2°$

T) Diedro B - C =?

Resp: 53,27°

29. -



H) $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{3}{2}$

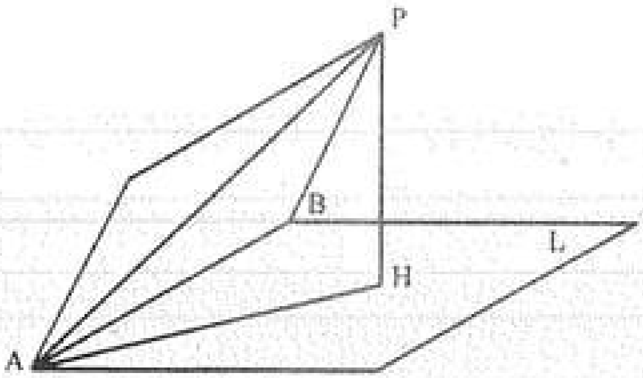
$\dfrac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} = \dfrac{1}{2}$

Plano D ∥ Plano E

T) α = ?
β = ?

Resp: α = 41,41°
β = 82,82°

30. -

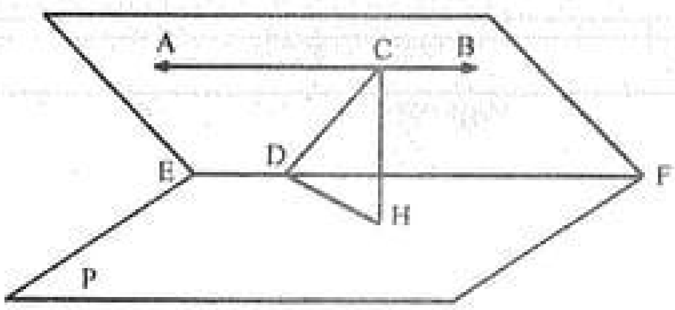


H) $\widehat{BAP} = 35°$
PB ⊥ AB
PH ⊥ Plano L
$\widehat{PAH} = 25°$

T) Diedro A - B =?

Resp: 47.46°

31. -

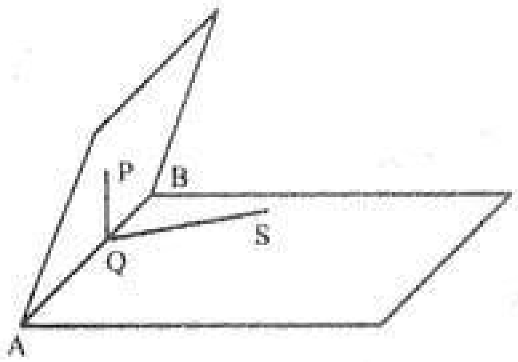


H) $\overleftrightarrow{AB}$ ∥ Plano P
$\widehat{ACD} = 30°$
$\overline{CH}$ ⊥ Plano P
$\widehat{CDH} = 40°$

T) Diedro E - F =?

Resp: 52°

32. -

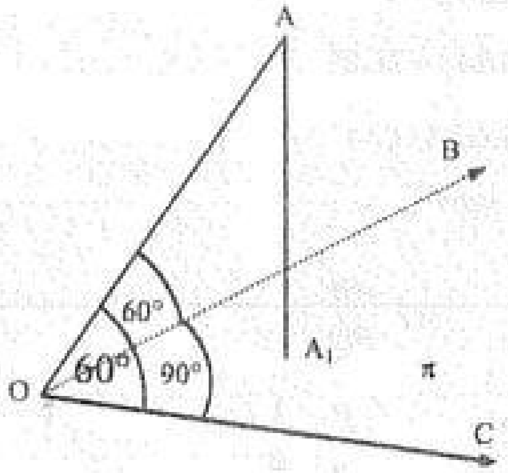


H) Diedro A - B = 70°
$\overline{PQ} \perp \overline{AB}$
$B\hat{Q}S = 50°$

T) $P\hat{Q}S = ?$

Resp: 74.81°

33. -

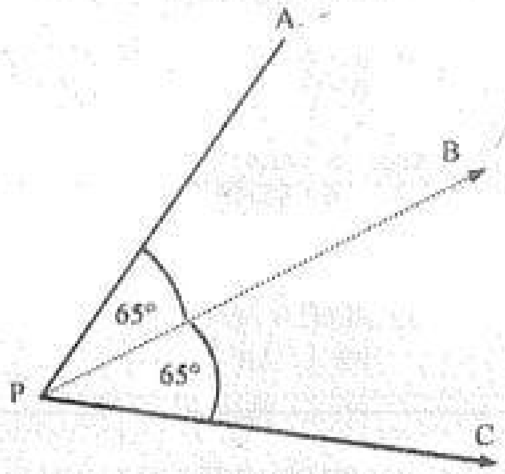


H) $\overline{AA_1} \perp$ Plano π

T) Diedro O - C =?
$A\hat{O}A_1 = ?$

Resp: 54,73° y 45°

34. -

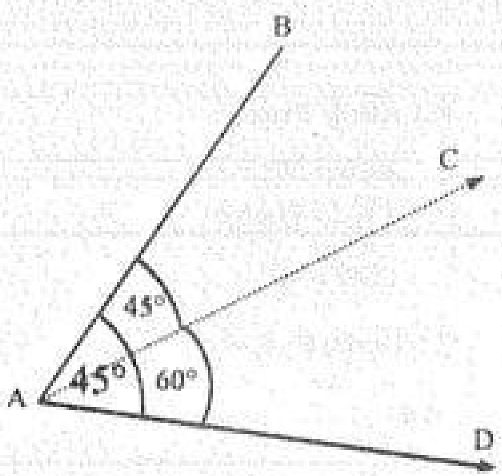


H) Diedro P - B = 80°

T) $A\hat{P}C = ?$

Resp: 71,26°

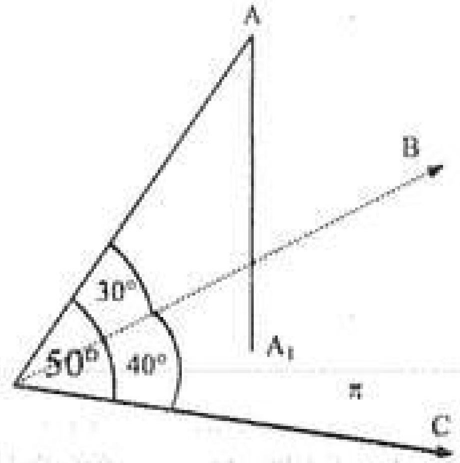
35. -



T) Diedro A - B =?

Resp: 90°

36. -



H) $\overline{PA}$ = 15m

$\overline{AA_1}$ ⊥ Plano π

T) AA_1 =?

Resp: 7,48 m

37. - Por la bisectriz del ángulo recto de un triángulo rectángulo se traza un plano que forma un ángulo de 30° con el plano del triángulo rectángulo. Calcular los ángulos formados entre los catetos y el plano construido. Resp:

38. - Un triángulo ABC de lados a = 8u, b = 10u, c = 6u. Tiene el vértice A en el plano E, las distancias de los puntos B y C al plano E son 2u y 5u respectivamente. Calcular el ángulo formado entre el Plano E y el Δ ABC. Resp: 30.31°

39.- Dado el ángulo triedro O-ABC en el cual: AOB = 50°, BOC = 70° y el ángulo diedro en la arista $\overline{OC}$ mide 40°. Calcular el ángulo entre la arista $\overline{OA}$ y el plano BOC. Resp 21.65.

40.- Dados los rectángulos ABCD y ABEF perpendiculares entre si: AB = 5, BC = 4, BE = 3, calcular el ángulo formado por la recta $\overline{DE}$ con cada uno de los rectángulos. Resp. 55.91; 54.84

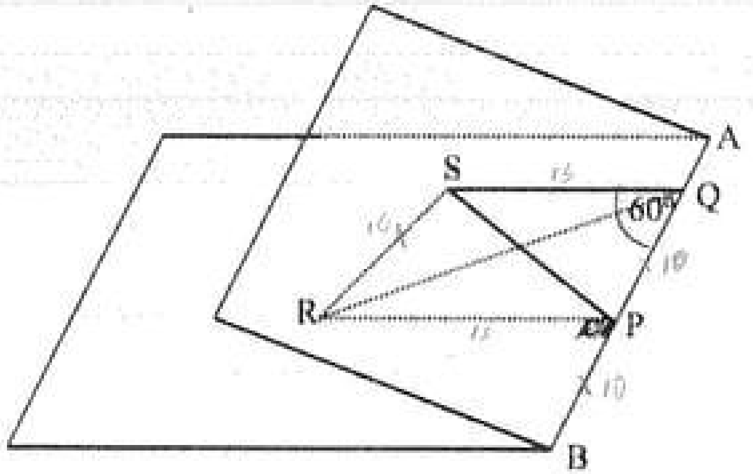
41.- Se tiene el ángulo diedro P-AC-Q. Si B pertenece al plano P y $\overline{AB}$ forma con $\overline{AC}$ un ángulo de 50° y con el plano Q un ángulo de 40°, hallar la medida del ángulo diedro.

Resp. 57.04°

42.- Dado el ángulo triedro O-ABC en el cual: BOC = 50°, AOC = 70° y el ángulo diedro en la arista $\overline{OA}$ mide 40°. Calcular el ángulo entre la arista $\overline{OB}$ y el plano AOC. Resp. 21.63°

43.- Un triángulo ABC y un cuadrado CEFB son perpendiculares entre sí. AB = BC = 10u., AC = 8u. Hallar el ángulo entre el cuadrado CEFB y el plano ABE. Resp. 56.70°

44.-



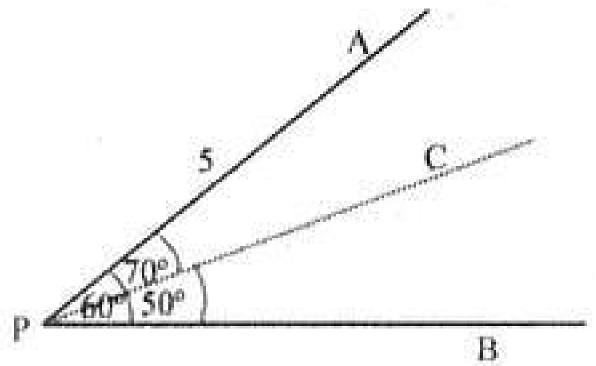
H) PQ = QS = SR = 10

PR = 15

T) Diedro de arista AB = ?

Resp. 33.48

45.-



T) Hallar la distancia desde A al plano PBC

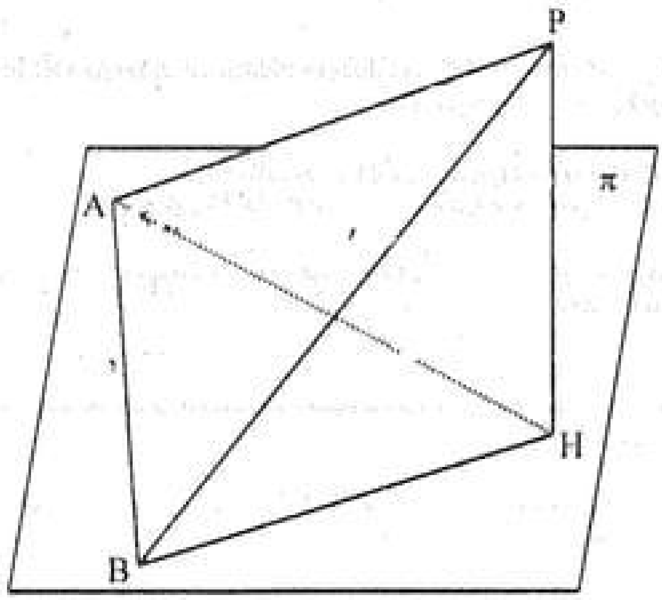
Resp. 4. 32

46.- Un triángulo ABC de lados AB = 10u, BC = 12u. , tiene $\overline{BC}$ perteneciendo a un plano P. El lado $\overline{AB}$ forma un ángulo de 40° con el plano P y el lado $\overline{AC}$ forma un ángulo de 30° con el mismo plano P. Hallar la medida del ángulo diedro entre los planos ABC y P.

Resp. 53,36°

47.- En la arista de un ángulo diedro se tiene un segmento $\overline{AB}$; en una de las caras se da un punto P, tal que $\overline{AP}$ forma un ángulo de 70° con $\overline{AB}$ y $\overline{BP}$ es perpendicular a $\overline{AB}$. Determinar el valor del ángulo diedro, sabiendo que $\overline{AP}$ forma con la otra cara del diedro un ángulo de 40°. Resp. 43,16°

48.-



H) $\overline{PH} \perp$ Plano π

AP = 5u

AB = 8u

PAH = 60°

PBA = 30°

T) $\widehat{BPH}$ = ?

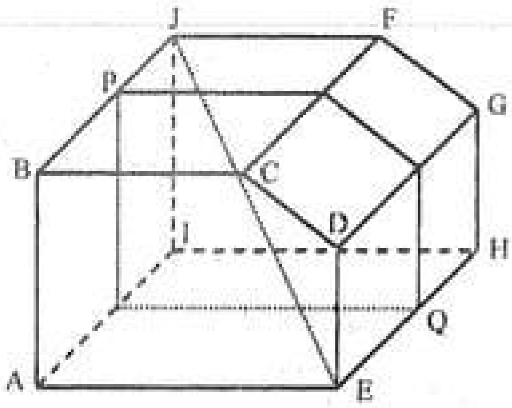
Resp. 64,15°

UNIDAD 2

2. - POLIEDROS

Es un cuerpo geométrico limitado por polígonos.

2.1. - REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y ELEMENTOS



CARAS: Son los polígonos, ABCDE, BJFC, CFGD...

ARISTAS: Son las aristas de los ángulos diedros, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{FG}$, $\overline{EH}$, ...

VERTICES: Son los vértices de los ángulos poliedros, A, B, E, G, I, ...

DIAGONAL: Es el segmento cuyos extremos son dos vértices no coplanares,JE...

SECCION: Es la intersección entre un plano y el poliedro. P - Q

2.2. - DENOMINACIÓN

Por las letras de una diagonal. Poliedro J – E

Por todos los vértices. Poliedro AEHI - BCDGFJ

2.3. - CLASIFICACIÓN

2.3.1. - Por el número de Caras

Tetraedro	4 caras
Pentaedro	5 caras
Exaedro	6 caras
Heptaedro	7 caras
....	....
....	n caras

2.3.2. - Poliedros Regulares

Si sus caras son polígonos regulares congruentes y sus ángulos diedros y poliedros son respectivamente congruentes.

Existen solo cinco poliedros regulares.

POLIEDRO REGULAR	CARAS	ARISTAS	VÉRTICES
Tetraedro	4 Triángulos Equiláteros	6	4
Exaedro o Cubo	6 Cuadrados	12	8
Octaedro	8 Triángulos Equiláteros	12	6
Dodecaedro	12 Pentágonos Regulares	30	20
Icosaedro	20 Triángulos Equiláteros	30	12

PROPIEDAD 1. - En todo Poliedro el número de caras (c) más el número de vértices (v) es igual al número de aristas (a) más dos: $c + v = a + 2$.

PROPIEDAD 2. - En todo poliedro la suma de los ángulos (S) de todas las caras es igual a 360° multiplicado por el número de vértices menos dos. $S = 360° (v - 2)$.

2.3.4. - EJERCICIOS

1. - Calcular la suma de todos los ángulos de un Octaedro. Resp: 1440°

2. - ¿Cuántas caras tiene un poliedro de 18 vértices y 24 aristas?. Resp: 8

3. - Calcular la proyección de una cara de un tetraedro regular en otra si su arista es 6u.

Resp: $3\sqrt{3}\, u^2$

4. - Calcular la distancia desde un vértice de un cubo al centro de la cara lateral opuesta, si la arista del cubo es 10u. Resp: $5\sqrt{6}\, u^2$

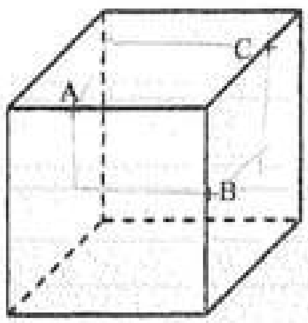
5. - Encontrar la distancia desde el vértice de un cubo de arista "a" a la diagonal que no contiene ese vértice.

Resp: $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

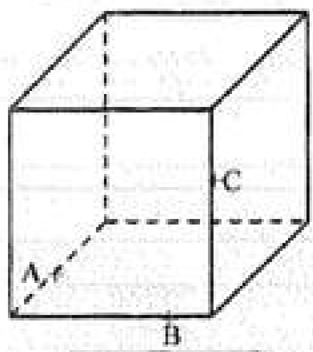
6. - Calcular el ángulo formado por dos diagonales de un Octaedro regular. Resp: 90°.

7. - Construir las secciones que pasan por los puntos A, B y C en los siguientes Poliedros.

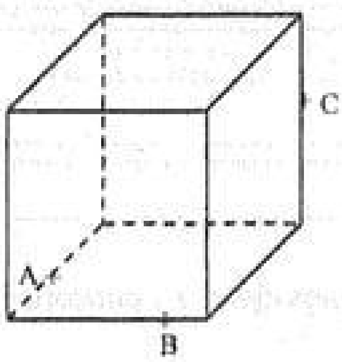
a)



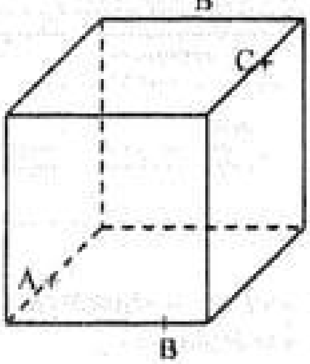
b)



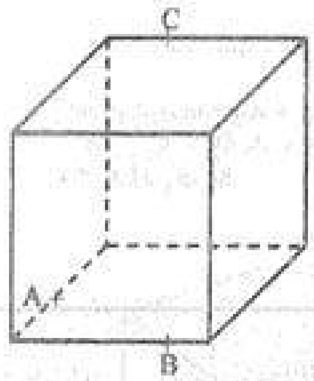
c)



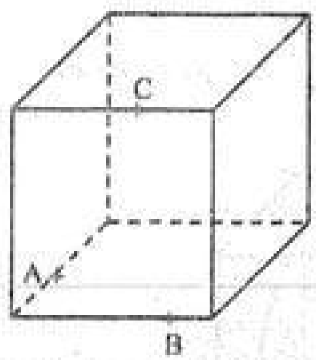
d)



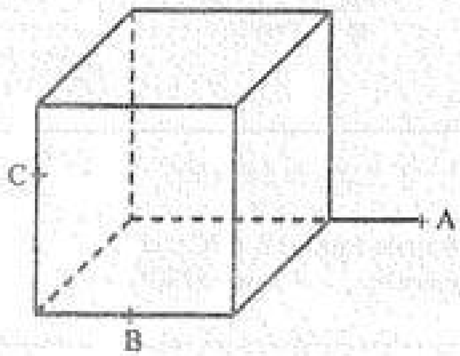
e)



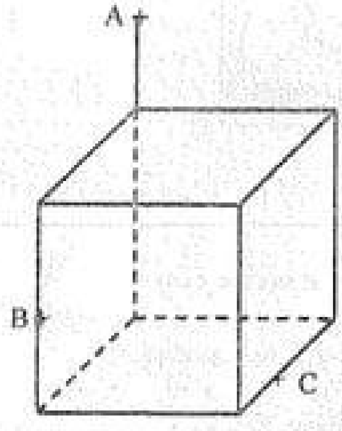
f)



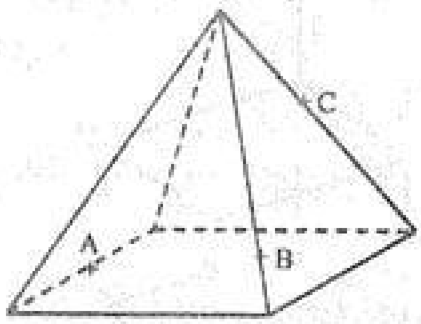
g)



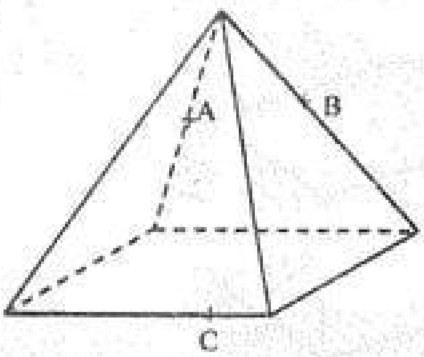
h)



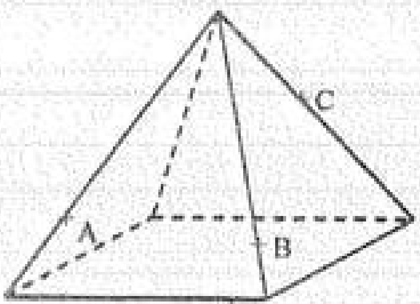
i)



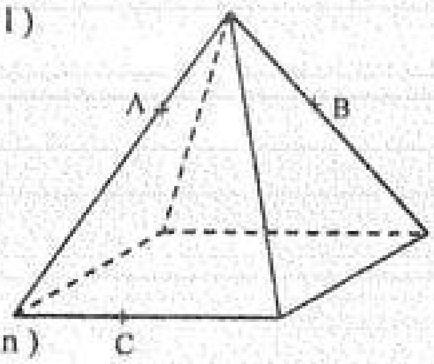
j)



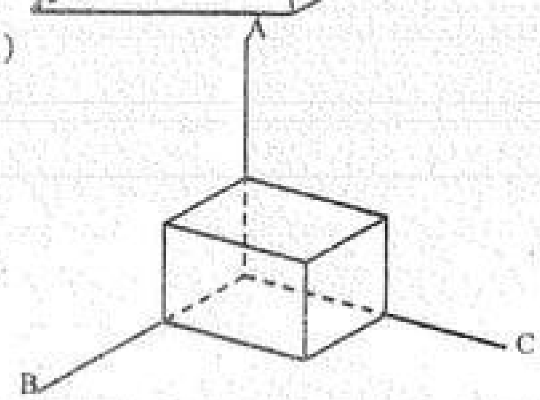
k)



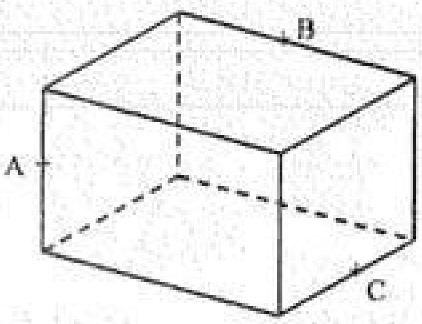
l)



m)

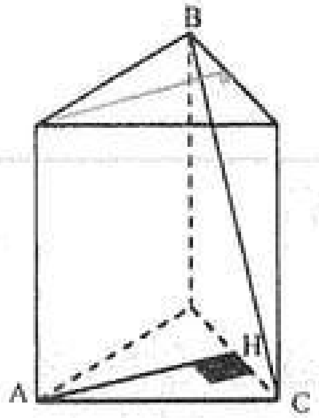


n)



8.-

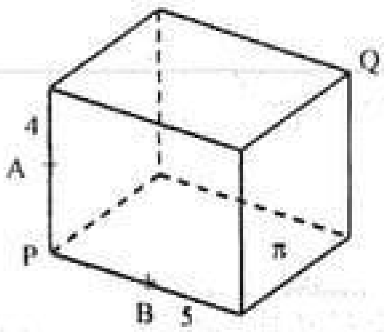
Trazar la sección que pase por BC y paralela a AH



9.-

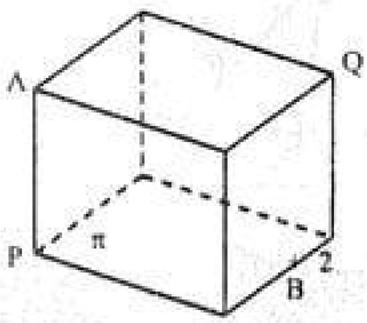
H) P - Q Cubo de arista 10u.

T) Ángulo entre la sección que pasa por los puntos A, B y Q y el plano π. Resp. 63,43°



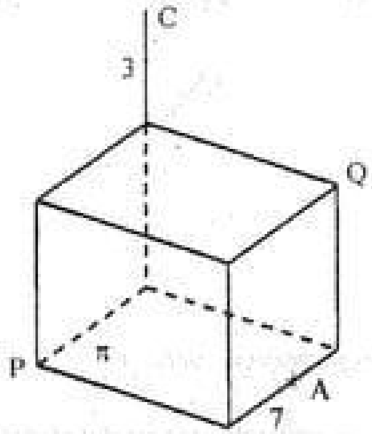
10.- H) P - Q Cubo de arista 12u

T) Ángulo entre la sección que pasa por los puntos A, B y Q y el plano π. Resp. 83,3°



11.- H) P - Q Cubo de arista 10u.

T) Ángulo entre el Δ APC y el plano π. Resp. 57,87°



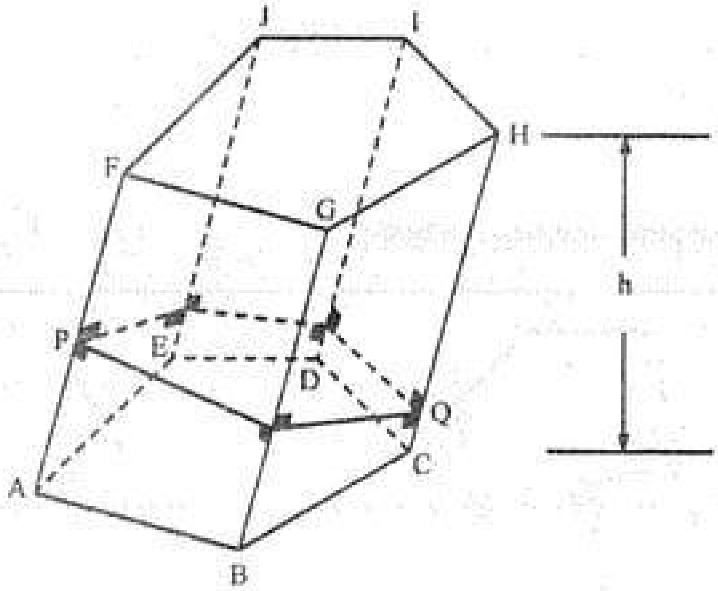
UNIDAD 3

3. - PRISMAS

3.1. - DEFINICIÓN

Es un Poliedro que tiene dos caras congruentes y paralelas, llamadas bases, y las demás caras son paralelogramos.

3.2. - REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y ELEMENTOS



BASES : ABCDE...... $\cong$ FGHIJ.........

CARAS LATERALES : Son los Paralelogramos AFGB, BGHC, CDIH, ...

ARISTAS LATERALES : AF = BG = CH = DI = ... = a_L

ALTURA : Es la perpendicular común a las dos bases, h

SECCION RECTA : Es la sección que corta perpendicular a todas las aristas laterales, P - Q.

AREA LATERAL (S_L) : Es la suma de las áreas de todas las caras laterales.

AREA TOTAL (S_T) : Es la suma del área lateral y las áreas de las Bases.

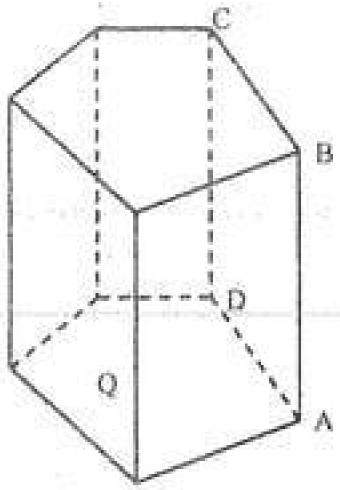
3.3. - CLASIFICACION

3.3.1. - Por la Forma de su Base

Triangular	Si la Base es un Triángulo
Cuadrangular	Si la base es un Cuadrilátero
Pentagonal	Si la Base es un Pentágono
Hexagonal	Si la Base es un Hexágono
....	....

3.3.2. - Recto

Si las aristas laterales son perpendiculares a las bases.

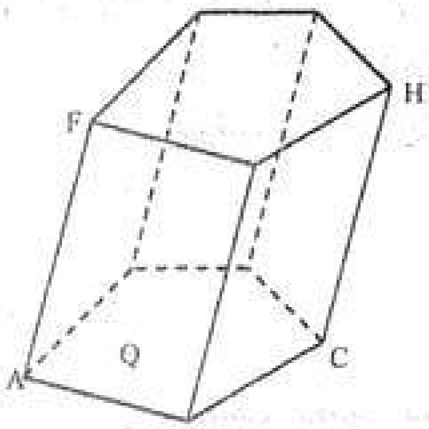


$\overline{CD} \perp$ Plano Q

$\overline{BA} \perp$ Plano Q

3.3.3. - Oblicuo

Si las aristas laterales no son perpendiculares a las bases.



3.3.4. - Regular

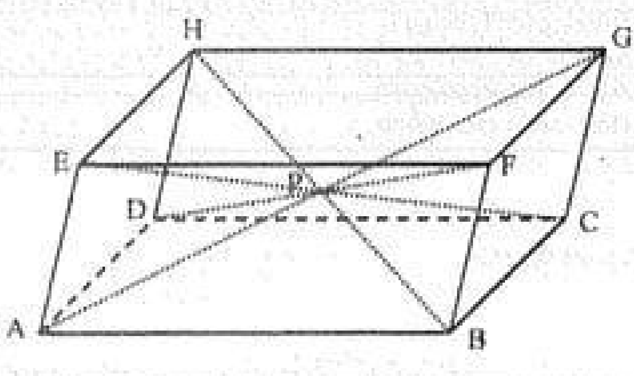
Es el prisma recto cuyas bases son polígonos regulares.

3.3.5. - Tronco de Prisma

Es la parte de un prisma formada al construir una sección que corta a las aristas laterales.

3.4. - PARALELEPIPEDOS

Es un prisma cuyas bases son paralelogramos.



- Las caras opuestas son congruentes y paralelas

$ABCD \cong EFGH$ $\quad ABCD \parallel EFGH$
$AEHD \cong BFGC$ $\quad AEHD \parallel BFGC$
$ABFE \cong DCGH$ $\quad ABFE \parallel DCGH$

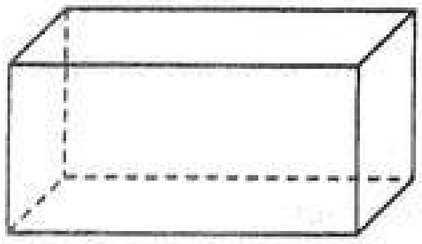
- Las Diagonales son concurrentes y se bisecan mutuamente.

$DP = PF \quad AP = PG$
$HP = PB \quad EP = PC$

3.4.1. - CLASIFICACION

3.4.1.1. - Recto

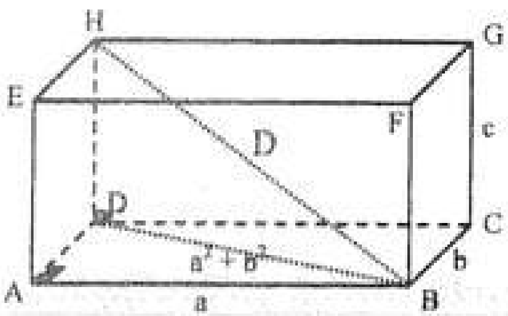
Las aristas laterales son perpendiculares a las bases.



Las bases son paralelogramos

3.4.1.2. - Rectángulo

Es un paralelepípedo recto que tiene por bases rectángulos.



Las bases son rectángulos

DIMENSIONES. Son las longitudes de tres aristas concurrentes, a, b y c.
Todas las diagonales son congruentes.

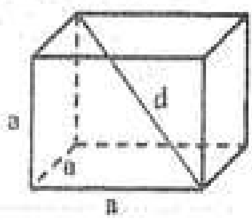
$$EC = HB = DF = AG = D$$

- El cuadrado de una diagonal es igual a la suma de los cuadrados de sus tres dimensiones.

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

3.4.1.3. - Cubo

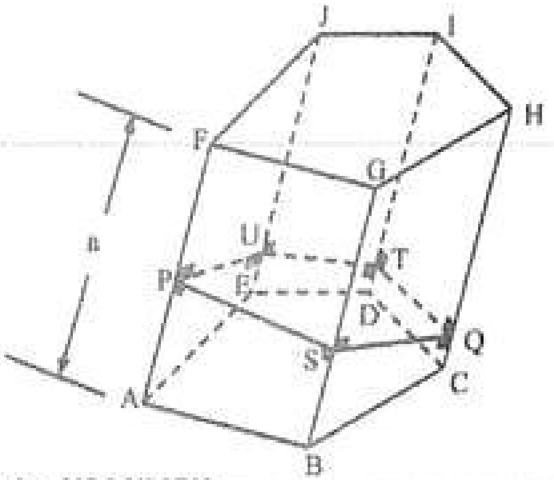
Es un paralelepípedo cuyas caras son cuadrados.



$$d = a\sqrt{3}$$

3.5.- AREA LATERAL

El área lateral de un prisma es igual al producto de la arista lateral por el perimetro de una sección recta.



$S_L = S_{ABGF} + S_{BCHG} + S_{CHID} + \ldots\ldots$

$S_L = a \times PS + a \times SQ + a \times QT + \ldots\ldots$

$S_L = a \times (PS + SQ + QT + \ldots\ldots)$

$S_T = a \times P_{S.R.}$

3. 6. - VOLUMEN

3.6.1. - Unidad de Volumen

Es un cubo cuyas aristas tienen por medida una unidad de longitud.

3.6.2. - Volumen de un Sólido

Es un número que indica cuantas veces esta contenida la unidad de volumen en dicho sólido.

3.6.3. - Sólidos Equivalentes

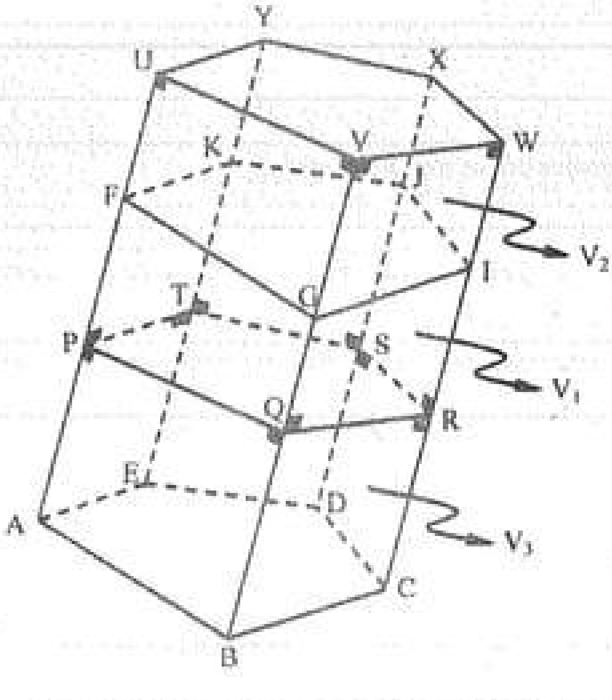
Dos sólidos son equivalentes si tienen el mismo volumen.

3.6.4. - Volumen de un Paralelepípedo Rectángulo

Es igual al producto de sus tres dimensiones.

3.6.5. - Equivalencia

Todo prisma oblicuo es equivalente a un recto que tenga por base la sección recta y por altura la arista lateral.



H) $AF = PU = BG = QV = RW = CI = \ldots\ldots$

T) $V_3 + V_1 = V_1 + V_2$

D) $AF = PU$ υ $AP = FU$
$BG = QV$ υ $QB = VG$
$CI = RW$ υ $CR = WI$

$ABCDE \equiv FGIJK$ ....
$PQRST \equiv UVWXY$ ....

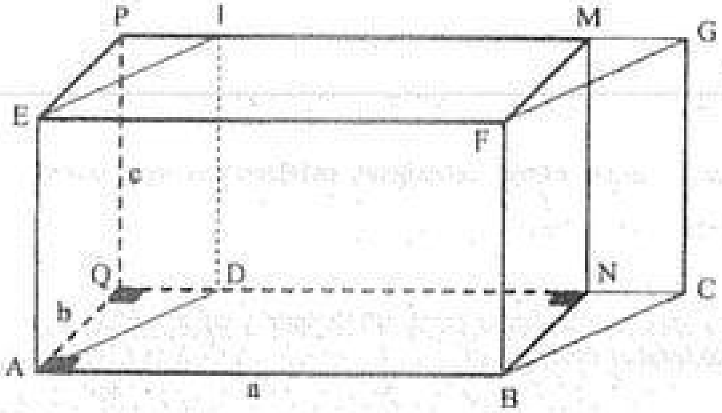
$\therefore\ V_3 = V_2$

$\therefore\ V_1 + V_3 = V_2 + V_1$

- Dos prismas rectos de igual base e igual altura son iguales

3.6.7. - El volumen de un Paralelepípedo recto

Es igual al producto de la base por la altura.



A - G Paralelepípedo Oblicuo

P - B Paralelepípedo Rectángulo

$V_{A-G} = V_{P-B}$

$V_{A-G} = a \times b \times c = S_{ABCD} \times c$

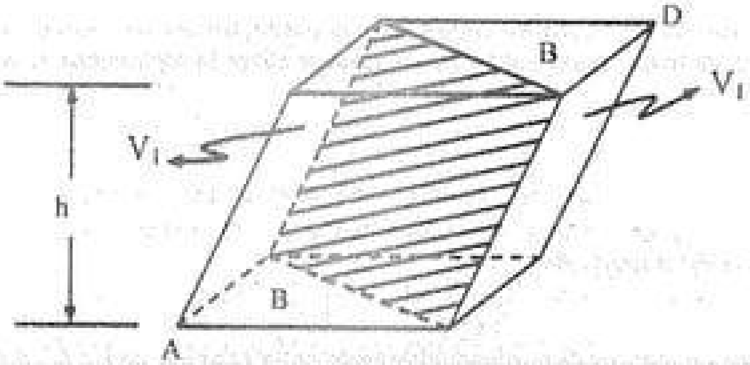
$V_{A-G} = B \times h$

3.6.8. - El volumen de un Paralelepípedo

Es igual al producto de su base por su altura.

3.6.9. - El volumen de un prisma triangular

Es igual al producto de su base por su altura.



A - D Paralelepípedo

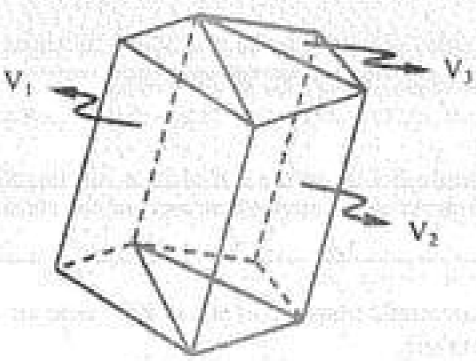
$V = 2\ V_1$

$2\ B \times h = 2\ V_1$

$V_1 = B \times h$

3.6.10. - El volumen de un prisma

Es igual a la superficie de la base por su altura.



$V = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots\ldots\ldots$

$V = B_1 \times h + B_2 \times h + B_3 \times h + \ldots\ldots\ldots$

$V = B \times h$

3.6.11. - El volumen de un prisma oblicuo

Es igual al producto de su sección recta por su arista lateral.

3.7. - EJERCICIOS

1. - Calcular las dimensiones de un paralelepípedo rectángulo cuya diagonal mide $3\sqrt{14}$, el largo es el doble del ancho y la altura es el triple del ancho.
Resp: 3; 6; 9.

2. - Calcular las aristas que concurren a un vértice de un paralelepípedo rectángulo, sabiendo que sus medidas son tres números enteros consecutivos y su diagonal es de $5\sqrt{2}$.
Resp: 4; 3; 5.

3. - ¿Cuánto mide la altura de un prisma recto?. Si la base es un rombo de 10 cm de lado y cuyas diagonales están en la relación de 3 : 4 y sabiendo que su área total es de 800 cm^2.
Resp: 15.2 cm.

4. - El área total de un Cubo es de 216 m^2. Calcular el área total de un prisma recto que tiene la misma base del Cubo y cuya altura es igual a la diagonal del Cubo.
Resp: 321.12 m^2.

5. - El número que mide en metros la diagonal de un Cubo es igual al número que representa el área, en metros cuadrados, de un triángulo que tiene un vértice en el centro de una de las caras del cubo y por lado opuesto la diagonal de la cara opuesta. Hallar el área total del cubo.
Resp: 36 m^2.

6. - Se tiene un prisma triangular recto cuya base es un triángulo rectángulo de perímetro 36 m, siendo la superficie de esta base 54 m^2. Hallar el área de la cara del prisma que se levanta sobre la hipotenusa si la altura es de 10m.
Resp: 150 m^2.

7. - Hallar el volumen de un prisma recto, cuya base es un trapecio isósceles y los lados iguales forman con el mayor ángulos de 45°, la altura del trapecio es igual a la base menor del mismo y el perímetro mide 68.2 cm. La altura del prisma es el cuádruplo de la del trapecio de la base.
Resp: 8000 cm^3.

8. - Un prisma tiene por base un rombo de 10 cm de lado y cuyas diagonales están en la relación de 3 : 4. Su área total es de 800 cm^2. Calcular su volumen. (PRISMA RECTO)
Resp: 1459.2 cm^3.

9. - El volumen de un prisma hexagonal regular es de 2076 cm^3 y su área lateral 480 cm^2. Calcular el lado de la base y la altura del prisma.
Resp: 10 cm ; 8 cm.

10. - Calcular las dimensiones de un Paralelepípedo rectángulo cuyo volumen es de 13824 m^3, la suma de sus tres dimensiones 74 m y una de las dimensiones es media proporcional entre las otras dos.
Resp: 24 m ; 32 m ; 18 m.

11. - Demostrar que si la altura de un prisma triangular es el duplo del diámetro del círculo circunscrito a la base, el prisma es equivalente a un paralelepípedo rectángulo cuyas dimensiones son los tres lados de la base del prisma.

12. - Un paralelepípedo de dimensiones; 2, 1.5 y 1, se encuentra inclinado respecto al suelo 30°, tiene un orificio de salida al borde inferior a 0.58. ¿Qué cantidad de agua existe?.
Resp: 0.29

13. - La base de un prisma oblicuo es un triángulo cuyos lados son 15, 16 y 17; la sección recta es un triángulo de lados 13, 14 y 15. Hallar el área lateral, área total y volumen si su arista lateral es de 50.
Resp: 2100 ; 2319.96 ; 4200.

14. - Calcular el área total de un paralelepípedo rectángulo si el área de la base es de 80, las sumas de las aristas laterales 20 y el cuadrado de la diagonal del paralelepípedo 189.
Resp: 340.

15. - Calcular el área total de un paralelepípedo rectángulo cuya área de la base es 60 m^2, la de una cara lateral 20 m^2 y la de un plano diagonal 50 m^2.
Resp: 256 m^2.

16. - El área total de un paralelepípedo rectángulo es de 180 m^2, la diagonal de la base es de 10 m y la suma de us tres dimensiones 17 m. Calcular el valor de sus aristas.
Resp: 8m ; 6m ; 3m.

17. - El área total de un prisma recto es de $180\sqrt{3}$ y su altura de $9\sqrt{3}$. ¿Cuánto medirá el apotema de la base que es un triángulo equilátero.
Resp: $3\sqrt{3}$.

18. - Un paralelepípedo tiene por dimensiones 1.2, 0.8 y 0.45. Si en el aire pesa 500 Kg. ¿Cuánto pesará sumergido en el agua?.
Resp: 68 Kg.

19. - El volumen de un prisma es de 1812 cm^3 y su altura 15 cm. ¿Cuántas caras tiene el prisma sabiendo que la base es un polígono regular que mide 5 cm de lado y 6.04 cm de apotema?.
Resp: 8

20. - Un prisma recto de 40 cm de altura tiene por base un cuadrilátero inscrito que se descompone por una de sus diagonales en un triángulo equilátero de 12 cm de lado y otro isósceles. Calcular el volumen del prisma.
Resp: 3326 cm^3.

21. - Un paralelepípedo rectángulo tiene un volumen de 60 m^3, la suma de todas sus aristas es de 48 m y su área lateral de 70 m^2. Determinar sus tres dimensiones.
Resp: 3 m ; 4 m ; 5 m.

22. - El área lateral de un prisma regular es de 450 m^2 y el apotema de la base mide 7m Calcular su volumen.
Resp: 1575 m^3.

23. - El área lateral de un prisma recto excede en 119 cm^2 al área lateral de otro prisma semejante. Si un par de aristas homólogas de la base están en la razón 3: 4. Hallar el área lateral del primer prisma.
Resp: 272 cm^2.

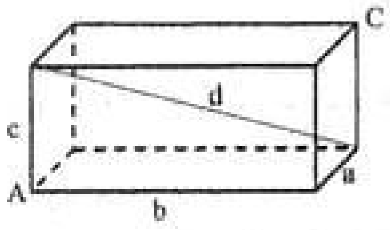
24. - Calcular el volumen de un prisma recto, cuya base es un rombo de 10 cm de lado y cuyas diagonales están en la razón 3 : 4 y la altura del prisma es igual a la semisuma de estas diagonales.
Resp: 1344 cm^3.

25. - Un cubo de madera de 12 cm de arista flota en el agua por una de sus caras (δ=0.25). Calcular la superficie mojada, la superficie seca y la cantidad de agua que desaloja.
Resp: 288 cm^2 ; 576 cm^2 ; 432 cm^3.

26. - Se tiene un estanque de forma prismática hexagonal regular lleno de agua. Este se comunica con otro estanque de mayor capacidad, más bajo que aquel y de forma prismática cuadrangular regular. El conducto que los une da un caudal de 2.5 lt/s. Hallar el tiempo que tardará en vaciarse el primer estanque. La altura que alcanzará el agua en el segundo estanque, suponiéndolo vacío al principio. Lado del hexágono 7.5m, la altura del prisma 2.1 m, lado del cuadrado 26 m.
Resp: 34.1 s ; 0.454 m.

27. - Hallar en decímetros cuadrados, el área lateral de un prisma hexagonal de 70 cm de altura, cuyas aristas laterales forman ángulos de 60° con la base y siendo la sección recta un hexágono regular de $216\sqrt{3}$ cm^2 de superficie.
Resp: 581.96 cm^2.

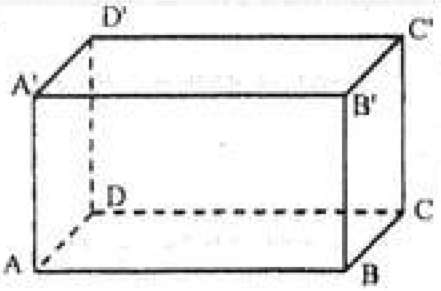
28. -



H) A - C Paralelepípedo rectángulo

T) $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

29. -

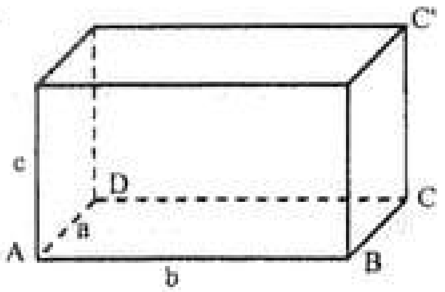


H) A - C' Paralelepípedo rectángulo
$S_{ABCD} = 48\ m^2$
$S_{DD'CC'} = 42\ m^2$
$S_{AA'CC'} = 70\ m^2$

T) $S_L = ?$ **Resp: 196 m²**

30. - Calcular el área total de un cubo cuya arista es igual a la diagonal de un paralelepípedo rectángulo de 1660 m^2 de área total y cuya suma de sus tres dimensiones es igual a 51 m.
Resp: 5646 m².

31. -

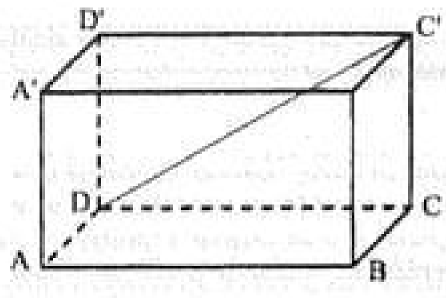


H) A - C' Paralelepípedo rectángulo
$a + b + c = 12$ cm
$a^2 + b^2 + c^2 = 50\ m^2$
$S_{ABCD} = 12\ m^2$

T) $S_T = ?$ **Resp: 94 m²**

32. - Todas las caras de un paralelepípedo son rombos de lado 4 cm y ángulo agudo 60° Determinar el volumen del Paralelepípedo.
Resp: 52.25 cm³.

33. -



H) A - C' Paralelepípedo recto
$AC' = \sqrt{33}$ cm
$BD' = 9$ cm
$AA' = 4$ cm
Perímetro de la base = 18 cm.

T) $S_T = ?$; $V = ?$ **Resp: 92 cm² ; 88 cm³.**

34. - Demostrar que en todo paralelepípedo la suma de los cuadrados de las cuatro diagonales es igual a la suma de los cuadrados de las doce aristas.

35. - En un prisma hexagonal regular la diagonal mayor de longitud 5 cm forma un ángulo de 30° con la arista lateral del prisma. Determinar el volumen del prisma.
Resp: 142.61 cm³.

36. - La altura de un prisma recto es de 1 m, su base es un rombo de lado 2 m y ángulo agudo 30°. Por un lado de la base se ha trazado un plano que corta al prisma y esta inclinado 60° respecto de la base. Hallar el área de la sección.

Resp: $\frac{4}{\sqrt{3}}$ m².

37. - Calcular el área total de un prisma hexagonal regular de $10\sqrt{3}$ m de lado en la base, si la base tiene un circulo circunscrito de radio igual a la altura del prisma.
Resp: 3358.84 m².

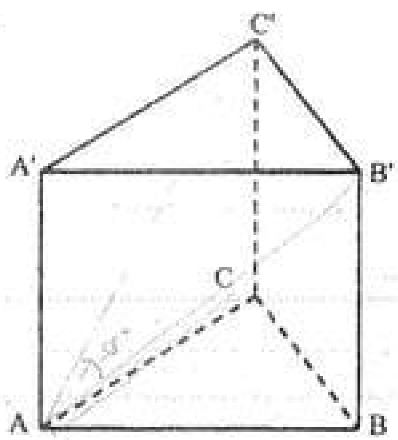
38. - El área total de un paralelepípedo rectángulo de 4 m de altura es cuatro veces el área de una de las superficies diagonales correspondientes a una de las aristas laterales y el área de esta superficie diagonal es los 5/6 de la suma de las áreas de las bases. Calcular el área del paralelepípedo.
Resp: 80 m².

39. - Se tiene un recipiente lleno de agua, de forma de paralelepípedo rectángulo de 48 dm² de base y 15 cm de altura. Se introduce un prisma cuadrangular regular de hierro, de manera que se apoya por su base sobre el fondo del recipiente y se riegan 24 lt de agua. Después se saca y se vuelve a introducir el mismo prisma apoyándose en una de sus caras laterales, y se riegan 6 lt de agua que quedaba en el recipiente. Calcular en decímetros cúbicos el volumen del prisma de hierro.
Resp: 80 dm³.

40. - La superficie total de un cubo es de 486 m². Calcular en metros cuadrados el área total del prisma cuadrangular que resulta de cortar el cubo por un plano que pasa por un lado de la base y forma con esta un ángulo de 30°.
Resp: 405 m².

41. - Por un punto tomado sobre la arista lateral de un prisma triangular regular con el lado de la base 10 cm se trazan dos planos. Uno de ellos pasa por un lado de la base inferior del prisma y forma un ángulo de 40° con la base; el otro pasa por el lado paralelo de la base superior y forma con ella un ángulo de 50°. Determinar el volumen del prisma y la suma de las áreas de las secciones asi obtenidas.
Resp: 761.57 cm³ ;

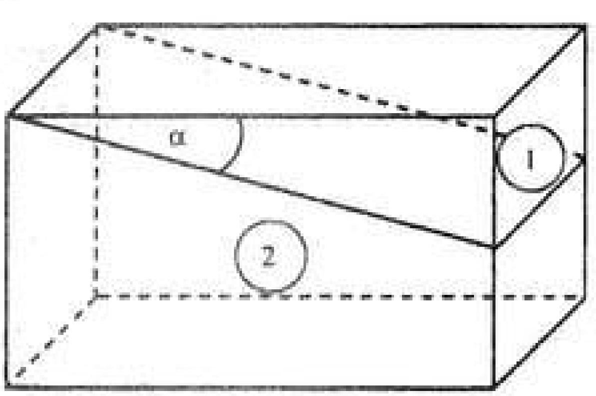
42. -



H) A - C' Prisma regular
$V_{A-C'} = 200$ m³
$B'\hat{A}C' = 38°$

T) AC =? **Resp: 7.34 m**

43. -



T) a) Hallar α, tal que:
$S_1 = S_T / 2$

Resp: 29.3°

b) Hallar α, tal que;
$V_1 = V_T / 2$

Resp: 33.69°

44. - Hallar el área total de un tronco de prisma regular, cuya base es un cuadrado de lado 3 m. Las bases forman un ángulo de 45° y dos aristas laterales opuestas son de igual longitud, 8 m.
Resp: 117.73 m^2.

45. - En un paralelepípedo rectángulo, la base mide 60 m^2, la suma de todas sus aristas es 96 m y la suma de los cuadrados de sus tres dimensiones es de 200 m^2. Calcular la altura del paralelepípedo.
Resp: 8 m.

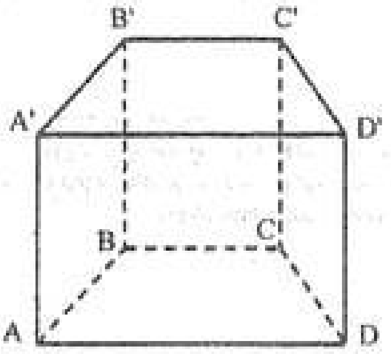
46. - Se da un prisma recto en el cual un triángulo regular sirve de base. Por uno de los lados de la base inferior y por el vértice opuesto de la base superior se ha trazado un plano. El ángulo entre este plano y la base del prisma es igual a 70° y el plano de la sección del prisma es 333. Determinar el volumen del prisma.
Resp: 13.19 u^3.

47. - Dado un paralelepípedo rectángulo ABCD - A'B'C'D', AB = 5; BC = 3; AA' = 4. Calcular la distancia mínima entre AB y B'D.
Resp: 3 u

48. - En un cubo de arista 2 m, se forma un triángulo prolongando las rectas que unen los puntos medios de seis aristas consecutivas y no situadas tres a tres en un plano. Determinar que dichas rectas están en un plano y hallar el área del triángulo.

Resp: $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ m^2.

49. -

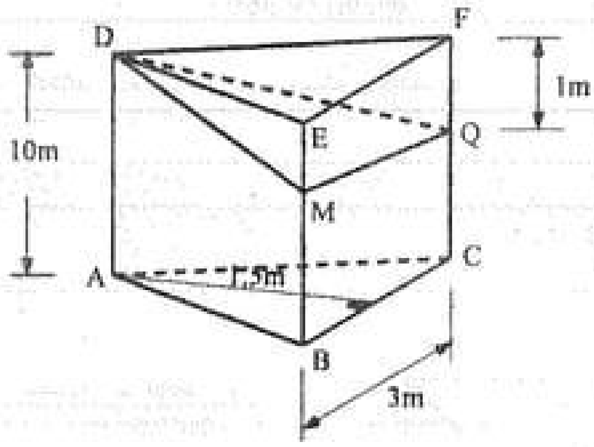


H) B' - D Prisma recto
AA' = 4 m
ABCD Trapecio Isósceles
Altura de ABCD = 3 m
AB = 6m ; BC = 3 m.

T) Determinar el ángulo y la distancia entre AA' y B'D

Resp: 65.37° ; 4.59 m

50. - El volumen del tronco de prisma triangular recto de la figura es igual a 25 m^3. Por el punto D se traza un plano paralelo a la base. Calcular la superficie del plano EMQF y el segmento EM.
Resp:



51. - Demostrar geométricamente la fórmula:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3$$

52. - El área total de un prisma recto de base rectangular es de 144 m^2, uno de los lados de la base es el doble del contiguo e igual a la altura. Hallar la diagonal del prisma.
Resp: 9 m.

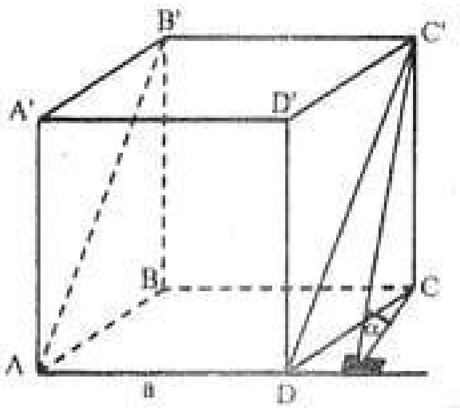
53. - Calcular el volumen y aristas de un paralelepípedo rectángulo cuya área total es de 62 m^2 y cuyas dimensiones son proporcionales a 1, 1.5 y 2.5.
Resp: 30 m^3 ; 2 m ; 3 m ; 5 m.

54. - Calcular las dimensiones de un paralelepípedo rectángulo sabiendo que están en progresión aritmética, cuya suma es de 24 m y el área total es de 366 m^2.
Resp: 5 m ; 8 m ; 11 m.

55. - En un cubo se da la distancia de una diagonal y arista no contigua que mide 4 m. Hallar el volumen del cuerpo.
Resp: 181.02 m^3

56. - Se corta un cubo de 125 cm de arista por un plano que pase por los puntos medios de las aristas no contiguas ni paralelas. Calcular el área de la sección resultante.
Resp: (20297.5)/2 cm^2.

57. -

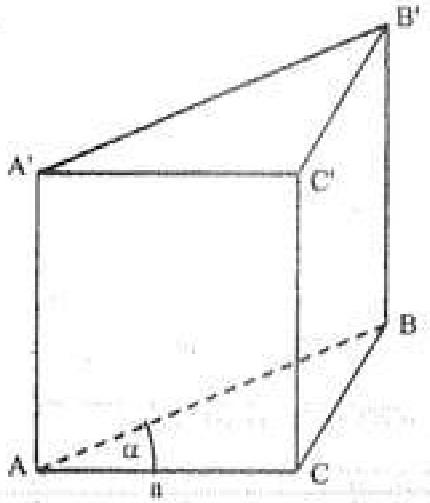


H) ABCD Rombo
ABCD - A'B'C'D' Prisma recto
$S_{CAB'C'D} = 150\ u^2$
$\alpha = 70°$

T) Area lateral del paralelepípedo =?

Resp: 564.8 u^2

58. -

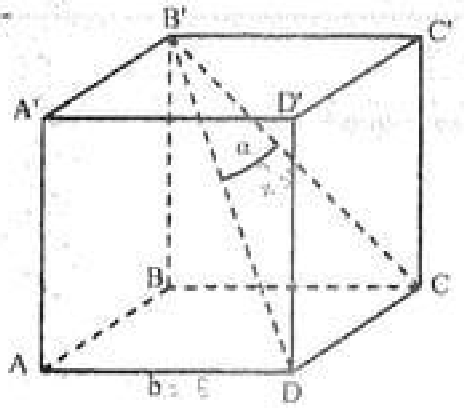


H) ABC - A'B'C' Prisma recto
AB = BC
a = 10 u ; $\alpha = 70°$
Area lateral = Area de las dos bases.

T) V =?

Resp: 240.47 u^3

59. -

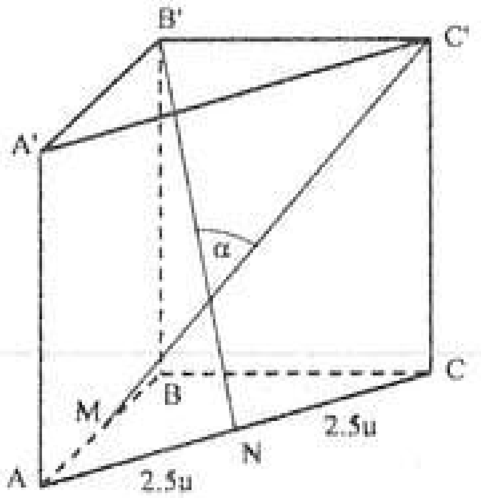


H) ABCD - A'B'C'D' Prisma cuadrangular regular
b = 5 u ; $\alpha = 25°$

T) V_{Prisma} =?

Resp: 237.13 u^3

60. -

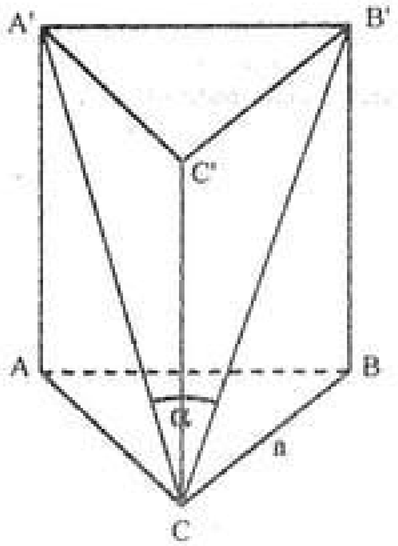


H) ABC - A'B'C' Prisma regular
$AM = MB$
$\hat{\alpha} = 30°$

T) V_{Prisma} =?

Resp: 149.64 u^3

61. -

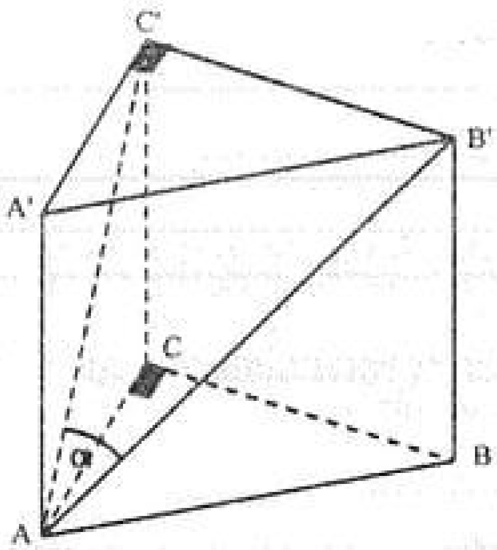


H) ABC - A'B'C' Prisma regular
$a = 5$ u ; $\hat{\alpha} = 30°$

T) Área Lateral =?

Resp: 123.9 u^2

62. -



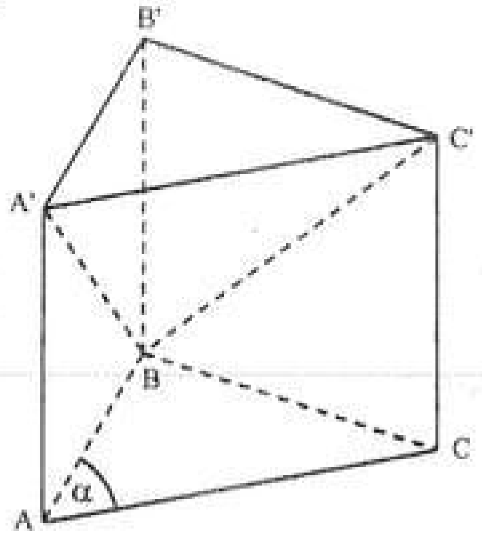
H) ABC - A'B'C' Prisma recto

$C\hat{A}B = 30°$
$AC = 5$ u
$\hat{\alpha} = 20°$

T) V_{Prisma} =?

Resp: 44.136 u^3

63. -

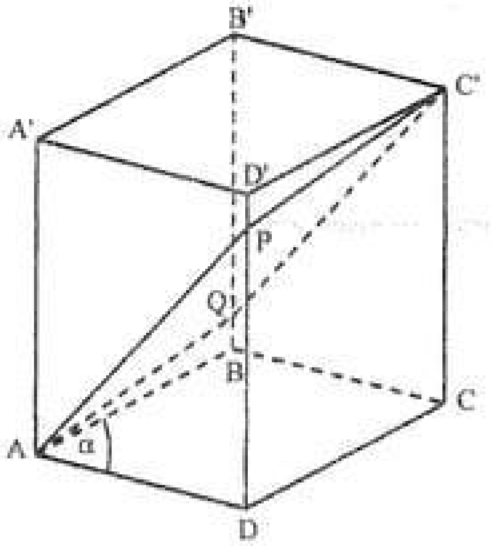


H) ABC - A'B'C' Prisma recto
$AB = BC = 10$ u
$\hat{\alpha} = 70°$
Ángulo entre ABC y A'BC' = 40°

T) Área Lateral del Prisma =?
$V_{B-ACC'A'}$ =?

Resp: **211.63 u² ; 163.26u³**

64. -



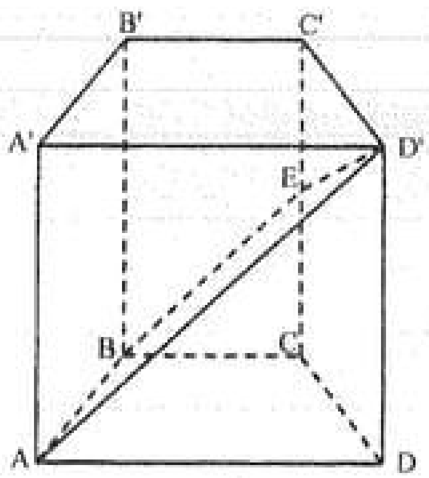
H) ABCD - A'B'C'D' Prisma recto
□ABCD es rombo
□APC'Q es rombo
$\hat{\alpha} = 60°$

$$P\hat{A}Q = \frac{\hat{\alpha}}{2}$$

T) $S_{\square APC'Q}$ =?

Resp: **10 u²**

65. -

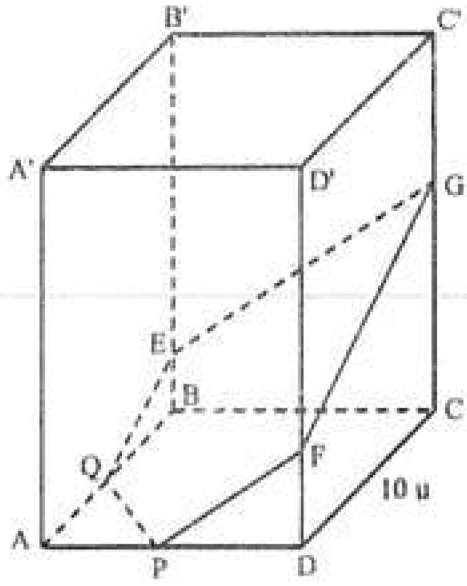


H) ABCD - A'B'C'D' Prisma recto
Angulo entre ABCD y ABED' = 70°
r = 10 u de ABCD

T) Area de la sección = ?
Area lateral = ?

Resp: 152038u² ; 9360 u³

66. -

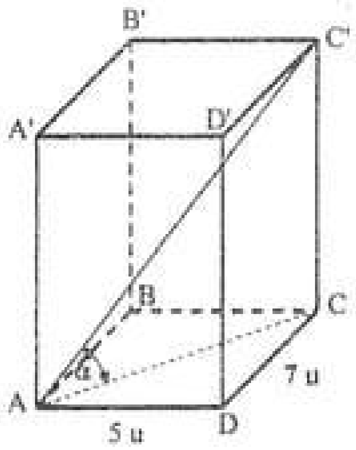


H) ABCD - A'B'C'D' Prisma regular
AP = PD
AQ = AB/3
Angulo entre PFGEQ y ABCD = 50°

T) Area de la sección =?

Resp: 142.61 u^2

67. -

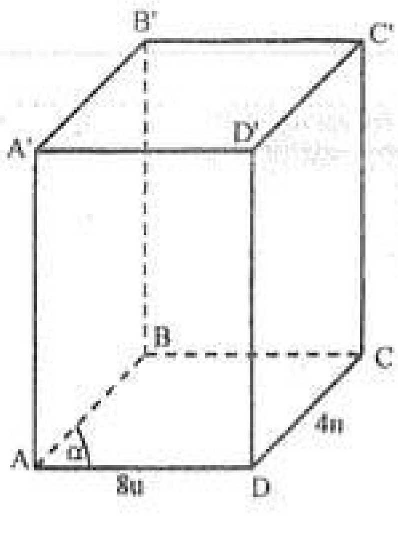


H) A - C' Paralelepípedo rectángulo
$\widehat{\alpha} = 40°$

T) S_L =?

Resp: 173.23 u

68. -

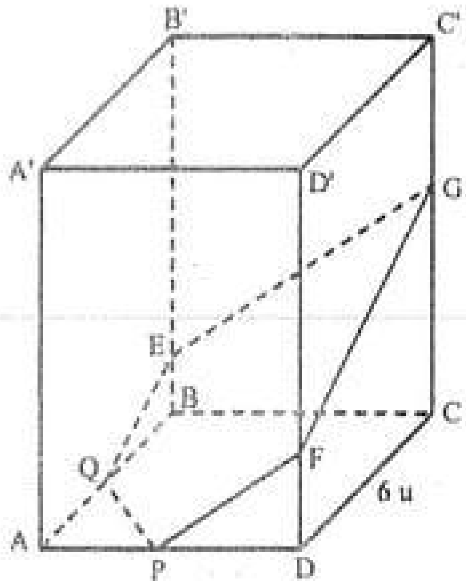


H) A - C' Paralelepípedo recto
AC = B'D
$\widehat{\alpha} = 40°$

T) $V_{A-C'}$ =?

Resp: 203.68 u^3

69. -

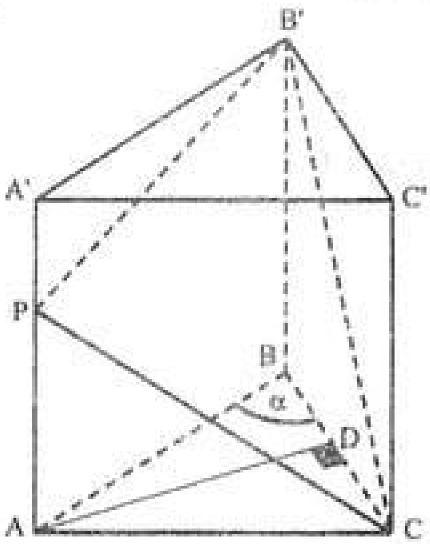


H) A - C' Prisma regular
P punto medio de AD
Q punto medio de AB
Angulo entre PQEGF y ABCD = 60°

T) Area de la sección =?

Resp: 53.13 u²

70. -

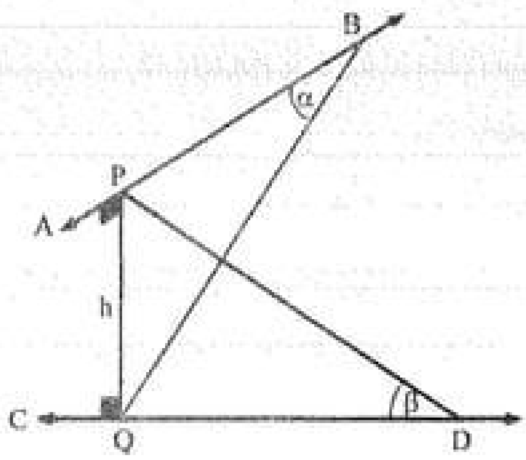


H) ABC - A'B'C' Prisma recto
AB = AC
Angulo entre PB'C y ABC = 40°
$\widehat{\alpha} = 70°$
Plano PB'C ψ AD
$S_L = 430$ u²

T) Area de la sección =?

Resp: 117.1 u²

71. -

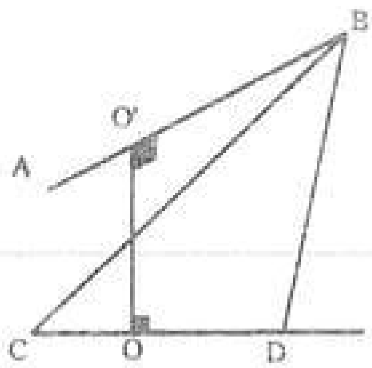


H) AB y CD se cruzan formando un ángulo de 70°
h = 10 u
$\widehat{\alpha} = \widehat{\beta} = 45°$

T) BD =?

Resp: 14.1 u

72. -



H) $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se cruzan y forman un ángulo de 35°

AB = 10 u

CD = 8 u

OO' = 5 u

$\frac{AO}{OB} = \frac{2}{3}$

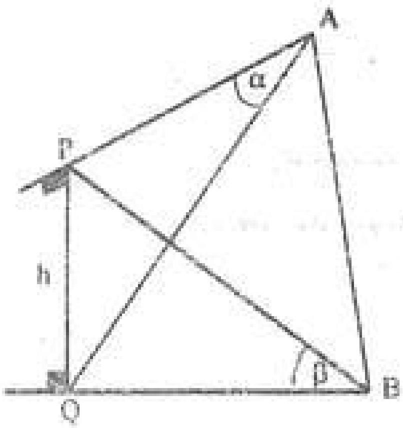
$\frac{CO'}{O'D} = \frac{3}{2}$

T) BD =?

BC =?

Resp: 31.53 u ; 57.27 u.

73. -



H) AP y QB se cruzan

h = 7 u

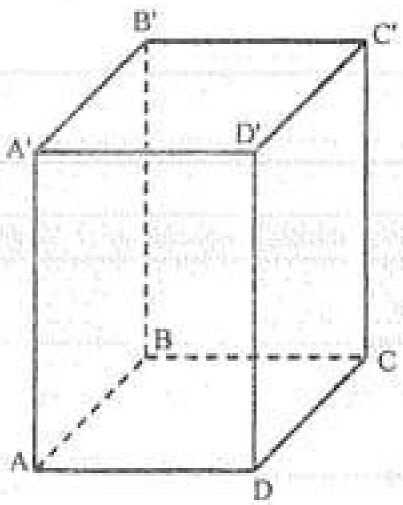
$\widehat{\alpha} = 30°$

$\widehat{\beta} = 50°$

T) Angulo entre PQ y AB =?

Resp: 62.54°

74. -



H) A - C' Paralelepípedo recto

AD' = A'D = 9 u

AB = 7 u

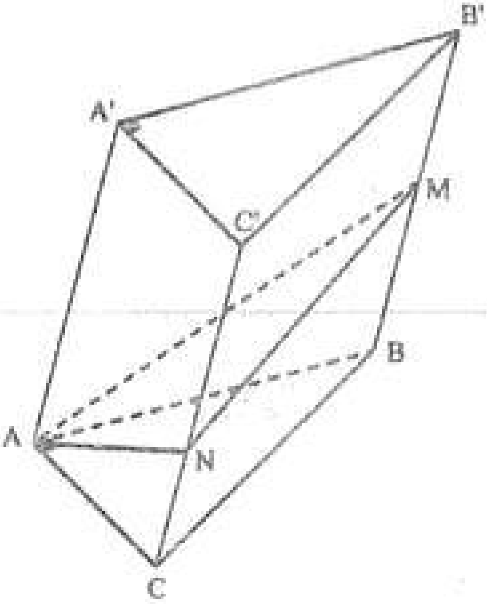
AC = 13 u

BD = 11 u

T) Angulo entre AA'B'B y AA'D'D =?

Resp: 90°

75. -

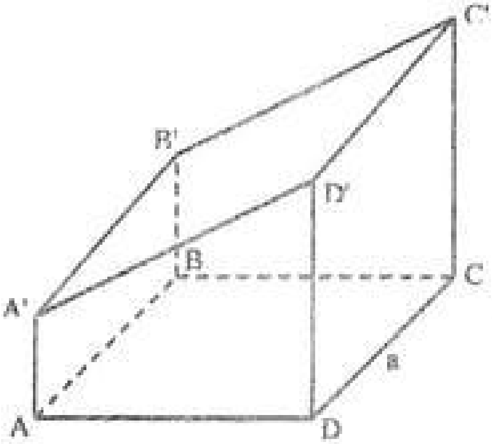


H) ABC - A'B'C' Prisma oblicuo
Altura = 7 u
AM = AN = 5 u
BM + NC = 7.5 u

T) a) BM =? ; CN =?
b) $V_{ABC-A'B'C'}$ =?
c) AA' =?

Resp: 2.5 u ; 5 u ; 138.34 u³ ; 12.78 u.

76. -

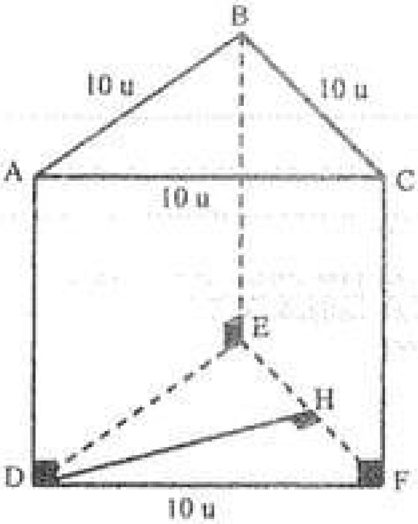


H) A - C' Tronco de prisma regular
a = 3 u
Angulo entre las bases = 40°
BB' = DD' = 8 u

T) AA' =?
CC' =?

Resp: 5.49 u; 10.51u.

77. -



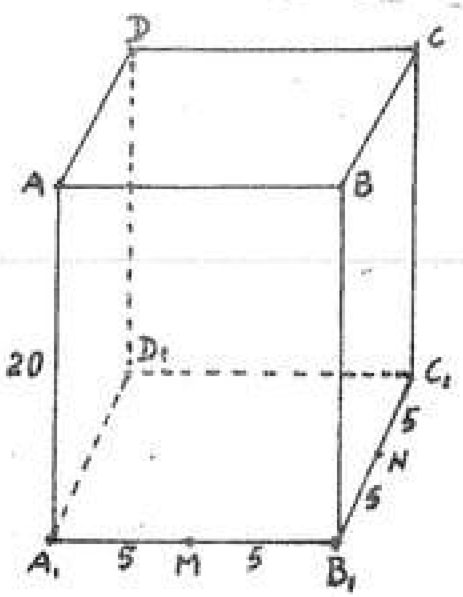
T) Distancia mínima entre $\overleftrightarrow{DH}$ y $\overleftrightarrow{BF}$

Resp:

78. - En un prisma triangular regular la arista de la base es 10 u, la diagonal de una cara lateral forma un ángulo de 35° con la otra cara lateral. Calcular; S_L, S_T, y V.
Resp: 339,9 ; 425,9 ; 494,12

79. - Calcular el volumen de un prisma pentagonal regular si: $S_L = 300u^2$ y $S_B = 100u^2$.
Resp: 78[illegible]u^3

80.-



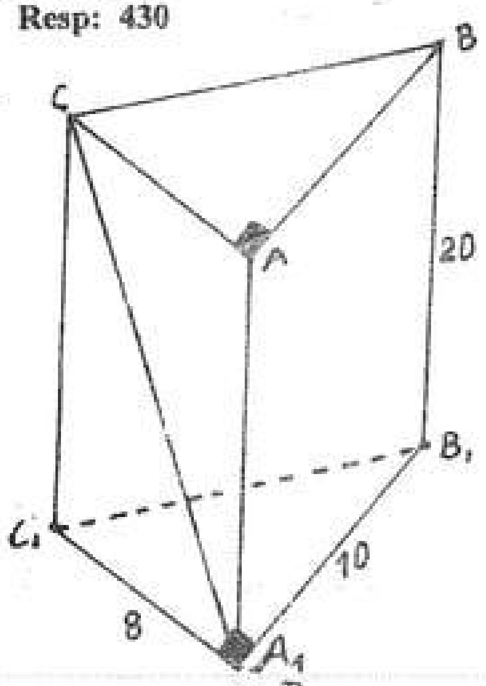
H) $A_1 - C$ paralelepípedo recto
$A_1 B_1 C_1 D_1$ cuadrado de lado 10u

T) a) Dibujar la sección que determina el plano DMN
b) Hallar el ángulo diedro entre la sección y la base del paralelepípedo
c) Hallar el volumen de cada una de las partes determinadas por la sección

Resp: 62.02°

81.- Un prisma pentagonal regular tiene de área lateral 250 m^2 y de área total 336 m^2. Hallar su volumen.
Resp: 430

82.-

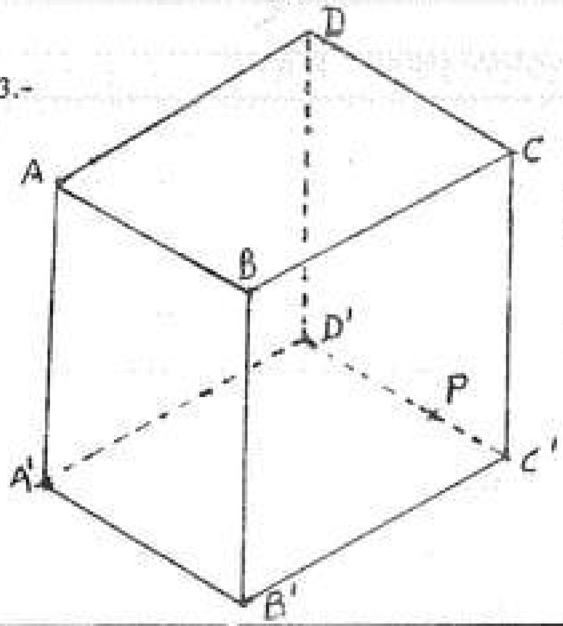


H) $ABC - A_1B_1C_1$ Prisma recto

T) Hallar la medida del ángulo entre la recta CA_1 y la cara CBB_1C_1

Resp: 16.79°

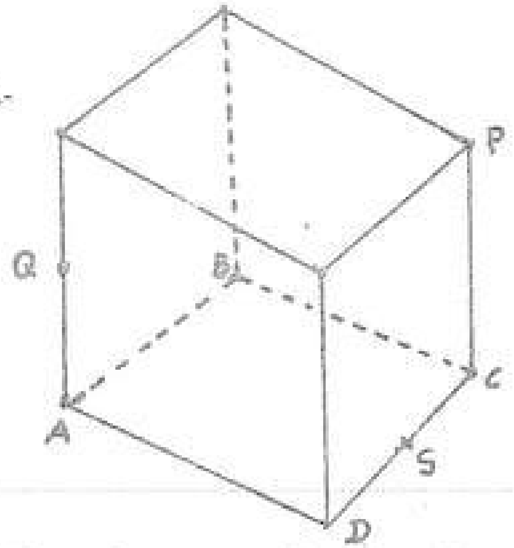
83.-



En el cubo de arista 10m. $D_1P = 1,5\ PC_1$.
Hallar el ángulo entre el triángulo APC y el cuadrado $A_1B_1C_1D_1$.

Resp: 81.9°

84.-



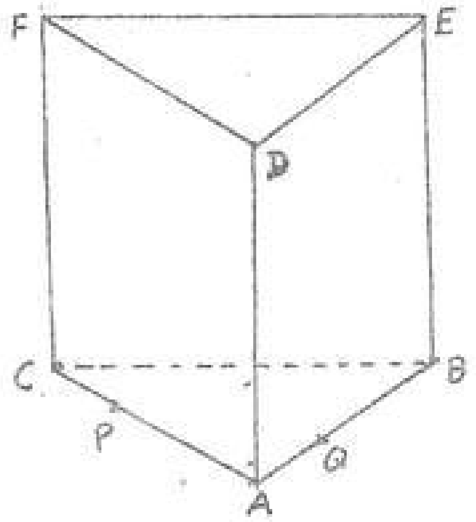
H) Q y S son puntos medios
A – P cubo de arista 10u.

T) - Dibujar la sección que pasa por PQS
- Hallar el ángulo entre la sección y la base ABCD.

Resp:

85.- En un prisma octogonal regular, su área total mide $500\sqrt{2}$ m^2. y su área lateral mide $428\sqrt{2}$ m^2. Hallar su volumen. **Resp. 1185.67**

86.-



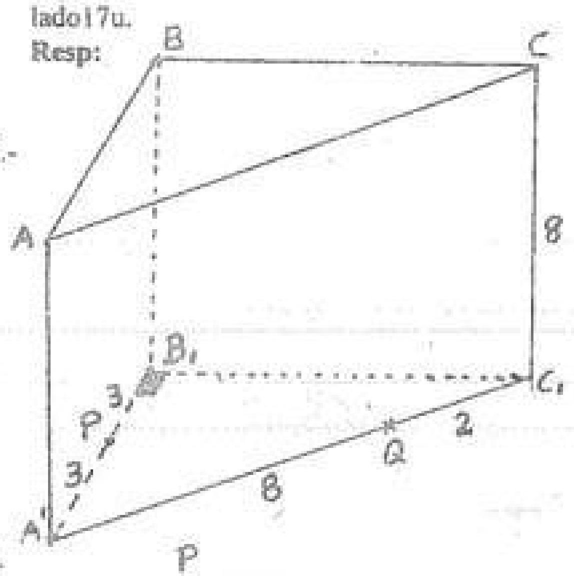
H) ABC – DEF prisma regular
CP = 3u; QB = 7u; BC = 10u
CF = 12u

T) a) Trazar la sección que pase por P, Q, E.
b) Encontrar el ángulo entre la sección y el plano ABC.

Resp: 59.83

87.- Calcular el volumen de un paralelepípedo oblicuo si la base es un rombo de lado 10u. y superficie $96u^2$; una de las caras laterales es un paralelogramo de superficie 168 u^2 y lado17u.
Resp:

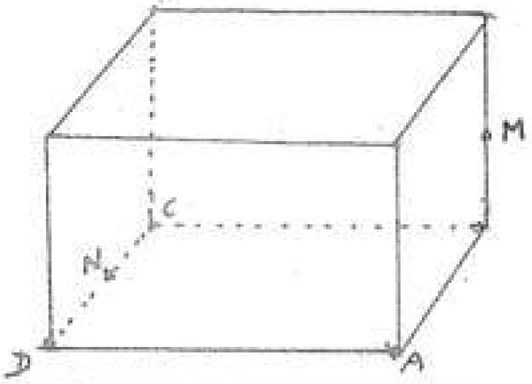
88.-



Hallar el área de la sección que determina el plano PQB en el prisma recto y el ángulo que forma la sección la sección y la base del prisma.

Resp: 42.39,70.14

89.



H) M y N puntos medios
A-P cubo de arista 10u

T) Dibujar la sección que pasa por MPN
Hallar el ángulo entre la sección y el plano ABCD

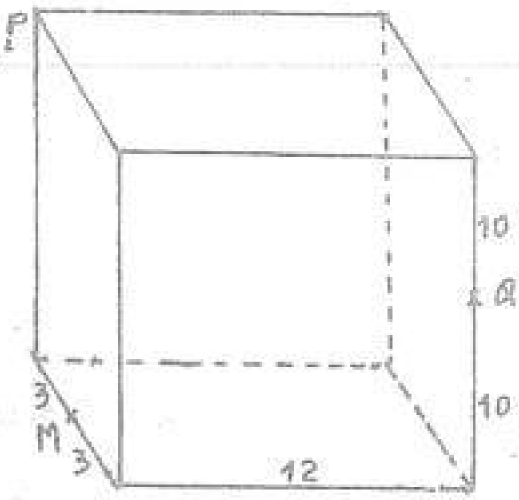
Resp: 64.12

90. Se tiene un prisma pentagonal regular, cuya área lateral es $50u^2$, el área total es$60u^2$. Encontrar su volumen.
Resp: . 21.33

91. En un prisma triangular regular, la arista de la base es 15u, la diagonal de una cara lateral forma un ángulos de 30° con otra cara lateral. Calcular el volumen.
Resp: $2066.8\ u^3$

92. La diagonal de un paralelepipedo rectangular es de 10u. y forma con una cara lateral un ángulo de 35° y con la otra cara lateral un ángulo de 45°. Calcular el área lateral del parlelepipedo.
Resp: $105{,}73\ u^2$

93.



H) El sólido es un paralelepipedo rectángulo.

T) Dibujar la sección que pasa por PMQ y calcular el valor del ángulo entre la sección y la cara ABCD

Resp: 63.7°

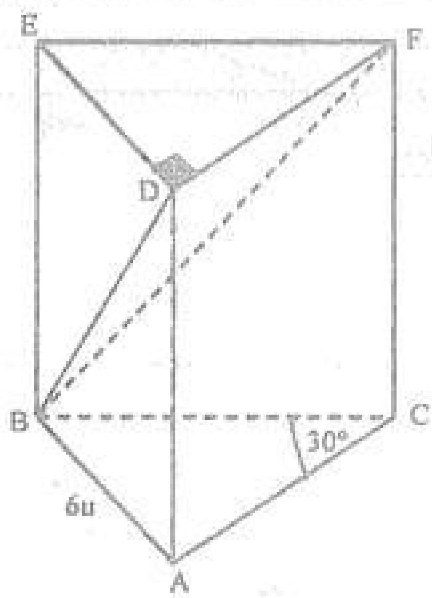
94. El área total de un prisma octogonal regular es de $400m^2$ y el área lateral es de $300\ m^2$. Hallar el volumen.
Resp: $582.67\ m^3$

95. Por la arista BC = 10 u. de la base inferior de un prisma triangular regular se traza un plano que forma un ángulo de 77° con la base del prisma y pasa por el vértice opuesto de la base superior. Hallar el área de la sección y el volumen del prisma.
Resp: $1624.26\ u^2$; $142.42\ u^3$

96. Calcular el volumen de un prisma octogonal regular de apotema 5m y área lateral $500m^2$
Resp: $1250.10\ u^3$

97. En un prisma triangular regular de arista en la base 5m y de altura 10m, se traza un plano que pasa por una arista de la base y forma un ángulo de 50° con la base. Hallar el área de la sección, el área total y el volumen del prisma.
Resp: 16.8; 171.6; $108\ u^3$.

98. En un prisma triangular regular ABC-DEF de volumen $90m^3$, se construye un plano que pasa por el vértice D, por M, punto medio de BE y por L, punto medio de CF. Hallar el volumen del sólido ABC-DML.



H) ABC - DEF Prisma recto
DBF = 40°

T) V_{PRISMA} =?

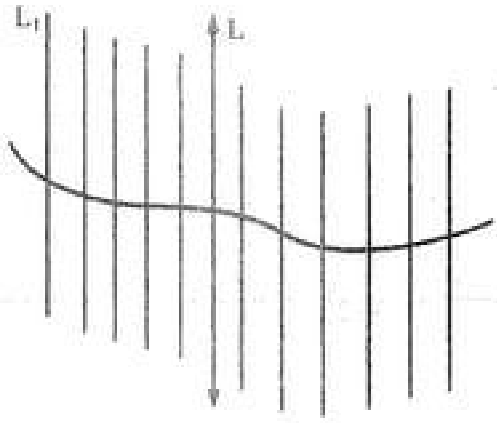
Resp: $291.10\ u^3$

UNIDAD 4

4. - CILINDROS

4.1. - SUPERFICIE CILINDRICA

Es la superficie engendrada por una recta, que se mueve paralelamente a una dirección dada apoyándose sobre una línea curva.



EJE: Dirección dada $\overrightarrow{L}$

DIRECTRIZ: Línea curva

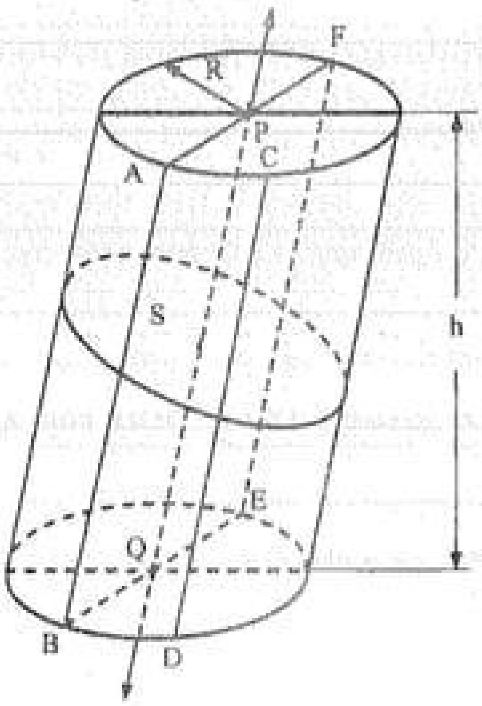
GENERATRIZ: $\overleftrightarrow{L_1}$

4.2. - CILINDRO CIRCULAR

4.2.1. - DEFINICIÓN

Es el sólido geométrico limitado por una superficie cilíndrica y dos superficies circulares localizadas en planos paralelos.

4.3. - ELEMENTOS

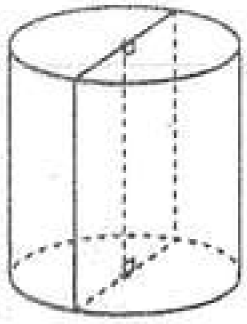


EJE: $\overleftrightarrow{PQ}$
GENERATRIZ: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, ..., g
DIRECTRIZ: ⊙(Q, R)
BASES: ⊙(P, R) y ⊙(Q, R)
ALTURA: h, perpendicular común a las bases.
AREA LATERAL: Es el área de la superficie cilíndrica.
AREA TOTAL: Area Lateral más el área de las bases.
SECCION RECTA: Es la sección perpendicular a todas las generatrices.
SECCION AXIAL: Es la sección que contiene el Eje del cilindro. ABEF.

4.4. - CLASIFICACION

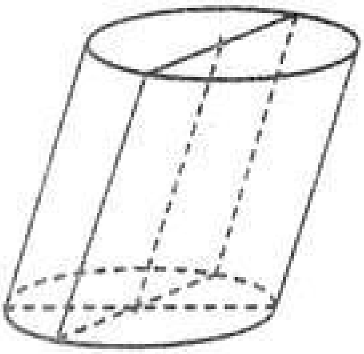
4.4.1. - CILINDRO CIRCULAR RECTO O DE REVOLUCION

Si el eje es perpendicular a las bases.



4.4.2. - CILINDRO CIRCULAR OBLICUO

Si el eje no es perpendicular a las bases.



4.5. - PROPIEDADES

4.5.1. - En todo cilindro circular se puede inscribir y circunscribir prismas que tengan por aristas laterales las generatrices del cilindro y por bases, polígonos inscritos y circunscritos a las bases. Por consiguiente se puede considerar al cilindro circular como un prisma de infinito número de caras.

4.5.2. - El área lateral de un cilindro circular es igual al producto del perímetro de una sección recta por la generatriz.

$$S_L = P_{S.R.} \cdot g$$

4.5.3. - El área lateral del cilindro de revolución es igual al producto del perímetro de la base por la generatriz.

$$S_L = P_B \cdot g = 2\pi Rg.$$

4.5.4. - El volumen de un cilindro circular es igual al producto de su base por su altura.

$$V = S_B \cdot h = \pi R^2 h$$

4.5.5. - Dos cilindros circulares rectos son semejantes si son engendrados por rectángulos semejantes.

4.5.6. - Las áreas laterales o totales de dos cilindros circulares rectos semejantes son, entre sí, como los cuadrados de sus lados homólogos, y sus volúmenes como el cubo de sus lados homólogos.

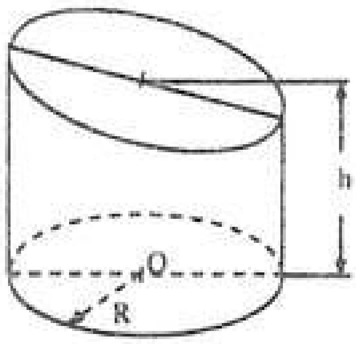
$$\frac{S_{L_1}}{S_{L_2}} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{g_1^2}{g_2^2} = \dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{S_{T_1}}{S_{T_2}} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{g_1^2}{g_2^2} = \dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} = \frac{g_1^3}{g_2^3} = \dots\dots\dots\dots$$

4.6. - TRONCO DE CILINDRO CIRCULAR RECTO

Es la parte de un cilindro de revolución obtenida al construir una sección oblicua al eje del cilindro.



4.6.1. - AREA LATERAL

El área lateral es igual al perímetro del círculo de la base por el eje.

$$S_L = 2\pi R \,.\, h$$

4.6.2. - VOLUMEN

Es igual a la superficie de la base por el eje.

$$V = \pi R^2 \,.\, h$$

4.7. - RELACION PRISMA - CILINDRO CIRCULAR

4.7.1. - CILINDRO DE REVOLUCION INSCRITO EN UN PRISMA

La superficie lateral es tangente a las caras laterales.
Las bases son círculos inscritos en las bases del prisma.
Son de la misma altura.

4.7.1. - CILINDRO DE REVOLUCION CIRCUNSCRITO A UN PRISMA RECTO

Las bases del prisma son polígonos inscritos en las bases del cilindro.
Son de la misma altura.

4.8. - EJERCICIOS.

1. - En un cilindro de revolución, demostrar que el volumen cumple:

$$V = \sqrt{\frac{S_L^2(S_T - S_L)}{8\pi}}$$

2. - La altura h de un cilindro de revolución es igual al diámetro del círculo de la base. Un punto del círculo superior está unido con otro del círculo inferior; la recta que une estos puntos forma con el plano de la base del cilindro el ángulo α. Determinar la distancia más corta entre dicha recta y el eje del cilindro.

Resp: $\frac{h}{2}\text{Cosec } \alpha\sqrt{1 - \text{Cos}2\ \alpha}$

3. - Si S es el área lateral de un cilindro de revolución cuyo radio de la base es R, demostrar que su volumen es igual a:

$$V = \frac{S \times R}{2}$$

4. - Dos cilindros de revolución semejantes tienen áreas totales de 18π cm^2 y 50π cm^2 respectivamente. ¿En que relación están sus volúmenes?. Resp: 27/125.

5. - El desarrollo de la superficie curva de un cilindro de revolución es un rectángulo de diagonal d y forma un ángulo α con la base. Determinar el volumen del cilindro.

Resp: $\frac{d^3 Cos^2\alpha \times Sen\alpha}{4\pi}$

6. - Calcular la superficie mojada de un cilindro de revolución de peso específico 0.6, R = 10 y h = 20, que flota horizontalmente en un recipiente que contiene agua. Resp: 1078.6 cm^2

7. - El desarrollo de la superficie lateral de un cilindro de revolución es un cuadrado de lado 10 cm. Hallar el volumen del cilindro. Resp: 79.58 cm^3.

8. - En un cilindro oblicuo se tiene que la generatriz forma un ángulo de 60° con la base, y la altura del cilindro es el doble del radio r de la sección recta.

Hallar el volumen en función de r. Resp: $\frac{8\sqrt{3}\,\pi r^3}{3}$.

9. - Tres recipientes A, B y C de forma cilíndrica de revolución y semejantes entre sí, contenían vino. La altura de A es de 6 dm, y su radio de 3 dm. Las alturas de los tres recipientes son proporcionales a los números 2, 3 y 5, los volúmenes de vino que contenían eran también proporcionales a dichos números. Se hizo un trasiego para que el vino alcanzara la misma altura en A, B y C y después de efectuado se pasaron 10 lt, de C a A, con lo que resultó que B tenía doble cantidad de vino que A. Se desea saber:
¿Qué cantidad de vino contenían A, B y C primitivamente?.
¿Qué alturas?, en el caso anterior, alcanzaba el vino en los tres recipientes, expresadas en decímetros.
¿Qué cantidades de vino contenían A, B y C cuando se igualaron en sus alturas?.
¿Qué longitud en decímetros, tenía esa altura única?.
¿De qué manera se hizo el trasiego para conseguir la misma altura en los tres recipientes?.
Resp: A 125 lt 0.54 m 80 lt
B 228 lt0.36 m 180 lt.
C 380 lt0.22 m 500 lt.
0.24 m.
72 lt de A a C
48 lt de B a C.

10. - Un recipiente de forma cilíndrica de revolución de dimensiones R=10 m, h = 20m, contiene agua en una cantidad igual a los 3/5 de su volumen total. ¿Qué nivel alcanza el agua si se encuentra dispuesto horizontalmente?. Resp: 11.$\overline{6}$ m.

11. - En un cilindro de revolución de radio R y altura h, se inscribe un prisma hexagonal regular. Encontrar el valor de K, tal que; $K = \frac{V_{Cilindro}}{V_{Prisma}}$. Resp: 1.21

12. - En un cilindro de revolución está inscrito un prisma triangular regular. Hallar la relación de sus volúmenes. Resp: 2.42

13. - Se dispone de dos recipientes, un paralelepípedo rectángulo y un cilindro de revolución abiertos en su parte superior. El paralelepípedo tiene por dimensiones 11 u, 11 u y 25 u, y contiene agua hasta una altura de 15 u. El cilindro tiene por dimensiones R = 5 u, h = 20 u. Se introduce progresivamente el cilindro en el paralelepípedo hasta que sus bases coincidan. Si el espesor es despreciable. Calcular:
a) Se derramará agua hacia el exterior. ¿Cuánto?.
b) ¿Qué cantidad de agua se introduce en el cilindro?. Resp: 3.61 u^3 ; 6.05 u^3.

14. - Un cilindro de revolución contiene agua hasta la mitad de su altura, si se suelta una piedra, el agua sube 3.5 u. Si el radio del cilindro es 4 u. ¿Cuál es el volumen de la piedra?.
Resp: 176 u^3.

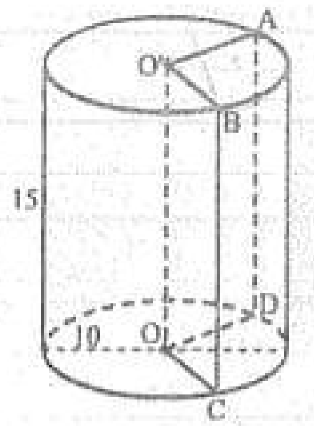
15. - Al aumentar el radio de un cilindro de revolución de 2 m de altura, en 6 m, el volumen aumenta en x. Si la altura aumenta en 6 m el volumen aumenta en x. Calcular el radio de la base del cilindro.
Resp: 6 m

16. - En un tronco de cilindro de revolución, el radio de la base es 15 u, las generatrices mayor y menor se diferencian en 12 u. Si el eje es 40 u. Calcular las generatrices mayor y menor, el Area lateral y el volumen.
Resp: 46 u ; 34 u ; 3768 u^2 ; 28260 u^3

17. - En un prisma pentagonal regular está circunscrito un cilindro de revolución. Calcular la relación entre sus volúmenes. Resp: 1.32

18. - En un cilindro de revolución de dimensiones R = 9 u, h = 18 u, contiene agua hasta una altura de 10 u. Se introduce otro cilindro de revolución de dimensiones R_1 = 7 u y altura 15 u, abierto en su parte superior. Se derramará el agua, ¿Cuánto?. ¿Qué cantidad de agua se introduce en el cilindro?. Resp. 215.32 u^3, 1634 u^3.

19. -



H) $\hat{AO'B} = 100°$

T) S_L(O'AB - ODC) =? 229.8

V (O'AB - ODC) =? 1309

S_T (O'AB - ODC) =? 404.33

20. - El área lateral de un prisma regular es S, y el apotema de la base es a. Hallar el volumen del cilindro inscrito en el prisma. Resp:

21.- Calcular El volumen de un cilindro de revolución si el área total es de 140 u^2 y la superficie de la base es de 20 u^2. Resp: 126 u^3

22.- En un cilindro de revolución de R = 10 u. y altura 50 u. está circunscrito aun prisma pentagonal regular. Calcular el volumen comprendido entre el cilindro y el prisma. Resp: 2453.61 u^3

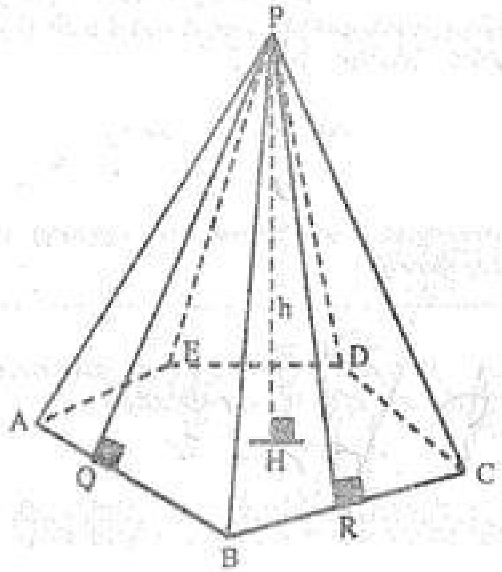
UNIDAD 5

5. - PIRAMIDES

5.1. - DEFINICIÓN

Es un sólido que se obtiene al cortar un ángulo poliedro con un plano que interseque a todas las aristas en puntos distintos del vértice.

5.2. - REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y ELEMENTOS



BASE: El Polígono ABCDE......

VERTICE: El Punto P

CARAS LATERALES: Son los triángulos PAB, PBC, PCD, ...

ARISTAS LATERALES: Son los segmentos $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$, ...

ALTURA: Es la longitud de la perpendicular trazada desde el vértice a la base: h

APOTEMA: Es la altura de una cara lateral: $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$, ...

AREA LATERAL: Es igual a la suma de las áreas de las caras laterales.

AREA TOTAL: Es igual al área lateral más el área de la base.

5.3. - DENOMINACIÓN

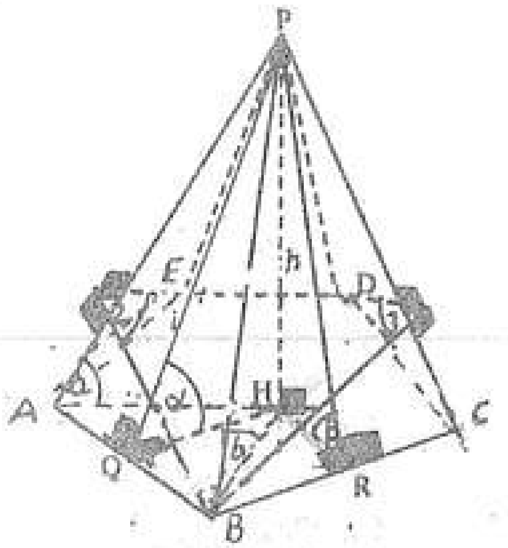
Por las letras del vértice y de la base. Pirámide P - ABCDE......

5.4. - CLASIFICACIÓN

5.4.1. - Por la Forma de su Base

Triangular	La base es un triángulo
Cuadrangular	La base un cuadrilátero
Pentagonal	La base un Pentágono
Hexagonal	La base un Hexágono
....	....

5.4.2. - Regulares



a) Base ABCDE..... polígono regular
b) Las aristas laterales son congruentes
   PA = PB = PC = ...
c) Las apotemas son congruentes
   PQ = PR = ...
d) El pie de la altura h coincide con el centro de la base
e) Los ángulos diedros en la base son congruentes

$$\hat{\alpha} = \hat{\beta} = \ldots\ldots = arcCos\left(\frac{S_B}{S_L}\right), \text{ donde:}$$

S_B = Superficie de la base
S_L = Superficie lateral

$S_{\Delta APB} \cdot Cos\alpha = S_{\Delta AHB}$
$S_{\Delta PBC} \cdot Cos\beta = S_{\Delta BHC}$
$S_{\Delta CPD} \cdot Cos\omega = S_{\Delta CHD}$
....

$S_L \cdot Cos\alpha = S_B$

f) Los ángulos diedros entre las caras laterales son congruentes

$\hat{2} = \hat{3} = \ldots\ldots$

g) Los ángulos formados entre las aristas laterales y la base son congruentes

$\hat{a} = \hat{b} = \ldots\ldots$

h) El área lateral es igual al semiperímetro de la base por la apotema.

$S_L = S_{\Delta APB} + S_{\Delta BPC} + S_{\Delta CPD} + \ldots\ldots$

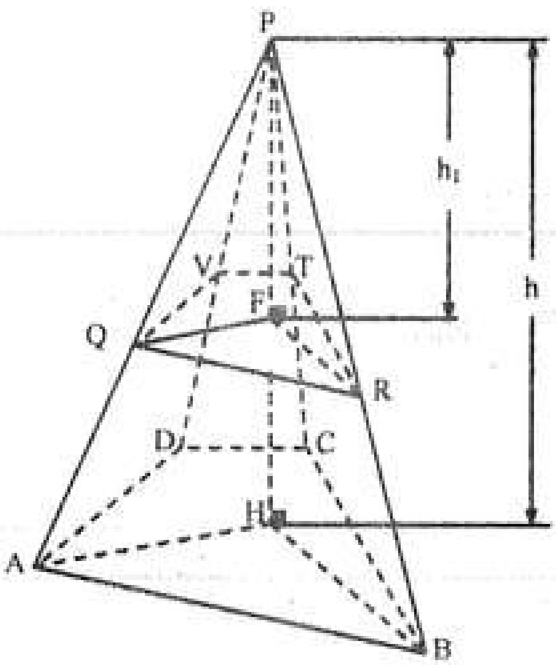
$$S_L = \frac{AB \times ap}{2} + \frac{BC \times ap}{2} + \frac{CD \times ap}{2} + \ldots\ldots$$

$S_L = a_p \cdot p$ donde : ap = apotema y p = semiperímetro.

5.5. - PROPIEDADES

5.5.1.- Si en una pirámide se construye una sección paralela a la base; entonces :

a) Las aristas, las apotemas y alturas de las dos pirámides son proporcionales.
b) Las bases son dos polígonos semejantes
c) Las bases están en la misma razón que el cuadrado de la razón de sus partes homólogas.



$\Delta PAH \approx \Delta PQF$; $\Delta PHB \approx \Delta PFR$; ...

$$\frac{PA}{PQ}=\frac{h}{h_1}=\frac{PB}{PR}=\frac{PC}{PT}=....$$

$\Delta PAB \approx \Delta PQR$; $\Delta PBC \approx \Delta PRT$; ...

$$\frac{AB}{QR}=\frac{BC}{RT}=\frac{PA}{PQ}=\frac{PB}{PR}=....$$

$$\frac{AB}{QR}=\frac{h}{h_1}=\frac{PA}{PQ}=\frac{PB}{PR}=....$$

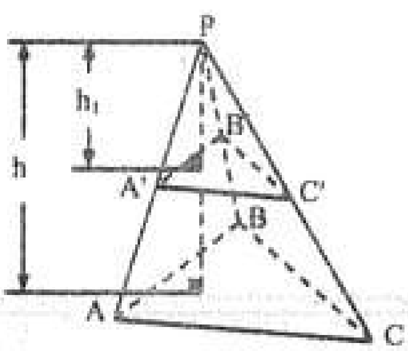
$$\frac{AB}{QR}=\frac{AH}{QF}=\frac{BH}{RF}=....$$

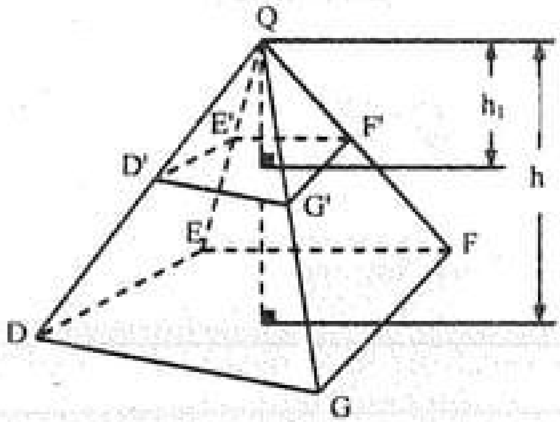
$\Rightarrow \Delta AHB \approx \Delta QFR$

$\Rightarrow$ ABCDE... $\approx$ QRTV....

$$\Rightarrow \frac{S_{ABCDE.}}{S_{QRTV...}}=\frac{AB^2}{QR^2}=\frac{h^2}{h_1^2}=.....$$

5.5.2. - Si dos pirámides tienen alturas iguales, las áreas igual distancia de sus respectivos vértices son p...



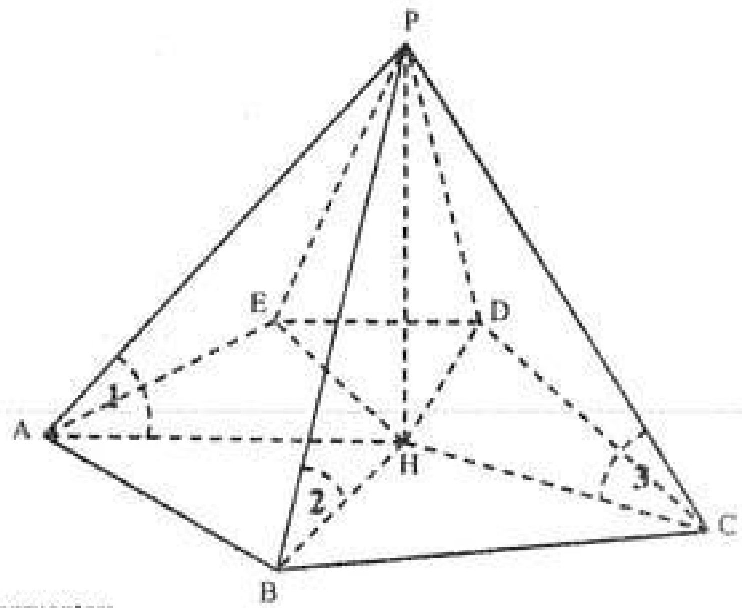


$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ABC'}}=\frac{h^2}{h_1^2}=\frac{S_{DEFG}}{S_{DEFG}}$$

5.5.3. - Si dos pirámides de igual altura tienen sus bases equivalentes, las secciones trazadas paralelamente a las bases y a iguales distancias de sus respectivos vértices son también equivalentes.

5.5.4. - Si una pirámide tiene las aristas laterales congruentes:

a) Los ángulos formados entre las aristas laterales y la base son congruentes.
b) La base es un polígono inscriptible.
c) El pie de la altura coincide con el circuncentro de la base.



Δ PAH $\cong \Delta$ PBH $\cong \Delta$ PCH $\cong$ ....

PH común, PA = PB = PC = ...

$\Rightarrow \ \hat{1} \cong \hat{2} \cong \hat{3} \cong$ ....

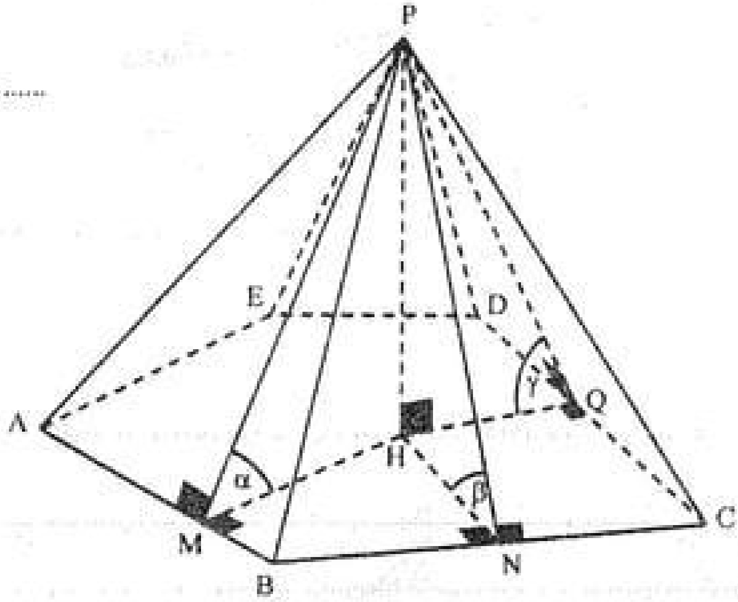
$\Rightarrow$ HA = HB = HC = ...

$\Rightarrow$ H es Circuncentro del polígono

5.5.5. - Si una pirámide tiene todas sus apotemas congruentes:

a) Los ángulos diedros formados entre las caras laterales y la base son congruentes.
b) La base es un Polígono circunscriptible.
c) El pie de la altura coincide con el incentro de la base.
d) El ángulo diedro formado entre una cara lateral y la base es igual a:

$$\hat{\alpha} = Cos^{-1}\left(\frac{S_B}{S_L}\right)$$



Δ PMH $\cong \Delta$ PNH $\cong \Delta$ PQH $\cong$ ....

Rectángulos, PH común, PM = PN = PQ = ...

$\Rightarrow \ \hat{\alpha} = \hat{\beta} = \hat{\gamma} =$ ....

$\Rightarrow$ MH = NH = QH = ...

$\Rightarrow$ H incentro del polígono

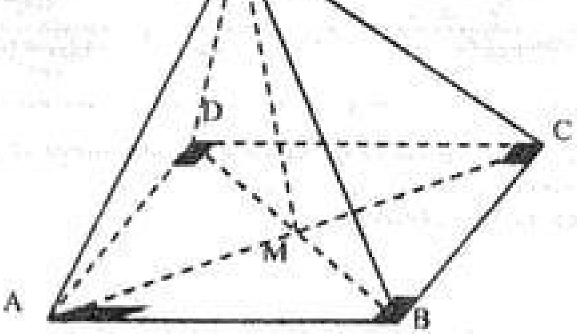
$S_{\Delta PAB} \cdot \text{Cos}\ \alpha = S_{\Delta AHB}$
$S_{\Delta PBC} \cdot \text{Cos}\ \alpha = S_{\Delta BHC}$
$S_{\Delta PCD} \cdot \text{Cos}\ \alpha = S_{\Delta CHD}$
....

$S_L \cdot \text{Cos}\ \alpha \quad = \quad S_B$

$$\hat{\alpha} = Cos^{-1}\left(\frac{S_B}{S_L}\right)$$

donde: S_B = Superficie de la base, y S_L = Superficie lateral

5.5.6. - Si la base de una pirámide es un rectángulo, la suma de los cuadrados de dos aristas laterales opuestas es igual a la suma de los cuadrados de las otras dos.

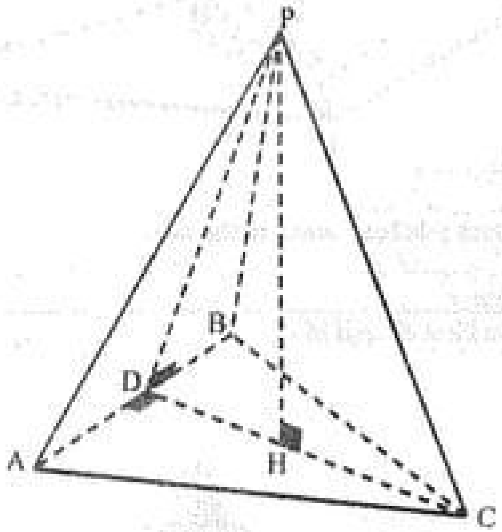


ΔPAC $\quad PM^2 = \frac{1}{4}\left(2PA^2 + 2PC^2 - AC^2\right)$

ΔPBD $\quad PM^2 = \frac{1}{4}\left(2PB^2 + 2PD^2 - BD^2\right)$

$\Rightarrow \quad PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$

5.5.7. - Si el pie de la altura de una pirámide triangular está en la altura de la base, la arista de la base relativa a esta altura se cruza perpendicularmente con la arista lateral opuesta.



H) $\overline{PH} \perp \Delta ABC$
$\overline{CD} \perp \overline{AB}$

T) $\overline{AB} \perp \overline{PC}$

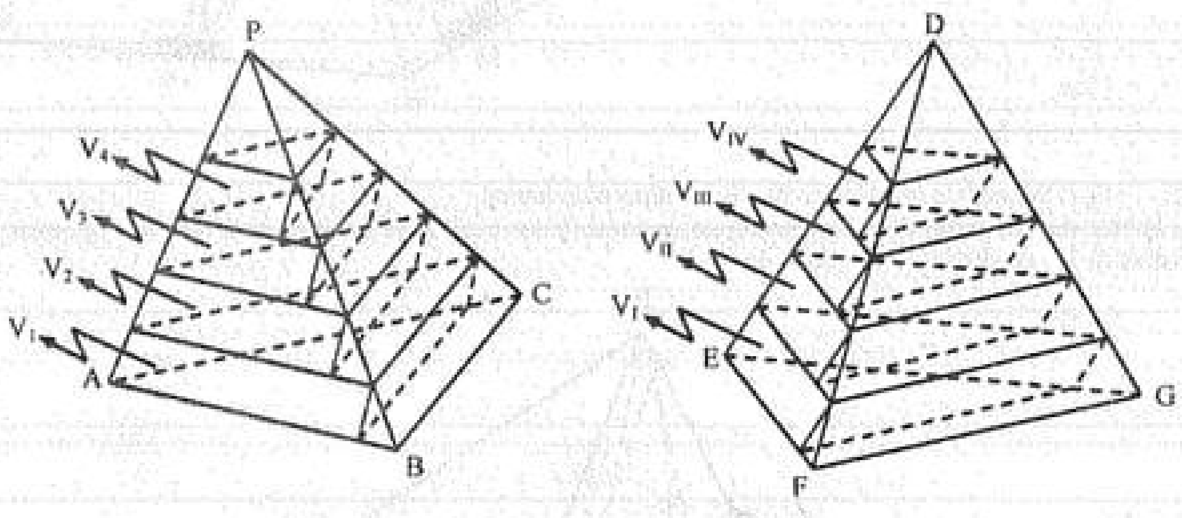
D) $\overline{AB} \perp \overline{DC}$
$\overline{AB} \perp \overline{PH}$
$\Rightarrow \overline{AB} \perp \Delta PDC$
$\Rightarrow \overline{AB} \perp \overline{PC}$

5.5.8. - Las perpendiculares trazadas desde los vértices de una pirámide triangular regular pasan por los ortocentros de las caras opuestas.

5.5.9. - Si el vértice de una pirámide es un triedro trirectángulo, el pie de la altura de la pirámide coincide con el ortocentro de la base.

5.6. - VOLUMEN

5.6.1. - Dos tetraedros de bases equivalentes y de alturas iguales son equivalentes.



Dividimos la altura en "n" partes congruentes y por los puntos de división trazamos planos paralelos a las bases respectivamente.
Inscribimos prismas en los tetraedros.

$V'_{P\text{-}ABC} = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots\ldots$
$V'_{D\text{-}EFG} = V_I + V_{II} + V_{III} + \ldots\ldots$

$$V_1 = V_I$$
$$V_2 = V_{II}$$
$$V_3 = V_{III}$$
$$\dots\dots\dots$$

$$V'_{P\text{-}ABC} = V'_{D\text{-}EFG}$$

$$\text{Si } n \longrightarrow \infty$$

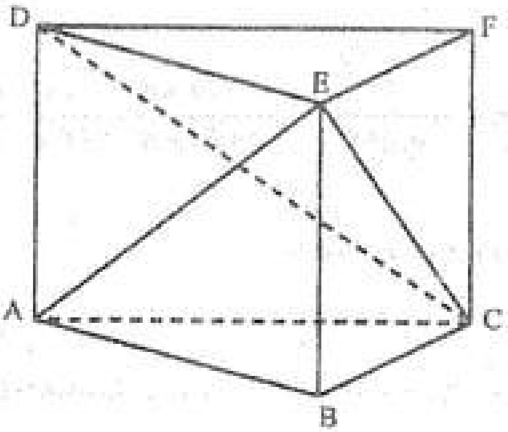
$$V'_{P\text{-}ABC} \longrightarrow V_{P\text{-}ABC}$$
$$V'_{D\text{-}EFG} \longrightarrow V_{D\text{-}EFG} \qquad \Rightarrow V_{P\text{-}ABC} \quad V_{D\text{-}EFG}$$

5.6.2. - El volumen de una pirámide triangular es igual a un tercio del producto de su base por su altura.

$$V_T = V_{E\text{-}ABC} + V_{E\text{-}ADC} + V_{E\text{-}DFC}$$

$$S_{\Delta ABC} \cdot h = 3\, V_{E\text{-}ABC}$$

$$V_{E-ABC} = \frac{S_{\Delta ABC} \times h}{3}$$

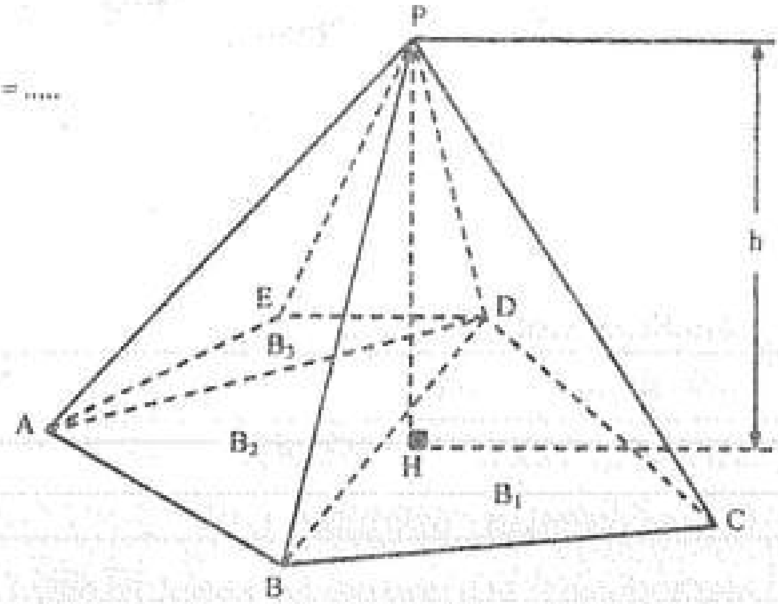


5.6.3. - El volumen de una pirámide es igual a un tercio del producto de la superficie de la base por su altura.

$$V_T = V_1 + V_2 + V_3 + \dots\dots$$

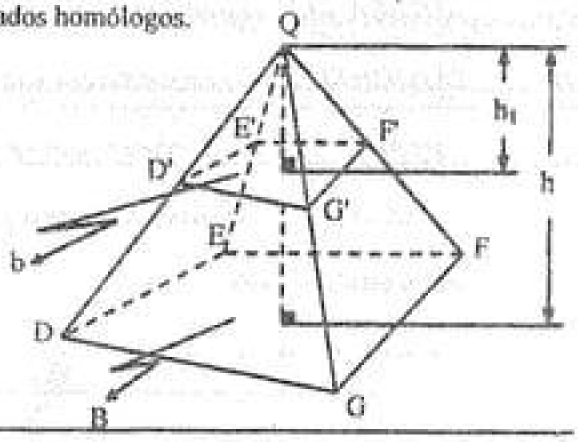
$$V_T = \frac{B_1 \times h}{3} + \frac{B_2 \times h}{3} + \frac{B_3 \times h}{3} = \dots$$

$$V_T = \frac{B \times h}{3}$$



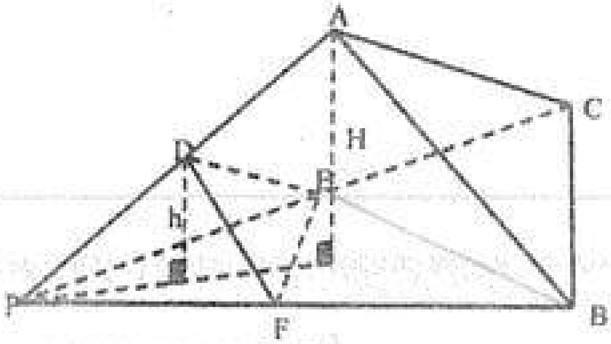
5.6.4. - Si se construye una sección paralela a la base de una pirámide, los volúmenes de las dos pirámides están en la misma razón que el cubo de la relación de dos lados homólogos.

$$\frac{V_{Q-DEFG...}}{V_{Q-DEFG..}} = \frac{\frac{b \times h_1}{3}}{\frac{B \times h}{3}}$$



$$\frac{V_{Q-D'E'F'G'...}}{V_{Q-DEFG...}}=\frac{h_1^3}{h^3}=\frac{(D'G')^3}{(DG)^3}=\frac{(QD')^3}{(QD)^3}=........$$

5.6.5. - Si los vértices de dos pirámides son triedros congruentes, sus volúmenes están en la misma relación que los productos de sus aristas laterales.

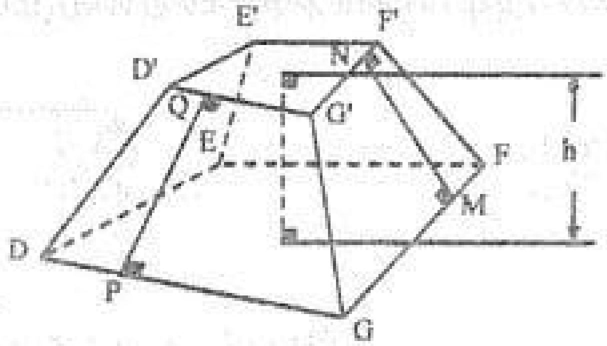


$$\frac{V_{P-DEF}}{V_{P-ABC}}=\frac{\frac{S_{\Delta PEF}\times h}{3}}{\frac{S_{\Delta PCB}\times H}{3}}=\frac{PE\times PF\times h}{PC\times PB\times H}=\frac{PE\times PF\times PD}{PC\times PB\times PA}$$

5.7. - TRONCO DE PIRÁMIDE

Es la parte de una pirámide comprendida entre la base y una sección paralela a la base.

5.7.1. - REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y ELEMENTOS



BASE MAYOR (B) : DEFG...

BASE MENOR (b) : D'E'F'G'....

ARISTAS LATERALES : $\overline{DD'}$, $\overline{EE'}$, $\overline{FF'}$,.....

CARAS LATERALES : DD'G'G, GG'F'F, ...

APOTEMA (ap) : Es la altura de una cara lateral, $\overline{PQ}$, $\overline{MN}$, ...

ALTURA (h) : Es la perpendicular común a las dos bases

DIAGONAL : Es el segmento que une dos vértices no coplanares, $\overline{DF'}$,$\overline{E'G}$,...

AREA LATERAL : Es igual a la suma de las áreas de todas las caras laterales

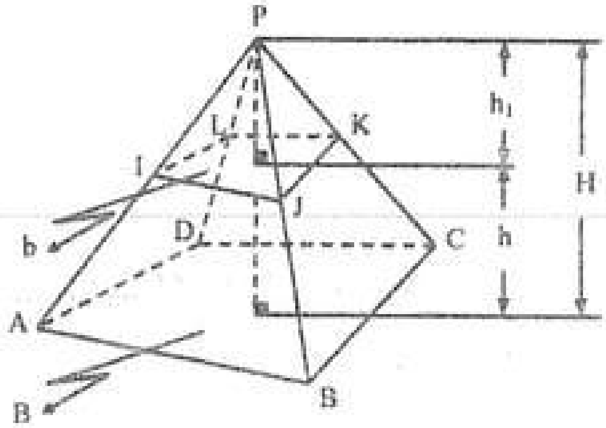
AREA TOTAL : Es la suma del área lateral más las áreas de las bases.

5.7.2. - DENOMINACIÓN

Por las letras de una diagonal. Tronco de pirámide D - F'

5.7.3. - El volumen de un tronco de pirámide es : $V = \frac{h}{3}\left(B + b + \sqrt{B \times b}\right)$

$V_{A\text{-}K} = V_{P\text{-}ABCD...} - V_{P\text{-}IJKL...}$



$$V_{A-K} = \frac{B \times H}{3} - \frac{b \times h_1}{3}$$

$$\frac{B}{b} = \frac{H^2}{h_1^2}$$

$$h_1 = \frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} \quad \text{y} \quad H = \frac{h\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}$$

$$V_{A-K} = \frac{B}{3} \times \frac{h\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} - \frac{b}{3} \times \frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}$$

$$V = \frac{h}{3}\left(B + b + \sqrt{B \times b}\right)$$

5.8. - TRONCO DE PIRAMIDE REGULAR

5.8.1. - PROPIEDADES

a) Las bases son polígonos regulares semejantes.

b) El segmento que une los centros de las bases es la altura del tronco.

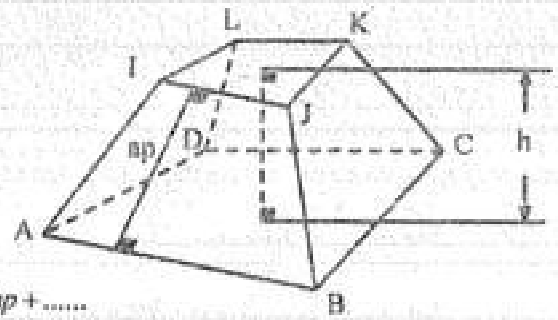
c) Todas las aristas laterales son congruentes.

d) Todas las apotemas son congruentes.

e) Los ángulos diedros en las bases son respectivamente congruentes.

f) Los ángulos diedros entre las caras laterales son congruentes.

g) El área lateral es igual al producto de la semisuma de los perímetros de las bases por el apotema.



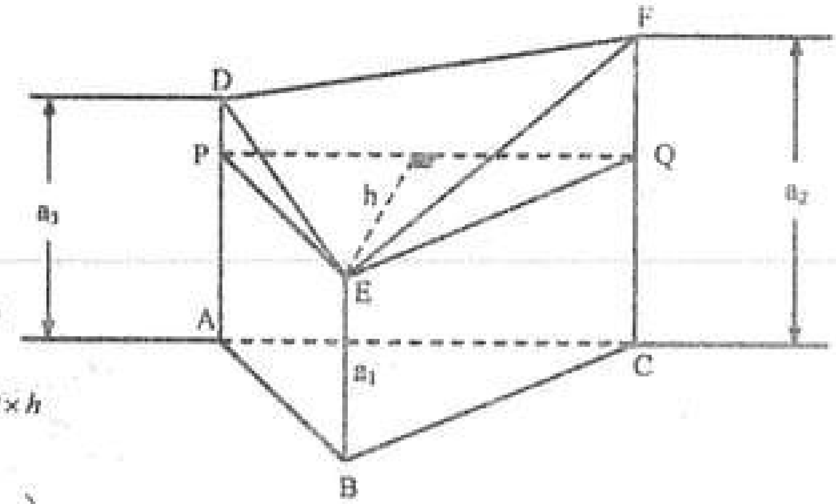
$S_L = S_{AIJB} + S_{BJKC} + S_{CKLD} + ...$

$$S_L = \left(\frac{AB + IJ}{2}\right)ap + \left(\frac{BC + JK}{2}\right)ap + \left(\frac{CD + LK}{2}\right)ap + ...$$

$$S_L = \left(\frac{P_B + P_b}{2}\right)ap = \left(p_B + p_b\right)ap$$

5.8.2. - El volumen de un tronco de prisma triangular recto es : $V = \frac{B}{3}(a_1 + a_2 + a_3)$

y en donde B = Superficie de la base, a_1, a_2, a_3 son las aristas laterales.



Δ PEQ || Δ ABC

$V = V_{\text{Prisma A-Q}} + V_{\text{pirámide E-PDFQ}}$

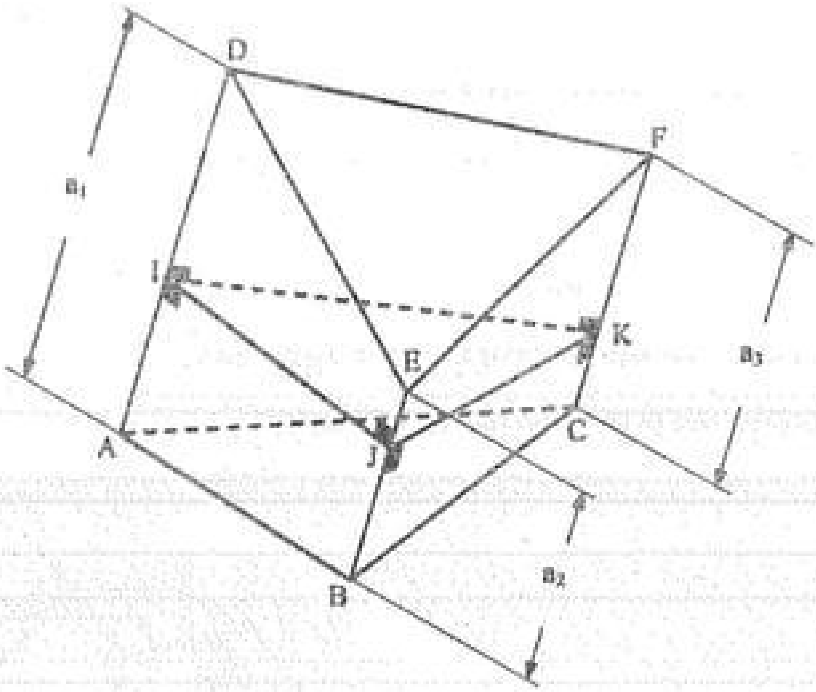
$$V = B \times a_1 + \frac{1}{3}\left(\frac{DP + FQ}{2}\right) PQ \times h$$

$$V = B \times a_1 + \frac{1}{3}\left(\frac{a_3 - a_1 + a_2 - a_1}{2}\right) PQ \times h$$

$$V = \frac{B}{3}(a_1 + a_2 + a_3)$$

5.8.3. - El volumen de un tronco de prisma triangular **oblicuo** es : $V = \frac{A_{S.R.}}{3}(a_1 + a_2 + a_3)$

siendo $A_{S.R.}$ el área de la sección recta y a_1, a_2, a_3 son las aristas laterales.



$V = V_{\text{Tronco A-k}} + V_{\text{Tronco I-F}}$

$$V = \frac{A_{IJK}}{3}(AI + BJ + CK) + \frac{A_{IJK}}{3}(ID + JE + FK)$$

$$V = \frac{A_{S.R.}}{3}(a_1 + a_2 + a_3)$$

5.8.4.- El volumen de un tronco de paralelepípedo recto es : $V = B\left(\frac{a_1 + a_3}{2}\right)$

donde B es la superficie de la base y a_1, a_3 son dos aristas laterales opuestas.

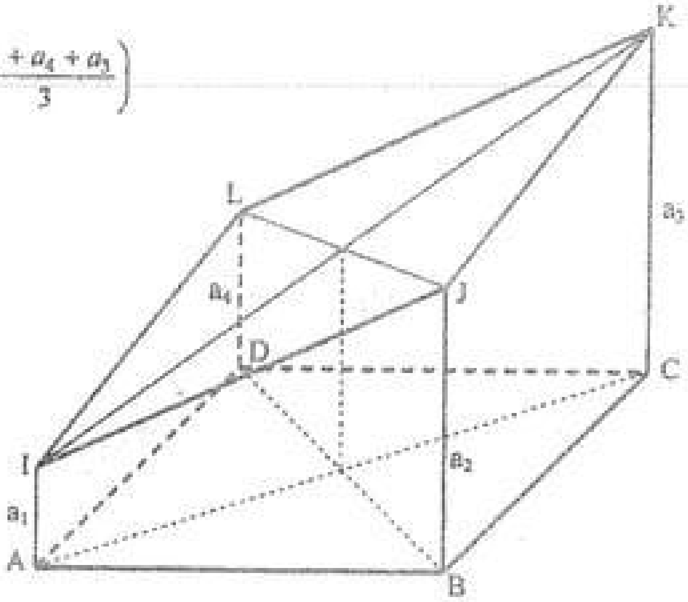
$V = V_{ABC\text{-}IJK} + V_{ADC\text{-}ILK}$

$$V = \frac{A_{ABCD}}{2}\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}\right) + \frac{A_{ABCD}}{2}\left(\frac{a_1 + a_4 + a_3}{3}\right)$$

$$V = \frac{A_{ABCD}}{6}(2a_1 + 2a_3 + a_2 + a_4)$$

$a_1 + a_3 = a_2 + a_4$

$$V = B\left(\frac{a_1 + a_3}{2}\right)$$



5.8.5. - El volumen de un tronco de paralelepípedo oblicuo es : $V = A_{S.R.}\left(\frac{a_1 + a_3}{2}\right)$

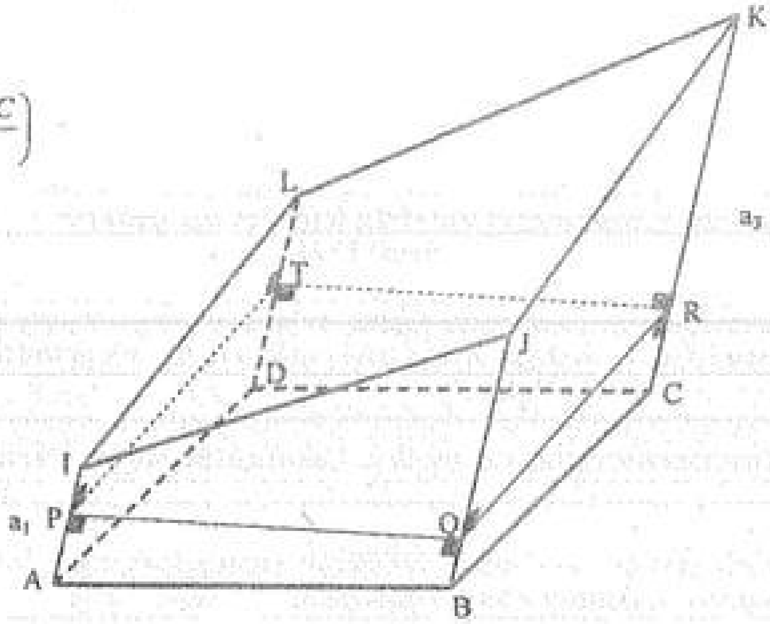
donde $A_{S.R.}$ es el área de la sección recta y a_1, a_3 son dos aristas opuestas.

$V = V_{P\text{-}C} + V_{P\text{-}K}$

$$V = A_{S.R.}\left(\frac{PI + RK}{2}\right) + A_{S.R.}\left(\frac{PA + RC}{2}\right)$$

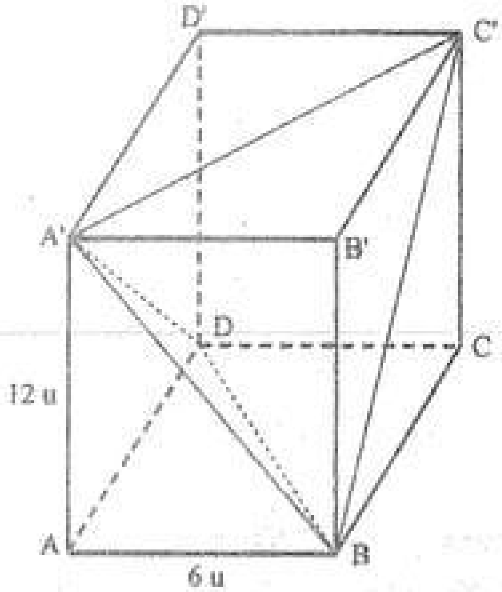
$$V = A_{S.R.}\left(\frac{AI + KC}{2}\right)$$

$$V = A_{S.R.}\left(\frac{a_1 + a_3}{2}\right)$$



5.9. - EJERCICIOS

1. -



H) A - C' Prisma regular

T) $V_{C\text{-}ABO}$ =?

Resp: 144 u^3

2. -

H) SA ⊥ ΔABC

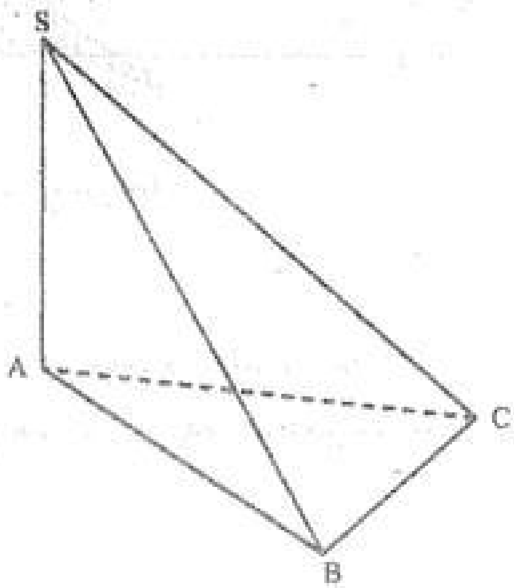
BC = 6 u

$\widehat{ACB} = 30°$

Diedro BC = 45°

T) $V_{S\text{-}ABC}$ =?

Resp: 6.76 u^3



3. - En un tetraedro regular de arista 15 u, ¿A qué altura de la base se debe trazar una sección paralela a ella, para que los volúmenes de los sólidos formados sean iguales?
Resp: 12.25 u.

4. - En una pirámide cuadrangular regular, de lado de la base 10 cm y altura 20 cm. Determinar el ángulo y la distancia entre una diagonal de la base y una apotema de la pirámide.
Resp:

5. - En un tetraedro regular de arista 10 u. Calcular el ángulo entre las caras laterales.
Resp: 70.53°.

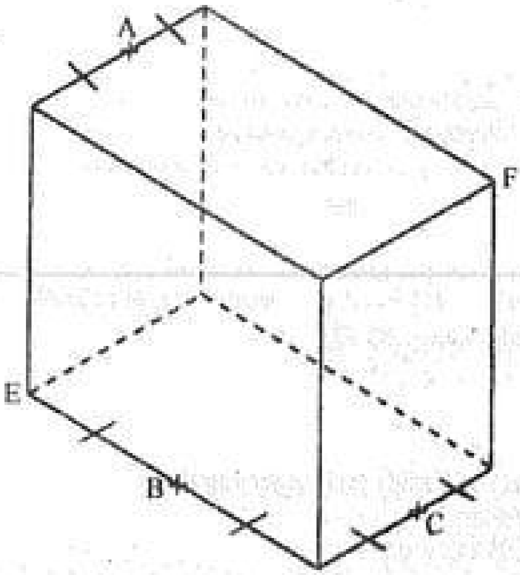
6. - En una pirámide cuya base es un triángulo rectángulo de catetos 6 u y 8 u, las aristas laterales miden 10 u cada una. Calcular la altura de la pirámide. Resp: 8.67 u

7. - La base de un prisma recto es un triángulo isósceles , los lados iguales miden 10 u, ángulo en la base 55°. Por la base del triángulo y el vértice opuesto del triángulo de la base superior se traza un plano que forma un ángulo de 40° . Determinar el volumen de la pirámide cuadrangular formada.
Resp: 107.5 u^3

8. - La superficie lateral de una pirámide triangular regular es 100 u^2. Determinar el lado de la base si el ángulo entre la cara lateral y la base es 50°. Resp: 52.05 u^3

9. - En un tetraedro regular de arista 10 u. Se divide la altura en tres partes iguales y se traza, por los puntos de división, planos paralelos a la base. Hallar el volumen del sólido intermedio.
Resp: $30,46\ u^3$

10. -

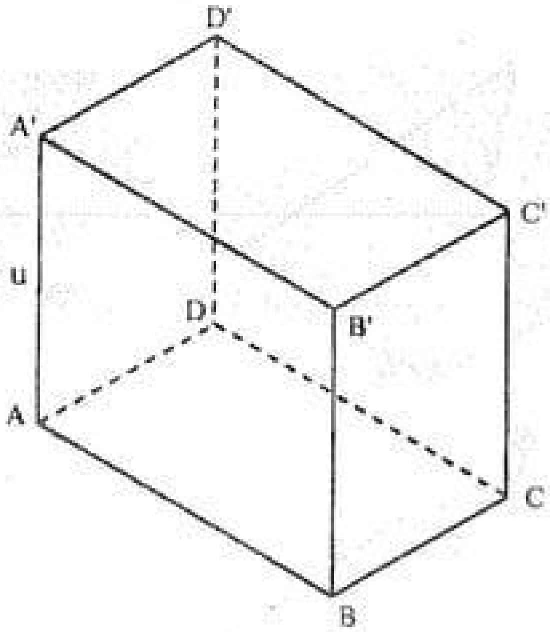


H) E - F Cubo

T) Relación de los volúmenes de los sólidos formados al construir la sección que pasa por A, B, C.

Resp: 1 u

11. -



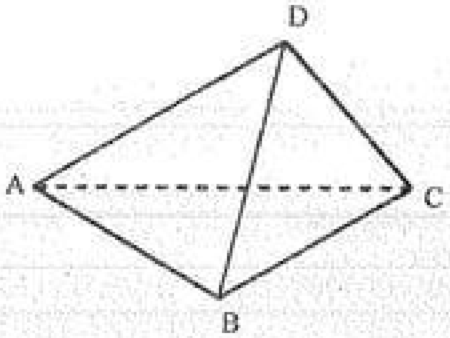
H) A - C' Cubo

T) $V_{A-C'DB}$ =?

Resp: $333,33\ u^3$

12. - En una pirámide cuadrangular regular el área lateral es de $300\ u^2$. Calcular el ángulo diedro entre la cara lateral y la base. Resp: 78.46°; $30u^2$

13. -

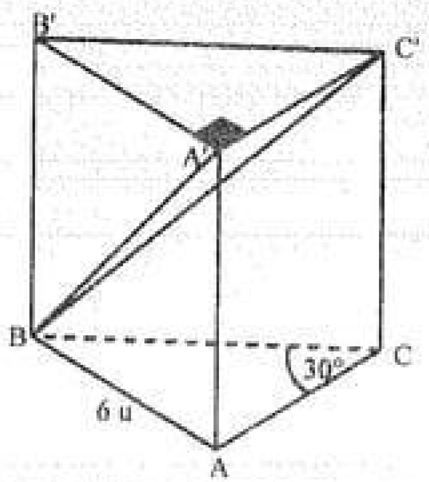


H) AC = 4 u
$AB = AD = 4\sqrt{2}u$
BC = CD = 6 u
BD = 8 u

T) V_{D-ABC} =?

Resp: $19.73\ u^3$

14. -



H) ABC - A'B'C' Prisma recto
$A'\hat{B}C' = 40°$

T) $V_{B-A'C'CA}$ =?

Resp: $145\ u^3$

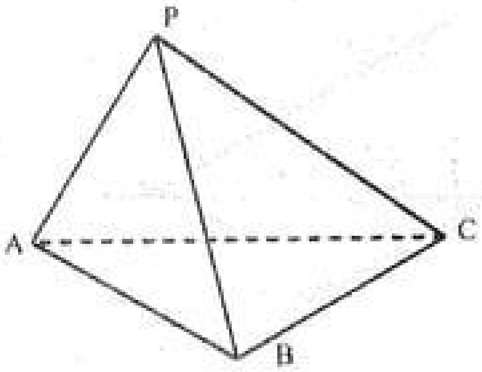
15. - Un tetraedro regular de arista 20 u contiene agua hasta una altura de 5 u. Calcular el volumen de agua. Resp: 627.8 u^3

16. - En una pirámide triangular regular las aristas laterales están inclinadas un ángulo de 50° con la base. Hallar el ángulo de inclinación de las caras laterales con la base. Resp: 67.25°

17. - Por un punto tomado sobre la arista lateral de un prisma triangular regular, lado de la base 15 u, se traza dos planos, uno de ellos pasa por un lado de la base inferior del prisma y forma un ángulo de 45° con la base. El otro pasa por el lado paralelo a la base superior. Determinar el área lateral y el volumen de la pirámide que tiene por base el plano que pasa por los lados dados y el vértice es el punto dado. Arista lateral del prisma 20 u. Resp:

18. - En un tetraedro regular P - ABC, con las aristas $\overline{PC}$, $\overline{PB}$ y en la prolongación de la arista $\overline{PB}$, se dan los puntos D, M y Q tal que; CD = 4 u ; AM = MB = 5 u ; PB = BQ = 10 u. Determinar la relación de volúmenes que se forman al construir un plano que pasa por los puntos M, Q y D.
Resp:

19. -

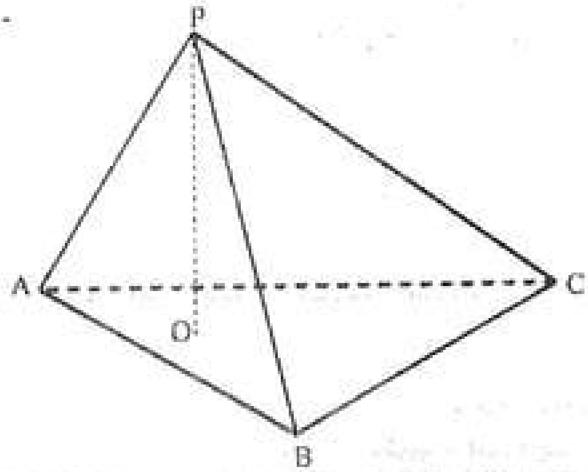


H) P - ABC Pirámide triangular regular
$S_T = 750\ u^2$
Diedro B - C = 65°

T) AB =?

Resp: 22.68 u

20. -

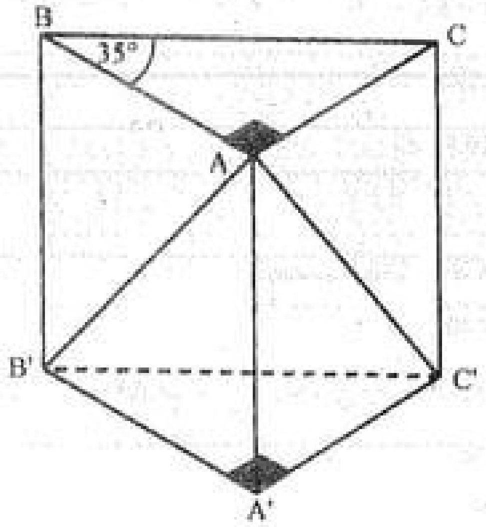


H) P - ABC Pirámide triangular regular
PA = 9 u
PO = h = 6 u

T) Diedro B - C =?

Resp:

21. -

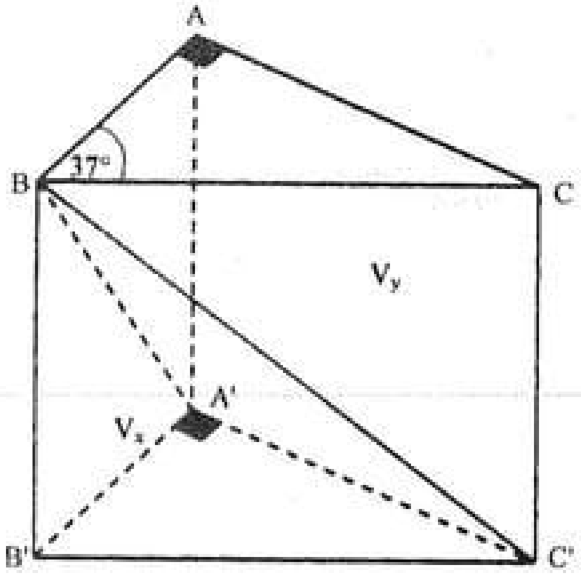


H) A - B' Prisma recto
BC = 10 u
Diedro B' - C' = 70°

T) $V_{A-A'B'C'}$ =?

Resp:

22. -

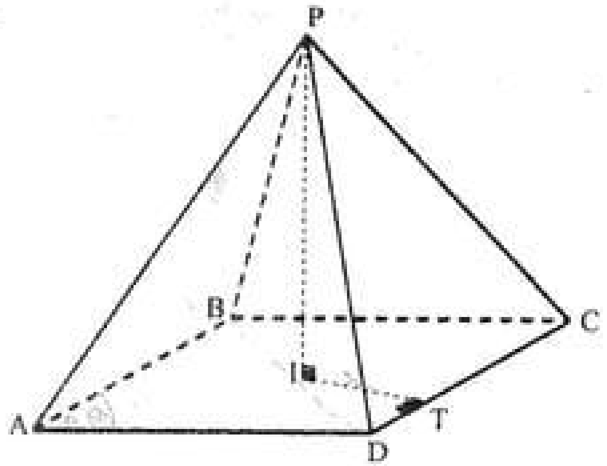


H) A - C' Prisma recto
AB + BC = 15 u
Diedro A' - C' = 65°

T) V_x =?
V_y =?

Resp:

23. -



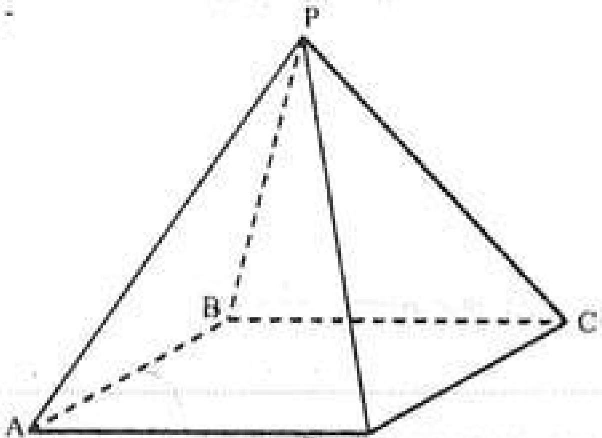
H) □ABCD Rombo de centro I

$\hat{BAD} = 30°$
IT = r = 5 m
Diedro A - B = 60°

T) S_T =?
V=?

Resp: 346.4 u^2 ; 333.33 u^3

24. -

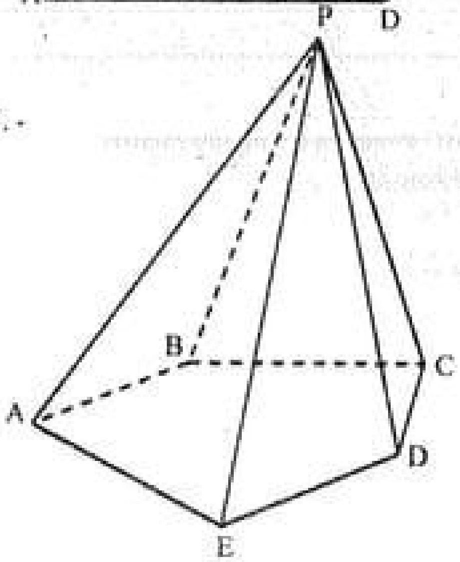


H) P - ABCD Pirámide cuadrangular regular
PC = 15 u
$\hat{PAC} = 70°$

T) V =?

Resp: 245.6 u^3

25. -

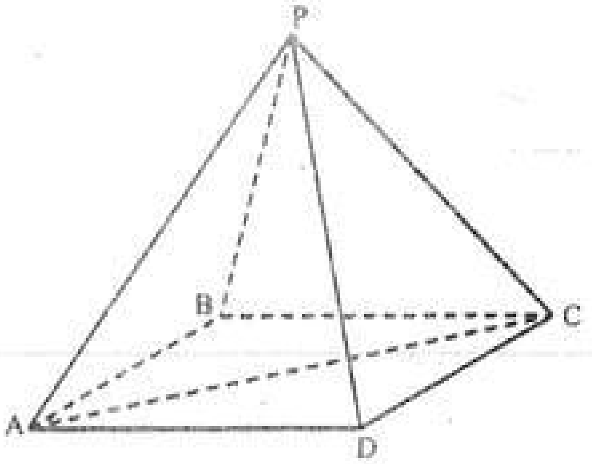


H) P - ABCDE Pirámide pentagonal regular
$S_B = 500\ u^2$
$S_L = 800\ u^2$

T) Diedro D - C =?

Resp: 51.31°

26.-

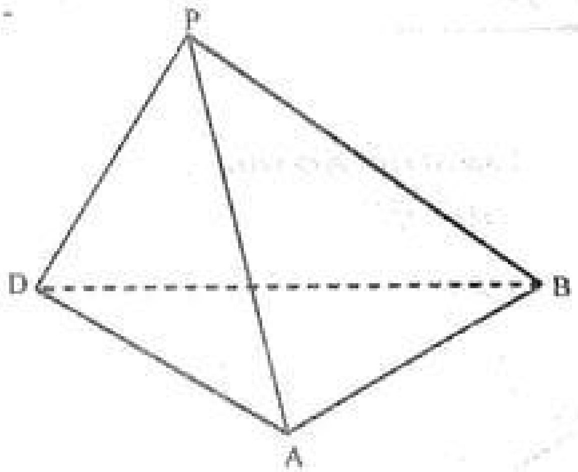


H) P - ABCD Pirámide cuadrangular regular
$V = 70.4\ u^3$
$\hat{PCA} = 68°$

T) PA =?

Resp: 9,4 u

27.-

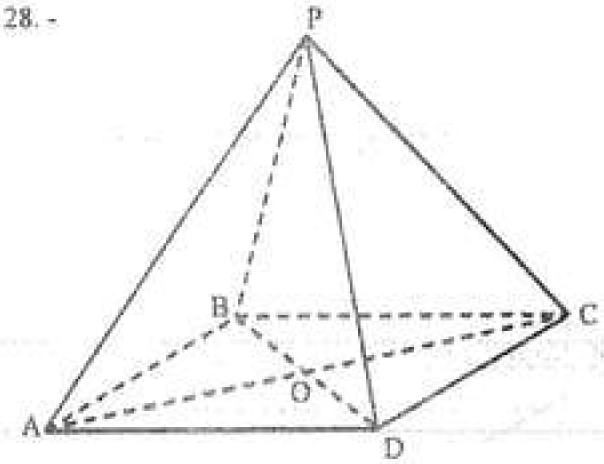


H) P - ABD Pirámide regular
$V = 2000\ u^3$
$AB = 10\ u$

T) Diedro A - B =?
$\hat{PBD} = ?$

Resp: 78.23° ; 70.54°

28.-

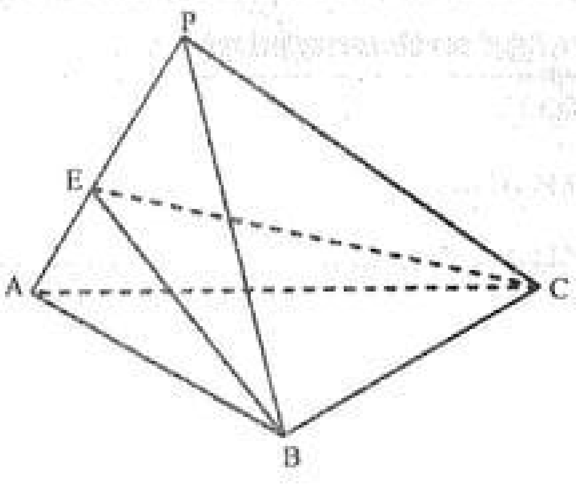


H) P - ABCD Pirámide cuadrangular
□ABCD Rectángulo
$AC = 6\ u$
$\hat{PAO} = \hat{PCO} = 70°$, $\hat{COD} = 60°$

T) V =?

Resp: $42.82\ u^3$

29.-

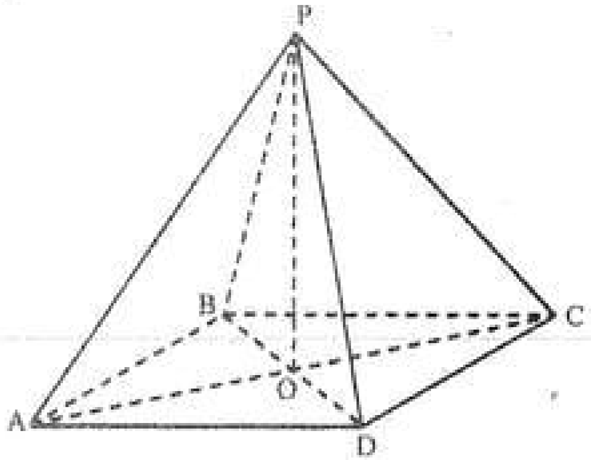


H) P - ABC Pirámide triangular regular
AP ⊥ Plano BEC
$AB = 5\ u$
$\frac{PE}{EA} = \frac{7}{2}$

T) S_T =?

Resp: $25.68\ u^2$

30. -



H) P - ABCD Pirámide cuadrangular regular

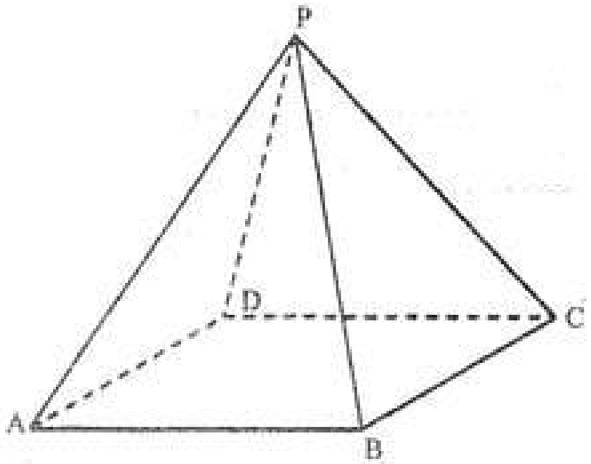
$\hat{BPC} = 40°$

$S_T = 20\ u^2$

T) PO =?

Resp: 2.93 u.

31. -



H) P - ABCD Pirámide cuadrangular regular

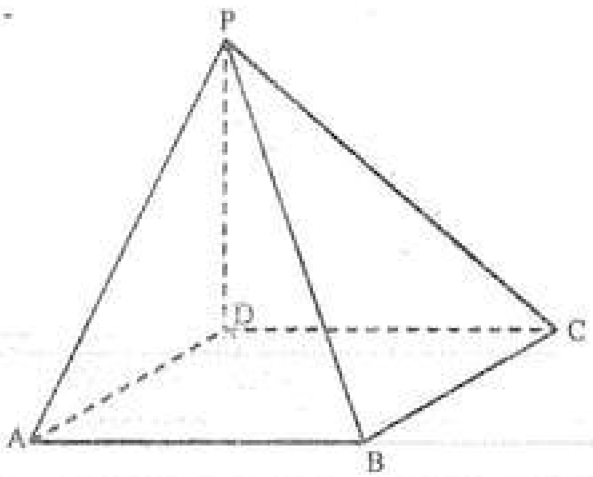
PA = 6.5 u

Diedro P - A = 120°

T) V =?

Resp: 44,86 u^3

32. -



H) P - ABCD Pirámide cuadrangular

$\overline{PD}$ ⊥ Plano ABCD

PD = 5 u

□ABCD Rectángulo

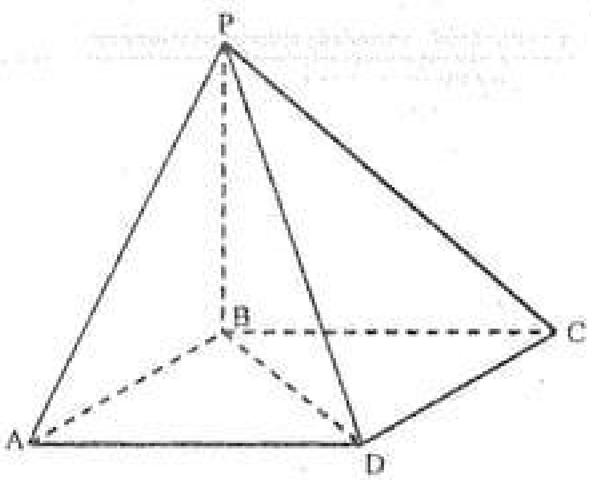
$\hat{PAD} = 75°$

$\hat{PCD} = 65°$

T) V =?

Resp: 5.27 u^3

33. -



H) P - ABCD Pirámide cuadrangular

$\overline{PB}$ ⊥ Plano ABCD

AB = 5 u

PD = 14.14 u

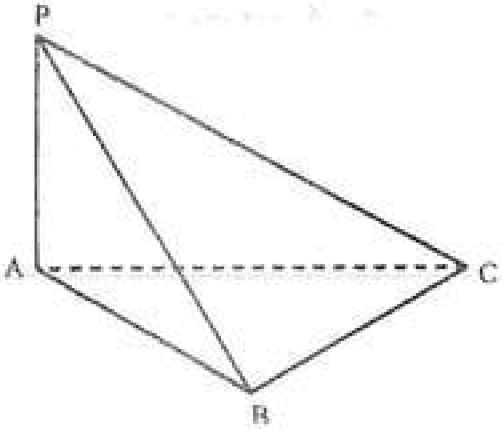
$\hat{PDB} = 60°$

T) PA = ?

$\hat{PAB}$ = ?

Resp: 13.22 u ; 67.9°

34. -

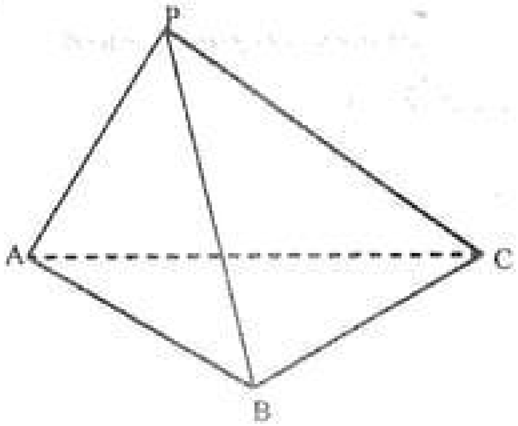


H) P - ABC Pirámide triangular
$AB = BC = CA = 5$ u
$\overline{PA} \perp$ Plano ABC
$\hat{PBA} = \hat{PCA} = 55°$

T) $S_{\Delta PBC}$ =?
Diedro B - C =?

Resp: 20.81 u^2; 58.17°

35. -

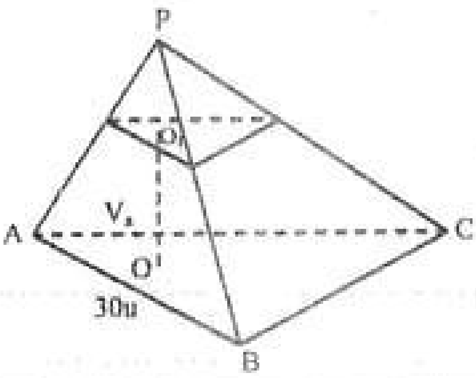


H) P - ABC Pirámide triangular regular
$AB = 12$ u
Diedro B - C = 70°

T) S_T =?
V =?

Resp: 214.65 u^2; 3145 u^3

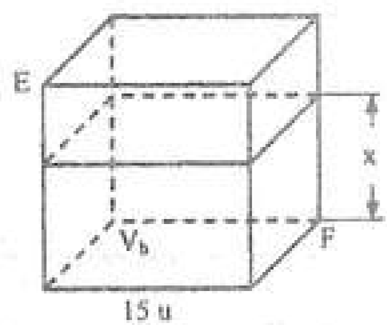
36. -



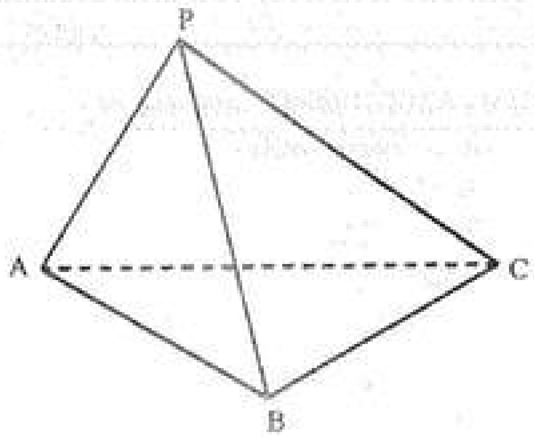
H) P - ABC Tetraedro regular
E - F Cubo
$O_1O = 22.5$ u
$V_a = V_b$

T) x =?

Resp: 14.13 u



37. -

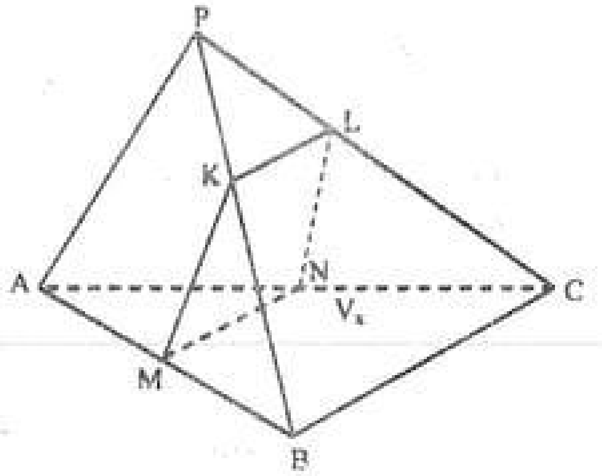


H) P - ABC Pirámide triangular regular
Diedro B - C = 45°

T) Diedro P - C =?

Resp:

38. -

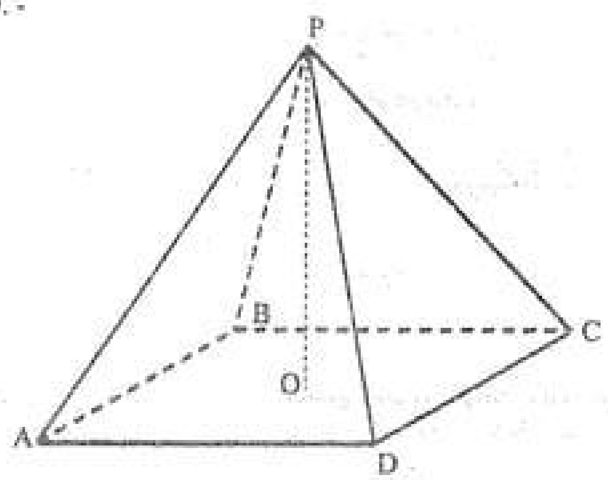


H) P - ABC Pirámide triangular regular
$AB = 3.8$ u
Diedro A - B = 80°
□ KLNM $\perp$ Plano ABC
M y N puntos medios

T) V_X =?

Resp: $2.45\ u^3$

39. -

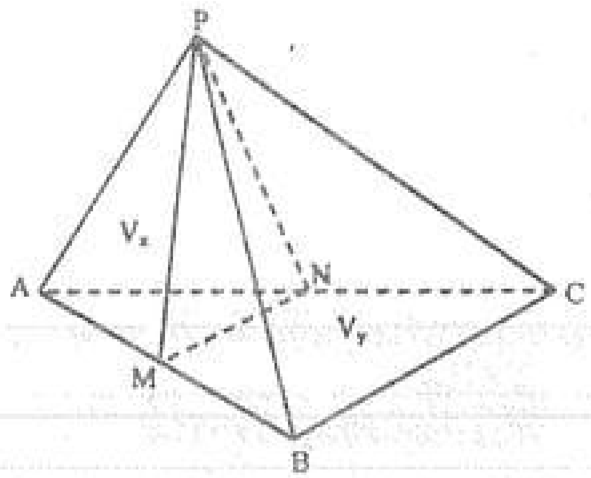


H) P - ABCD Pirámide cuadrangular regular
$S_L = 400\ u^2$
$PO = h = 10$ u

T) AB =?

Resp: 15,72 u

40. -

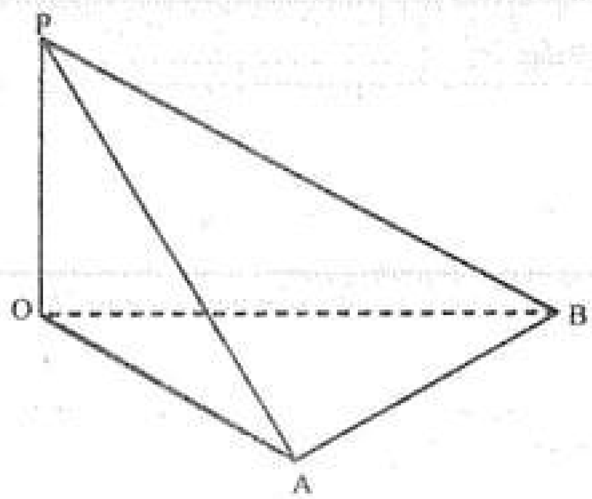


H) P - ABC Pirámide triangular regular
$AB = 9$ u
M y N puntos medios
Diedro M - N = 60°

T) $S_{\Delta PMN}$ =?
V_x =?
V_y =?

Resp:

41. -

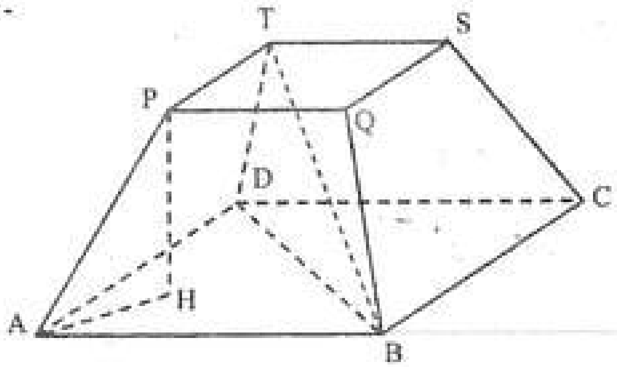


H) PO $\perp$ $\triangle$ CAB (EQUILÁTERO)
Diedro A - B = 60°
$S_L = 40\ u^2$

T) V = ?

Resp:

42. -

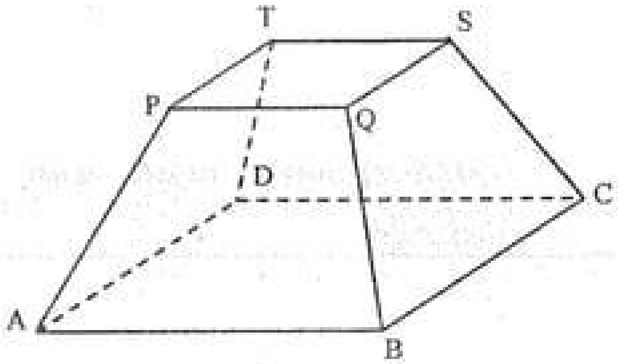


H) T - B Tronco de pirámide cuadrangular regular
PH = h = 9 m
$P\hat{A}H = 75°$
$T\hat{B}D = 42°$

T) S_L =?

Resp: 258.86 u^2

43. -

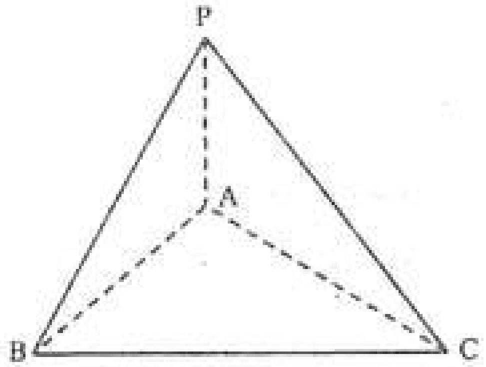


H) T - B Tronco de pirámide cuadrangular regular
$AB = 3\sqrt{3}$ u
PQ = 3 u
Diedro de arista B - C = 70°

T) S_L =?
V =?

Resp: 53.34u^2; 51.91 u^3

44. -

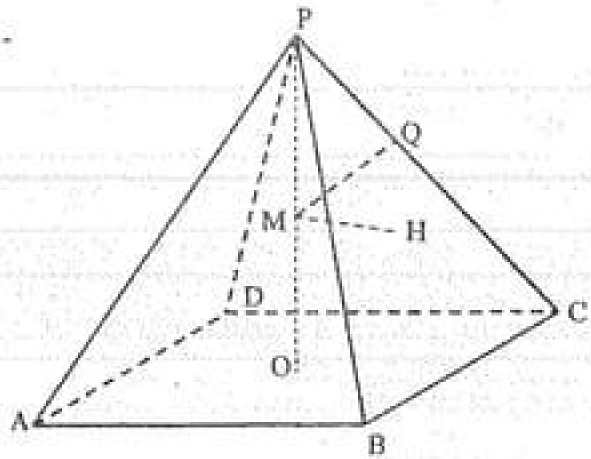


H) P - ABC Pirámide triangular
$\overline{PA} \perp$ Plano ABC
AB = 4.2 u
$P\hat{B}A = P\hat{C}A = 60°$
$B\hat{A}C = 90°$

T) V =?

Resp:

45. -



H) P - ABCD Pirámide cuadrangular regular
$\overline{PM} = \overline{MO}$
$\overline{MQ} \perp \overline{PC}$; MQ = 1.8 u
$\overline{MH} \perp$ Plano PBC ; MH = 1.2 u

T) V =?

Resp:

46. - La proyección de un tetraedro P - ABC, en un plano Q, es un cuadrado de lado 1 cm. Si las proyectantes de los vértices del tetraedro en el plano Q, son; 1 cm, 2 cm, 3 cm y 5 cm respectivamente. Determinar el volumen del tetraedro. Resp:

47. - Se tiene un tronco de pirámide cuadrangular regular, el lado de la base mayor mide 20 u, el lado de la base menor 15 u, apoyado en su base mayor, contiene agua hasta una altura de 10 u. Calcular el volumen de agua. (h tronco = 25.4) Resp: 3613.33 u^3

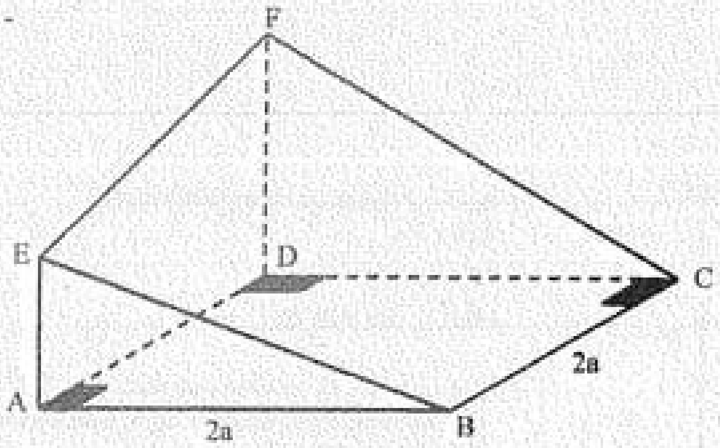
48. - Se tiene un tronco de pirámide triangular regular de dimensiones, lado de la base mayor 10 u, lado de la base menor 5 u, y de altura 9 u. ¿A qué distancia de la base mayor habrá que trazar un plano paralelo a las bases para que lo divida en dos sólidos equivalentes?.
Resp: 3.12 u

49. - En un tronco de prisma cuadrangular regular, el lado de la base es e u, el ángulo entre las bases es 40°, dos aristas laterales opuestas miden 8 u. Calcular la longitud de las otras dos aristas laterales.
Resp:

50. - Las bases de un tronco de pirámide regular son 4 m^2 y 2 m^2. Calcular el área de la sección paralela a las bases construida a una distancia igual a la tercera parte de su altura, a partir de la base mayor.
Resp: 3.25 m.

51. - Una de las aristas de un tetraedro mide 5 m. Si el tetraedro se proyecta en un plano perpendicular a esta arista, el área de la proyección es 5 m^2. Calcular el volumen del tetraedro.
Resp:

52. -



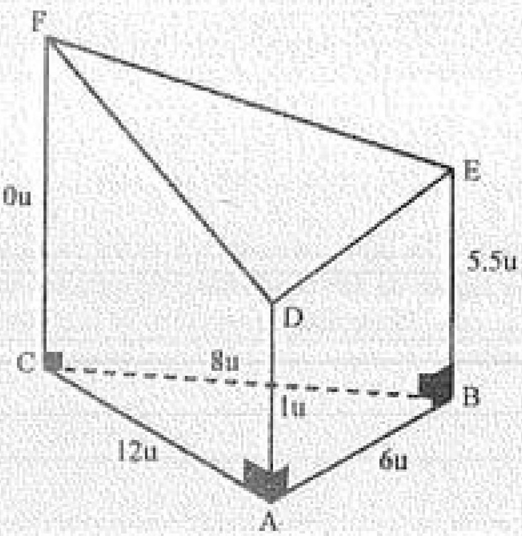
H) $\overline{FD} \perp$ Plano A - C
FD = 14 u
$\overline{EA} \perp$ Plano A- C
EA = 7 u

a = 7 u

T) V=?

Resp: 1143.33 u^3

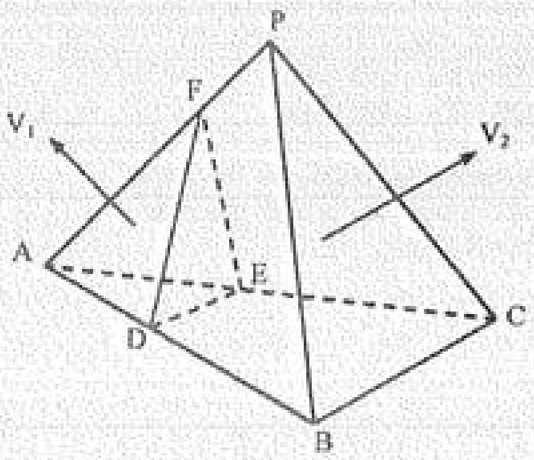
53. -



T) Hallar el volumen de la siguiente figura.

Resp: 117.32 u^3

54. -

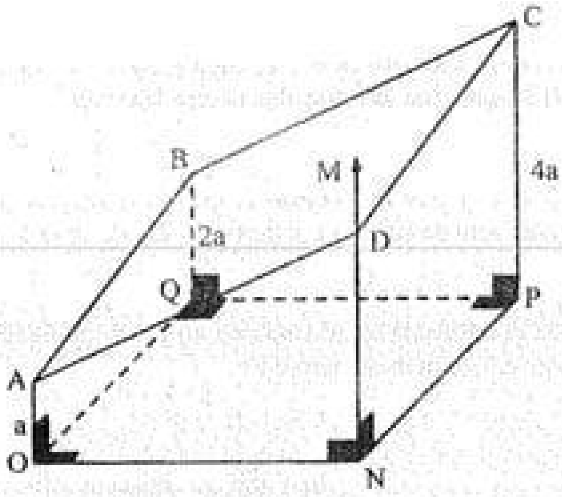


H) BD = 2DA
CE = 2AE
AF = 2FP

T) $\frac{V_2}{V_1} = ?$

Resp: $\frac{25}{2}$

55. -

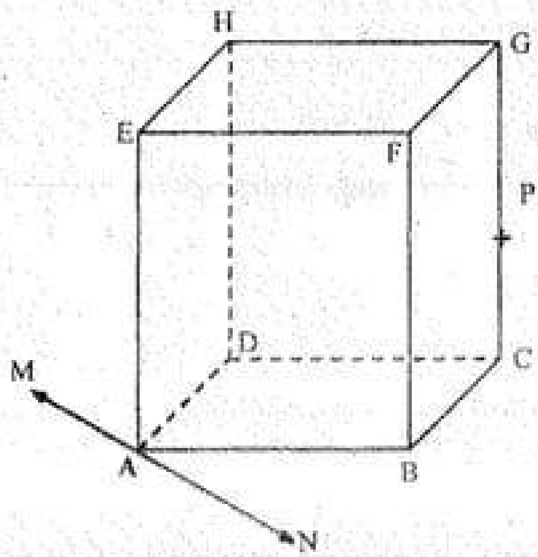


H) Se traza un plano por los puntos A, B y C el cual corta a la recta MN en D.

T) Calcular la arista ND y el volumen del sólido.

Resp: 3a ; $10\ a^3$

56. -



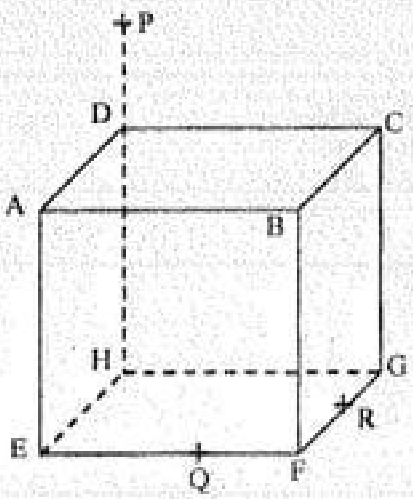
H) A - G Prisma cuadrangular regular
AB = 3 u
MN $\perp$ AC
MN $\in$ de ABCD

T) Ángulo entre la sección que pasa por **MN y P** si el volumen comprendido entre esta sección y ABCD es $6.75\ cm^3$

Resp: 19.5°

57. - La base de un prisma oblicuo es un triángulo ABC, $\hat{C} = 90°$, $\hat{A} = 40°$, b = 8 u. La cara lateral del prisma que pasa por el lado AC está inclinada un ángulo de 50° con la base. Se traza un plano que pasa por la hipotenusa AB y el vértice C' del triedro opuesto. Determinar el volumen de la pirámide triangular obtenida sabiendo que sus aristas laterales son iguales. Resp:

58. -

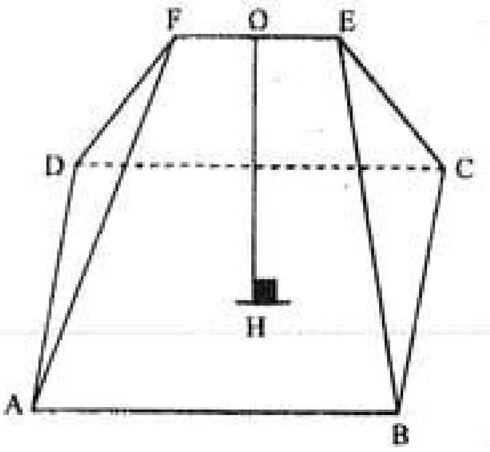


H) A - G Cubo
AE = 8 u ; PD = 4 u
QF = 2 u ; GR = 4 u

T) Relación de volúmenes formados al construir la sección que pasa por R, Q y P.

Resp: 0.7

59. -

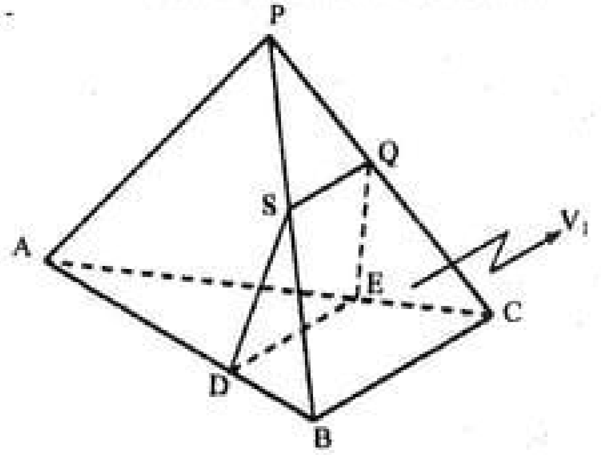


H) ABCD rectángulo
AB = 8 m
BC = 10 m
OH $\perp$ Plano A - C
$OH = 5\sqrt{3}$ m
FE $\parallel$ Plano A - C
FE = 2m
FA = FD = EB = EC

T) V=?

Resp: $150\sqrt{3}\ m^2$

60. -

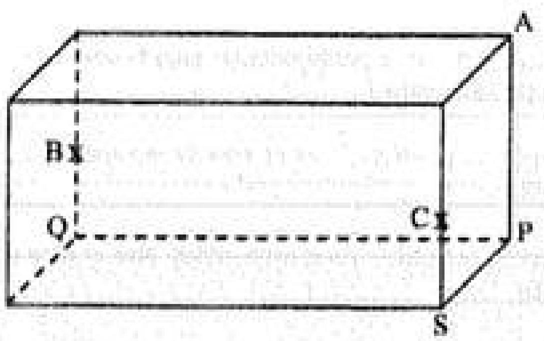


H) P - ABC Tetraedro regular
SB = QC = a/3
DB = EC = a/3

T) V_1 =?

Resp: $\dfrac{7a^3\sqrt{2}}{324}$

61. -



H) AP = 20 m
BQ = 4 m
CS = 3 m
SP = 8 m
PQ = 10 m

T) Determinar la relación de volúmenes en que queda dividid o el paralelepípedo rectángulo, por la sección
que pasa por los puntos A, B y C.

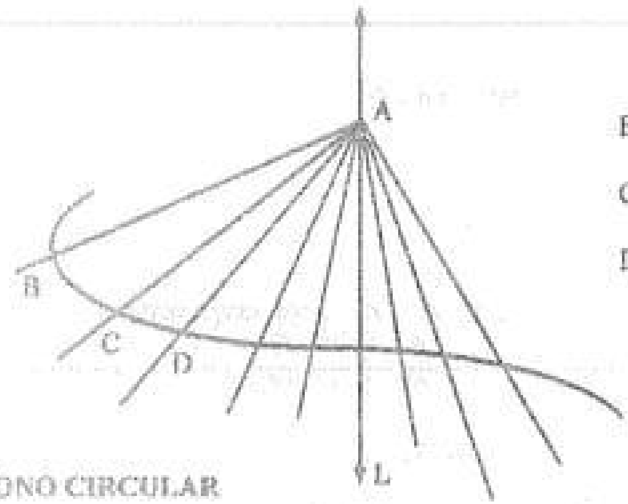
Resp: 0.51

UNIDAD 6

6.- CONOS

6.1.- SUPERFICIE CÓNICA

Es la superficie engendrada por una recta que se mueve pasando por un punto fijo y apoyándose constantemente sobre una línea curva.



EJE: $\overleftrightarrow{L}$

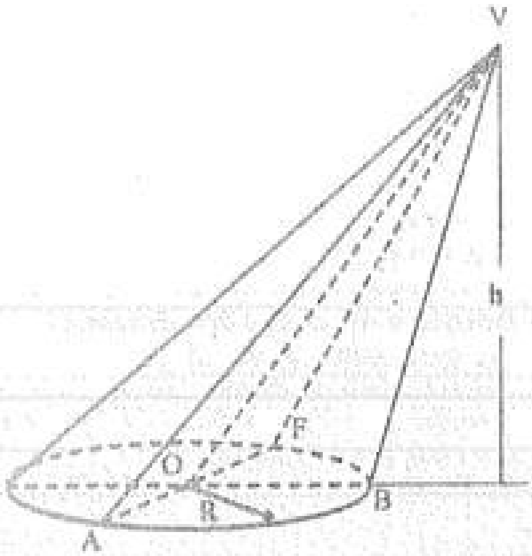
GENERATRIZ: $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, ...

DIRECTRIZ: Línea curva BCD .....

6.2.- CONO CIRCULAR

Es el sólido geométrico limitado por una superficie cónica.

6.3.- ELEMENTOS



EJE: $\overline{VO}$

GENERATRIZ : $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, ...g

DIRECTRIZ : $\odot$(O, R)

BASE : $\odot$(O, R)

ALTURA : h (perpendicular bajada desde el vértice a la base)

AREA LATERAL : Es el área de la superficie cónica.

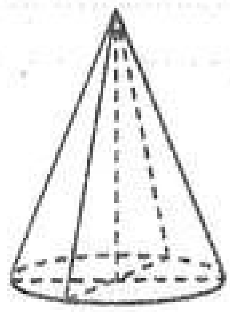
AREA TOTAL : Es el área lateral más el área de la base

SECCION AXIAL : Es la sección que contiene el eje del cono. VAF.

6.4.- CLASIFICACIÓN

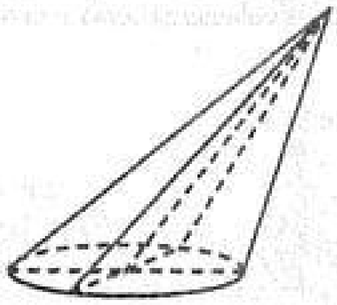
6.4.1.- CONO CIRCULAR RECTO O DE REVOLUCIÓN

El eje es perpendicular a la base.



6.4.2. - CONO CIRCULAR OBLICUO

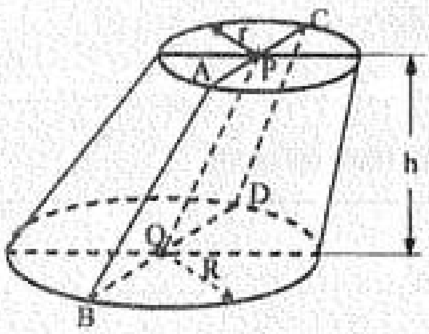
El eje no es perpendicular a la base.



6.5. - TRONCO DE CONO

Es la parte de un cono comprendida entre la base y una sección paralela a la base.

6.5.1. - ELEMENTOS



EJE : $\overline{PQ}$

BASE MAYOR : $\odot(Q, R)$

BASE MENOR : $\odot(P, r)$

GENERATRIZ : $\overline{AB}, \overline{CD}, \ldots\ldots\ldots g$

ALTURA : h_T. Perpendicular común a las bases.

6.6. - En todo cono circular se puede inscribir y circunscribir pirámides que tengan por aristas laterales las generatrices del cono, y por base, polígonos inscritos y circunscritos a la base. Por consiguiente se puede considerar al cono circular como una pirámide de infinito número de caras.

6.7. - El área lateral de un cono de revolución es igual al producto del semiperímetro de la base por su generatriz.

$$S_L = \frac{P_B \times g}{2} = \pi R g$$

6.8. - El volumen de un cono circular es igual a un tercio del producto de su base por su altura.

$$V = \frac{S_B \times h}{3} = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

6.9. - En todo tronco de cono circular se puede inscribir y circunscribir troncos de pirámides, que tengan por aristas las generatrices, y por bases polígonos inscritos y circunscritos a las bases del cono. Por consiguiente se puede considerar al tronco del cono circular como un tronco de pirámide de infinito número de caras.

6.10. - El área lateral de un tronco de cono de revolución es igual al producto de la semisuma de los perímetros de las bases por su generatriz.

$$S_L = \left(\frac{P_B + P_b}{2}\right) g = \pi(R + r)g$$

6.11. - El volumen de un tronco de cono de revolución es igual a :

$$V = \frac{h}{3}(B + b + \sqrt{B \times b}) = \frac{h}{3}(\pi R^2 + \pi r^2 + \pi R r)$$

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + R \times r)$$

6.12. - Dos conos circulares rectos son semejantes, si son engendrados por triángulos semejantes.

6.13. - Las áreas laterales o totales de dos conos circulares semejantes son entre sí como los cuadrados de sus lados homólogos y sus volúmenes como el cubo de dos lados homólogos.

$$\frac{S_L}{S_{L1}}=\frac{R^2}{R_1^2}=\frac{g^2}{g_1^2}=\text{-------}$$

$$\frac{S_T}{S_{T1}}=\frac{R^2}{R_1^2}=\frac{g^2}{g_1^2}=\text{-------}$$

$$\frac{V}{V_1}=\frac{R^3}{R_1^3}=\frac{g^3}{g_1^3}=\text{-------}$$

6.14. - RELACIÓN PIRÁMIDE - CONO DE REVOLUCIÓN

6.14.1. - PIRAMIDE INSCRITA EN UN CONO

- La base de la pirámide es un polígono inscrito en la base del cono
- Los vértices coiciden
- Tienen la misma altura

6.14.2. - PIRÁMIDE CIRCUNSCRITA A UN CONO

- La base de la pirámide es un polígono circunscrito a la base del cono
- Los vértices coiciden
- Tienen la misma altura

6.15. - EJERCICIOS

1. - Dado un cono de revolución de 12m de altura, dividir ésta en tres partes de suerte que los planos paralelos a la base trazados por los puntos obtenidos dividan la superficie lateral del cono en tres partes equivalentes. Resp: 6.93m ; 9.8m

2. - La generatriz de un cono de revolución es igual al desarrollo del círculo de la base, y su área lateral es de $4m^2$. Determinar la altura del cono. Resp: 2.79m

3. -Se da un cono de revolución de 3m de radio en la base y de 4m de altura. Determinar a que distancia a partir del vértice debe trazarse un plano paralelo al de la base, para que el área del círculo de intersección sea igual al área lateral del tronco de cono resultante y calcular el volumen de dicho tronco. Resp: 3.16m ; $19.11m^3$

4. - Hallar la relación de los radios de las bases de un tronco de cono de revolución para que el volumen del tronco V y el volumen del cono de base la menor y el vértice el centro de la mayor verifiquen la igualdad; V = 21v. Resp: 4

5. - Calcular los radios de las bases de un tronco de cono de revolución, dados la altura h, generatriz a y su volumen $\frac{\pi b^2 h}{3}$. Aplicación para; h = 3m, a = 5m, $V = 31\pi m^3$.

   Resp: 1m ; 5m

6. - La generatriz de un cono de revolución mide 6u y forma un ángulo de 60° con el plano de la base. Determinar el volumen del cono. Resp: $48.97u^3$.

7. - A través del vértice de un cono de revolución se ha trazado un plano que forma con la base del cono un ángulo de 35°. Este plano corta a la base por la cuerda AB de longitud 5u que une los extremos del arco de la base del cono, correspondiente al ángulo central 40°. Hallar el volumen del cono. Resp: $269.09u^3$.

8. - La longitud de la generatriz de un cono de revolución mide u, la circunferencia de la base mide 20u. Determinar su volumen. Resp: $26.16u^3$

9. - El ángulo en el vértice de una sección axial de un cono de revolución es igual a 40° y la suma de las longitudes de la altura y la generatriz es igual a 15u. Hallar el volumen y el área total del cono.
Resp: $53.23u^3$; $86.42u^2$

10. - El volumen de un cono de revolución es V. Su altura se divide en tres partes iguales y por los puntos de división se trazan dos planos paralelos a la base. Hallar el volumen de la porción central. Resp: $\frac{7}{27}V$

11. - Determinar el volumen de un cono de revolución, sabiendo que una cuerda de longitud 4u trazada en el círculo de la base subtiende un arco de 50° y la altura del cono forma un ángulo de 30° con la generatriz.
Resp: $113.47u^3$

12. - La superficie lateral de un cono de revolución es igual a $100u^2$ y el área total igual a $140u^2$. Determinar el ángulo que forman la generatriz y la altura. Resp: 24°

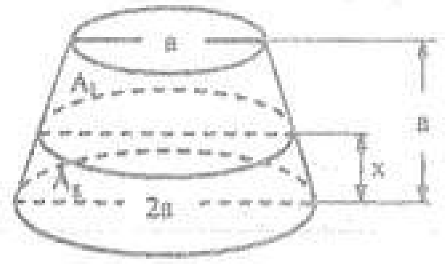
13. - Cuando se desarrolla en un plano, la superficie lateral de un cono de revolución representa un sector circular de ángulo 40° y cuerda 6u. Determinar el volumen del cono. Resp: $8.59u^3$

14. - Un plano trazado por el vértice de un cono de revolución y que forma un ángulo de 50° con la base, corta en el círculo de la base un arco de 60°, la distancia entre el plano y el centro de la base es 10 u. Hallar el volumen del cono. Resp: $3701.62u^3$

15. - Un cuadrado de lado 8u, está inscrito en la base de un cono de revolución. Un plano trazado por el vértice del cono y un lado del cuadrado corta a la superficie del cono a lo largo de un triángulo cuyo ángulo en el vértice es 60°. Determinar el volumen y el área del cono. Resp: $189.56u^3$; $100.28u^2$

16. - El volumen de un cono de revolución es $150u^3$, y la generatriz esta inclinada un ángulo de 60° respecto de la base. ¿A qué altura se debe trazar un plano perpendicular al eje del cono para que divida la superficie lateral del cono en dos partes de áreas iguales?. Resp: 10.65u

17. - Calcular x en función de a para que se cumpla que el peso del aluminio sea igual al de la plata.
Si $\frac{\delta_{Al}}{\delta_{Ag}} = \frac{3}{7}$. Resp: 0.2a



18. - ¿A qué distancia del vértice de un cono de revolución hay que trazar un plano paralelo a la base para que el área de la sección sea igual al área lateral del tronco de cono resultante?. Si la altura del cono es 6m y el radio de la base 2m. Resp: 5.22m

19. - El área de una sección paralela a la base, resultante de cortar un cono de revolución de 3m de altura, distante del vértice 1m, es de $2.6m^2$. Calcular el volumen del cono.
Resp: $23.4m^3$

20. - La base de un cono de revolución es un círculo de 4m de radio y la altura mide 6m. Calcular los volúmenes de los cuerpos que resultan al cortar dicho cono por un plano que pasa por el vértice y uno de los lados del exágono regular inscrito en la base. Resp: $2.9m^3$; $97.63m^3$

21. -Si un triángulo rectángulo gira sucesivamente alrededor de sus catetos, los volúmenes de los conos generados están en razón inversa de sus alturas.

22. - Se dispone de un sólido (peso específico relativo 0.3) de forma tronco cónica de revolución de las siguientes dimensiones; R = 4m, r = 2m, h = 6m, que flota en un recipiente que contiene agua con su base menor sumergida. Calcular el área mojada. Resp: $56.99m^2$

23. - Un cono tiene 3m de altura, la suma de la generatriz y el radio de la base es de 9m. Calcular el ángulo formado en el desarrollo de la superficie lateral del cono de revolución.

Resp: 288°

24. - Los radios de dos conos de revolución semejantes miden 4m y 6m respectivamente. ¿En que relación estan sus áreas laterales, las áreas totales y los volúmenes?.

Resp: $\frac{4}{9}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{8}{27}$

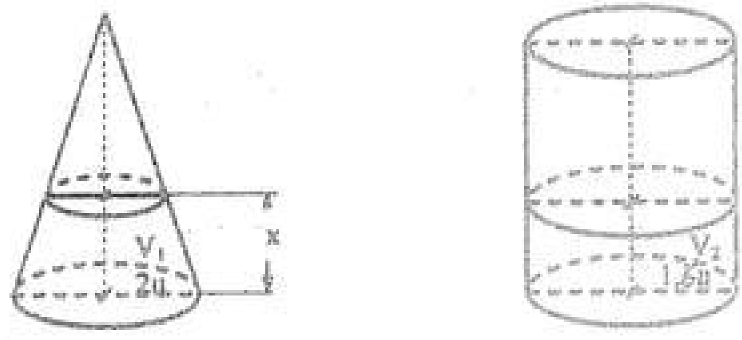
25. - La generatriz de un cono de revolución es de 8m. Calcular la generatriz de un cono de revolución semejante, sabiendo que su área total es el cuadruplo que la del primero.

Resp: 16m

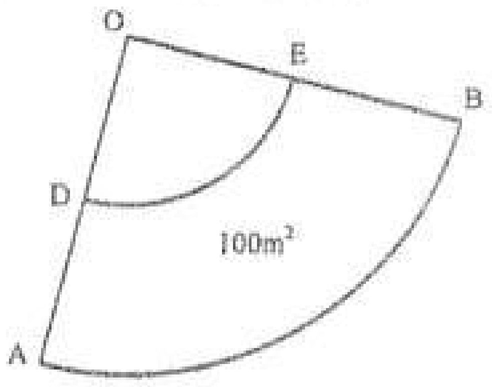
26. - En un cono de revolución demostrar que: $$9\pi V^2 = S_T\sqrt{(S_T - S_L)(2S_L - S_T)}$$

27. - Se tiene un cono de revolución y un cilindro de revolución de altura 3u. Hallar x para que $V_1 = V_2$.

Resp: 1.28u



28. -



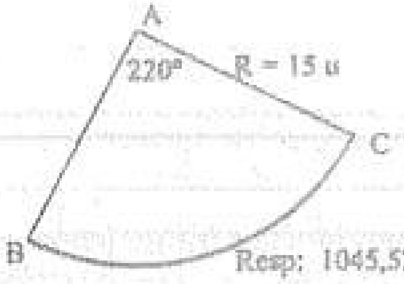
H) $\overset{\frown}{DE} = 8m$

$\overset{\frown}{AB} = 20m$

T) Volumen del Tronco de cono de revolución formado al doblar la superficie ABED.

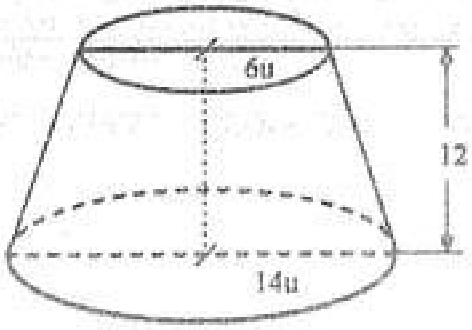
Resp: 113.88m³

29. - Hallar el volumen del cono de revolución que se puede construir con el sector circular de la figura.



Resp: 1045,52 u³

30. -

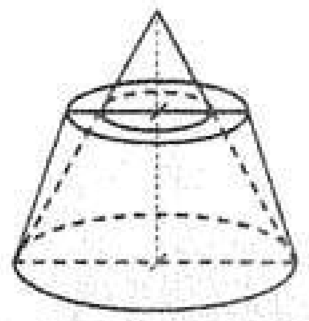


T) Calcular la superficie húmeda si el tronco de cono de revolución contiene agua hasta una altura de 9u.

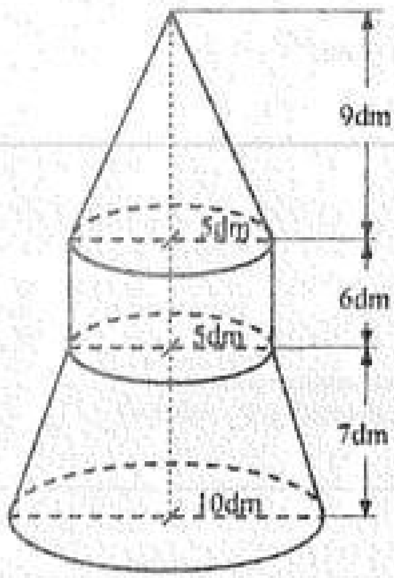
Resp: 1363.34 u²

31. - Calcular el volumen común entre el tronco de cono de revolución de dimensiones :
$R = 20$ u ; $r = 12$ u ; $h = 15$ u
y el cono de revolución de dimensiones :
$R' = 12$u y $h' = 20$u.

Resp:



32. –

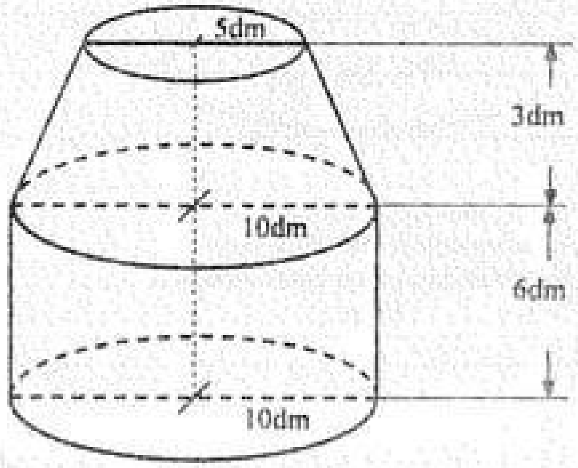


El recipiente contiene 1524,11 lts.
Calcular el nivel del líquido.

Resp: 14.09dm

33. - Calcular el volumen del recipiente.
Si el recipiente contiene agua en una cantidad igual a los 5/6 del volumen total, calcular la altura del nivel del líquido.

Resp: $2028.89\ u^3$, $6.5u$

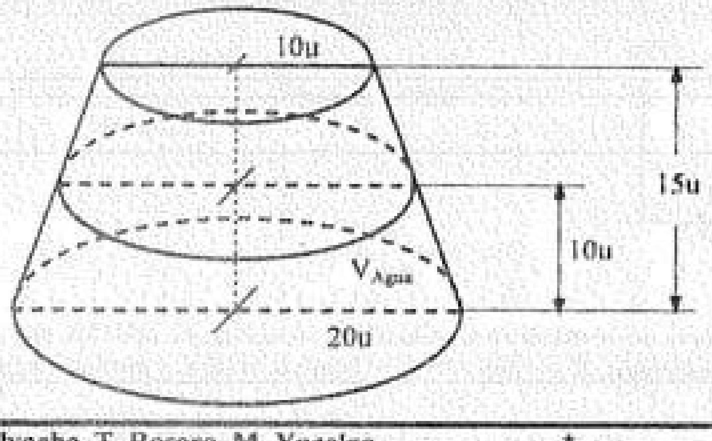


34. - Un tronco de cono de revolución de dimensiones $R = 10$u ; $r = 5$u ; $h = 15$u, apoyado en su base mayor contiene un volumen de agua igual a los 3/5 del volumen total. Calcular la altura del nivel del líquido.
Resp:

35. - En un tronco de cono de revolución de 9cm de altura y radios de las bases; $R = 12$cm ; $r = 4$cm, se trazan planos paralelos a las bases por los puntos de trisección de la altura. Calcular la superficie lateral del tronco de cono intermedio. Resp:

36. - Dado un cono de revolución de dimensiones; $R = 10$u y $h = 15$u, está completamente lleno de agua. Calcular el volumen de agua que se derramará si se introduce un tronco de cono de revolución de dimensiones, $R = 16$u ; $r = 5$u y $h = 12$u. Resp:

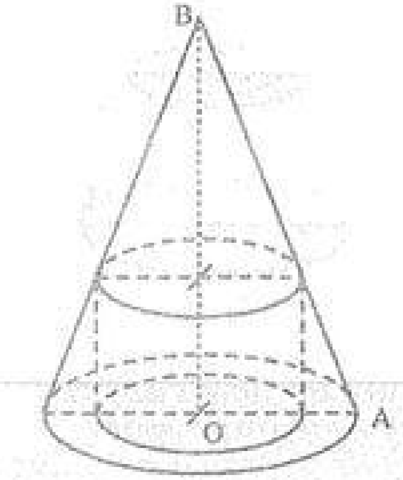
37. -



T) Calcular la altura del líquido y la superficie húmeda si se invierte el tronco de cono de revolución.

Resp: 13.18u ; $1146.94\ u^2$

38. -



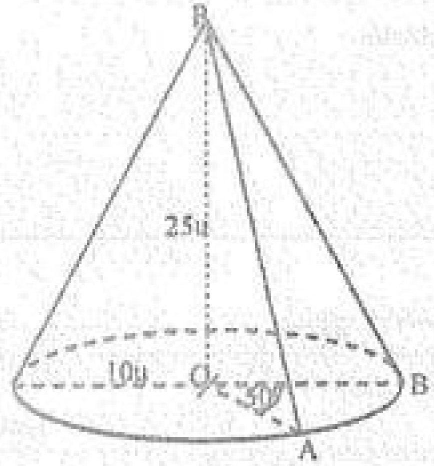
H) $OA = 5\ u$
$OB = 10\ u$

$$S_{LCilindro} = \frac{1}{5} S_{LCono}$$

T) $V_{Cilindro} = ?$

Resp:

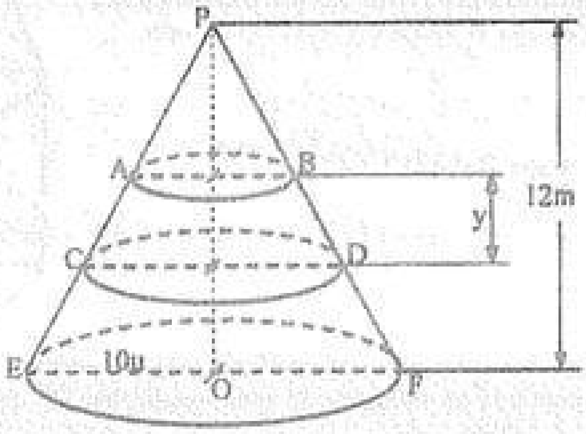
39. -



T) $S_{Lateral}$ del Sólido P - OAB =?
Volumen del Sólido P - AOB =?

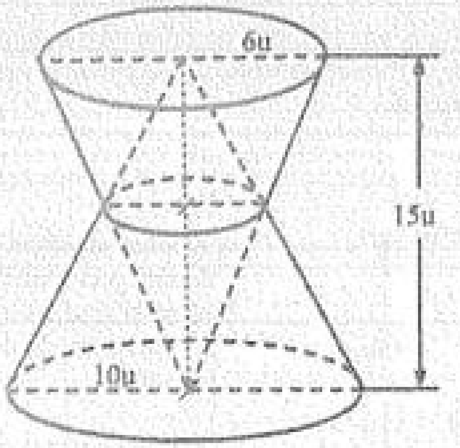
Resp:

40. - Calcular "y", para que las secciones dividan a la superficie lateral del cono de revolución en tres partes equivalentes.
Resp:



41. - En un cono de revolución de dimensiones; h = 10cm y R = 7.5cm, contiene agua hasta una altura de 4cm. ¿Cuánto subirá el nivel del líquido si se introducen dos cubos de hielo de arista 2cm?.
Resp: *0.26 cm*

42. -



T) Calcular el volumen común entre los dos conos de revolución.

Resp: *212 u^3*

43. - Se tiene dos recipientes(tronco de cono de revolución y cilindro de revolución) abiertos en su parte superior. El tronco de cono tiene dimensiones; R = 15m ; r = 10m ; h = 10m. y contiene agua hasta

una altura de 10m. El cilindro tiene dimensiones R = 9m ; h = 8m. Se introduce progresivamente el cilindro en el tronco de cono hasta que las bases coinciden. Si el espesor es despreciable calcular:

a) ¿Se derramará agua hacia el exterior del tronco de cono?. ¿Cuánto?

b) ¿Qué cantidad de agua se introducirá en el cilindro?, si no, ¿Qué nivel alcanza el agua?

Resp: $714.17m^3$; $1321.56m^3$

44. - Un cono esta inscrito en una pirámide triangular regular. Hallar su volumen, sabiendo que la arista lateral de la pirámide es igual a 10u y el ángulo que forman dos aristas laterales adyacentes es 80°.
Resp:

45. - Una pirámide de base pentagonal está circunscrita a un cono circular recto, cuya altura es igual al radio de la base. La superficie total de la pirámide es dos veces mayor que la del cono. Hallar el volumen de la pirámide si la superficie lateral del cono es igual a $\pi\sqrt{2}u^2$. Resp: $\frac{2\pi}{3}u^3$.

46. - La base de una pirámide es un triángulo rectángulo, las caras laterales que pasan por los catetos forman con la base los ángulos de 30° y 60°. A la pirámide esta circunscrito un cono circular recto. Determinar el volumen del cono si la altura de la pirámide es igual a 9u. Resp: $810\pi\, u^3$

47. - La superficie lateral de una pirámide regular de base triangular con el lado de la base 6u es cinco veces mayor que la superficie de la base. Hallar el volumen del cono inscrito en la pirámide.
Resp: $6\pi\sqrt{2}u^3$.

48. - Un cono y un cilindro tienen una base común, y el vértice del cono se encuentra en el centro de la otra base del cilindro. Hallar el valor del ángulo formado por el eje del cono y su generatriz, si se conoce que las superficies totales del cilindro y del cono son entre sí como 7 es a 4. Resp: 36.8°.

49. - El radio del circulo de la base de un cono mide 10u y el ángulo en el vértice de su sección axial es 60°. Hallar el volumen de una pirámide triangular circunscrita en el cono.
Resp:

50. - Las caras laterales de una pirámide cuadrangular regular están inclinadas respecto de la base un ángulo de 50°. La altura de las caras de la pirámide es 10u. Hallar el área total del cono inscrito en la pirámide y el ángulo de inclinación de la arista lateral con la base.
Resp:

51. - Se tiene un tronco de cono de revolución y un cilindro de la misma base y altura. El volumen del tronco de cono es 2/3 del volumen del cilindro. Hallar la razón de los radios de las bases del cono truncado.
Resp: $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

52. - Se tiene un cono de revolución y un cilindro de la misma base y altura. ¿A qué distancia de la base común hay que trazar un plano paralelo a la base para que el volumen del tronco sea igual al comprendido entre dicho tronco y el cilindro?.

Resp: $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)h$

UNIDAD 7

7.- ESFERAS

7.1.- SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN

7.1.1.- El área engendrada por una recta que gira alrededor de un eje que no lo atraviesa, y está situada con el en el mismo plano, tiene por medida la proyección de la recta en el eje multiplicada por el perímetro del círculo cuyo radio es la perpendicular a dicha recta en un punto medio hasta su encuentro con el eje.

a) El segmento no tiene ningún punto común con el eje, ni le es paralelo.

T) $S_{AB(360°yy')} = DC \times 2\pi \times PQ$

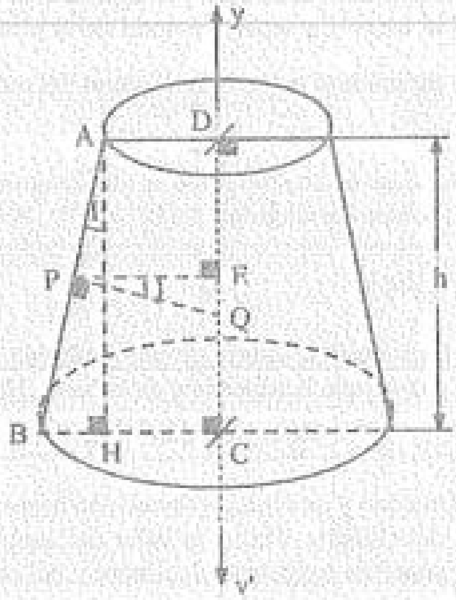
El área engendrada es el área lateral de un tronco de cono de revolución.

$$S_{AB(360°yy')} = \pi \times AB\ (BC + AD)$$
$$S_{AB(360°yy')} = \pi \times AB \times 2PE$$

$\Delta\, ABH\ .\ \Delta\, PQE$

$AB \times PE = AH \times PQ = DC \times PQ$

$$S_{AB(360°yy')} = 2\pi \times DC \times PQ$$



b) El segmento tiene un extremo con el eje.

T) $S_{AB(360°yy')} = AC \times 2\pi \times PQ$

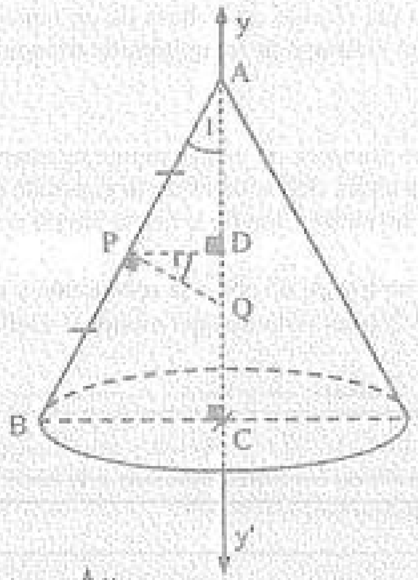
El área engendrada es el área lateral de un cono de revolución.

$$S_{AB(360°yy')} = \pi \times BC \times AB$$
$$S_{AB(360°yy')} = \pi \times AB \times 2PD$$

$\Delta\, ABC\ .\ \Delta\, PDQ$

$PD \times AB = AC \times PQ$

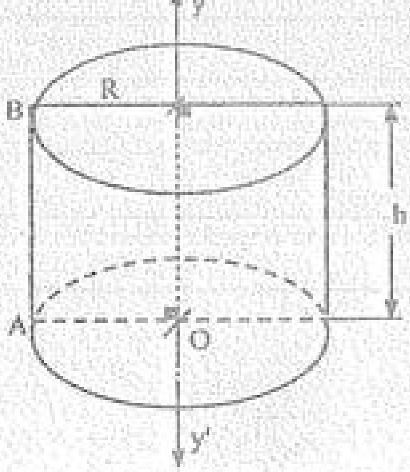
$$S_{AB(360°yy')} = 2\pi \times AC \times PQ$$



c) El segmento es paralelo al eje.

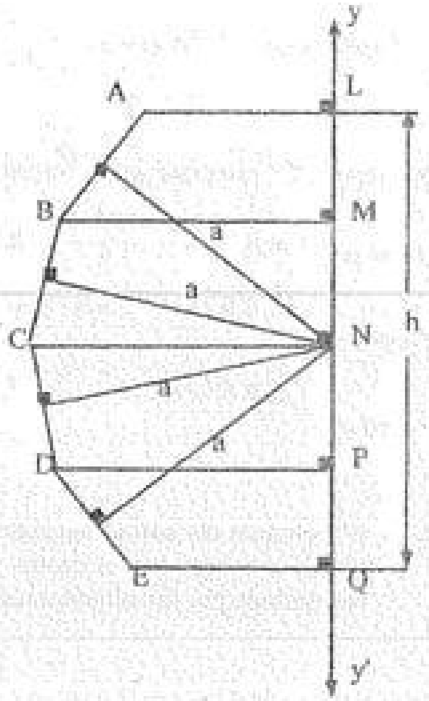
T) $S_{AB(360°yy')} = 2\pi \times R \times h$

El área engendrada es el área lateral de un cilindro de revolución.



7.1.2. - El área engendrada por una línea poligonal regular que gira alrededor de un eje situado en su plano y que pasa por su centro, sin atravesarla, es igual al producto del perímetro del círculo inscrito por la proyección de la poligonal en el eje.

T) $S_{ABCD...(360° yy')} = h \times 2\pi \times a$



$$S_{ABCD...(360° yy')} = S_{AB(360° yy')} + S_{BC(360° yy')} + S_{CD(360° yy')} + ...$$

$$S_{ABCD...(360° yy')} = LM \times 2\pi \times a + MN \times 2\pi \times a + NP \times 2\pi \times a + ...$$

$$S_{ABCD...(360° yy')} = 2\pi \times a + (LM + MN + NP + ...)$$

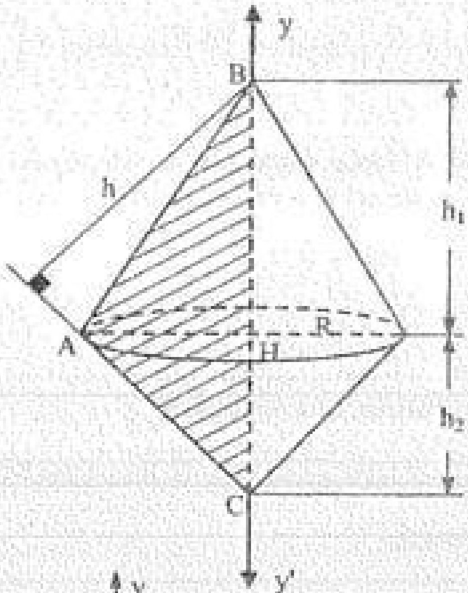
$$S_{ABCD...(360° yy')} = 2\pi \times a \times h$$

7.2. - VOLÚMENES DE REVOLUCIÓN

7.2.1. - El volumen engendrado por un triángulo que gira alrededor de un eje situado en su plano, y que pasa por uno de sus vértices sin atravesarlo, tiene por medida el producto del área descrita por el lado opuesto al vértice situado en el eje por el tercio de la altura correspondiente.

a) El eje coincide con un lado del triángulo.

T) $V_{\Delta ABC(360° yy')} = S_{AC(360° yy')} \times \frac{h}{3} = \pi R \times AC \times \frac{h}{3}$



$$V_{\Delta ABC(360° yy')} = V_{\Delta ABH(360° yy')} + V_{\Delta AHC(360° yy')}$$

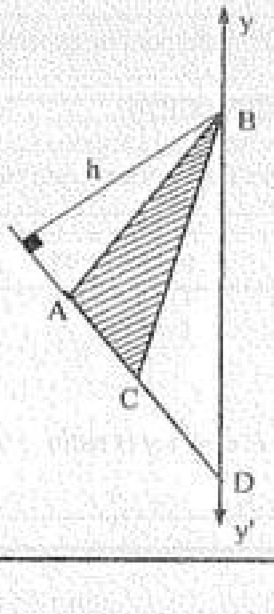
$$V_{\Delta ABC(360° yy')} = \pi R^2 \times \frac{h_1}{3} + \pi R^2 \times \frac{h_2}{3} = \pi R^2 \times \frac{BC}{3}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{R \times BC}{2} = \frac{AC \times h}{2}$$

$$V_{\Delta ABC(360° yy')} = \pi R \times AC \times \frac{h}{3}$$

b) Un vértice del triángulo está en el eje.

T) $V_{\Delta ABC(360° yy')} = S_{AC(360° yy')} \times \frac{h}{3}$

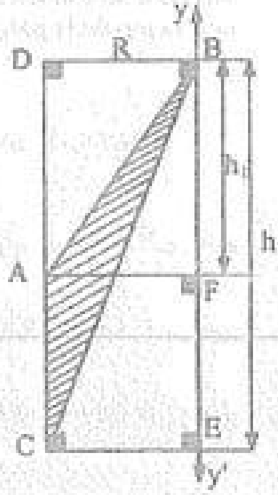


$$V_{\Delta ABC(360° yy')} = V_{\Delta ABD(360° yy')} - V_{\Delta BCD(360° yy')}$$

$$V_{\Delta ABC(360° yy')} = S_{AD(360° yy')} \times \frac{h}{3} - S_{CD(360° yy')} \times \frac{h}{3}$$

$$V_{\Delta ABC(360° yy')} = S_{AC(360° yy')} \times \frac{h}{3}$$

c) Un vértice del triángulo está en el eje y el lado opuesto es paralelo al eje.



T) $V_{\Delta ABC(360^\circ yy')} = S_{AC(360^\circ yy')} \times \frac{R}{3} = \frac{2}{3}\pi AC \times R^2$

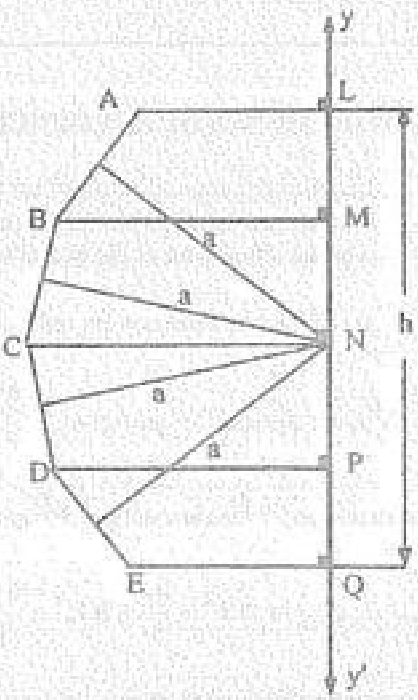
$$V_{\Delta ABC(360^\circ yy')} = V_{DBEC(360^\circ yy')} - V_{\Delta CBE(360^\circ yy')} - \left(V_{ADBF(360^\circ yy')} - V_{\Delta AFB(360^\circ yy')}\right)$$

$$V_{\Delta ABC(360^\circ yy')} = \pi R^2 \times h - \frac{\pi R^2 \times h}{3} - \pi R^2 \times h_1 + \frac{\pi R^2 \times h_1}{3}$$

$$V_{\Delta ABC(360^\circ yy')} = \frac{2\pi R^2 \times h}{3} - \frac{2\pi R^2 \times h_1}{3}$$

$$V_{\Delta ABC(360^\circ yy')} = \frac{2\pi R^2 \times AC}{3}$$

7.2.2. - El volumen del sólido engendrado por un sector poligonal regular que gira alrededor de un eje de su plano, que pasa por el centro y no le corta, es igual al tercio del producto del área de la superficie engendrada por la poligonal regular por la apotema.



T) $V_{III(360^\circ yy')} = S_{ABCD...(360^\circ yy')} \times \frac{a}{3}$

$$V_{III(360^\circ yy')} = V_{\Delta AOB(360^\circ yy')} + V_{\Delta BOC(360^\circ yy')} + V_{\Delta COD(360^\circ yy')} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$V_{III(360^\circ yy')} = S_{AB(360^\circ yy')} \times \frac{a}{3} + S_{BC(360^\circ yy')} \times \frac{a}{3} + S_{CD(360^\circ yy')} \times \frac{a}{3} + \ldots\ldots\ldots$$

$$V_{III(360^\circ yy')} = S_{ABCD...(360^\circ yy')} \times \frac{a}{3}$$

7.3. - SUPERFICIE ESFÉRICA

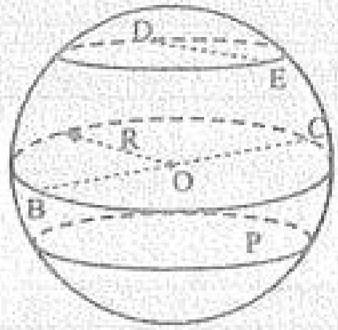
Es el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de otro punto llamado centro.

7.4. - ESFERA

Es un sólido geométrico limitado por una superficie esférica.

7.4.1. - ELEMENTOS - DENOMINACIÓN

RADIO: Es la distancia del centro a un punto cualquiera de la superficie esférica.



CUERDA: DE

DIÁMETRO: BOC

SECCIÓN: Plano P

DENOMINACIÓN: Por el centro y el radio ⊡(O, R)

7.4.2. - DETERMINACIÓN

Cuatro puntos que no están en el mismo plano determinan una esfera y solo una.

7.4.3. - INTERSECCIÓN PLANO - ESFERA

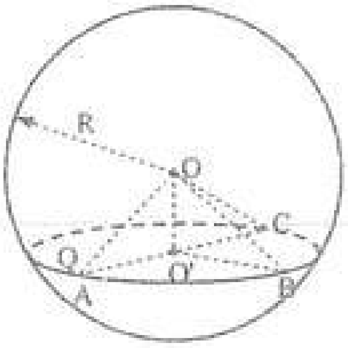
Toda sección plana de una esfera es un círculo.

T) Sección Q = ⊡(O' , O'A)

D) Δ OAO' ≅ Δ OO'B ≅ Δ OO'C ≅ ....

⇒ O'A = O'B = O'C = ...

⇒ Sección Q = ⊡(O' , O'A)



7.4.4. - CÍRCULO MÁXIMO

Es toda sección plana que contiene el centro de la esfera.

7.4.5. - CÍRCULO MENOR

Es toda sección plana que no contiene al centro de la esfera.

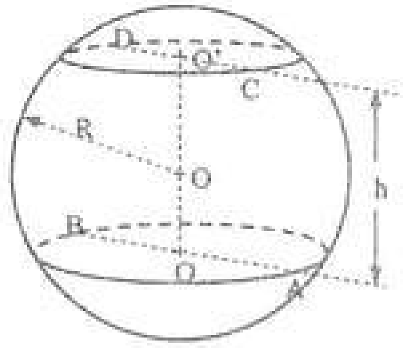
7.5. – ZONA ESFÉRICA O SEGMENTO ESFÉRICO DE DOS BASES

Es la parte de la superficie esférica limitada por dos planos paralelos.

7.5.1. - ELEMENTOS

ALTURA : La distancia entre los dos planos paralelos : h

BASES: Las secciones paralelas A-B y C-D



7.5.2. - ÁREA LATERAL

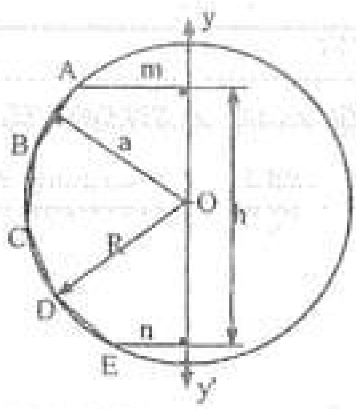
$S_{ABCD\_(360° yy')} = h \times 2\pi \times a$

Si el número de lados de la línea poligonal regular se duplica indefinidamente.

$n \to \infty$
$a \to R$

$\Rightarrow \; S_{ABCD\_(360° yy')} \to S_{Zona}$

$\Rightarrow \; S_{Zona} = 2\pi \times R \times h$



7.5.3. AREA TOTAL

Es igual al área lateral más las áreas de las bases

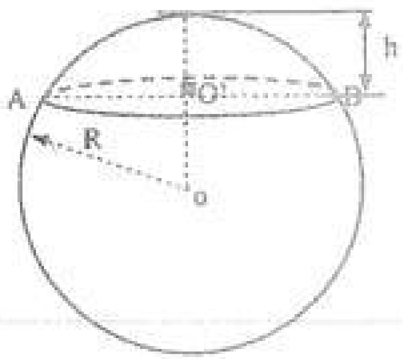
$A_T = 2\pi \; R h + \pi m^2 + x \pi n^2$

7.6. – CASQUETE ESFÉRICO O SEGEMENTO ESFÉRICO DE UNA BASE

Es la parte de la superficie esférica **limitada por un plano** secante y otro tangente paralelos.

7.6.1. - ELEMENTOS

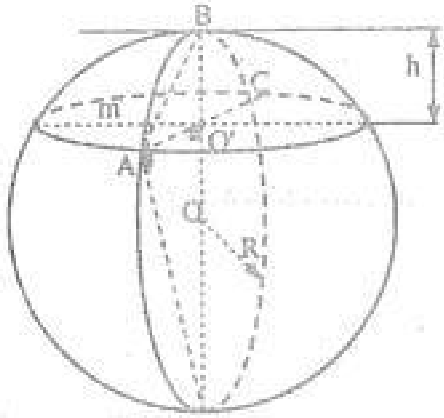
ALTURA : La distancia entre los planos paralelos : h



7.6.2. - ÁREA LATERAL

El área lateral de un casquete es **igual al producto de la longitud del circulo máximo por su altura.**

Siendo el casquete esférico una zona:



$$S_{Casquete} = 2\pi \times R \times h$$

$$AB^2 = 2\,R\,h \qquad \Rightarrow \qquad S_{Casquete} = \pi \times AB^2$$

7.6.3.- AREA TOTAL

$$A_T = 2\,\pi\;r\,h\; + \pi\,m^2$$

7.6.4.- AREA DE UNA ESFERA

El área de una esfera **es igual** al **producto del circulo máximo** por su diámetro.

La Esfera es una Zona cuya altura es **igual al diámetro.**

$$S_{Esfera} = 2\pi \times R \times h$$

$$h = 2\,R \qquad \Rightarrow \qquad S_{Esfera} = 4\,\pi \times R^2$$

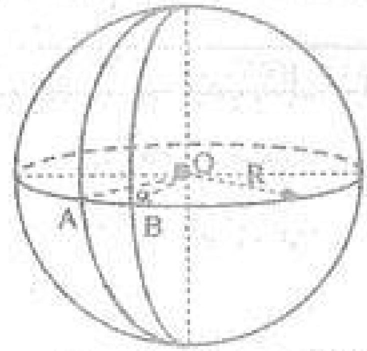
7.7. - HUSO ESFÈRICO

Es la parte de la superficie esférica **comprendida** entre dos semicírculos máximos.

7.7.1. - ELEMENTOS

LADOS : Son los semicírculos **máximos**

ÁNGULO DEL HUSO : El ángulo **formado** por los dos **semicírculos máximos.**



7.7.2. - ÁREA

Es igual al área de la esfera **multiplicada por la relación entre** el ángulo del huso y 360°.

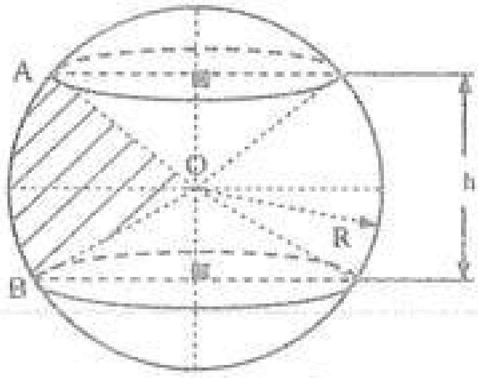
$$S_{Huso} = \frac{4\,\pi \times R^2 \times \alpha^0}{360^0} \qquad ; \qquad S_{Huso} = \frac{\pi \times R^2 \times \alpha}{90^0}$$

(ángulo α en grados) (ángulo α en radianes)

7.8. - SECTOR ESFÉRICO

Es la parte de la esfera formada por un sector circular que gira alrededor de un diámetro situado en su plano.

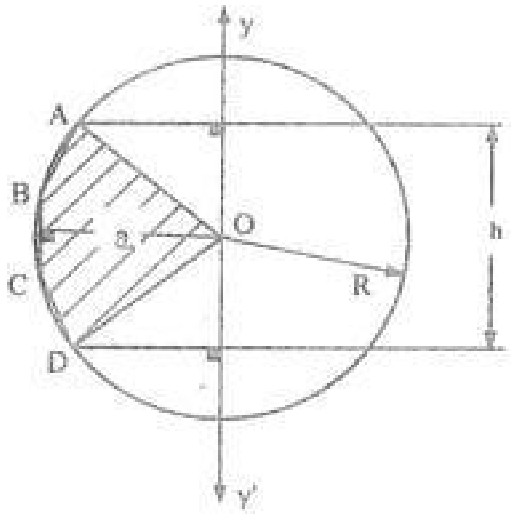
7.8.1. - ELEMENTOS



ALTURA : Proyección del arco
AB en el diámetro : h

7.8.2. - VOLUMEN

El volumen de un sector esférico es igual al producto del área de la zona o casquete que le sirve de base por el tercio del radio de la esfera.



$$V_{////(360^\circ yy')} = S_{ABCD...(360^\circ yy')} \times \frac{a}{3}$$

$$V_{////(360^\circ yy')} = h \times 2\pi \times a \times \frac{a}{3}$$

Si el número de lados de la línea poligonal regular se duplica indefinidamente, se tiene;

$n \rightarrow \infty$

$a \rightarrow R$

$$V_{////(360^\circ yy')} \rightarrow V_{\text{Sector Esferico}}$$

$$V_{////(360^\circ yy')} = \frac{2}{3}\pi \times R^2 \times h$$

7.8.3.- VOLUMEN DE UNAESFERA

El volumen de una esfera es igual al producto del área esférica por el tercio del radio.

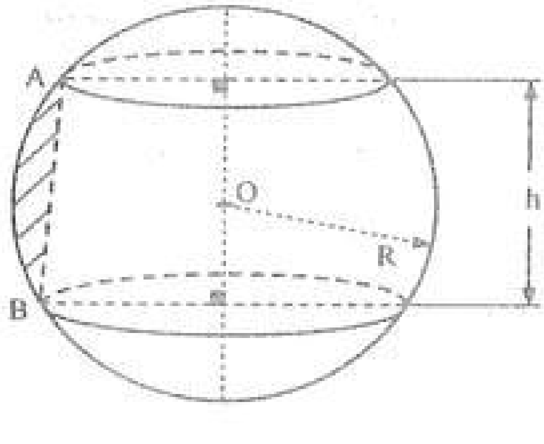
El volumen de una esfera puede ser considerado como el de un sector esférico engendrado por la revolución de la mitad de una región circular alrededor de un diámetro.

$$h = 2R \qquad \Rightarrow \qquad V_{Esfera} = \frac{4}{3}\pi \times R^3$$

7.9. - ANILLO ESFÉRICO

Es la parte de una esfera formada por un segmento circular que gira alrededor de un diámetro situado en su plano exterior a dicho segmento.

7.9.1. - ELEMENTOS



ALTURA : Proyección del arco
AB en el diámetro : h

7.9.2. - VOLUMEN

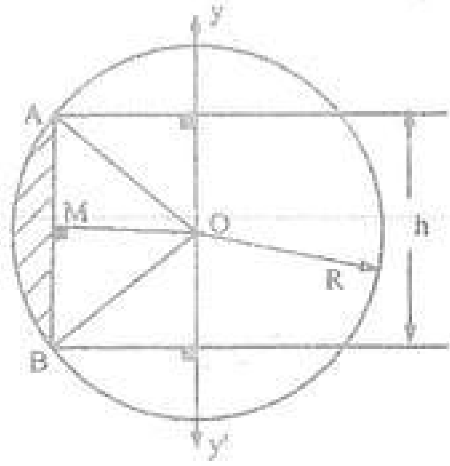
El volumen del anillo esférico es igual a la sexta parte del volumen del cilindro cuya base tiene por radio la cuerda del segmento circular y por altura la altura del anillo esférico.

$$V_{Anillo\ Esferico} = V_{Sector\ Esferico} - V_{\Delta OAB(360°\ yy')}$$

$$V_{Anillo\ Esferico} = \frac{2}{3}\pi \times R^2 \times h - \frac{2}{3}\pi \times OM \times h \times OM$$

$$OM^2 = R^2 - \frac{AB^2}{4}$$

$$V_{Anillo\ Esferico} = \frac{1}{6}\pi \times AB^2 \times h$$



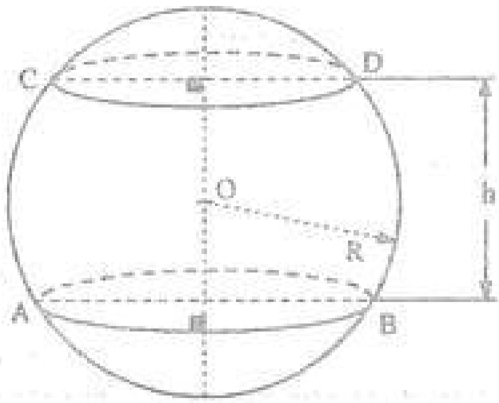
7.10. - SEGMENTO ESFÉRICO DE DOS BASES O ZONA ESFERICA

Es la parte de la esfera comprendida entre dos planos paralelos secantes.

7.10.1. - ELEMENTOS

BASE S: Las secciones paralelas A-B; C-D

ALTURA : La distancia entre las bases



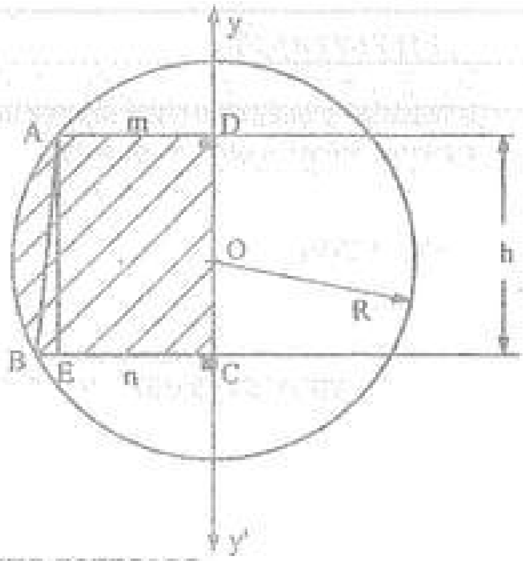
7.10.2. - VOLUMEN

$$V_{Segmento} = V_{Tronco\ de\ Cono} + V_{Anillo}$$

$$V_{Segmento} = \frac{\pi h}{3}\left(m^2+n^2+mn\right) + \frac{\pi\ h \times AB^2}{6}$$

$$AB^2 = h^2 + BE^2 = h^2 + (n-m)^2$$

$$V_{Segmento} = \frac{\pi h}{6}\left(3m^2+3n^2+h^2\right)$$



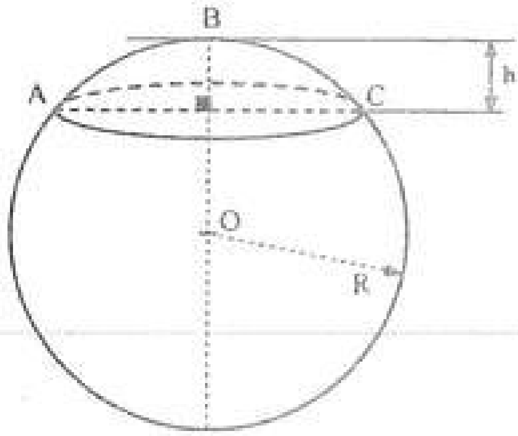
7.11. - SEGMENTO ESFÉRICO DE UNA BASE O CASQUETE ESFERICO

Es la parte de la esfera comprendida entre dos planos paralelos el uno secante y el otro tangente.

7.11. - ELEMENTOS

BASE : Sección A -C

ALTURA : h



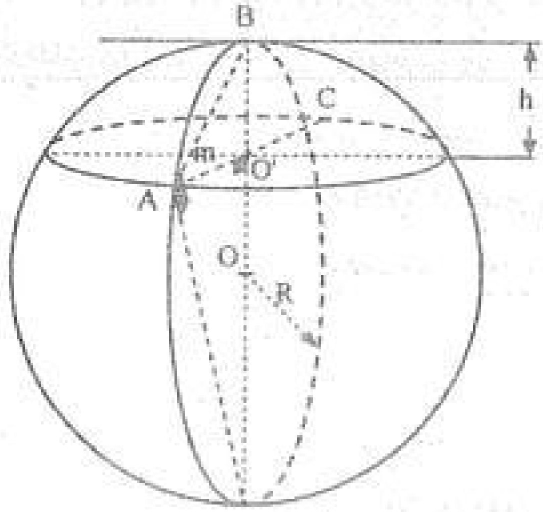
7.11.2. - VOLUMEN

Si uno de los planos es tangente a la esfera, la sección se reduce a un punto.

$$V_{Segmento} = \frac{\pi\, h}{6}\left(3\, m^2 + h^2\right)$$

$$m^2 = h\,(2\,R - h)$$

$$V_{Segmento} = \frac{\pi\, h^2}{3}(3\,R - h)$$



7.12. - RELACIÓN ESFERA SÓLIDO

El volumen de un sólido geométrico, es igual al producto de la superficie total por un tercio del radio de la esfera inscrita.

$$\text{T) } V = \frac{S_T \times r}{3}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi\, R^2 \times h \quad (1)$$

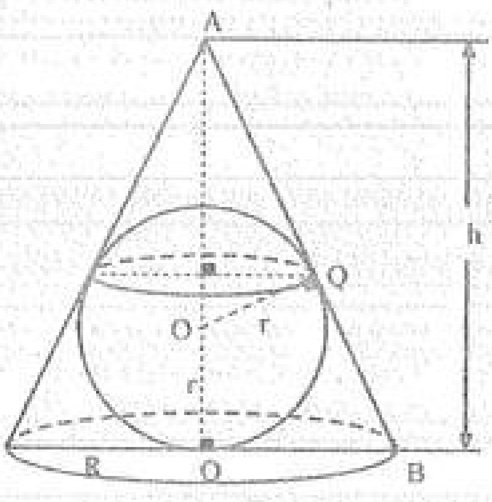
$$\frac{S_T \times r}{3} = \frac{(S_L + S_B)\times r}{3}$$

$$\frac{S_T \times r}{3} = \frac{(\pi\, R \times AB + \pi\, R^2)\times r}{3}$$

$$\frac{S_T \times r}{3} = \frac{\pi\, R \times r\,(AB + R)}{3} \quad (2)$$

$$\Delta\, AOB \quad \Delta\, AO_1Q$$

$$\frac{R}{AB} = \frac{r}{h-r} \Rightarrow \frac{R}{AB+R} = \frac{r}{h} \quad (3)$$



$$(3)\text{ en }(2)\ \frac{S_T \times r}{3} = \frac{\pi\, R \times r \times R \times h}{3 \times r} = \frac{\pi\, R^2 \times h}{3} \quad (4) \quad \Rightarrow \quad (1)\text{ en }(4)\quad V = \frac{S_T \times r}{3} \quad ////$$

7.13. - RELACIÓN ESFERA - PRISMA

7.13.1. - ESFERA INSCRITA EN UN PRISMA RECTO

- Es tangente a todas las caras del prisma
- El radio del círculo inscrito en la base es igual al radio de la esfera.
- La altura del prisma es igual al diámetro de la esfera

7.13.2. - ESFERA CIRCUNSCRITA A UN PRISMA

- Los vértices del prisma están en la superficie de la esfera

7.14. - RELACIÓN ESFERA - CILINDRO CIRCULAR

7.14.1. - ESFERA INSCRITA EN UN CILINDRO CIRCULAR RECTO

- La esfera es tangente tanto a las bases del cilindro como a su superficie lateral.
- Los centros de las bases son los puntos de tangencia de la esfera con el cilindro de revolución.
- Los puntos de tangencia con la superficie lateral es un círculo máximo paralelo a las bases.
- El radio del círculo inscrito en la base es igual al radio de la esfera.
- La altura del prisma es igual al diámetro de la esfera.

7.14.2. - ESFERA CIRCUNSCRITA A UN CILINDRO CIRCULAR RECTO

- Las bases del cilindro de revolución son secciones planas paralelas iguales de la esfera.

7.15. - RELACIÓN ESFERA - PIRÁMIDE

7.15.1. - ESFERA INSCRITA EN UNA PIRÁMIDE

- La esfera es tangente a todas las caras laterales como a la base.
- El centro de la esfera inscrita equidista de todas las caras de la pirámide.
- Una esfera siempre se puede inscribir en una pirámide regular
- Una esfera puede inscribirse en cualquier pirámide de base triangular.

7.15.2. - ESFERA CIRCUNSCRITA A UNA PIRÁMIDE

- Todos los vértices de la pirámide se encuentran en la superficie de la esfera.
- El centro de la esfera es el punto de intersección de todos los planos bisectrales de todos los ángulos diedros de la pirámide. Es el punto de intersección de todos los planos trazados por los puntos medios de las aristas de la pirámide perpendicularmente a dichas aristas.
- Una esfera puede circunscribirse a una pirámide si es posible circunscribir un círculo al polígono que sirve de base a la pirámide.
- Una esfera puede circunscribirse a una pirámide triangular
- Una esfera puede circunscribirse a una pirámide regular.

7.16. - RELACIÓN ESFERA - CONO CIRCULAR

7.16.1. - ESFERA INSCRITA EN UN CONO DE REVOLUCIÓN

- Es tangente a la bese del cono y a su superficie lateral
- El centro de la base es el punto de tangencia
- La tangencia con la superficie lateral es un círculo situado en un plano paralelo a la base
- El centro de la esfera se halla en la altura del cono

7.16.2. - ESFERA CIRCUNSCRITA A UN CONO DE REVOLUCIÓN

- El vértice del cono se halla en la superficie de la esfera
- La base del cono es una sección plana de la esfera
- El centro de la esfera esta en la altura del cono.

7.17. - RELACIÓN ESFERA - TRONCO DE PIRÁMIDE

7.17.1. - ESFERA INSCRITA EN UN TRONCO DE PIRÁMIDE

- Es tangente a las bases y a todas las caras laterales
- El diámetro de la esfera es igual a la altura del tronco de pirámide

7.17.2. - ESFERA CIRCUNSCRITA A UN TRONCO DE PIRÁMIDE

- Las bases del tronco de pirámide son polígonos inscritos en dos secciones planas de la esfera.

7.18. - RELACIÓN ESFERA - TRONCO DE CONO DE REVOLUCIÓN

7.18.1. - ESFERA INSCRITA EN UN TRONCO DE CONO DE REVOLUCIÓN

- La esfera es tangente a las bases y a la superficie lateral
- Los puntos de tangencia son los centros de las bases
- La tangencia con la superficie lateral es un círculo
- La altura es igual al diámetro de la esfera

7.18.2. - ESFERA CIRCUNSCRITA A UN TRONCO DE CONO DE REVOLUCIÓN

- Las bases del tronco de cono de revolución son dos secciones planas paralelas.

7.19. - EJERCICIOS

1. - Dos esferas de radios 15 m y 13 m tienen sus centros a 14 m de distancia. Calcular el volumen común de las dos esferas. Resp: $3547.9\ m^3$

2. - Desde que altura podría verse el 1/6 de la superficie de la tierra. Resp: R/2

3. - Dados los radios de dos esferas que se cortan y la distancia de sus centros, calcular el espesor, diámetro, superficie y volumen de la lente que determinan.
Aplicación : $R = 10$ m, $r = 8$ m, $d = 15$ m. Resp: 3 m ; $14.91\ m^2$; $192.68\ m^3$

4. - Desde un punto situado sobre la superficie de una esfera de radio igual a 6 u, se trazan tres cuerdas iguales que forman un ángulo de 30° entre sí. Determinar sus longitudes. Resp: 11.45 u

5. - Cuatro esferas iguales de radio 8 u son tangentes exteriormente una a otra, de manera que cada una es tangente a las otras tres. Hallar el radio de la esfera que es tangente a las cuatro esferas primeras y que las contienen en su interior. Resp: 19.59 u

6. - Hallar el volumen de un segmento esférico de altura 7 u cuya sección equidistante de las bases es $58\ u^2$. Resp: $1185.68\ u^3$

7. - En una esfera hueca, cuyo radio interior es de 12 cm, se vierte una cierta cantidad de agua de suerte que la relación entre las áreas de la superficies mojada y sin mojar es de 3/5. Hallar el área de la superficie húmeda. Resp: $678.58\ cm^2$

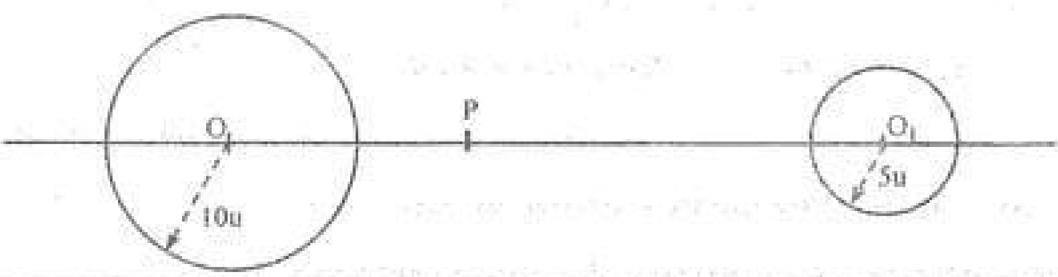
8. - Se tiene una esfera de radio 10 m y densidad relativa o.6 que flota en un recipiente que contiene agua. Calcular la superficie mojada de la esfera. Resp: $712.58\ m^2$

9. - Se tiene una semiesfera de densidad $1.5\ g/cm^3$, el radio exterior de 10 dm, y el radio interior de 9 dm, que flota en un recipiente que contiene agua. Hallar cuántos litros de aceite se deben adicionar a la semiesfera para que ésta se sumerja los 2/3 de su radio exterior. Densidad del aceite $0.8\ g/cm^3$. Resp: 293.26 lt.

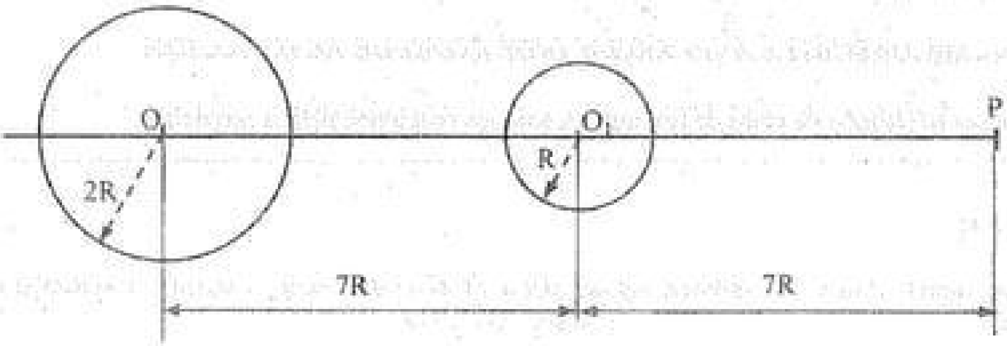
10. - De un extremo del diámetro de una esfera se ha trazado una cuerda de tal modo que la superficie formada por la rotación de la cuerda alrededor del diámetro divide el volumen de la esfera en dos partes equivalentes. Determinar el ángulo entre la cuerda y el diámetro. Resp: $\operatorname{Arc\,Cos}\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$

11. - Cortar una esfera de radio 10 u con un plano tal que las áreas de los casquetes formados estén en la relación de 2/3. Hallar la distancia desde el centro de la esfera a la sección. Resp: 2 u.

12. - En que punto de la línea de centros deberá situarse un observador P para mirar áreas iguales en las dos esferas, si la distancia entre los centros es de 50 u. Resp: 12.75 u

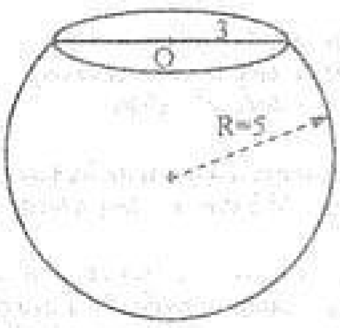


13. - Calcular en la esfera O, el área que observa una persona P ubicada en la línea de centros como indica la figura. Resp: $35\ R^2$

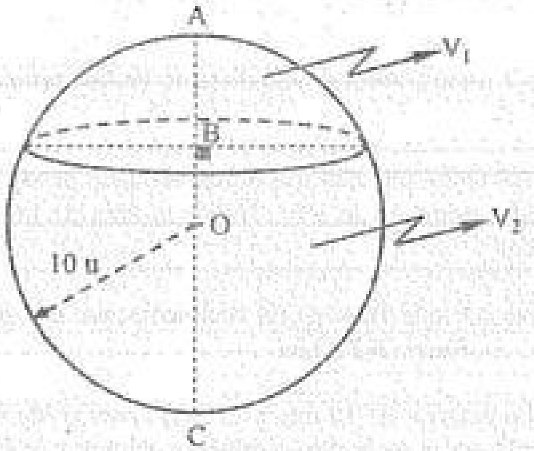


14. - El recipiente de la figura (segmento esférico de una base) se tapa con una esfera de radio 4 u. Calcular el volumen disponible en el recipiente.

Resp: $512.39\ u^3$



15. -



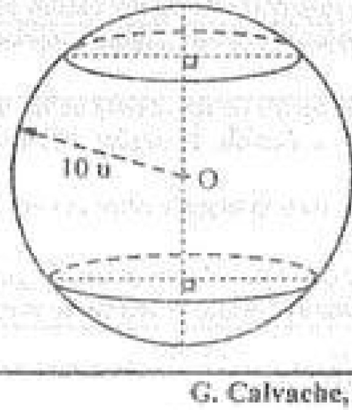
H) $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$

T) $\frac{V_1}{V_2} = ?$

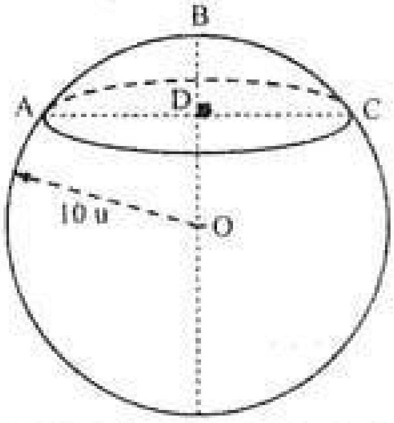
Resp: 19/35

16. - Si la superficie de la zona esférica es la tercera parte de la superficie de la esfera. Determinar el volumen del segmento esférico de dos bases.

Resp: $2034.84\ u^3$



17. -



H) AD = 3 u
DB = 2 u

T) Área y volumen del casquete esférico menor.

Resp:

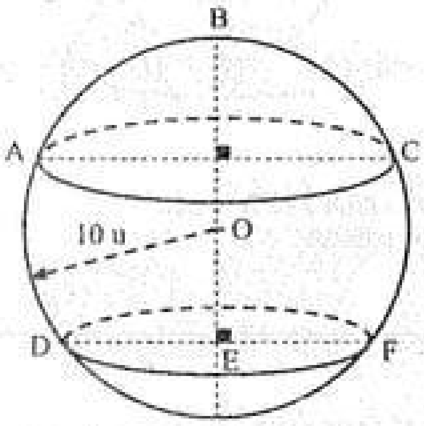
18. -

H) $S_{Zona-ACFD} = \frac{7}{16} S_{Esfera}$

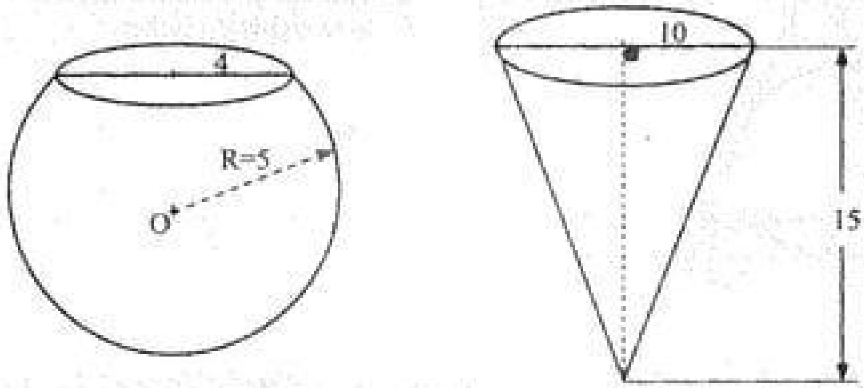
$\frac{BD}{DE} = \frac{3}{4}$

T) $V_{ACFD} = ?$

Resp: 2562.65 u^3



19. - El recipiente de la figura (segmento esférico de una base) se tapa con el cono de revolución. Calcular el volumen disponible. Resp: 368.61 u^3

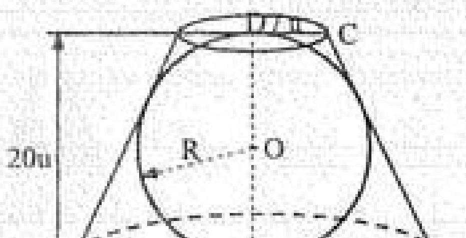


20. - Se tiene un cono de helado de diámetro 5 cm y altura 12 cm, se depositan en el tres cucharadas semiesféricas de helado de 5 cm de diámetro. Cuando el helado se derrita dentro del cono, lo rebosará?. Cuánto?. Si no lo hace, qué altura alcanzara en el cono? Resp: 19.63 u^3

21. - Las áreas de dos secciones paralelas ubicadas a lados distintos del centro de una esfera son de 283.69 m^2 y 204.06 m^2. Si la distancia entre las dos secciones es de 10 m. Calcular el área de la zona esférica formada. Resp: 628.3 m^2

22. - El recipiente tronco cónico de revolución esta lleno de agua y contiene una esfera sólida inscrita. Calcular el nivel del agua cuando se retira la esfera.

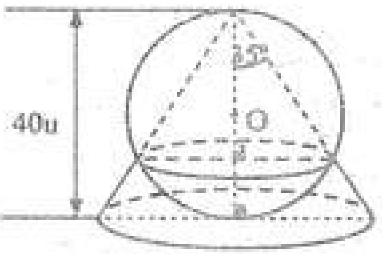
Resp: 5.96 u



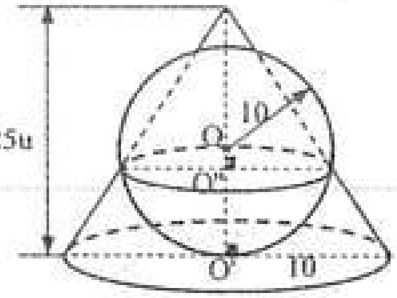
23. - Se tiene una esfera inscrita en un cono de revolución de 15 cm de radio y 32 cm de altura. Calcular el volumen comprendido entre la base del cono y la superficie de la esfera. Resp:

24. - Determinar el volumen común entre la esfera y el cono.

Resp: 18418.77 u^3



25. -

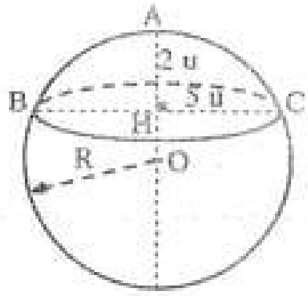


Determinar el volumen común entre la esfera y el cono

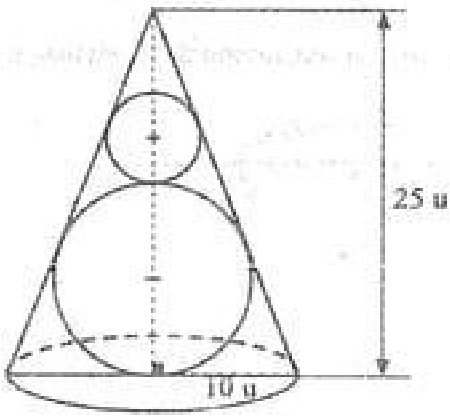
Resp: 1961.27 u^3

26. - Determinar el área y el volumen del casquete esférico.

Resp: 94.10 u^2; 82.72 u^3



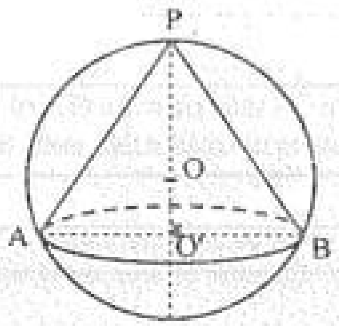
27. -



Calcular el volumen de aire de la siguiente figura.

Resp:

28. -



H) $V_{P-AB} = \frac{1}{4} V_{Esfera}$

PO' = 7 u

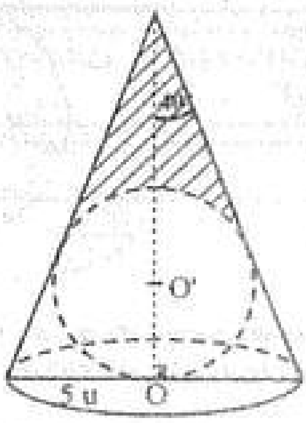
T) V_{Esfera} =?

Resp: 1436.75 u^3

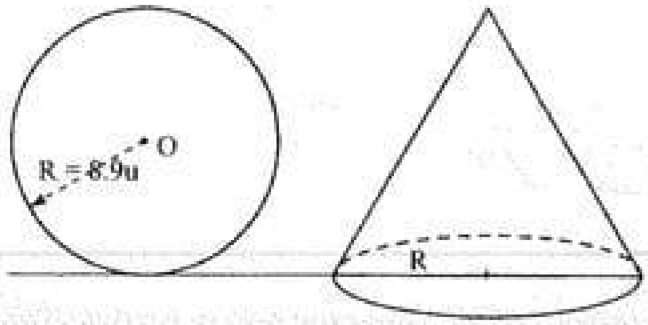
29. -

T) V_{aire} =?

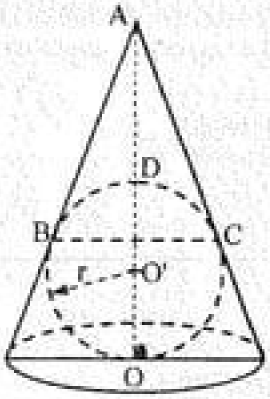
Resp: 2.63 u^3



30. - Si la altura del cono es igual al diámetro de la esfera y el radio de la base igual al radio de la esfera. ¿A qué distancia del vértice del cono se debe trazar un plano paralelo a la base para que las secciones determinadas en los dos objetos sean de igual área. Resp: 14.28 u



31. -



H) AB = 4 u

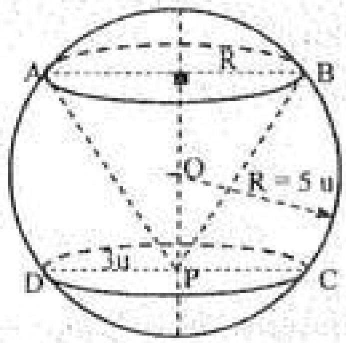
$$\frac{1}{4}S_{Esfera} = S_{Lateral-cono-ABC}$$

T) r =? Resp: 6.47 u

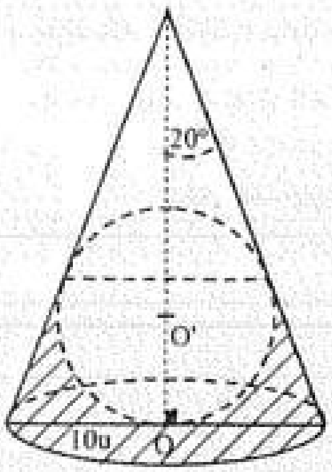
32. -

H) $V_{ABCD} = \frac{1}{3}V_{P-AB}$

T) R_1 =? Resp: 3 u



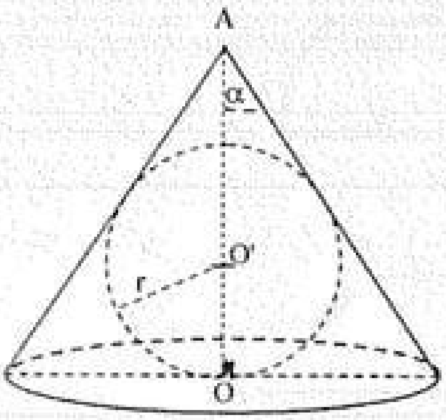
33. -



T) Volumen entre la superficie de la esfera y la base del cono

Resp: 982.55 u^3

34. -



H$_1$) $\dfrac{S_{Esfera}}{S_{Cono}} = \dfrac{4}{3}$ H$_2$) $\dfrac{V_{Cono}}{V_{Esfera}} = 2$

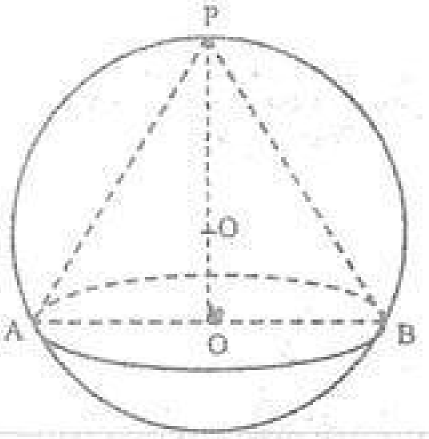
T$_1$) α =?

Resp: 60°

T$_2$) $\dfrac{S_{Tot.Cono}}{S_{Esfera}} = ?$

Resp: 2

35.-



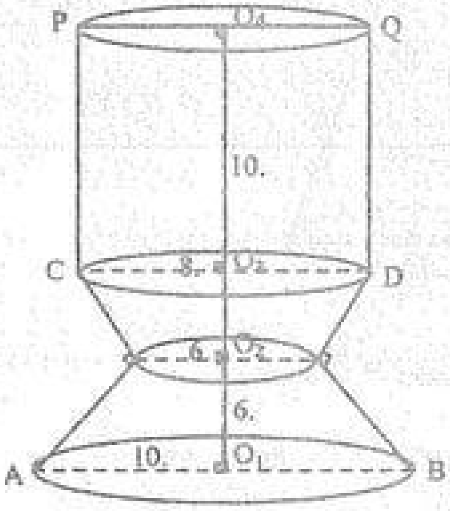
H) $S_{Lateral\ P\text{-}AB} = \frac{1}{2} S_{Zona\ P\text{-}AB}$

T) $PO_1 = ?$

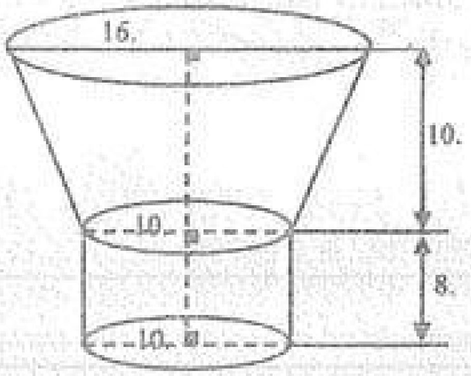
Resp: 3/2 R

36.- Se tiene un casquete esférico de las siguientes dimensiones: radio de la esfera = 10 u, radio de la base = 6 u. Está lleno de agua, si por la base se introduce un tronco de cono de revolución de dimensiones R = 8 u, r = 4 u, h = 9 u, en forma tal que los ejes coincida. Calcular la cantidad de agua que queda en el recipiente.

37. El recipiente de la figura contiene un volumen de agua igual a los 3/5 del volumen total del recipiente. Hallar la altura del nivel del agua a partir de la base A -B y hallar el área total del recipiente.



38.-

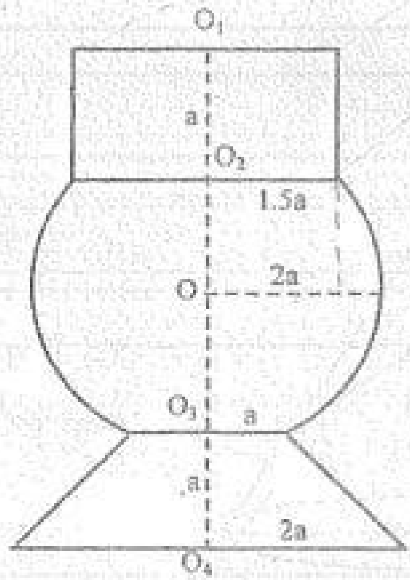


El recipiente de la figura contiene un volumen de agua igual a los 7/8 de su volumen total. Calcular la altura del nivel del agua en el recipiente.

Resp: 982.55 u^3

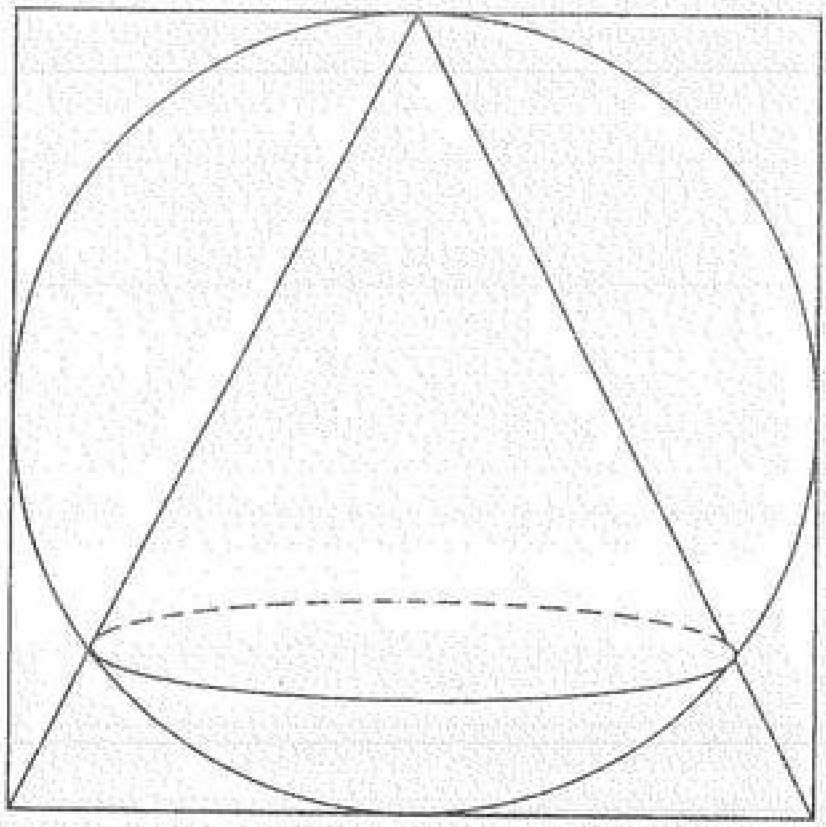
39.- Si en el recipiente se vierte un volumen de agua igual a los 9/10 del volumen total del recipiente. Hallar la altura que alcanza el nivel del agua en el recipiente.

Resp. 4.41 a



DIBUJO

EJERCICIOS PROPUESTOS Y EJERCICIOS RESUELTOS



G. CALVACHE
T. ROSERO
M. YACELGA

CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN

EL dibujo surgió debido a las exigencias prácticas del hombre, quien en los albores de la cultura humana sintió la necesidad de representar los objetos que lo rodean y los creados por él. Las pinturas rupestres, halladas en cavernas, fueron los primeros dibujos realizados por el hombre. A finales del siglo XVIII, los métodos para representar los objetos, edificaciones, etc., tenían ya una historia de muchos siglos. Sin embargo, no se había elaborado aún un método para representar los cuerpos volumétricos sobre el plano.

Con el desarrollo de la industria, y ligada a ella la división del trabajo, maduró históricamente la tarea de hacer una generalización científica del material conocido hasta el momento, elaborar una teoría única de representación y realizar una sistematización severa de las reglas para ejecutar los dibujos, para de esta forma proporcionar la transmisión exacta de las ideas de los ingenieros y proyectistas al realizador.

El conjunto de asignaturas matemáticas que cursan los estudiantes de especialidades técnicas, tiene como objetivo poner en manos de los futuros ingenieros el instrumento con ayuda del cual pueden ser resueltos los diferentes problemas de ingeniería. El Dibujo constituye una de estas asignaturas y tiene por finalidad el estudio de la forma y medida de los objetos del mundo real que nos rodea, las relaciones que existen entre estos objetos, la formulación de las correspondientes leyes y sus aplicación a la solución de los problemas prácticos.

El Dibujo permite representar no solo los objetos existentes en la realidad, sino también los que son producto de nuestra imaginación.

Por tal razón el estudio de esta ciencia contribuye al desarrollo de la imaginación espacial, es decir, la capacidad del hombre de representar mentalmente la forma, las dimensiones y otras cualidades de diferentes objetos.

El Dibujo se distingue porque para la solución de los problemas geométricos generales, se emplea el método gráfico en el cual las cualidades geométricas de las figuras se estudian directamente sobre el propio dibujo.

El dibujo es la representación de objetos de diferente naturaleza, construcción en el plano según determinadas reglas, que permite reproducir la forma y las dimensiones de los objetos. En el dibujo se resuelven diferentes cuestiones métricas y posicionales relacionadas con el diseño de máquinas, edificaciones, estructuras, etc., siempre que las construcciones hechas sobre el plano de dibujo reflejen las operaciones correspondientes en el espacio.

En nuestros tiempos es difícil señalar alguna actividad del hombre, en la cual, en mayor o menor medida, no sea necesario recurrir a la ayuda de los dibujos, si se considera que el dibujo es el lenguaje de la técnica.

Con el desarrollo de la industria, y ligada a ella la división del trabajo, maduró históricamente la tarea de hacer una generalización científica del material conocido hasta el momento, elaborar una teoría única de representación y realizar una sistematización severa de las reglas para ejecutar los dibujos, para de esta forma proporcionar la transmisión exacta de las ideas de los ingenieros y proyectistas al realizador.

2. INSTRUMENTOS Y SU USO

Para la realización de cualquier tipo de dibujo, se necesitan instrumentos indispensables como: escuadras de 45° y 60°, regla T, tablero, escalímetro, lápices suaves y duros, compases, sacapuntas, borrador, cinta adhesiva, papel y normógrafos; entre el material opcional se puede tener: plantillas, rapidógrafos, curvígrafos, etc.

Los lápices se los escoge según su dureza. Se utilizará especialmente los lápices HB y 2H. Las escuadras y las reglas T sirven para trazar perpendiculares y paralelas; también pueden trazarse ángulos de 30°, 45°, 60° y 75° con respecto a una línea base. El escalímetro sirve y se usa para medir en varias escalas.

Es necesario que se tenga un juego de compases entre los que se tengan un corriente, uno de puntas fijas y bigoteras. El compás de puntas fijas sirve para transportar medidas, y las bigoteras para trazar circunferencias de radio pequeño y éstas se regulan en base a un tornillo.

3. NORMAS, FORMATOS DE PAPEL

Las normas a utilizarse están de acuerdo al sistema Internacional. Los formatos normalizados en mm. Son los siguientes:

Designación	Hojas recortadas		Hojas sin recortar	
	a	b	a1	b1
A0	841	1189	880	1230
A1	594	841	625	880
A2	420	594	450	625
A3	297	420	330	450
A4	210	297	240	330
A5	148	210	165	240
A6	105	148	120	165

4. TIPOS Y ANCHURAS DE LAS LÍNEAS.

Si se utilizan seis tipos diferentes de líneas, que se indican así: A, B, C, D, E, F. Cada una tiene su anchura determinada, que se indica con un número que representa aproximadamente la anchura en décimas de mm.

Tipos de líneas y denominación	Relaciones de anchuras recomendadas respecto a las usada para la línea A	Empleos típicos
A Continua gruesa	1	Perfiles y aristas vistas
B Continua fina	$\frac{1}{4}$	Contornos y aristas ficticios, líneas de medida y de referencia, rayados, representaciones de piezas indicadas o títulos de referencia, contornos de secciones rebatidas anexas.
C Continua fina irregular	$\frac{1}{4}$	Límite de la vista o corte parcial, cuando este límite no sea un eje de simetría.
D De trazos medios	$\frac{1}{2}$	Contorno y aristas ocultos
E Mixta fina (trazos largos y cortos)	$\frac{1}{4}$	Ejes, posiciones extremas de partes móviles, partes puestas anteriormente en un plano de sección
F Mixtas finas y gruesas (trazos largos y cortos)	$1 - \frac{1}{4} - 1$	Trazas de planos de sección

En dibujo se deben emplear solo líneas del mismo grupo: líneas finas, líneas medias, líneas gruesas, líneas muy gruesas.

5. ESCALAS

Siempre se debe indicar con claridad la "escala de representación", es decir, la relación entre las dimensiones del objeto en el dibujo y las relaciones reales de éste.

Si el dibujo tiene las mismas dimensiones que el objeto, la escala es "al natural", cuando el dibujo tiene dimensiones mayores a la del objeto, la escala es de "ampliación", y si el dibujo tiene menores dimensiones que el objeto, la escala es de "reducción".

Las escalas más usuales están indicadas en el cuadro.

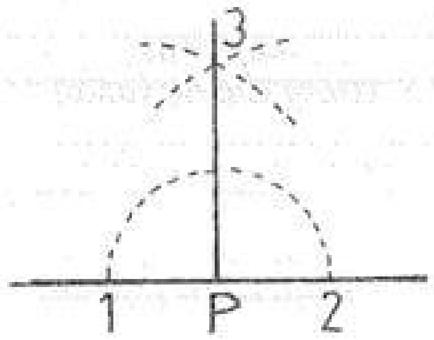
Ampliación	50 : 1 20 : 1 10 : 1 5 : 1 2 : 1	Reducción	1 : 2.5 1 : 5 1 : 10 1 : 20 1 : 25 1 : 50
Al natural	1 : 1		

6. PERPENDICULARES, PARALELAS, BISECTRICES, ÁNGULOS

PERPENDICULAR EN UN PUNTO

DATOS | CONSTRUCCIÓN

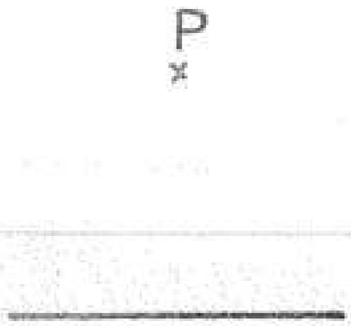
P



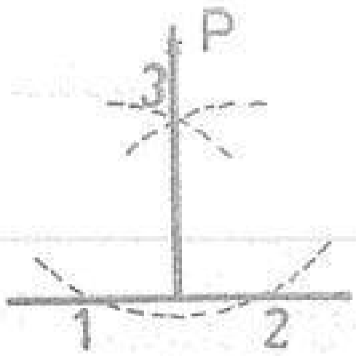
ALGORITMO: **1.-** Θ (P;R cualquiera); **2.-** $\therefore$ 1 y 2; **3.-** Θ (1 ; R_1cualquiera), Θ (2 ; R_1) $\therefore$ 3; **4.-** $\overline{3P}$

PERPENDICULAR DESDE UN PUNTO

DATOS



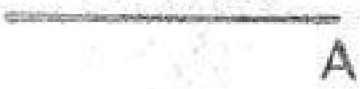
CONSTRUCCIÓN



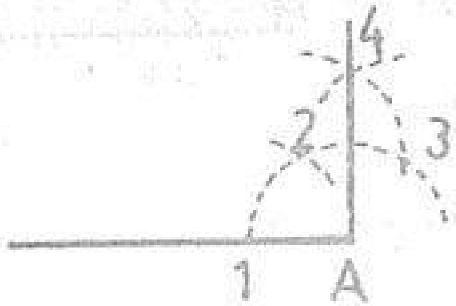
ALGORITMO: **1.-** Θ (P ; R cualquiera) ∴ 1 y 2; **2.-** Θ (1 ; R1 cualquiera) y Θ (2 ; R1) ∴3; 3.- $\overline{3P}$

PERPENDICULAR EN UN EXTREMO

DATOS



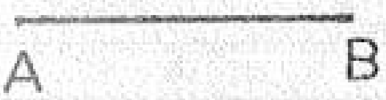
CONSTRUCCIÓN



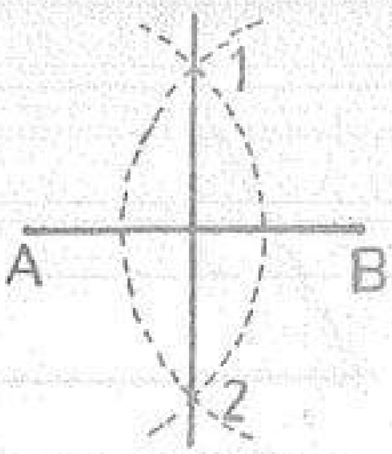
ALGORITMO: **1.-** Θ (A ; R cualquiera) ∴1; **2.-** Θ (1 ; R) ∴ 2; **3.-** Θ (2 ; R) ∴ 3 **4.-** Θ (3 ; R) ∴ 4; **5.-** $\overline{4A}$

MEDIATRIZ

DATOS



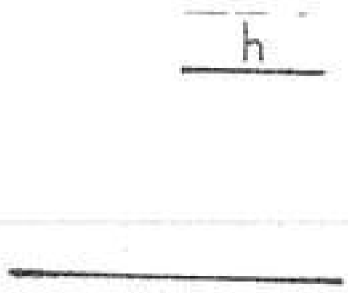
CONSTRUCCIÓN



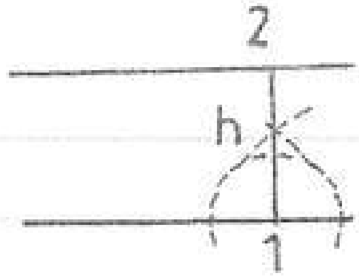
ALGORITMO: **1.-** Θ (A ; R más de la ½ de $\overline{AB}$); **2.-** Θ (B ; R) ∴ 1 y 2; **3.-** $\overline{12}$

PARALELA A UNA DISTANCIA "h"

DATOS



CONSTRUCCIÓN

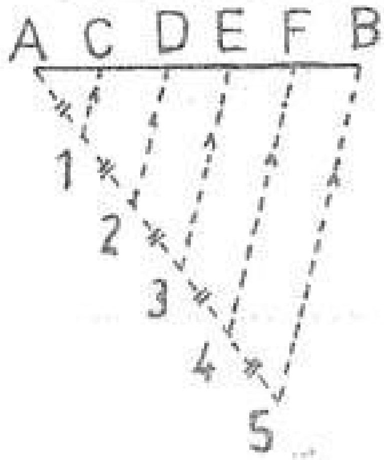


ALGORITMO: **1.** Perpendicular en 1; **2.** Θ (1 ; h) ∴2; **3.** Paralela por 2 (usando escuadras)

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN PARTES IGUALES

DATOS

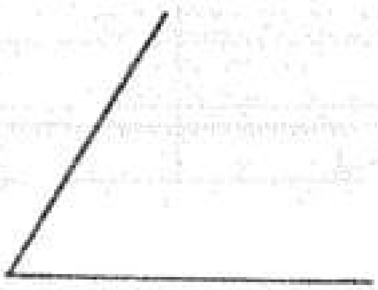
CONSTRUCCIÓN



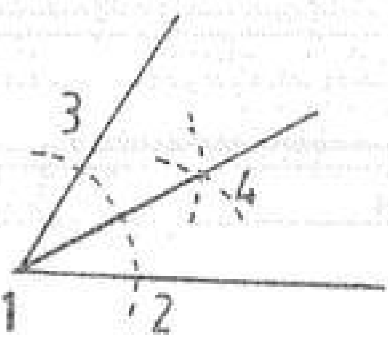
ALGORITMO: **1.** Recta cualquiera desde A; **2.** Θ (A; R cualquiera) ∴ 1; **3.** Θ (1; R) ∴ 2 **4.** Θ (2; R) ∴ 3 , Θ (3; R) ∴ 4 , Θ (4; R) ∴ 5 ; **5.** Trazar $\overline{B5}$; **6.** Paralelas a B5 por 4,3,2,1; **7.** ∴ F.E,D,C.

BISECTRIZ

DATOS



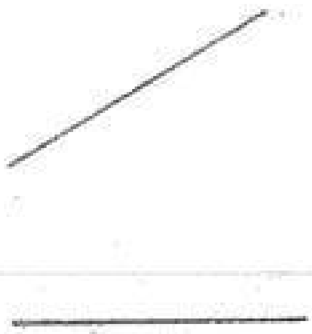
CONSTRUCCIÓN



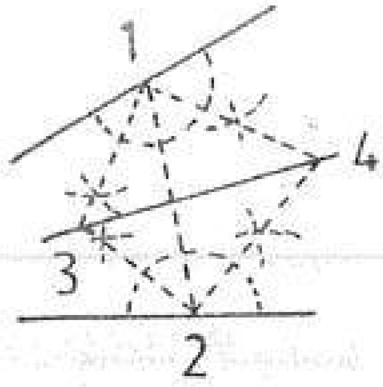
ALGORITMO: **1.** Θ (1 ; R cualquiera) ∴ 2,3; **2.** Θ (2 ; R_1 cualquiera) y Θ (3 ; R_1) ∴ 4; **3.** 14

BISECTRIZ DE UN ÁNGULO VÉRTICE DESCONOCIDO

DATOS



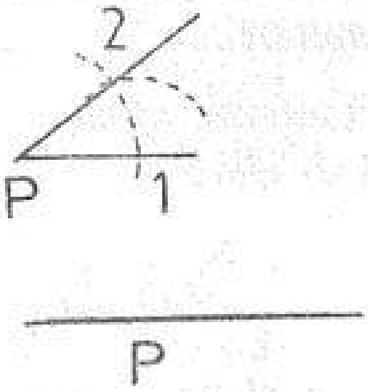
CONSTRUCCIÓN



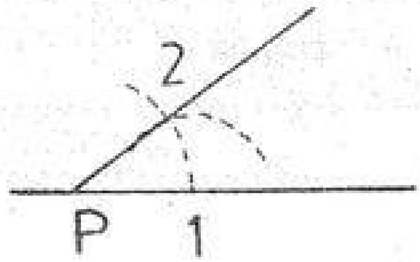
ALGORITMO: **1.** 12 cualquiera; **2.** Bisectrices de los cuatro ángulos formados ∴ 3 , **3.** $\overline{34}$

ÁNGULO IGUAL A OTRO

DATOS



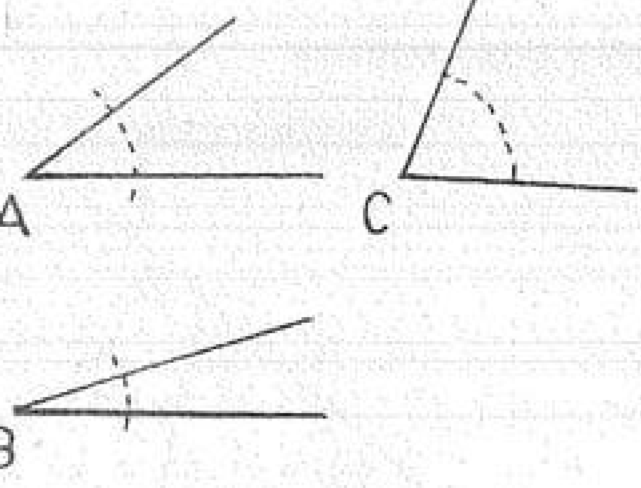
CONSTRUCCIÓN



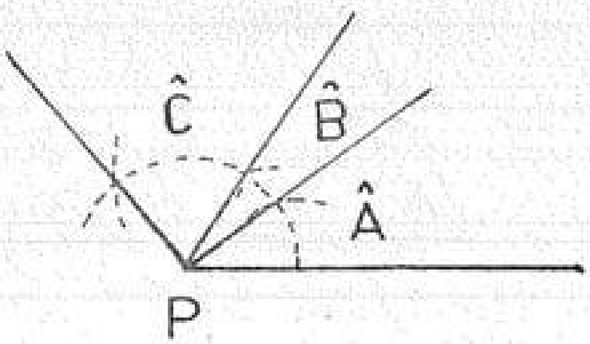
ALGORITMO: **1.** Θ (A; R cualquiera) ∴ 1 , 2; **2.** Θ (P; R) ∴ 1; **3.** Θ (1; $\overline{12}$) Y Θ(1; $\overline{12}$) ∴ 2; **4.** $\overline{A2}$; **5.** $\hat{P}$

SUMA DE ÁNGULOS $\hat{P} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$

DATOS



CONSTRUCCIÓN



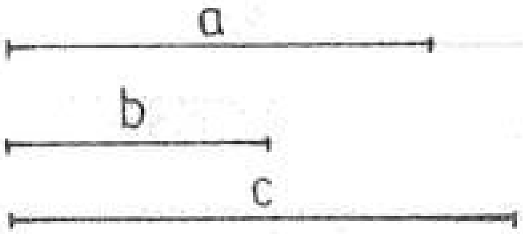
ALGORITMO: **1.** Θ (A; R cualquiera), Θ (B; R), Θ (C; R) y Θ (P; R); **2.** Pasar las medida de los ángulos A, B, y C; **3.** $\hat{P}$.

7. C0NSTRUCCIÓN DE TRIÁNGULOS

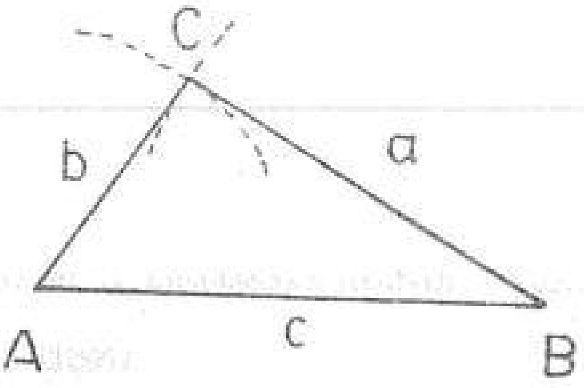
7.1 TRIÁNGULOS ESCALENOS

DADOS LOS TRES LADOS

DATOS



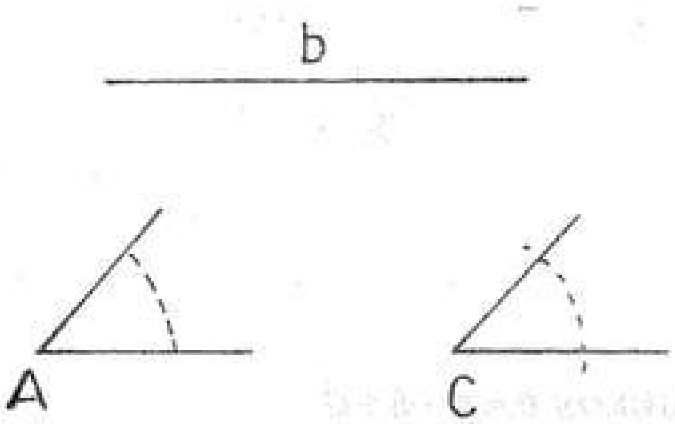
CONSTRUCCIÓN



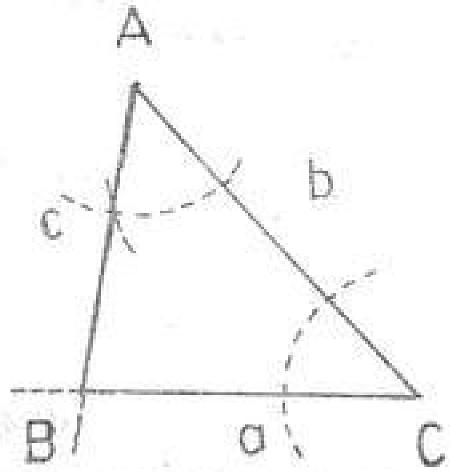
ALGORITMO: **1.** $\overline{AB}$ = c; **2.** Θ (B; a) y Θ (A; b) ∴ C; **3.** Δ ABC

DADOS UN LADO Y DOS ÁNGULOS

DATOS



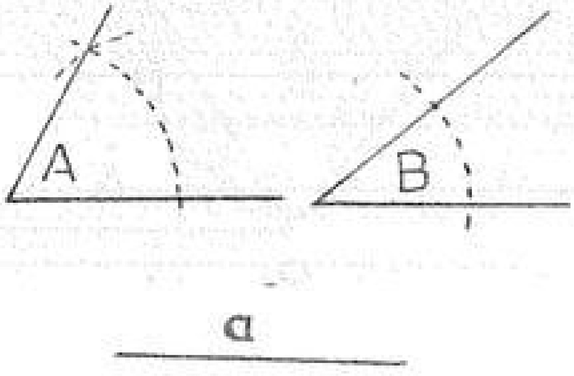
CONSTRUCCIÓN



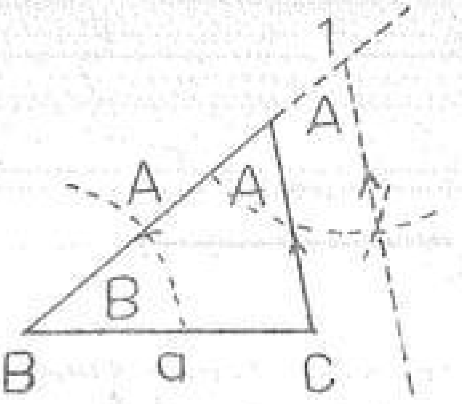
ALGORITMO: **1.** $\overline{AC}$ = b; **2.** En A, $\hat{A}$ y en C, $\hat{C}$, ∴ B; **3.** Δ ABC

DADOS UN LADO Y DOS ÁNGULOS

DATOS



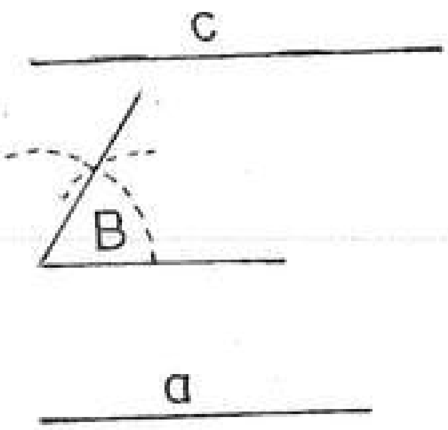
CONSTRUCCIÓN



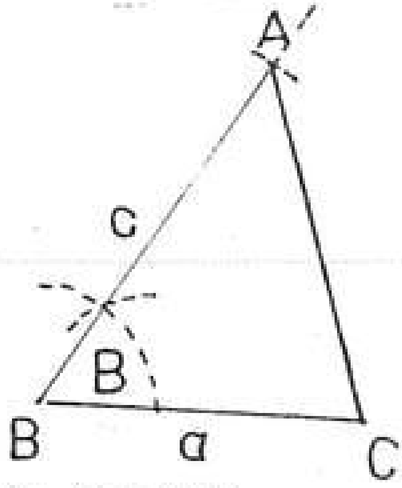
ALGORITMO: **1.** $\overline{BC}$ = a; **2.** En B, $\hat{B}$; **3.** En 1, $\hat{A}$; **4.** Paralela a $\overline{1D}$ por C ∴ A; **5.** ΔABC

DADOS DOS LADOS Y UN ÁNGULO

DATOS



CONSTRUCCIÓN

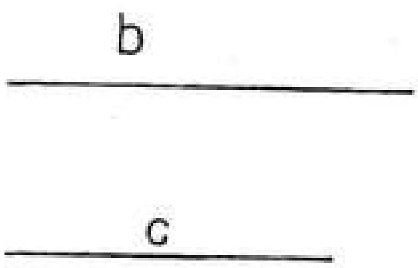


ALGORITMO: **1.** $\overline{BC} = a$; **2.** En B, $\hat{B}$; **3.** Θ (B; c) ∴ A; **4.** ΔABC

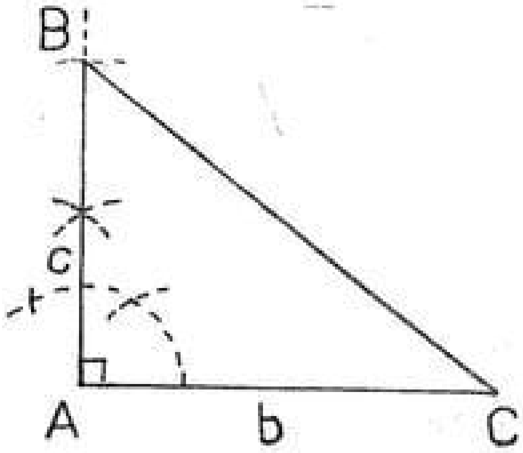
7.2 TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

DADOS LOS DOS CATETOS

DATOS



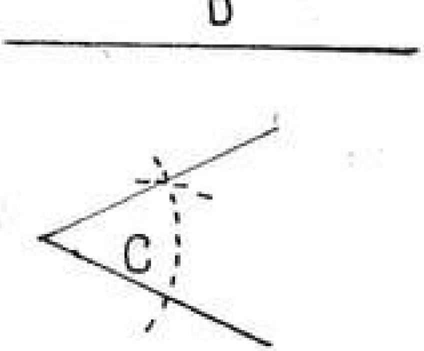
CONSTRUCCIÓN



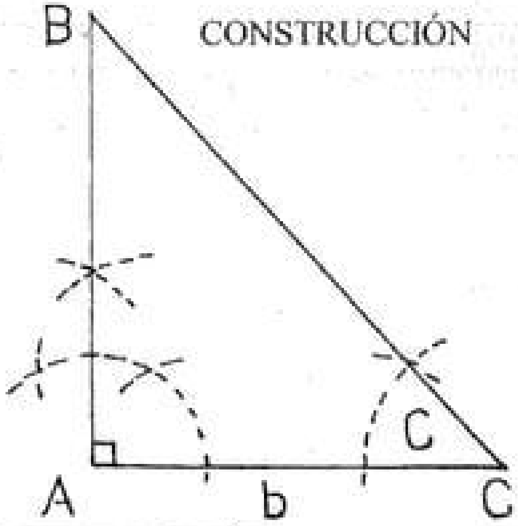
ALGORITMO: **1.** $\hat{A}$ de 90º; **2.** Θ (A; b) ∴ C; **3.** Θ (A; c) ∴ B; **4.** $\overline{BC}$; **5.** ΔABC

DADOS UN CATETOS Y UN ÁNGULO AGUDO

DATOS



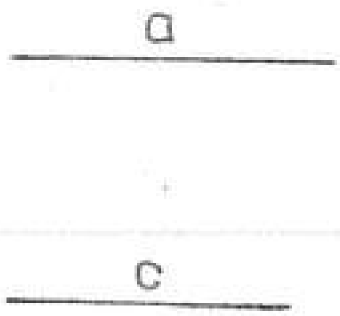
CONSTRUCCIÓN



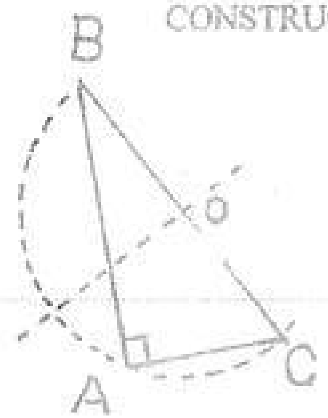
ALGORITMO: **1.** $\hat{A}$ de 90º; **2.** O (A; b) ∴ C; **3.** En C , $\hat{C}$ ∴ B; **4.** ΔABC

DADOS LA HIPÓTENUSA Y UN CATETO

DATOS



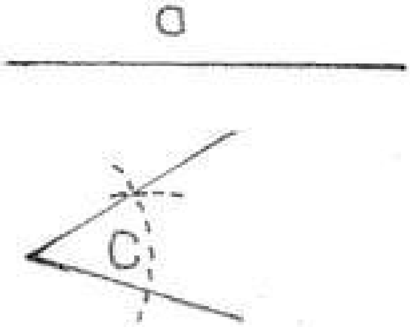
CONSTRUCCIÓN



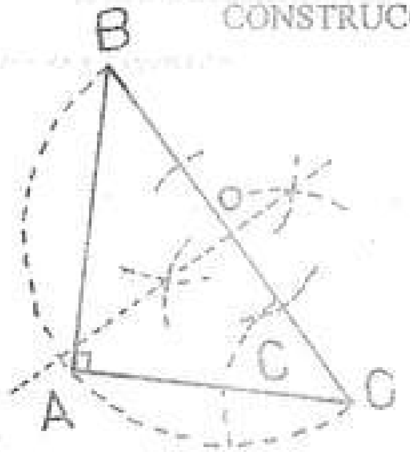
ALGORITMO: **1.** $\overline{BC}$ = a; **2.** Mediatriz de $\overline{BC}$ ∴ O; **3.** ⊙ (O; $\overline{OB}$); **4.** ⊙ (R; c) ∴ A; **5.** ABC

DADOS LA HIPOTENUSA Y UN ÁNGULO AGUDO

DATOS



CONSTRUCCIÓN

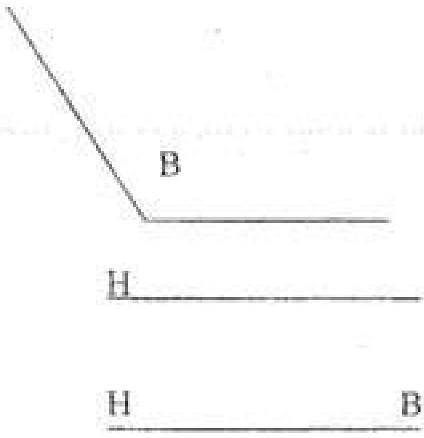


ALGORITMO: **1.** $\overline{BC}$ = a; **2.** Mediatriz de $\overline{BC}$ ∴ O; **3.** En C, $\hat{C}$ ∴ A; **4.** ΔABC

7.3 EJERCICIOS

1. a, hb, hc
2. a, mb, mc
3. b, c, ha
4. b, c, ma
5. a, b, ma
6. hb, $\hat{A}$,$\hat{C}$
7. ma, $\hat{C}$, $\hat{B}$
8. ha, mb, b
9. ha, ma , c
10. ma, mc, mb
11. a, hb, ha
12. a, mb, $\hat{C}$
13. a, $\hat{C}$, mc
14. a, $\hat{B}$ - $\hat{C}$, $\hat{A}$= 90°
15. ha, ma, $\hat{A}$= 90°
16. a, R, hb
17. ha, Va, $\hat{B}$ + $\hat{C}$
18. ha, Va, b
19. r, ha, $\hat{B}$ - $\hat{C}$
20. mb, mc, c
21. ha, Va, $\hat{C}$
22. $\hat{B}$ = 45°
HM = 2.0, lado a
HF = 1.5, lado b
H ortocentro
23. ma, hb, hc
24. b, hb, ma
25. ha, hc, $\hat{C}$
26. hb, Vc, a
27. $\hat{A}$= 90°, Va, $\hat{B}$ - $\hat{C}$
28. hb, Va, c
29. hb, Vb, $\hat{B}$
30. r, Va, A
31. ha, mb, $\hat{A}$= 90°

32. IA = 3, IC = 4, B̂ = 80°
I incentro
33. si a = c (condición)
r = 2; AC = 5
34. AOa, b, B̂ ; Oa excentro
35. DE pies de ha y hc, Â, B
36. r, hb, Ĉ
37. a = c, AÎC
38. Â, hc, DE antiparalela lado b (pies alturas)
39. Â= 90°, HG
40. ha, Â, DE antiparalela lado b (pies alturas)
41. H ortocentro



42. Triángulo rectángulo isósceles distancia entre ortocentro y baricentro (m).

m

43. Construir el triángulo DEF, que sea semejante al triángulo ABC y que tenga una superficie de 4 veces la del triángulo ABC, si se conoce: Â= 90°, ma, c; datos del triángulo ABC.

44. Â= 90°, triángulo isósceles; m; distancia entre el circuncentro y el baricentro.
45. b, hc, ha
46. Â= 90°, HG distancia ortocentro baricentro, Ĉ
47. ha, R, B̂
48. c, AOa, Ĉ; Oa excentro
49. Triángulo isósceles, r, la base
50. hc, ha, B̂
51. AH, HC, B̂ ; H es ortocentro, A y B, vértices del triángulo ABC
52. hb, c, Ĉ
53. BOa, COa, Â, Oa es excentro
54. BOb, c, Ĉ, Ob es excentro
55. R, hb, Â
56. hc, a, Â
57. ma, ha, a = 2b
58. BI, AIĈ, I es el incentro del triángulo ABC.
59. R; B̂ - Ĉ, Â= 90°
60. ACI, COb, B̂
61. mc, ha, hb
62. Â, B̂ - Ĉ, a
63. ma, mb, hc
64. BD (bisectriz interna); BE (bisectriz externa); C
65. IC; r; B
66. B; DE (antiparalela del lado AC); DH (DH AB, H ortocentro);
67. r; Vc; C
68. B > 90; AD (altura de A); N (punto medio de AB); M (punto medio de AC); dados: DN; NM; AM
69. C; m (perpendicular de G a BC); c
70. a; mb; ha
71. ha; Va, R
72. A; r; ra

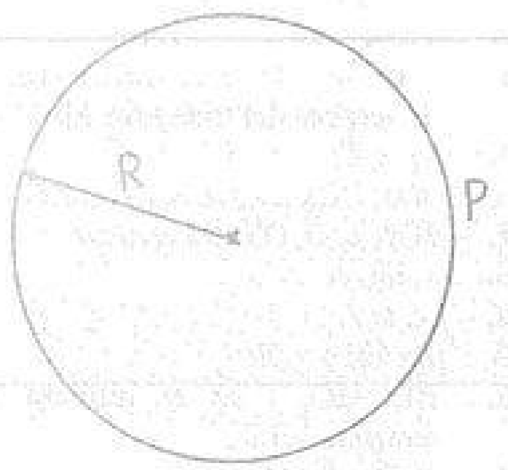
PUNTOS Y LINEAS FUNDAMENTALES

1. Dados: A = 90; a, b; Determinar HO
2. Dados: A > 90; b = c; Determinar Hoa
3. Dados: a; b; c; Determinar GO
4. Dados: C = 120; b = a; Determinar IOOa

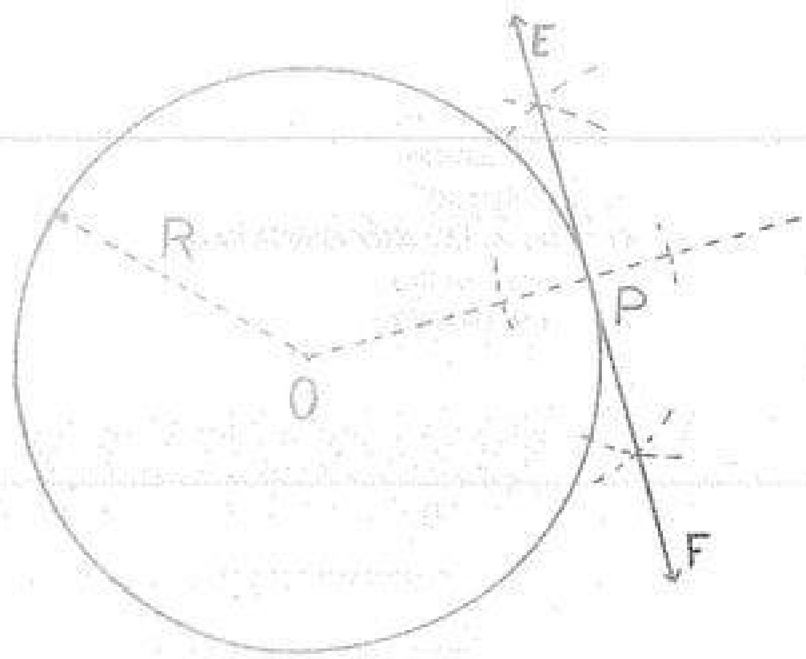
8. TANGENTES

EN UN PUNTO

DATOS



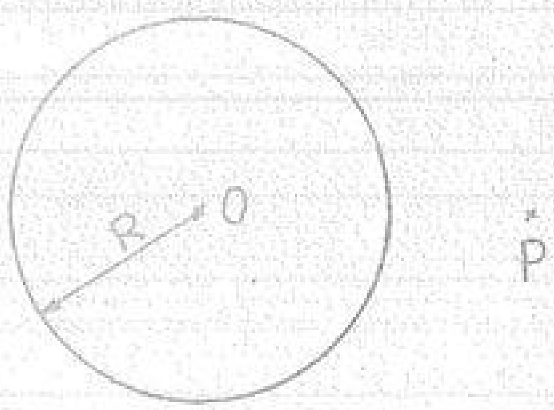
CONSTRUCCIÓN



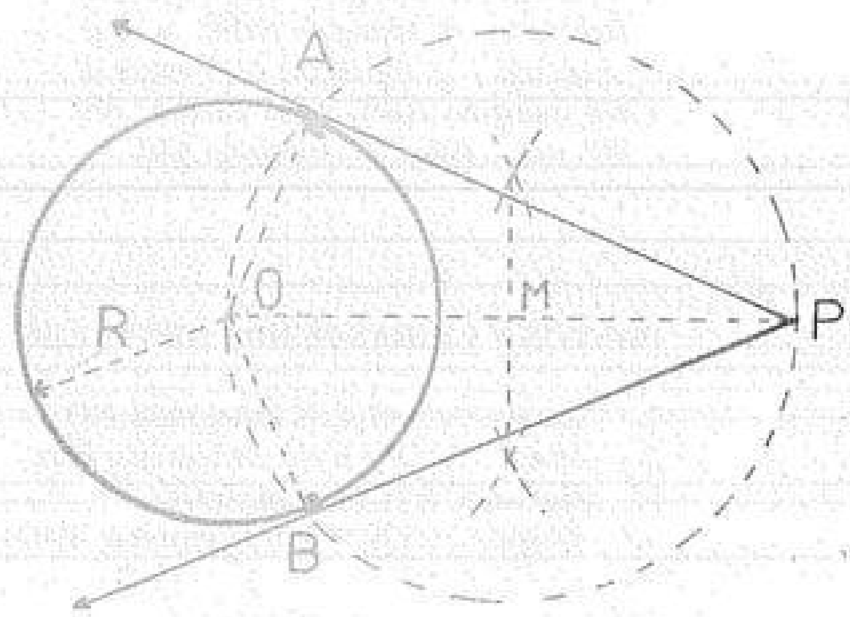
Algoritmo: 1. $\overline{OP}$; 2. Perpendicular en P 3. $\overline{EF}$

DESDE UN PUNTO

DATOS

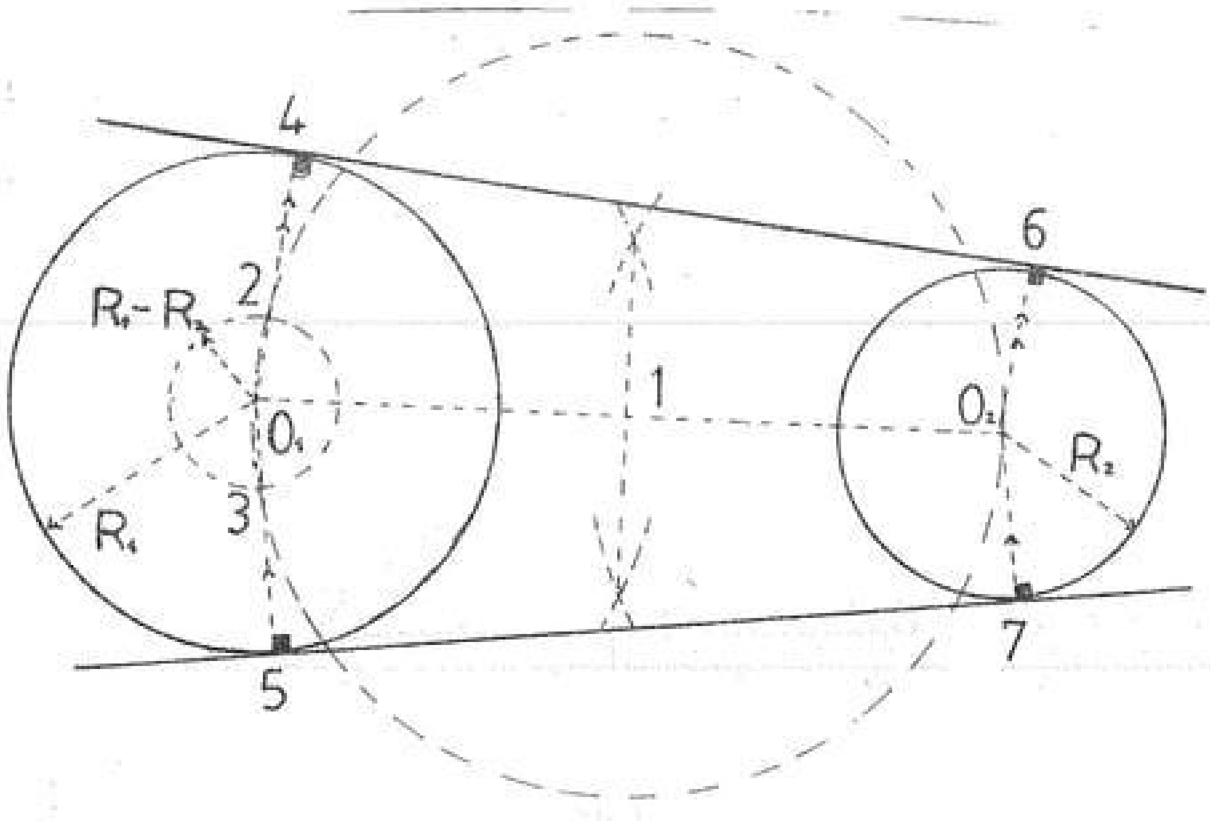


CONSTRUCCIÓN



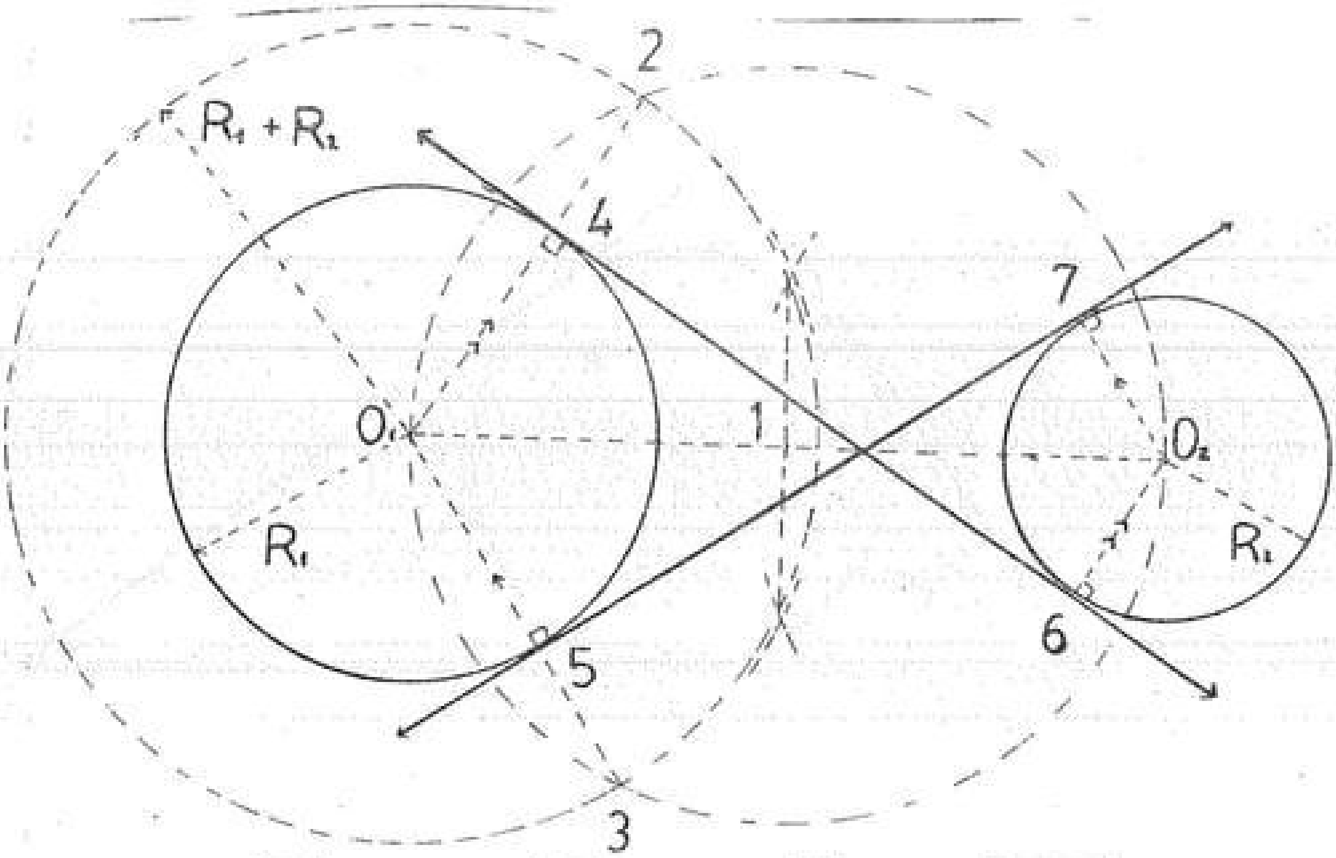
ALGORITMO: 1. $\overline{OP}$; 2. Mediatriz de $\overline{OP}$ $\therefore$ M; 3. $\odot$ (M,$\overline{MP}$) $\therefore$ A y B; 4. $\overline{PA}$; $\overline{PB}$

EXTERNAS COMUNES



ALGORITMO: **1.** $\overline{O_1O_2}$; **2.** Mediatriz $\overline{O_1O_2}$ ∴ 1; **3.** Θ (1;$\overline{1O_1}$); **4.** Θ (O_1;$\overline{R1 - R2}$) ∴ 2 y 3; **5.** $\overline{O_1\text{-}2}$ y $\overline{O_1\text{-}3}$ ∴ 5 y 4; **6.** $\overline{O_2 6} \parallel \overline{O_1 4}$ y $\overline{O_2 7} \parallel \overline{O_1 5}$; **7.** $\overline{46}$ y $\overline{75}$

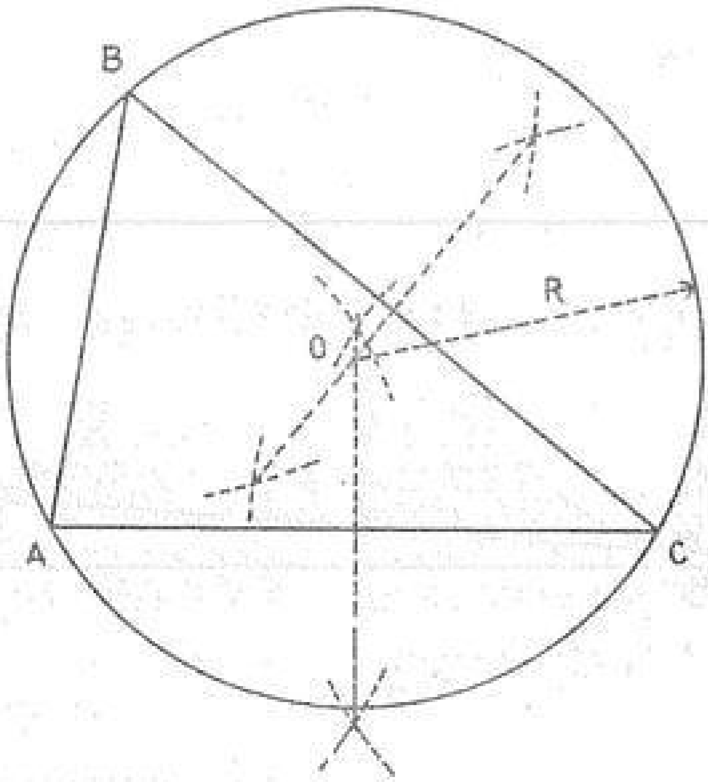
INTERNAS COMUNES



ALGORITMO: **1** $\overline{O_1O_2}$; **2.** Mediatriz $\overline{O_1O_2}$ ∴1; **3.** Θ (1;$\overline{1O_1}$); Θ (O_1;$\overline{R1 + R2}$) ∴ 2 y 3; **4.** $\overline{O_1\text{-}2}$ y $\overline{O_1\text{-}3}$ ∴ 3 y 4; **5.** $\overline{O_2 6} \parallel \overline{O_1 4}$ y $\overline{O_2 7} \parallel \overline{O_1 5}$; **6.** $\overline{46}$ y $\overline{75}$

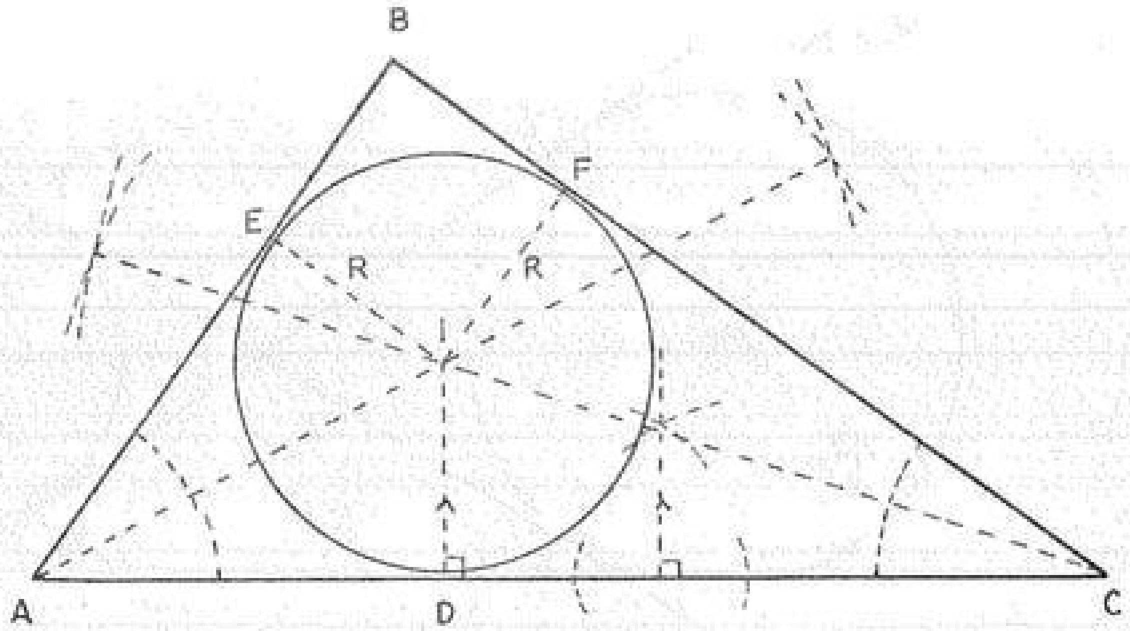
9. RELACIÓN CÍRCULO TRIÁNGULO

CÍRCULO CIRCUNSCRITO



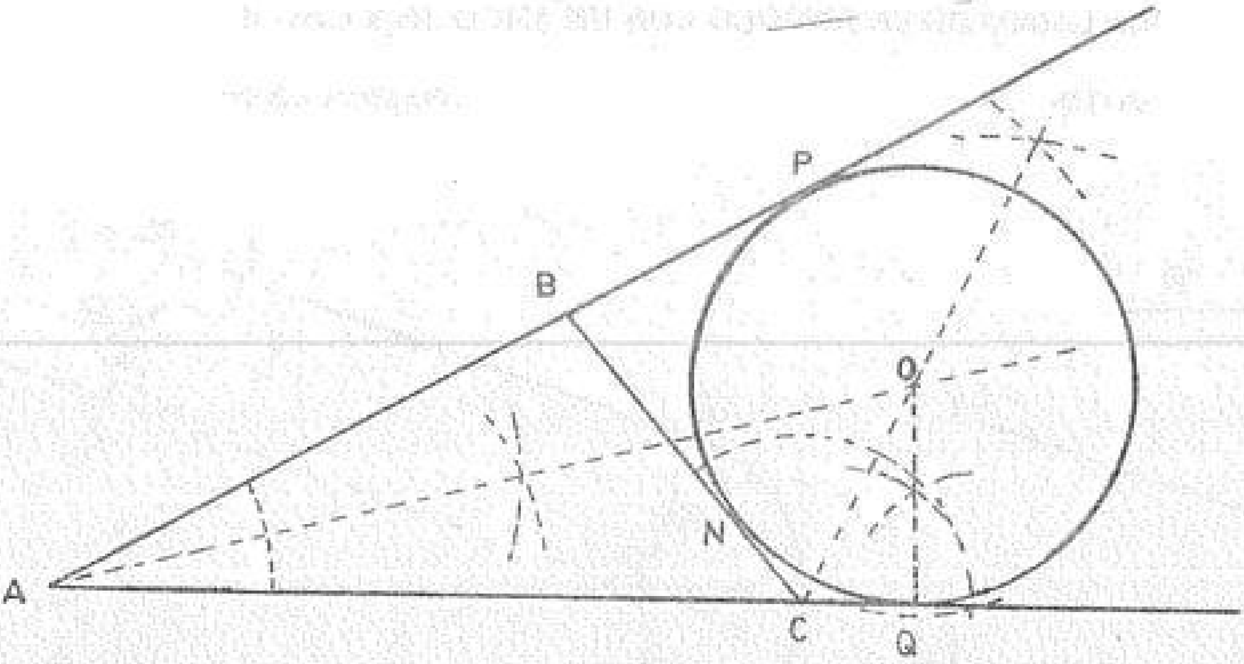
ALGORITMO: **1.** ABC cualesquiera ; **2.** Mediatriz de $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$; $\therefore$ O (Circuncentro); **3.** Θ (O;OB)

CÍRCULO INSCRITO



ALGORITMO: **1.** ABC cualesquiera ; **2.** Bisectriz de $\widehat{A}$ y $\widehat{C}$ $\therefore$ I; **3.** $\overline{ID} \perp \overline{AC}$; **4.** $\overline{AD} = \overline{AE}$; **5.** $\overline{CD} = \overline{CF}$; **6.** Θ (I ; $\overline{IF}$)

CÍRCULO EXINSCRITO



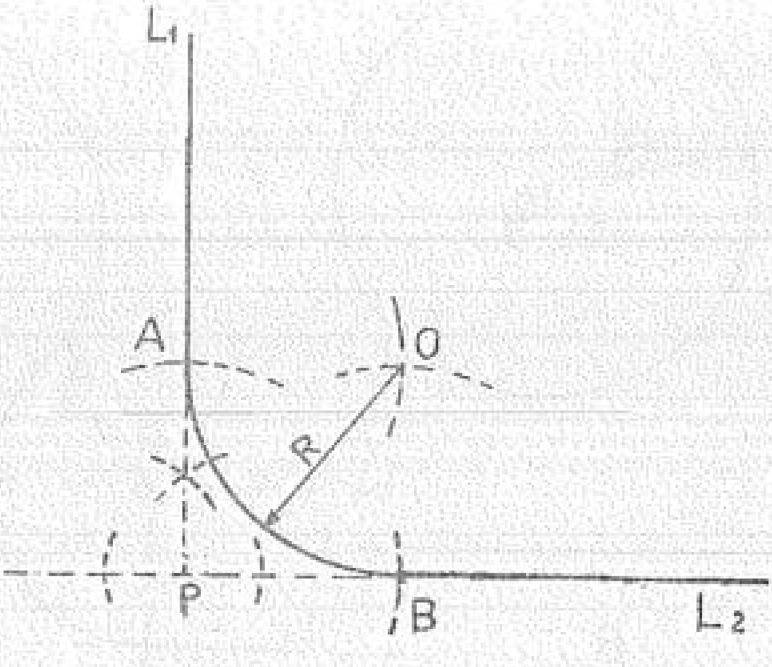
ALGORITMO: **1.** ABC cualesquiera ; **2.** Bisectriz de $\widehat{A}$ y $\widehat{C}$ $\therefore$ O; **3.** $\overline{OQ}$ $\overline{AC}$; **4.** $\overline{CQ}$ = $\overline{CN}$; **5.** $\overline{BN}$ = $\overline{BP}$; **6.** Θ (O ; $\overline{OQ}$)

10. ENLACES

DOS LADOS DE UN ÁNGULO RECTO CON UN ARCO DE RADIO R

DATOS

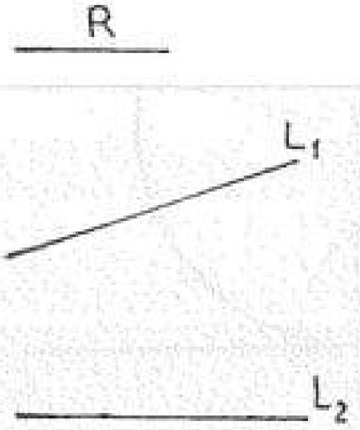
CONSTRUCCIÓN

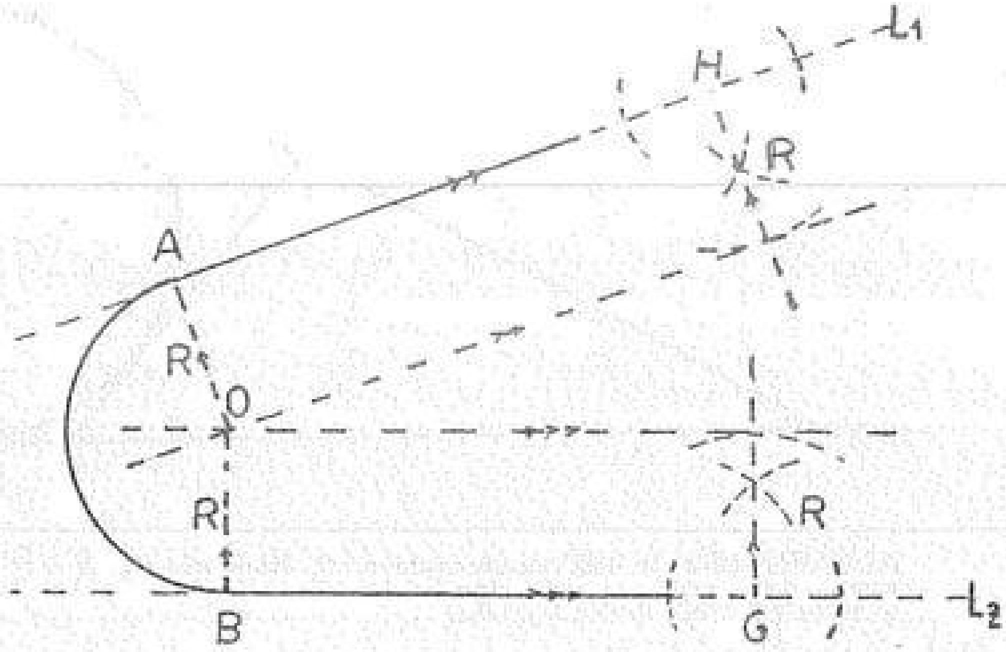


ALGORITMO: **1.** O (P; R) $\therefore$ A Y B; **2.** O(A; R) y O(B; R) $\therefore$ O; **3.** O (O; R)

DOS LADOS DE UN ÁNGULO CON UN ARCO DE RADIO R

DATOS CONSTRUCCIÓN

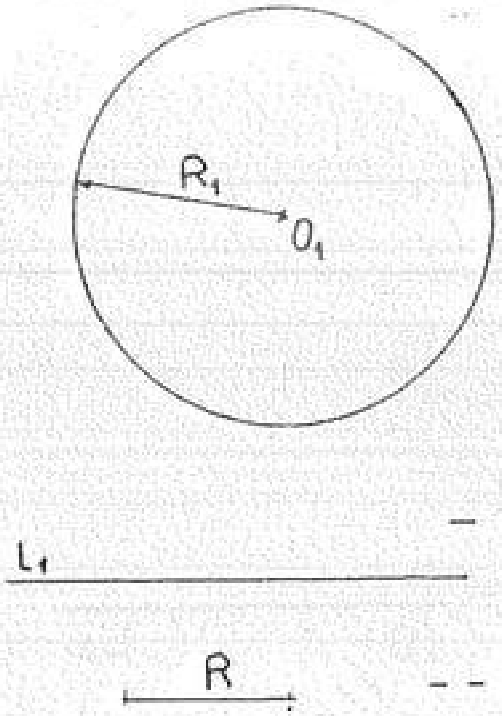


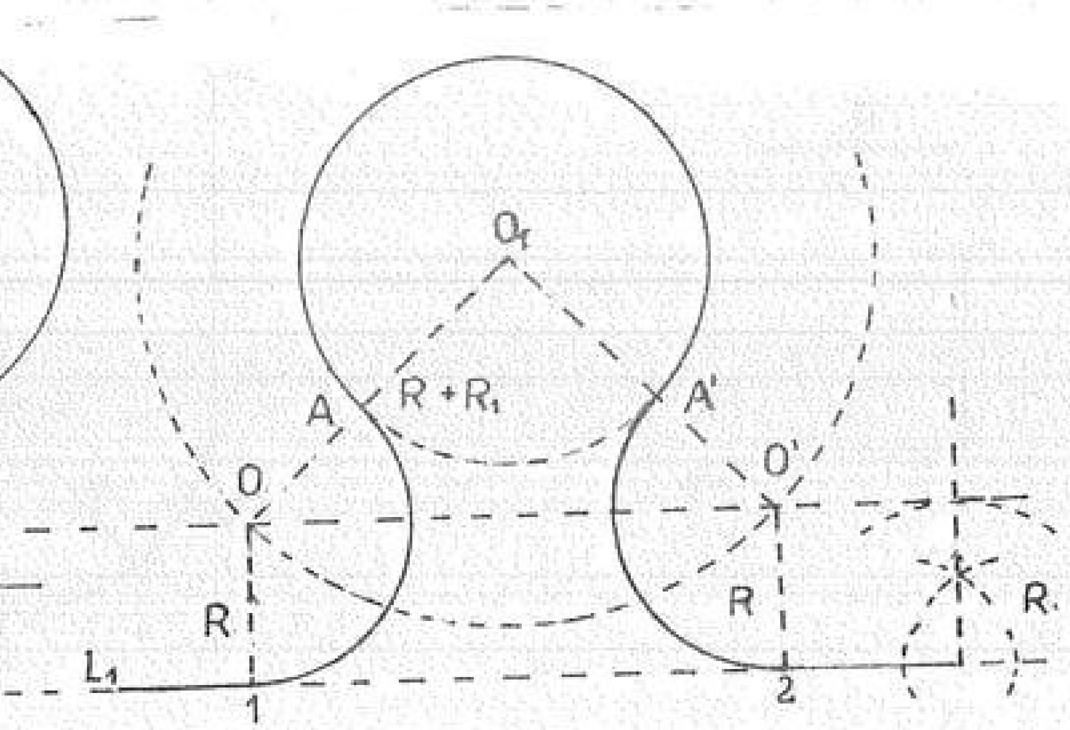


ALGORITMO: **1.** En H y G perpendiculares a $\overline{L_1}$ y $\overline{L_2}$; **2.** Paralelas a $\overline{L_1}$ y a $\overline{L_2}$ ∴ O; **3.** Desde O perpendiculares a $\overline{L_1}$ y $\overline{L_2}$ ∴ A y B **4.** Θ (O; $\overline{AB}$)

RECTA - CÍRCULO CON R (EXTERNAMENTE)

DATOS CONSTRUCCIÓN

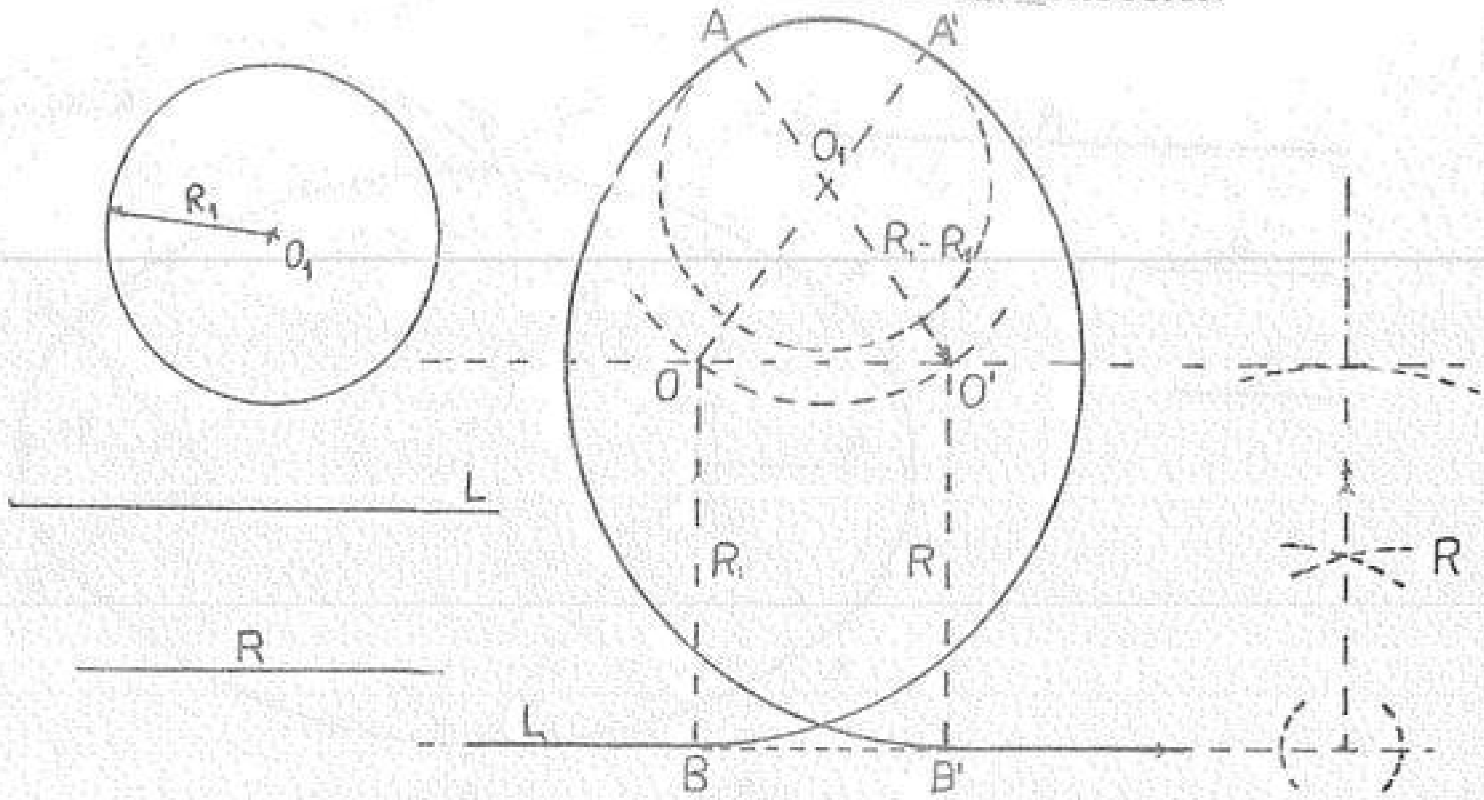




ALGORITMO: **1.** Paralela a $\overline{L_1}$ a la distancia R; **2.** Θ (O_1; $\overline{R_1 + R}$) ∴ O y O'; **3.** Perpendiculares desde O y O' a $\overline{L_1}$ ∴ 1 y 2 **4.** $\overline{O_1O}$ y $\overline{O_1O'}$ ∴ A y A'; **5.** Θ (O; R) y Θ (O'; R)

RECTA - CÍRCULO CON R (INTERNAMENTE)

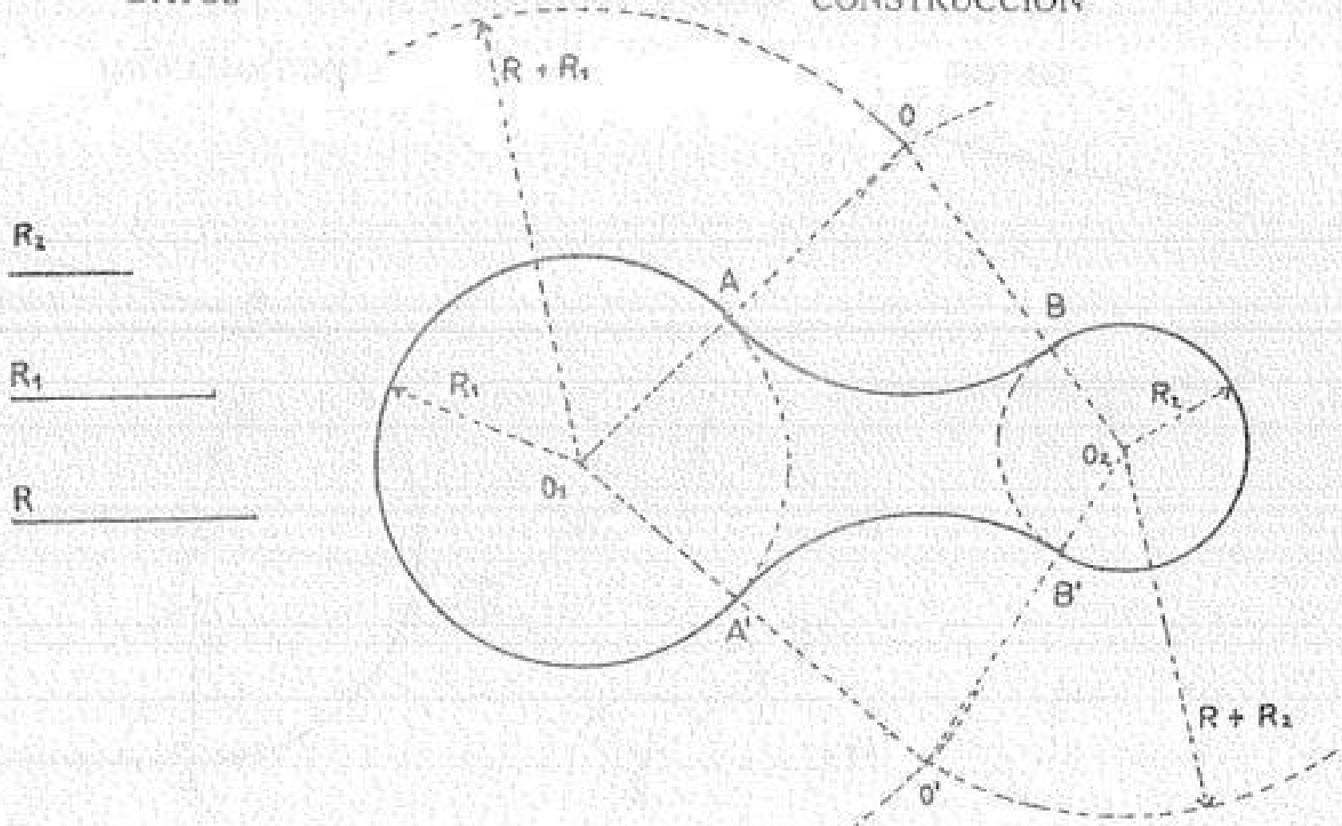
DATOS CONSTRUCCIÓN



ALGORITMO: **1.** Paralela a $\overline{L_1}$ a la distancia R; **2.** Θ (O_1; $\overline{R - R_1}$) ∴ O y O'; **3.** Perpendiculares desde O y O' a $\overline{L_1}$ ∴ B y B' **4.** O_1O y O_1O' ∴ A y A'; **5.** Θ (O; R) y Θ (O; R)

CÍRCULO - CÍRCULO CON R (EXTERNAMENTE)

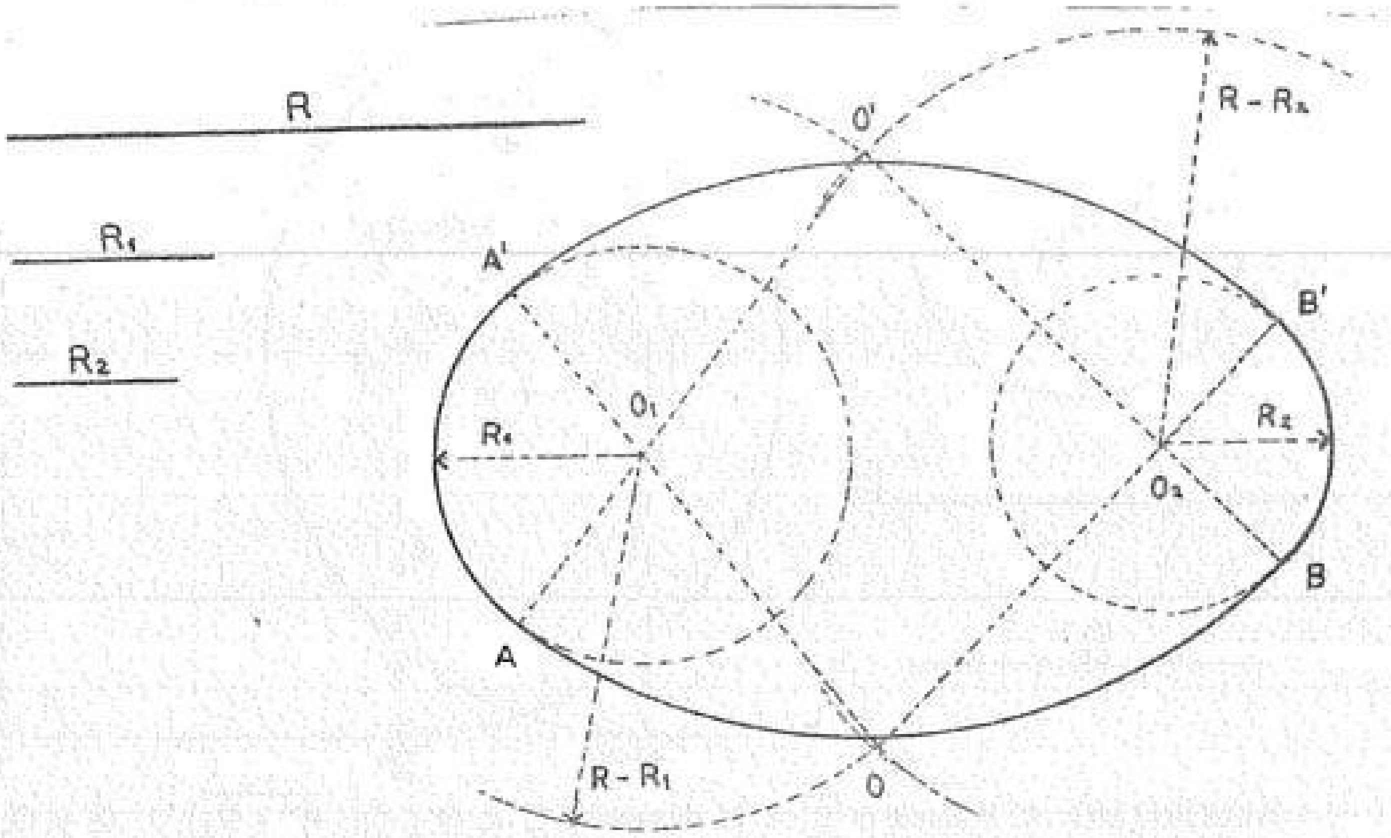
DATOS CONSTRUCCIÓN



ALGORITMO: 1. Θ [O_1, $\overline{(R_1 + R)}$]; 2. Θ[O_2, $\overline{(R + R_2)}$] ∴ O y O'; **3.** $\overline{OO_1}$ y $\overline{OO_2}$ ∴ A y B; **4.** $\overline{O'O_1}$ y $\overline{O'O_2}$ ∴ A' y B'; **5.** Θ (O, R) y (O, R)

CÍRCULO - CÍRCULO CON R INTERNAMENTE

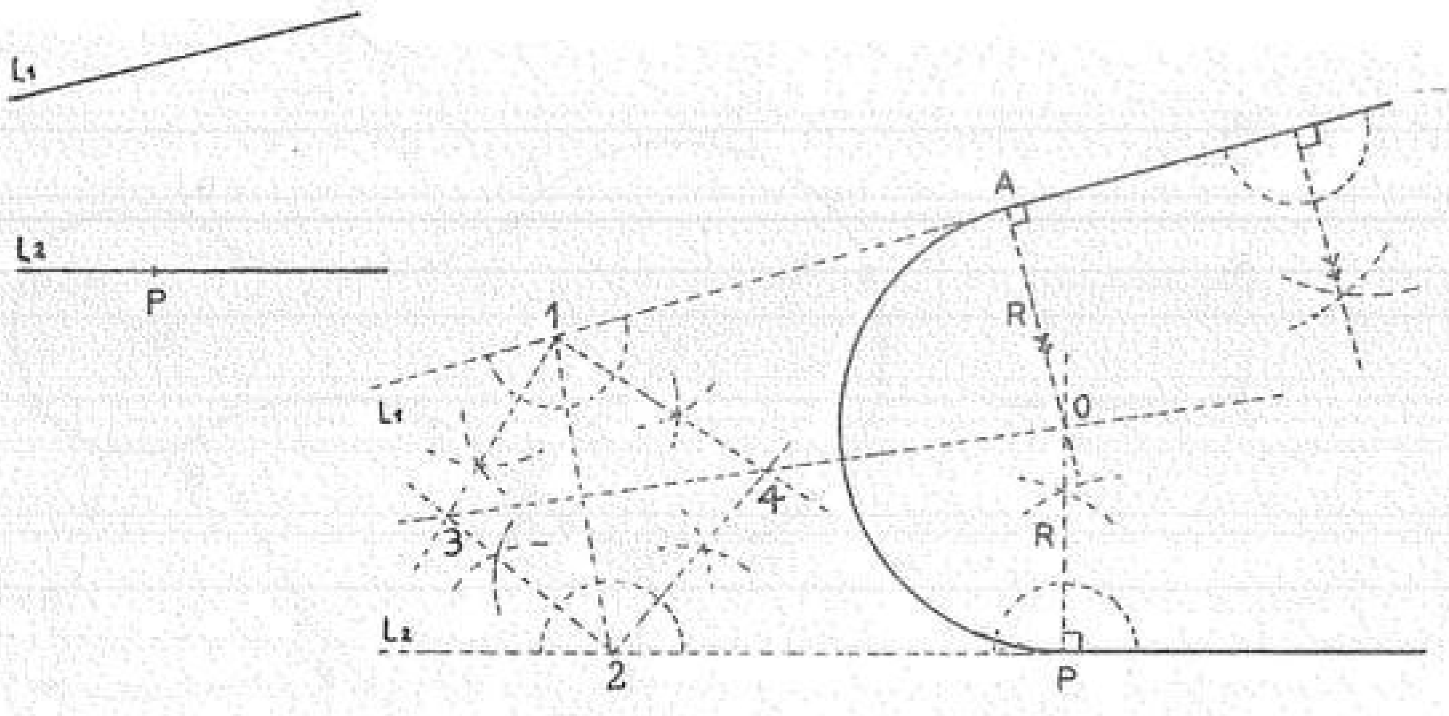
DATOS CONSTRUCCIÓN



ALGORITMO: **1.** $\Theta\ [O_1, (\overline{R - R_1})]$; **2.** $\Theta[O_2, (\overline{R - R_2})]$ $\therefore$ O y O'; **3.** $\overline{OO_1}$ y $\overline{OO_2}$ $\therefore$ A y B; **4.** $O'O_1$ y $O'O_2$ $\therefore$ A' y B'; **5.** Θ (O, R) y (O, R)

RECTA – RECTA EN P

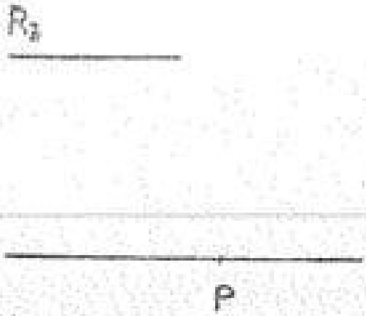
DATOS CONSTRUCCIÓN



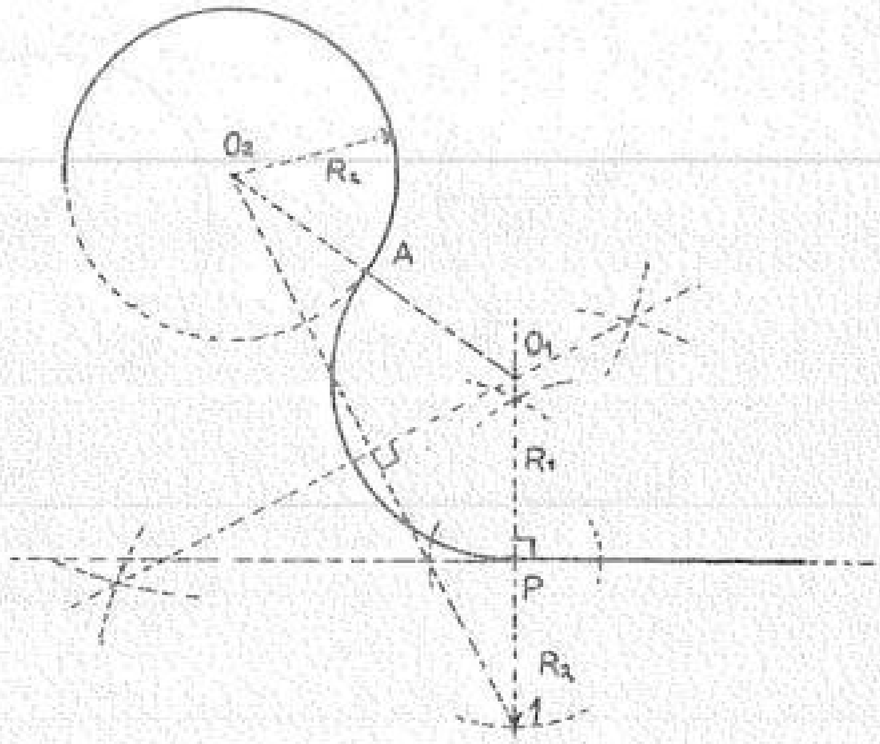
ALGORITMO: **1.** $\overline{12}$; **2.** Bisectrices de los cuatro ángulos formados $\therefore$ 3 y 4; **3.** Perpendicular en P $\therefore$ O; **4.** Perpendicular desde O a $\overline{L_1}$ $\therefore$ A; **5.** Θ (O ; R)

CÍRCULO – RECTA EN P (EXTERNAMENTE)

DATOS



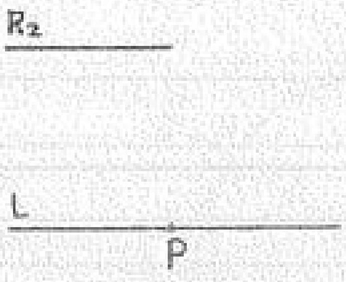
CONSTRUCCIÓN



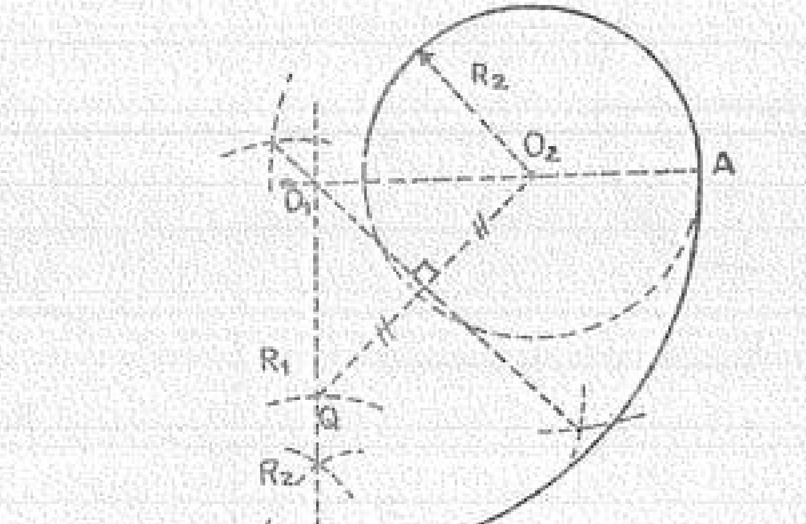
ALGORITMO: **1.** En P perpendicular; **2.** $\overline{P1} = R_2$; **3.** **4.** Mediatriz de $\overline{O_2 1}$ $\therefore$ O_1; **5.** $\overline{O_2O_1}$ $\therefore$ A; **6.** Θ (O ; OP)

CÍRCULO - RECTA EN P (INTERNAMENTE)

DATOS



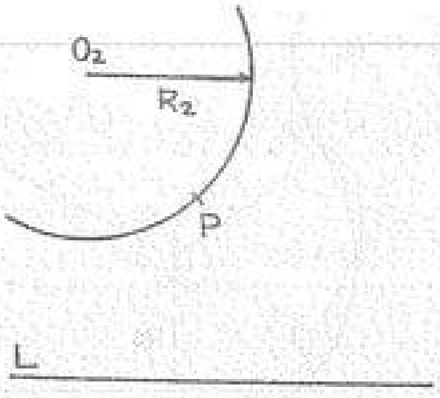
CONSTRUCCIÓN



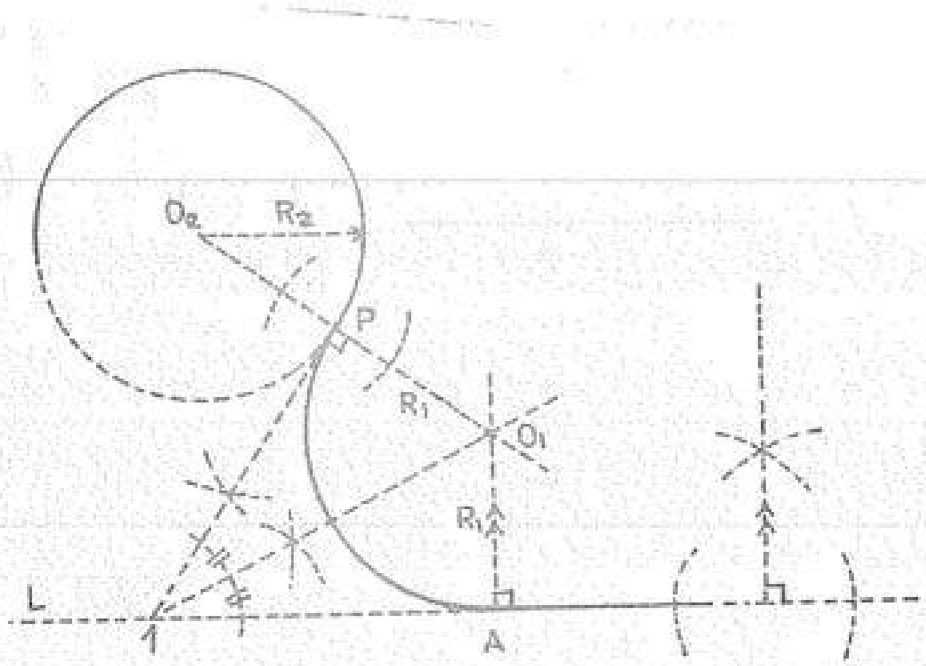
ALGORITMO: **1.** En P perpendicular; 2. $\overline{PQ} = R_2$; **3.** $\overline{O_2Q}$; **4.** Mediatriz de $\overline{O_2Q}$ $\therefore$ O_1; **5.** $\overline{O_1O_2}$ $\therefore$ A; 6. Θ (O ; OP)

RECTA - CÍRCULO EN P (EXTERNAMENTE)

DATOS



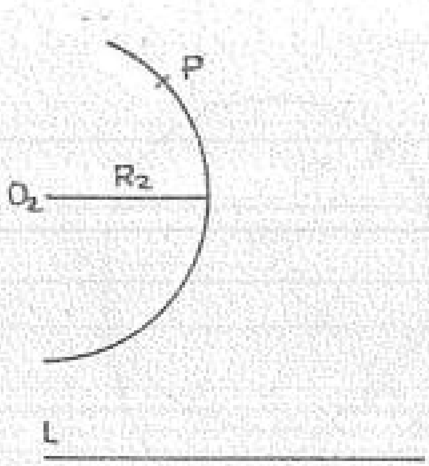
CONSTRUCCIÓN



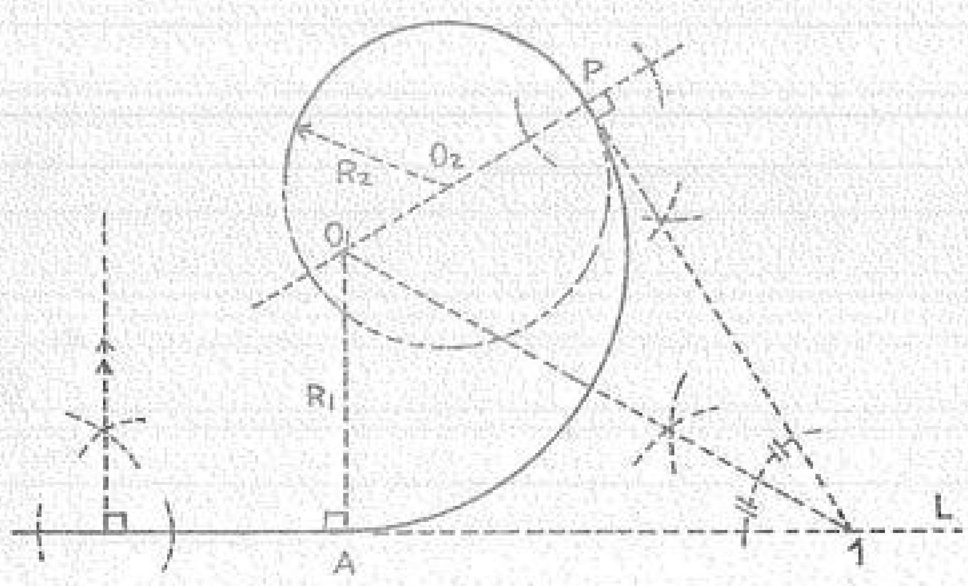
ALGORITMO: **1.** $\overline{O_2P}$; **2.** Tangente en P ∴ 1; **3.** Bisectriz del $\hat{1}$ ∴ O_1; **4.** Desde O_1 perpendicular a $\overline{L}$ ∴ A; **5.** ⊙ (O_1 ; $\overline{O_1P}$)

RECTA - CÍRCULO EN P (INTERNAMENTE)

DATOS



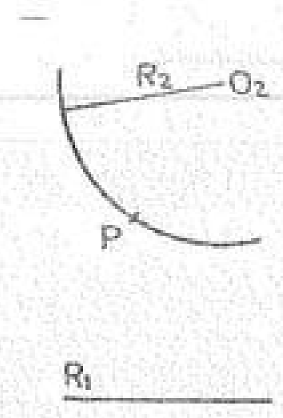
CONSTRUCCIÓN



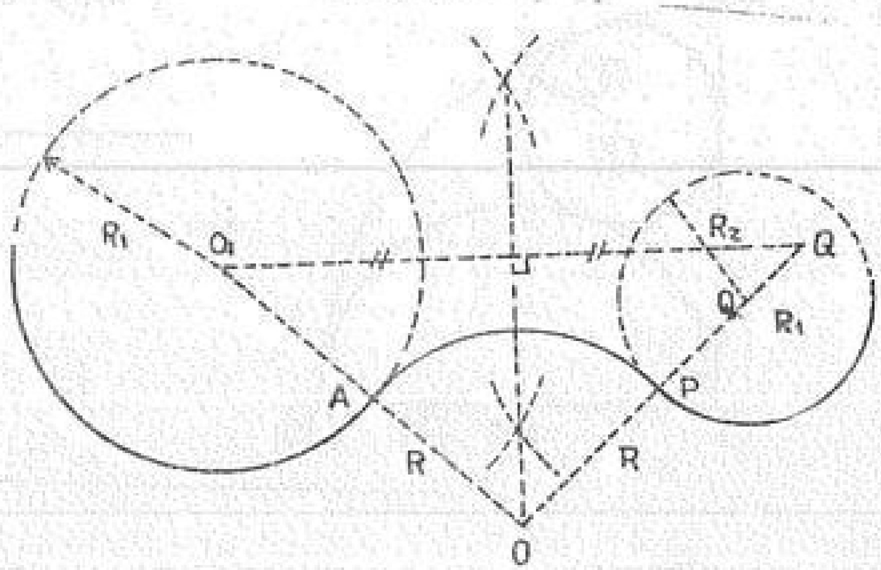
ALGORITMO: **1.** $\overline{O_2P}$; **2.** Tangente en P ∴ 1; **3.** Bisectriz del $\hat{1}$ ∴ O_1; **4.** Desde O_1 perpendicular a $\overline{L}$ ∴ A; **5.** ⊙ (O_1 ; $\overline{O_1P}$)

CÍRCULO - CÍRCULO EN P (EXTERNAMENTE)

DATOS



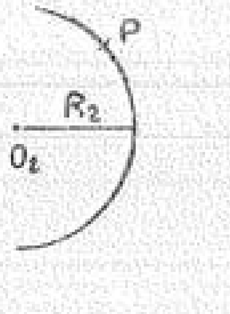
CONSTRUCCIÓN



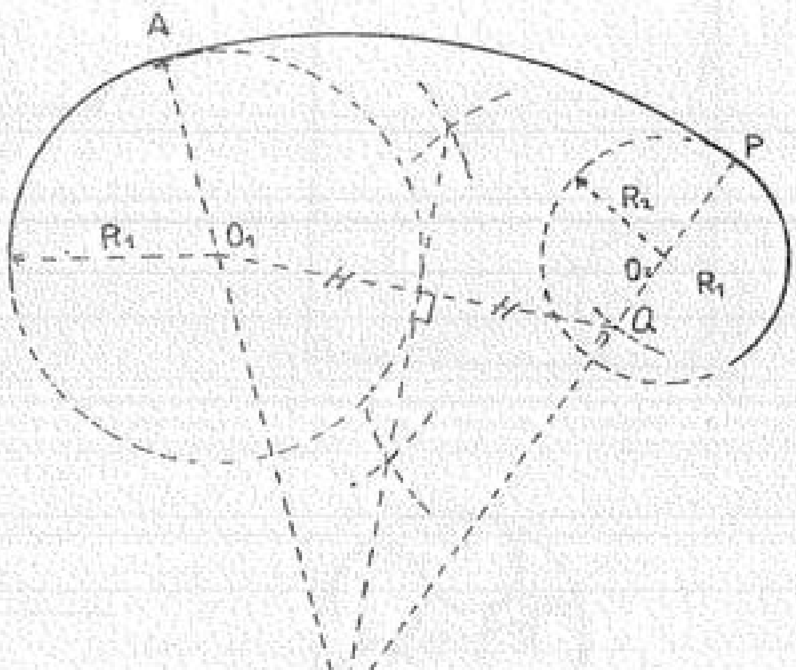
ALGORITMO: **1.** $\overline{PQ} = R_1$; **2.** $\overline{QO_1}$; **3.** Mediatriz de $\overline{QO_1} \therefore$ O; **4.** $\overline{OO_1} \therefore$ A; **5.** $\odot$ (O , $\overline{OP}$)

CÍRCULO - CÍRCULO EN P (INTERNAMENTE)

DATOS



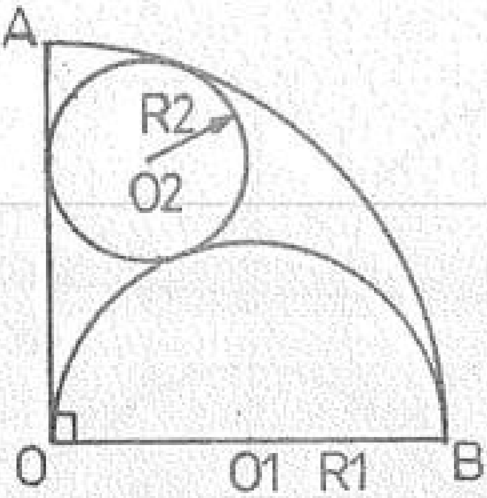
CONSTRUCCIÓN



ALGORITMO: **1.** $\overline{PQ} = R_1$; **2.** $\overline{QO_1}$; **3.** Mediatriz de $\overline{QO_1} \therefore$ O; **4.** $\overline{OO_1} \therefore$ A; **5.** $\odot$ (O , $\overline{OP}$)

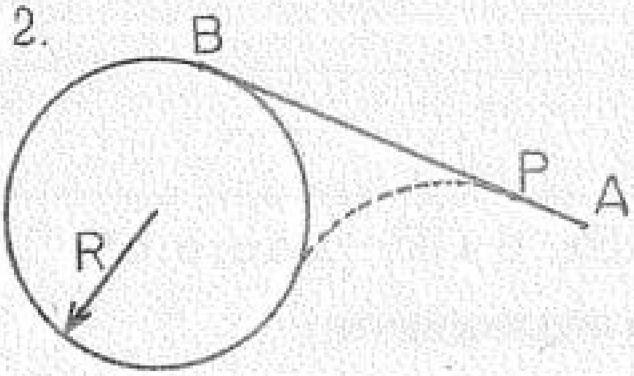
10.11. REPRODUCIR LOS SIGUIENTES GRÁFICOS

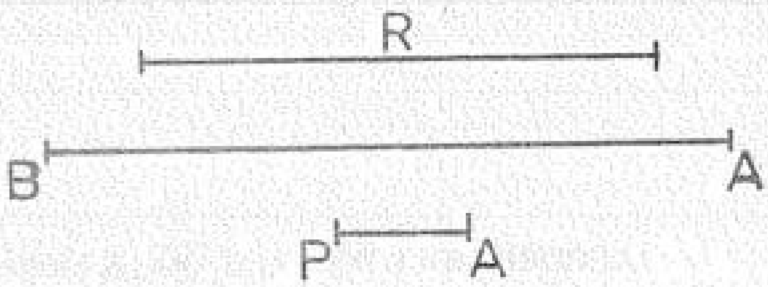
1.



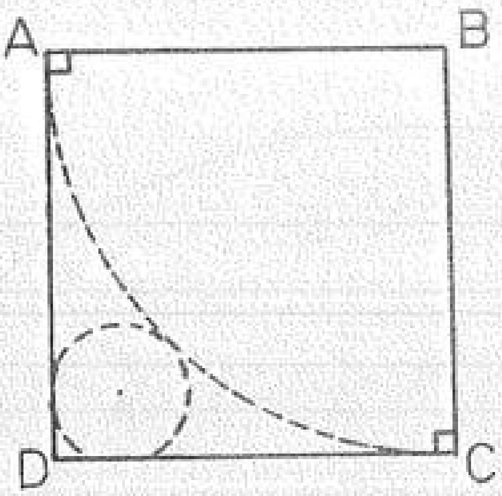
OA = OB = a

2.



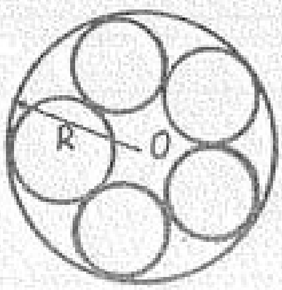


3.

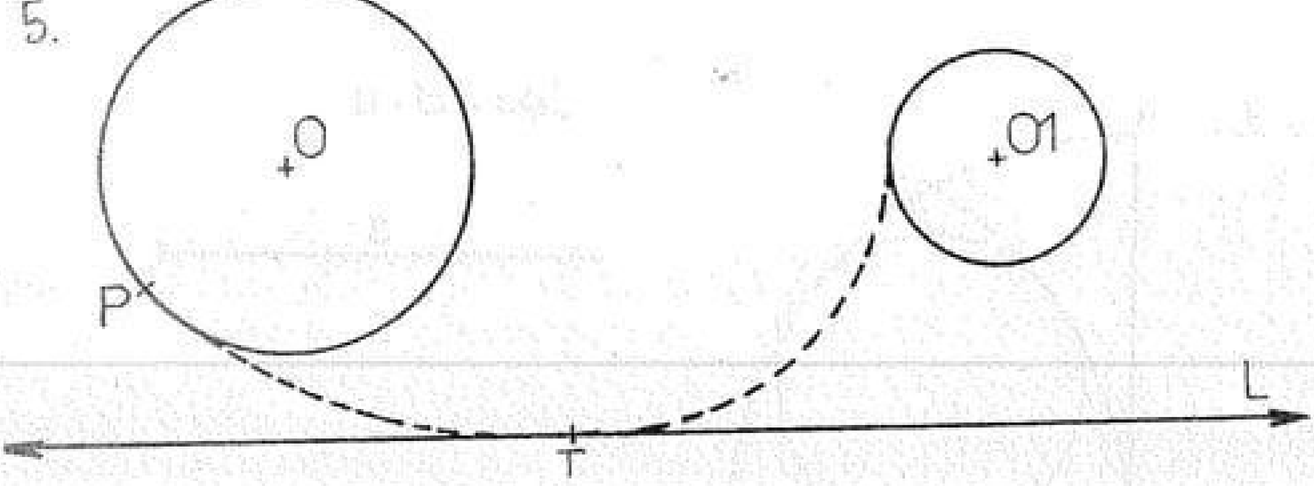


AB = BC = CD = DA = m

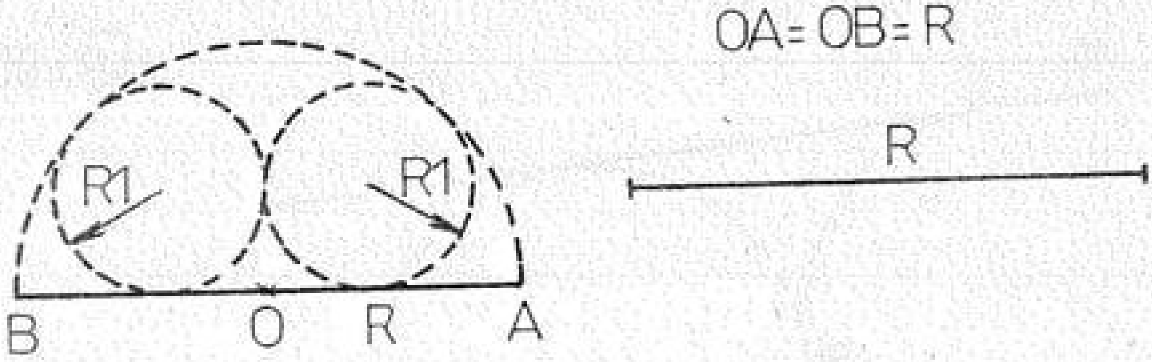
4.



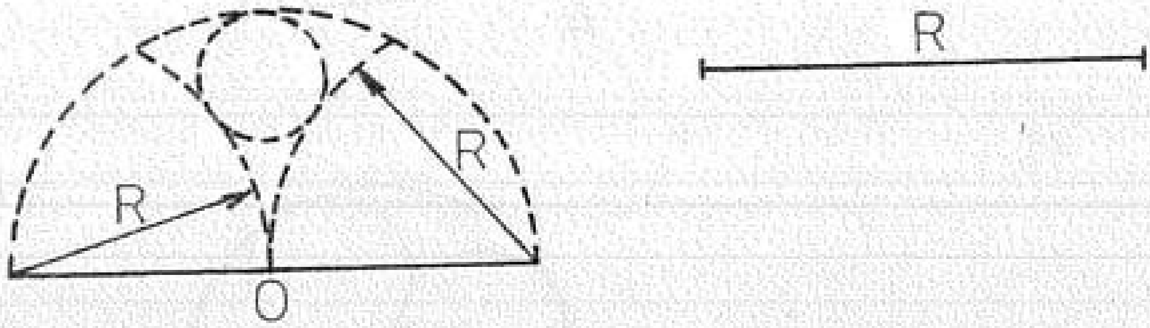
5.



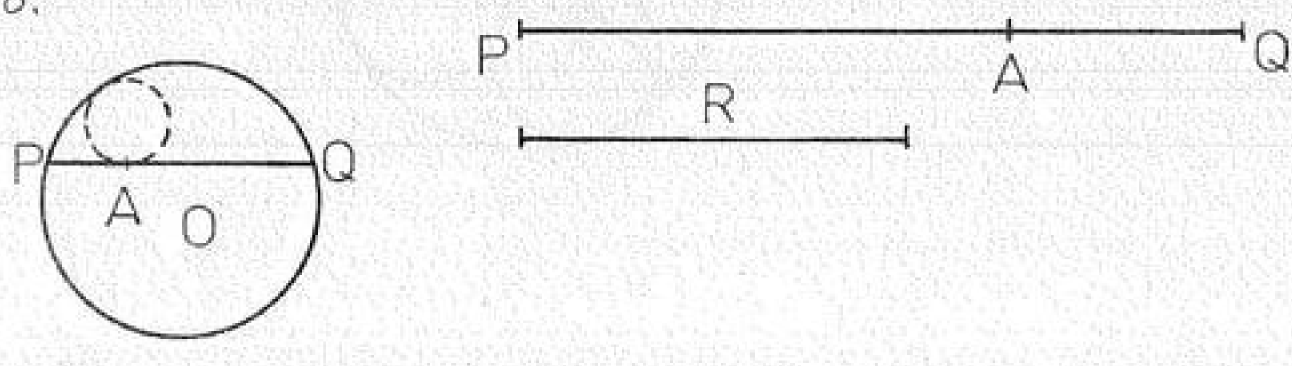
6.



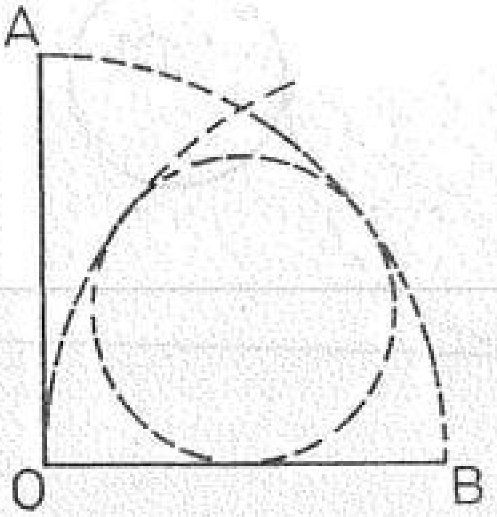
7.



8.

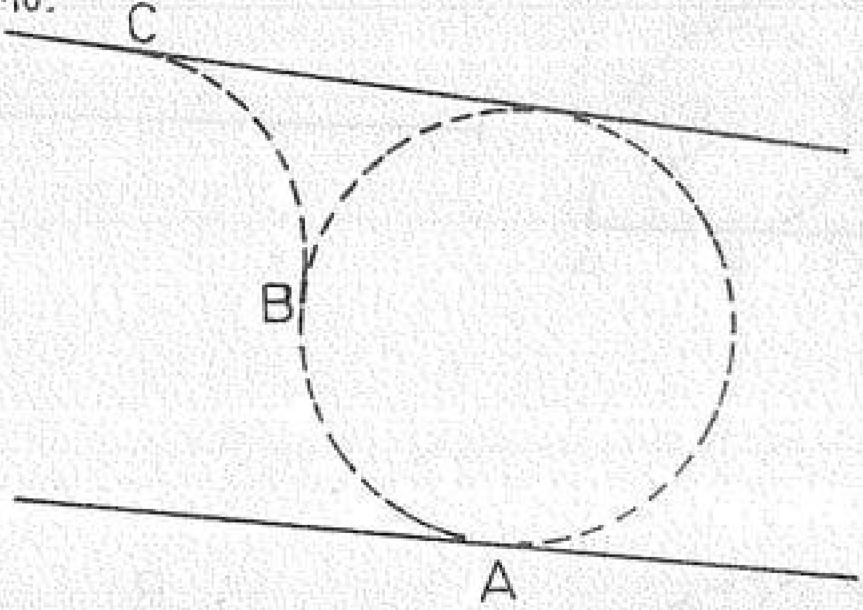


9.



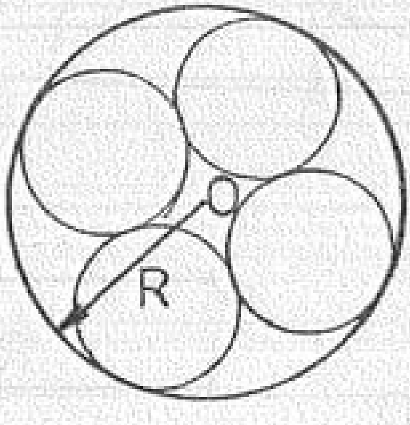
$OA = OB = a$

10.

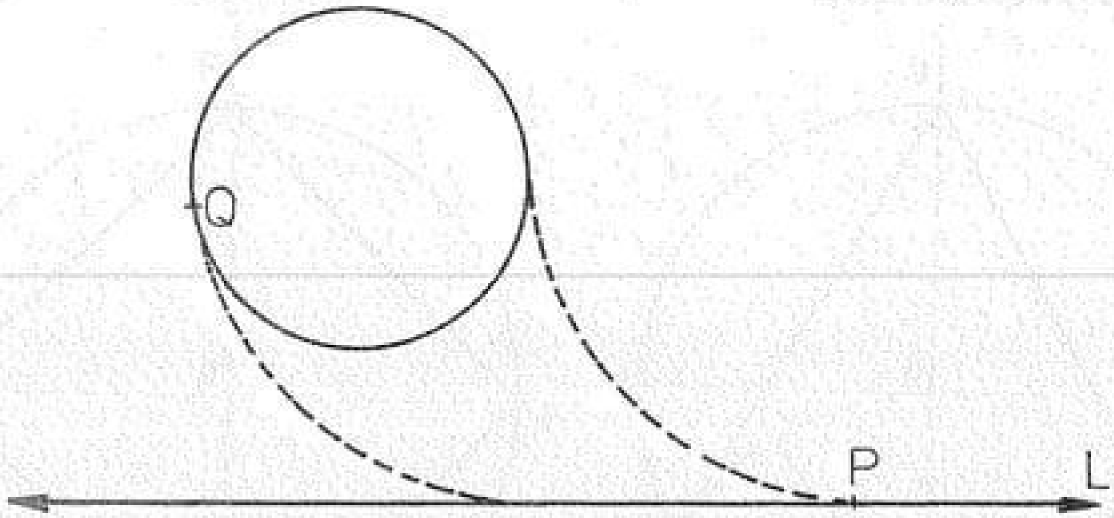


$\widehat{AB} = 90°$

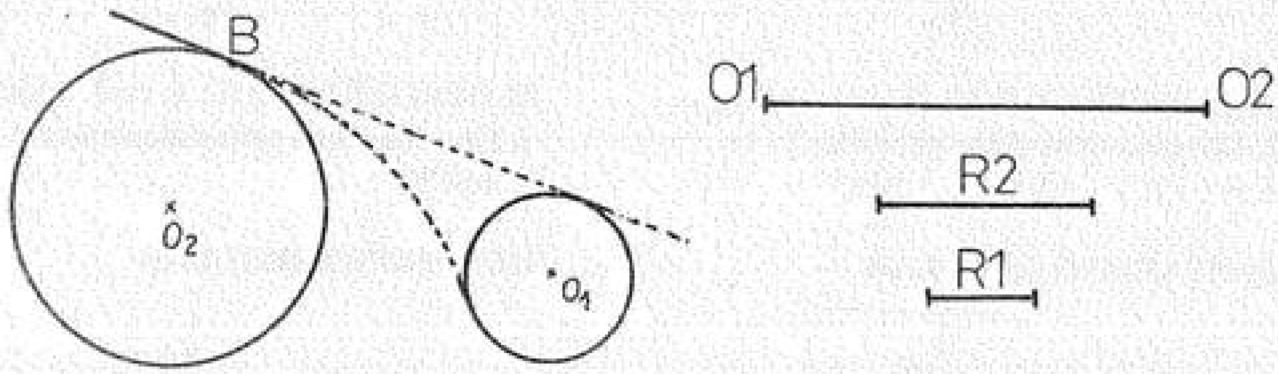
11.



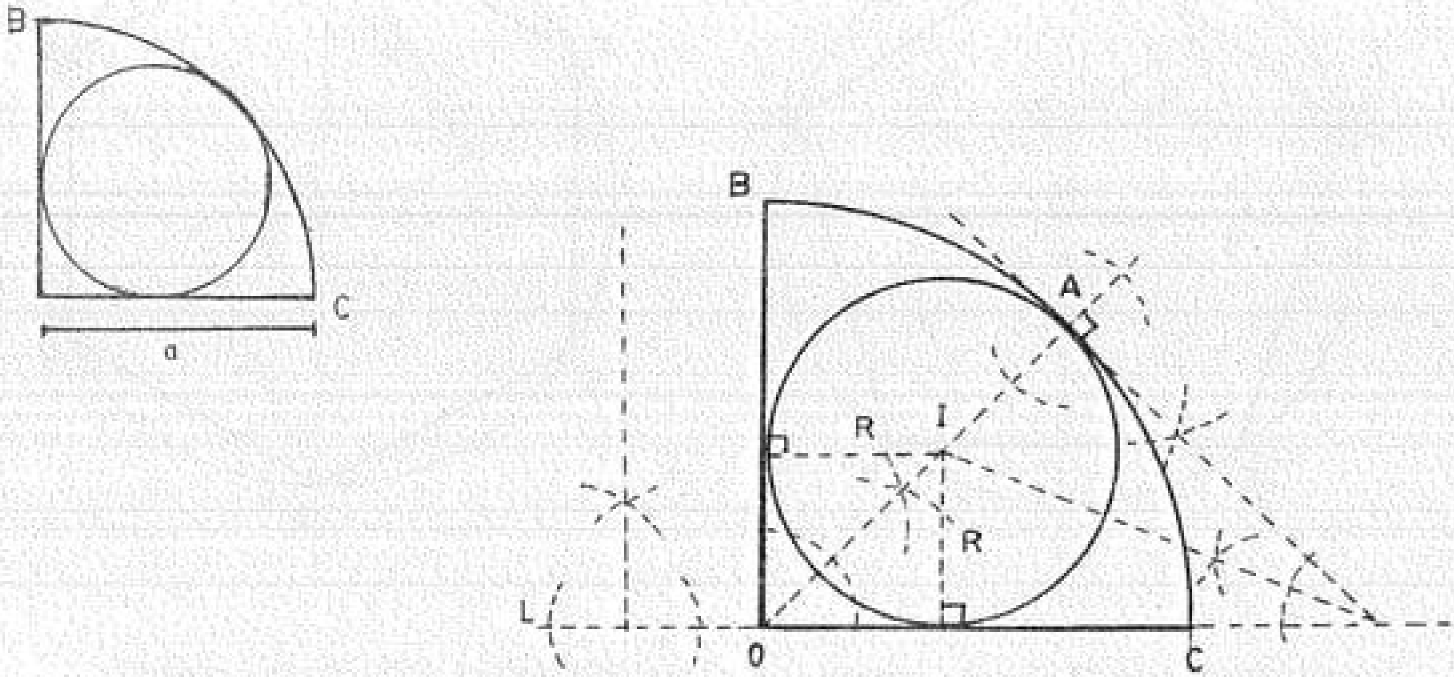
12.



13.

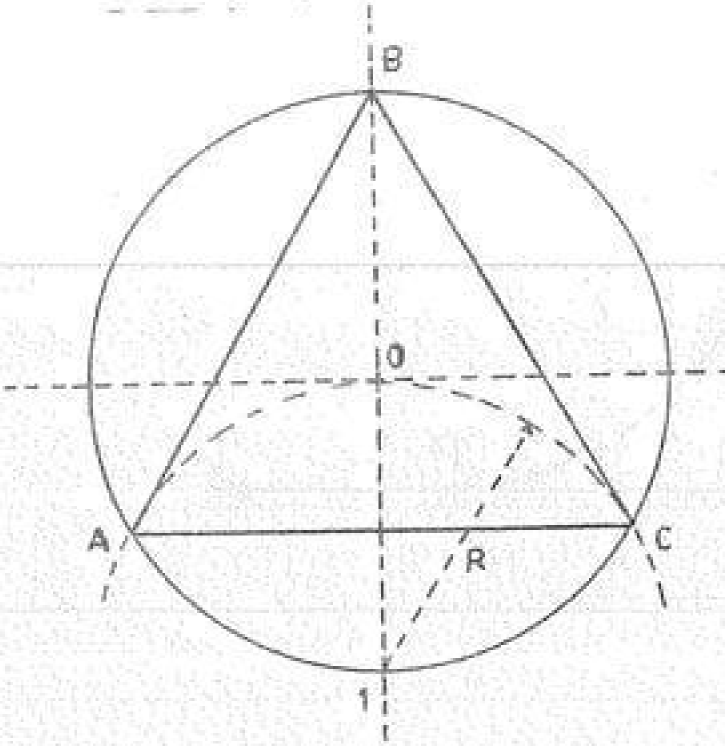


9.



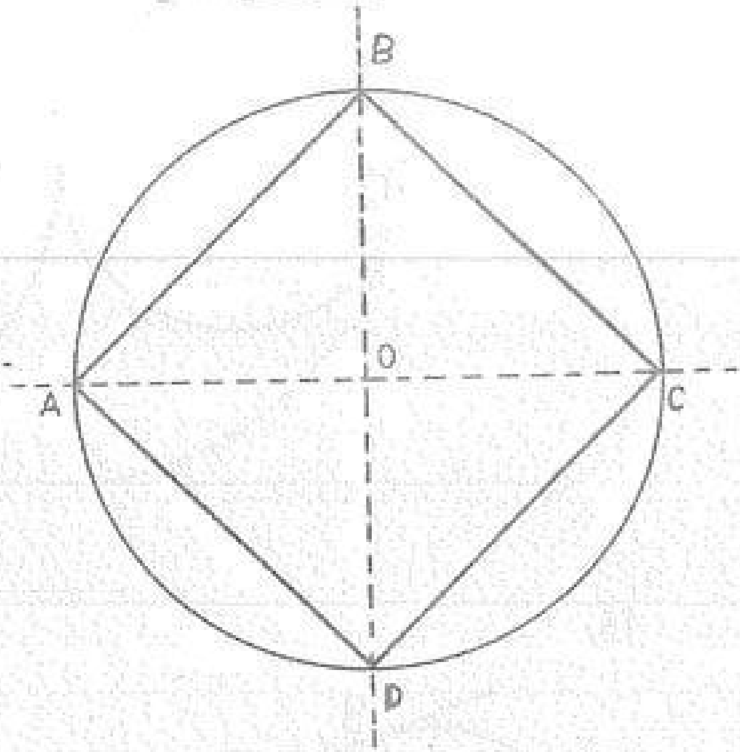
11. POLÍGONOS Y CUADRILÁTEROS

TRIÁNGULO EQUILÁTERO



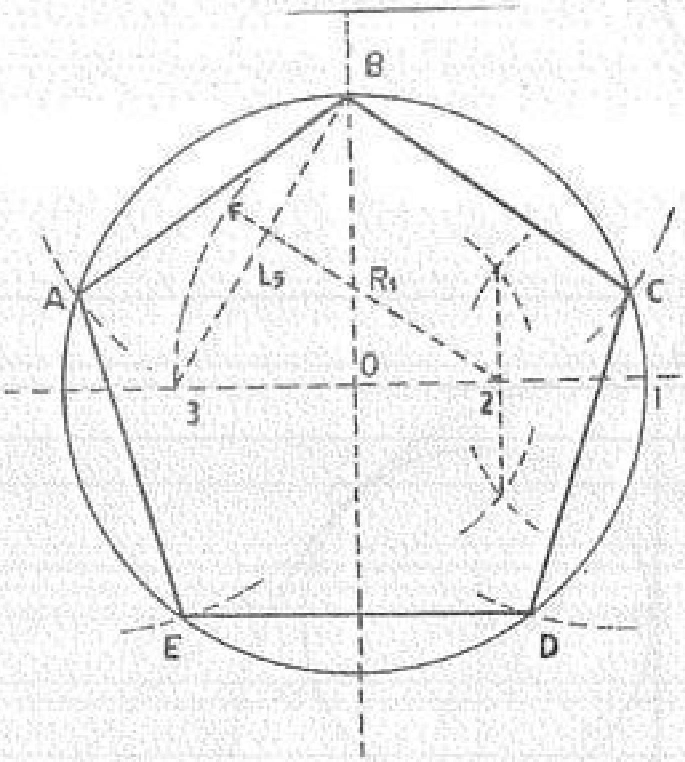
ALGORITMO: **1.** Θ (O, R cual quiera);
2. Dos diámetros perpendiculares ∴ 1;
3. Θ (1,R) ∴ A y C; **4.** ABC

CUADRADO



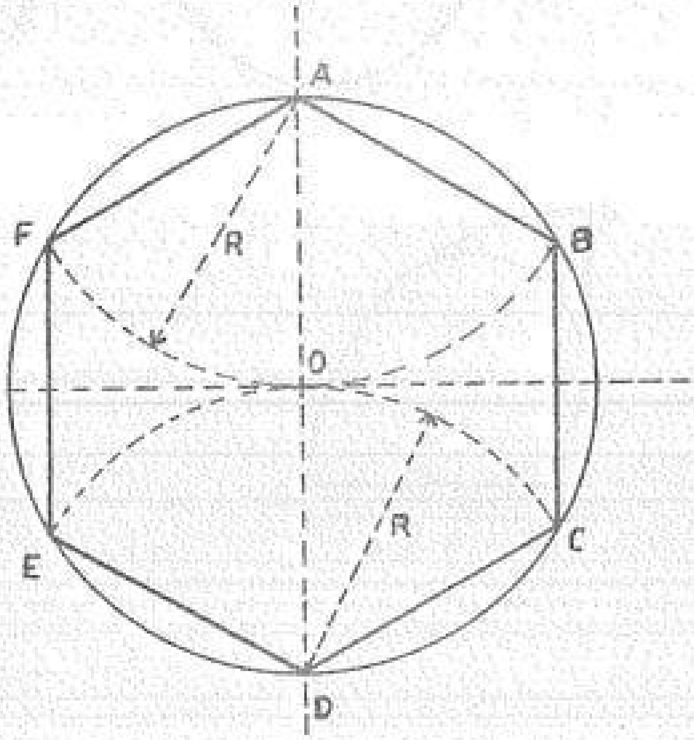
ALGORITMO: **1.** Θ (O, R cual quiera);
2. Dos diámetros perpendiculares ∴ A, B, C, D;
3. ABCD

PENTÁGONO REGULAR



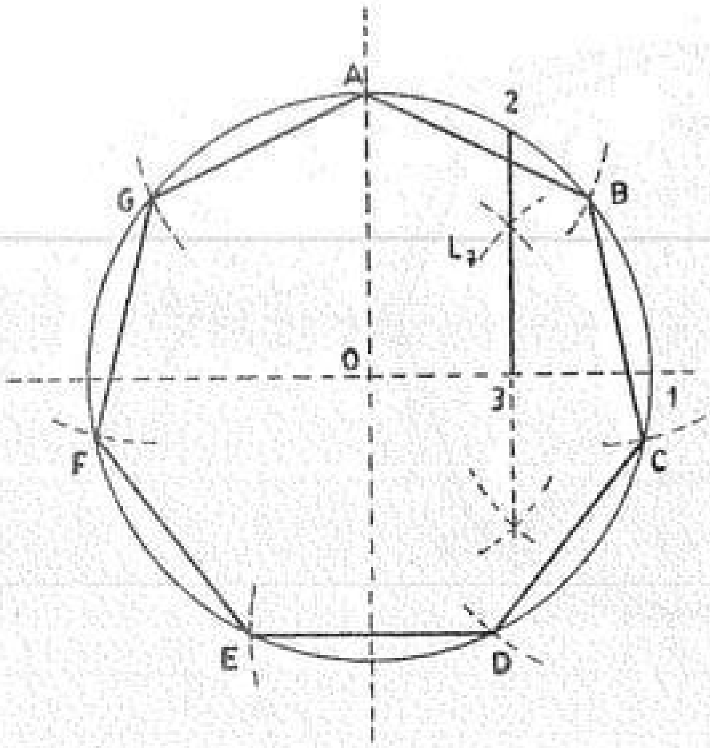
ALGORITMO: **1.** Θ (O, R cual quiera);
2. Dos diámetros perpendiculares ∴ 1;
3. Mediatriz de $\overline{O1}$ ∴ 2; **4.** Θ (2 , $\overline{2B}$) ∴ 3;
5. $\overline{B3} = L_5$; **6.** ABCDE

HEXÁGONO REGULAR



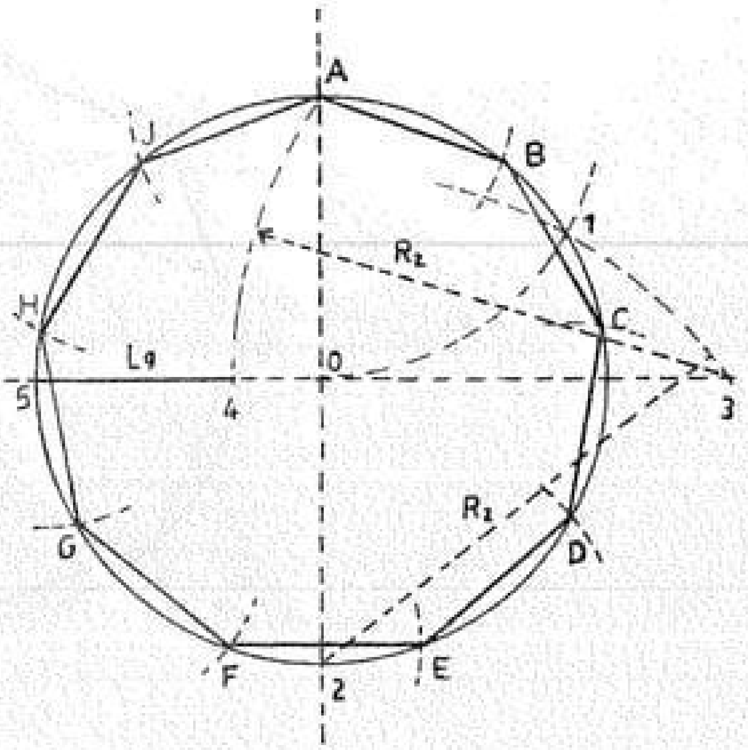
ALGORITMO: **1.** Θ (O, R cual quiera);
2. Dos diámetros perpendiculares ∴ A y D;
3. Θ(A,R) ∴ F y B; **4.** Θ (D,R) ∴ E y C;
5. ABCDEF

HEPTÁGONO REGULAR



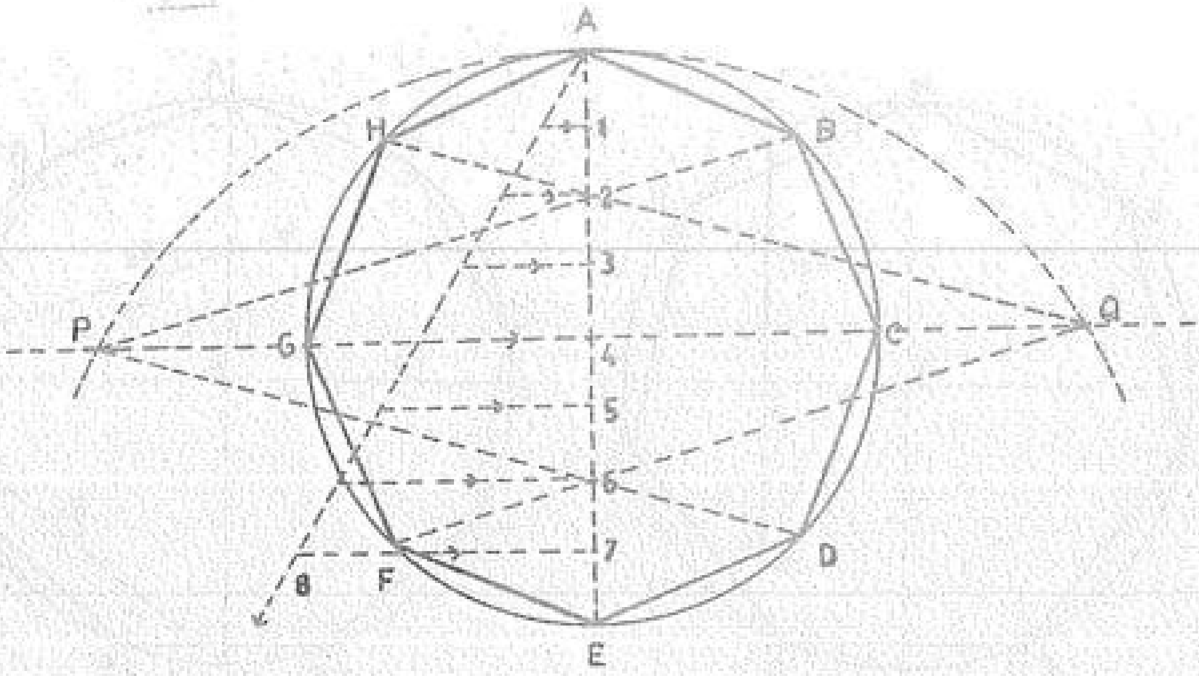
ALGORITMO: **1.** Θ (O, R cual quiera);
2. Dos diámetros perpendiculares $\therefore$ 1 y A;
3. Mediatriz de $\overline{O1}$ $\therefore$ 3 y 2; **4.** $\overline{23} = L_7$;
5.ABCDEFG

NONÁGONO REGULAR



ALGORITMO: **1.** Θ (O, R cual quiera);
2. Dos diámetros perpendiculares $\therefore$ 2 y A;
3. Θ (A,R) $\therefore$ 1; **4.** Θ (2,$\overline{21}$) $\therefore$ 3
5. Θ (3,$\overline{3A}$) $\therefore$ 4; **6.** $\overline{54} = L_9$
7. ABCDEFGHJ

POLÍGONO REGULAR DE "n" lADOS



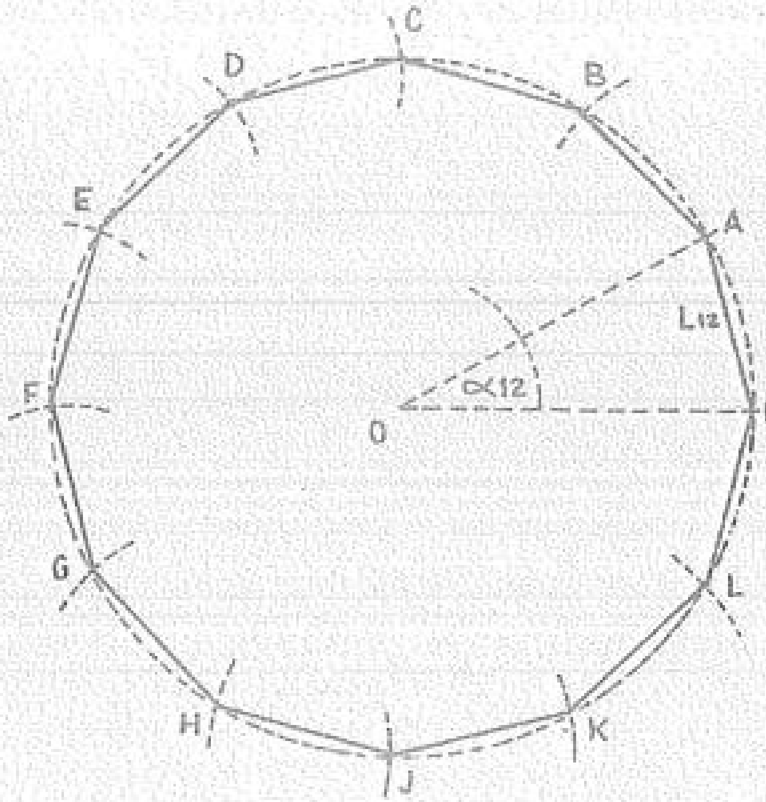
ALGORITMO: 1. Θ (O; R cual quiera); 2. Dos diámetros perpendiculares ∴ E y A; 3. (E;$\overline{AE}$) ∴ P y Q; 4. Dividir $\overline{AE}$ en "n" (8) partes iguales; 5. P y Q con 2,4,6 ∴ B, C, D,F, G,H; 6. ABCDEFGH

POLÍGONO REGULAR DE "n" lADOS

$\alpha n = \frac{360}{n}$

$\alpha n = \frac{360}{12}$

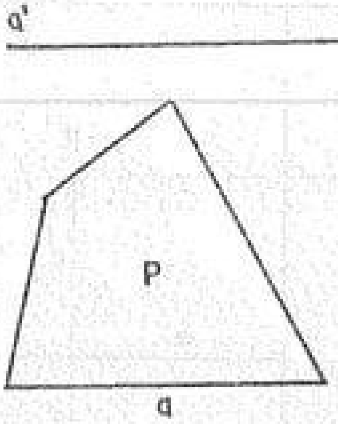
$\alpha n = 30°$



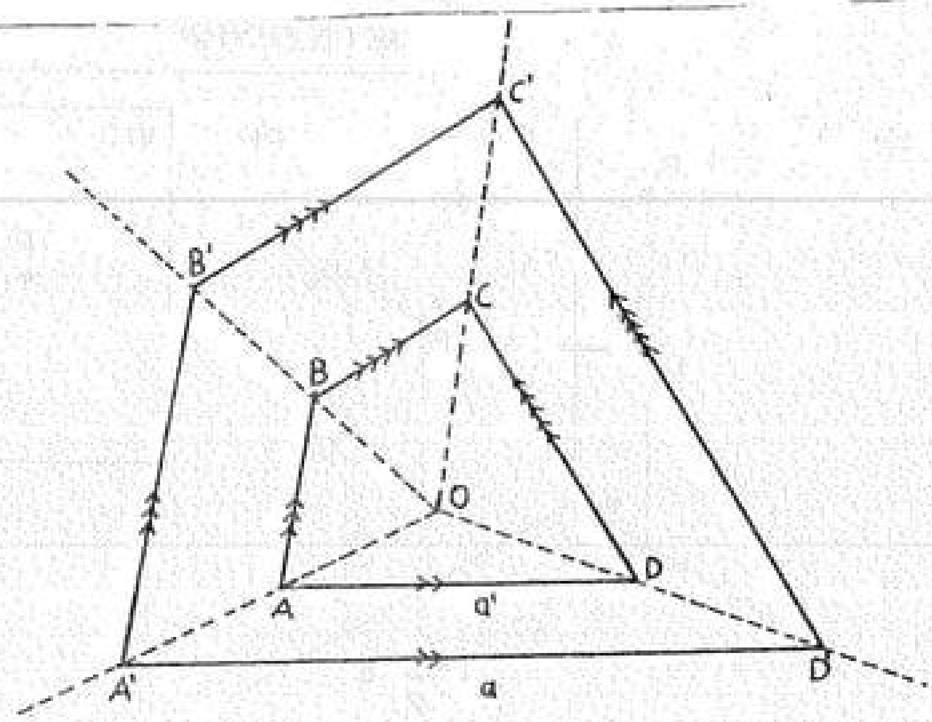
ALGORITMO: 1. Θ (O, R cual quiera) ; 2. $\alpha n = 360° / n = 30°$ ∴ $\overline{AM}$ = L_{12} 3. ABCDEFGHJKLM

POLÍGONO SEMEJANTE A OTRO DADO EL LADO HOMÓLOGO

DATOS



CONSTRUCCIÓN



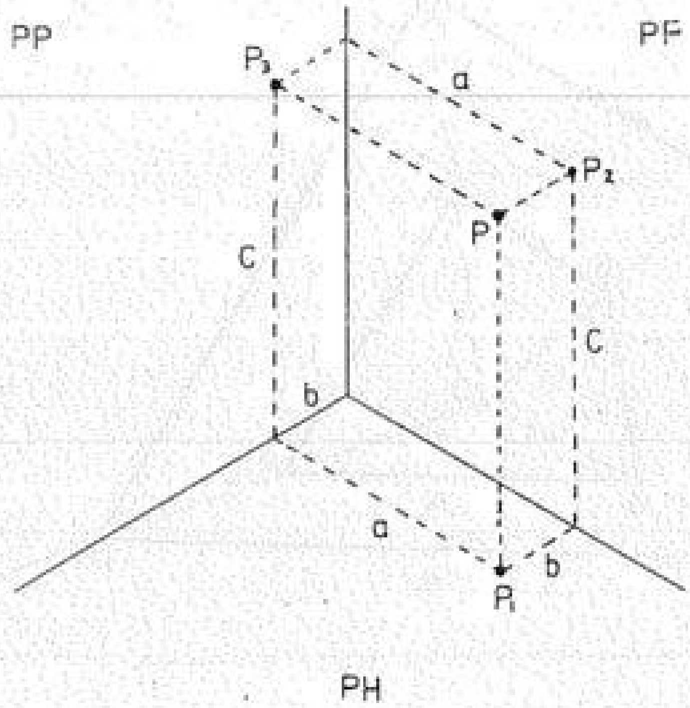
ALGORITMO: 1. ABCD; 2. Punto O cualquiera; 3. $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$, $\overline{OA}$; 4. $\overline{A'D'} \parallel \overline{AD}$, $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$, $\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$, $\overline{C'D'} \parallel \overline{CD}$; 5. A'B' C'D'

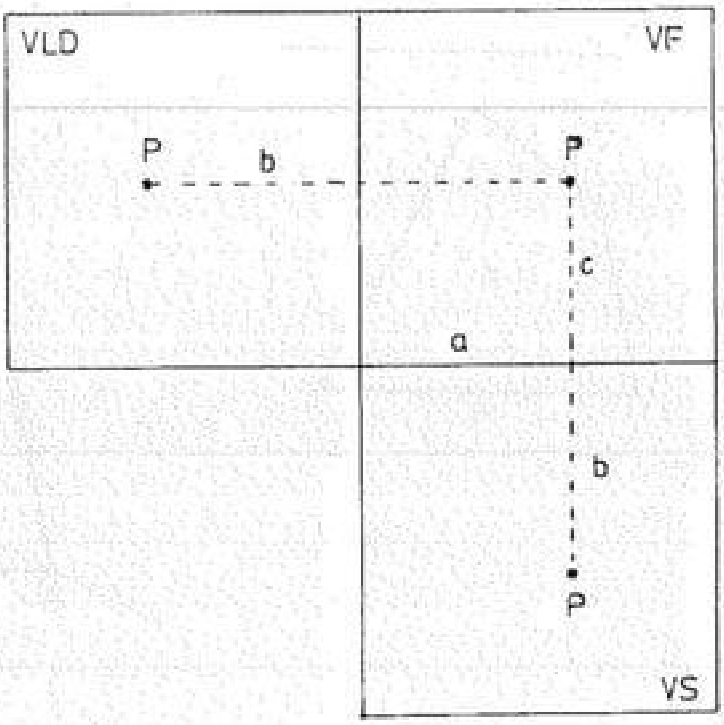
11. 1. EJERCICIOS

1. Construir el trapecio isósceles A B C D, si se conoce la base mayor AD, la base menor BC y la diagonal AC perpendicular al lado no paralelo CD.
2. Construir un heptágono regular dado el lado
3. Dibujar un cuadrilátero semejante al dado, cuya superficie sea la novena parte del primero.
4. Construir un eptágono regular si se conoce la apotema.
5. Construir un polígono regular si se conoce: suma de los ángulos internos igual a 900° y el lado del polígono.
6. Construir el trapecio A B C D, si se conoce la base mayor AD = b y AB= BC = CD = a.
7. Construir el pentágono regular, dado el perímetro.
8. Construir un polígono regular de 9 lados, inscrito en un círculo de radio dado.
9. Construir el cuadrilátero A B C D dados: a, c, d.

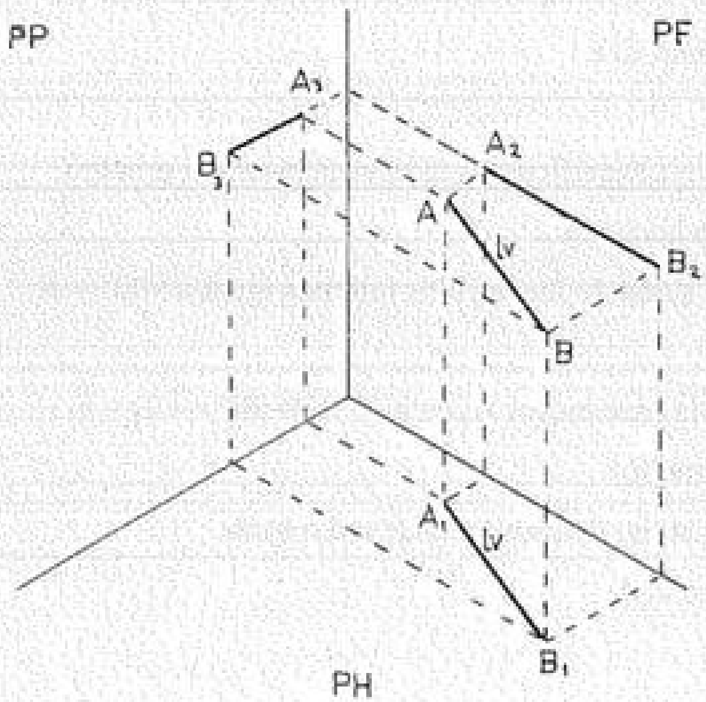
12. PROYECCIONES ORTOGONALES

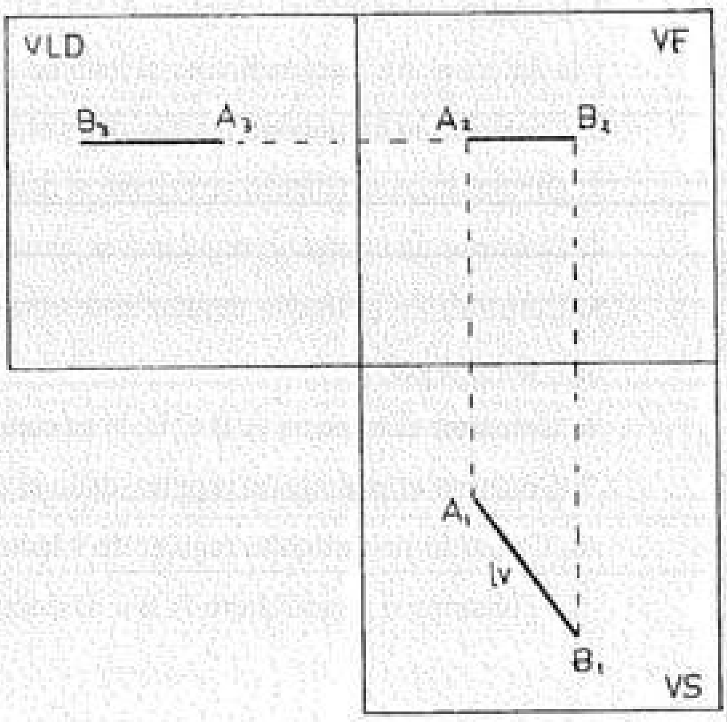
DE UN PUNTO



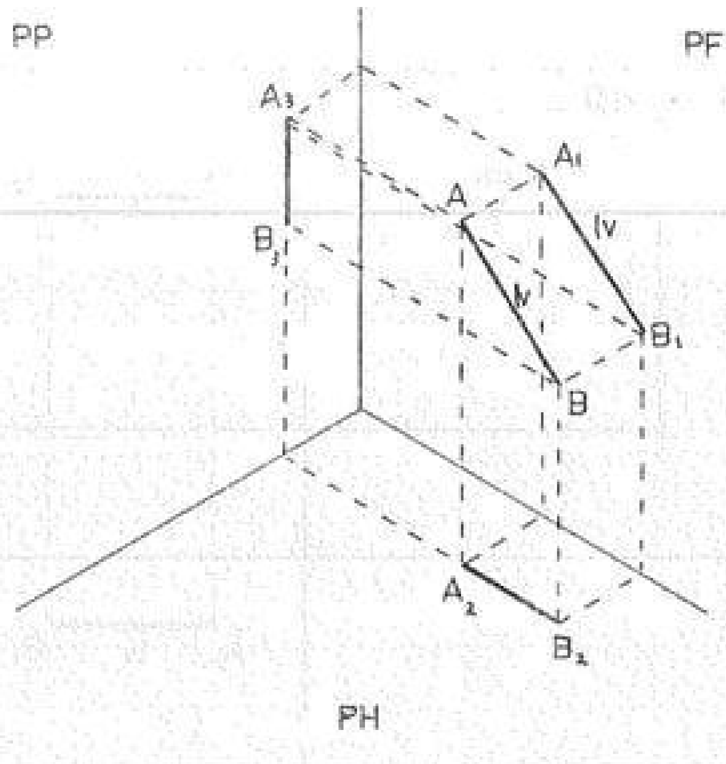


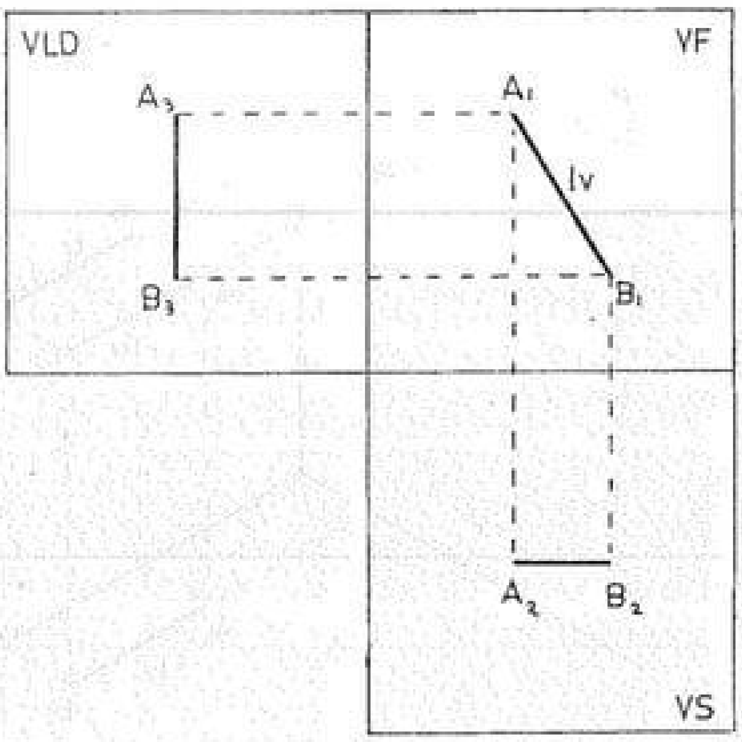
SEGMENTO HORIZONTAL



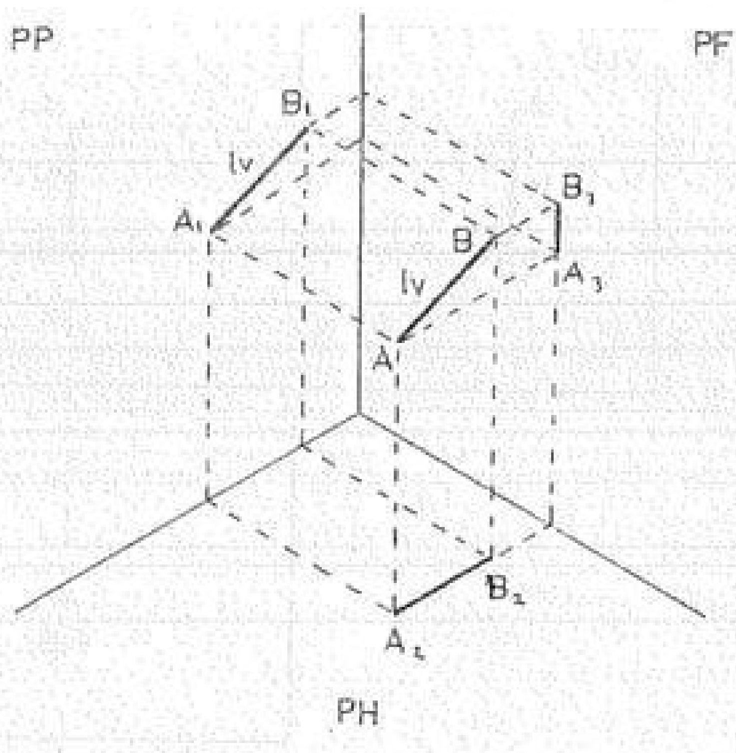


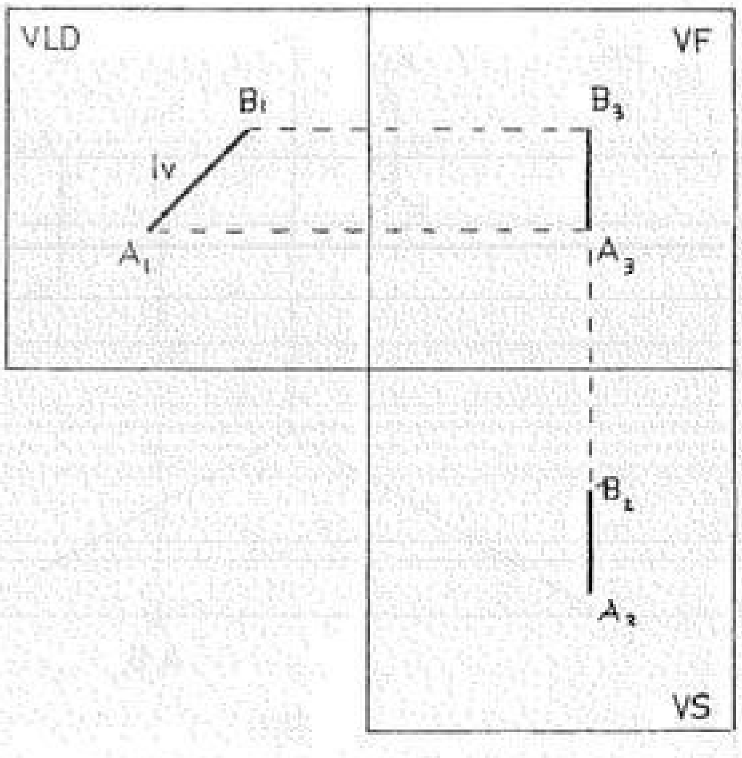
SEGMENTO FRONTAL



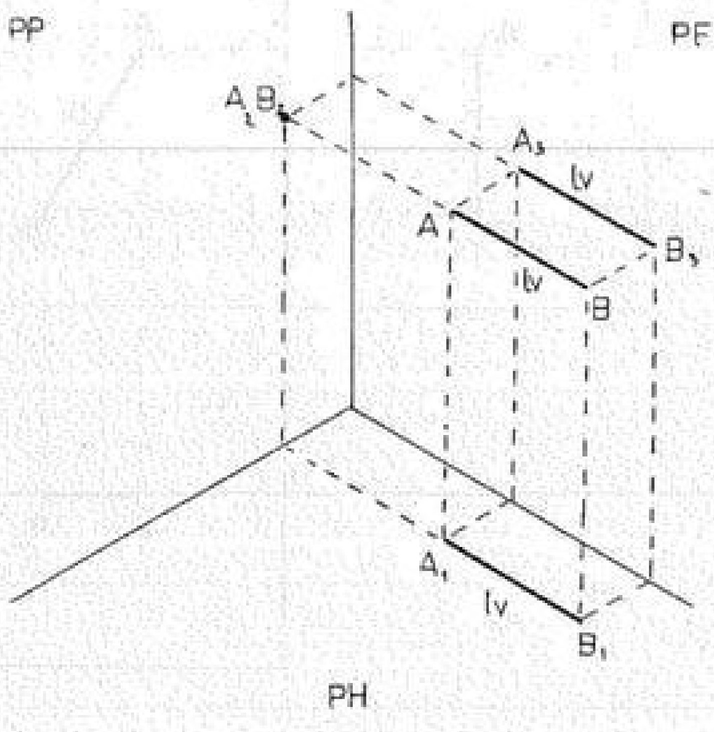


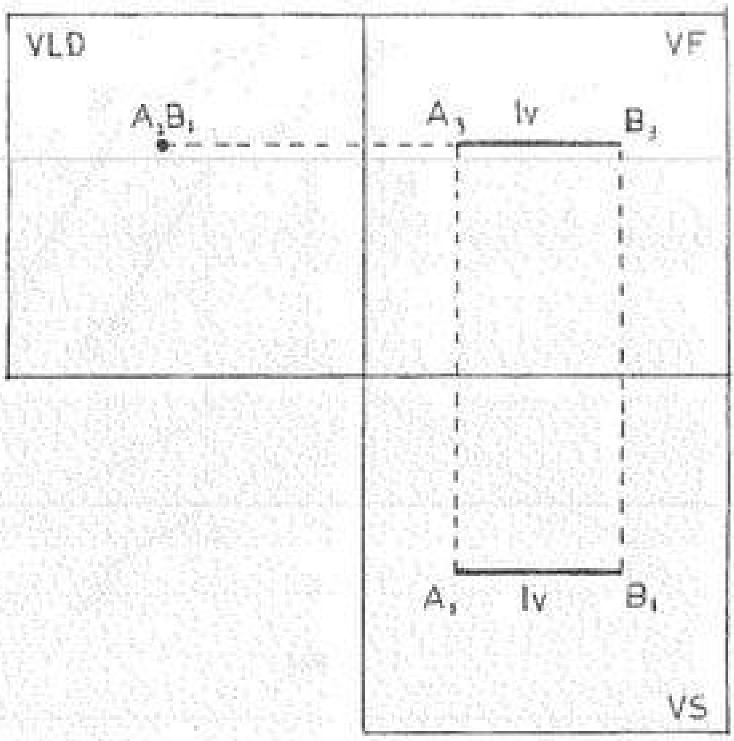
SEGMENTO DE PERFIL



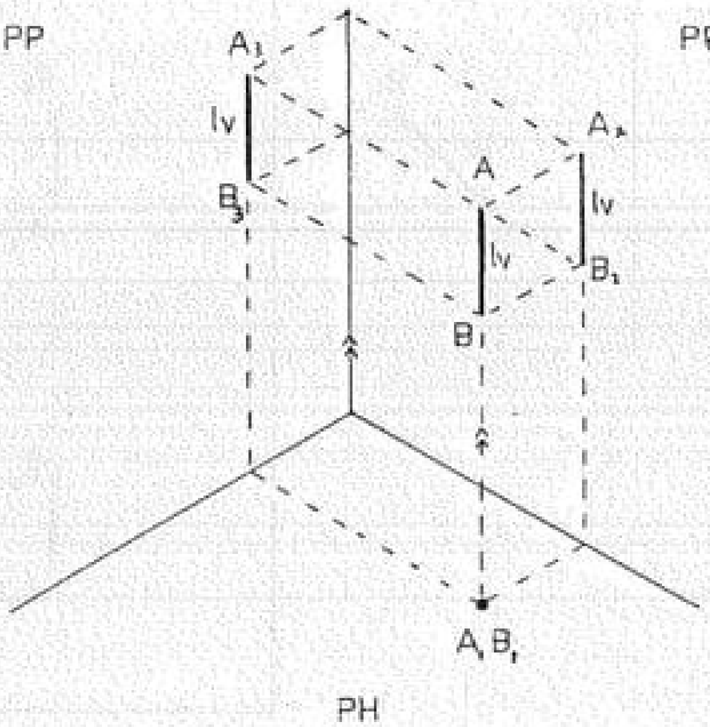


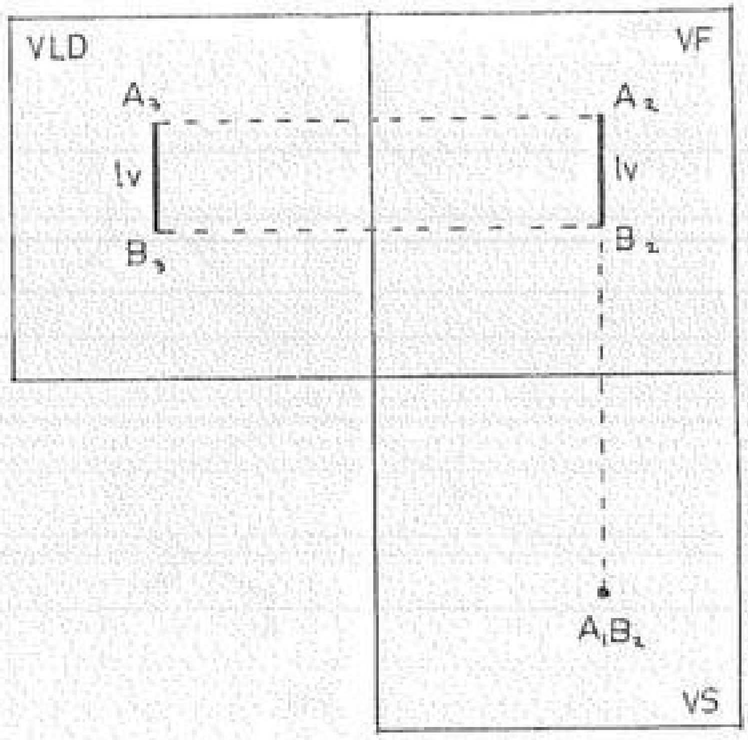
SEGMENTO FRONTAL HORIZONTAL



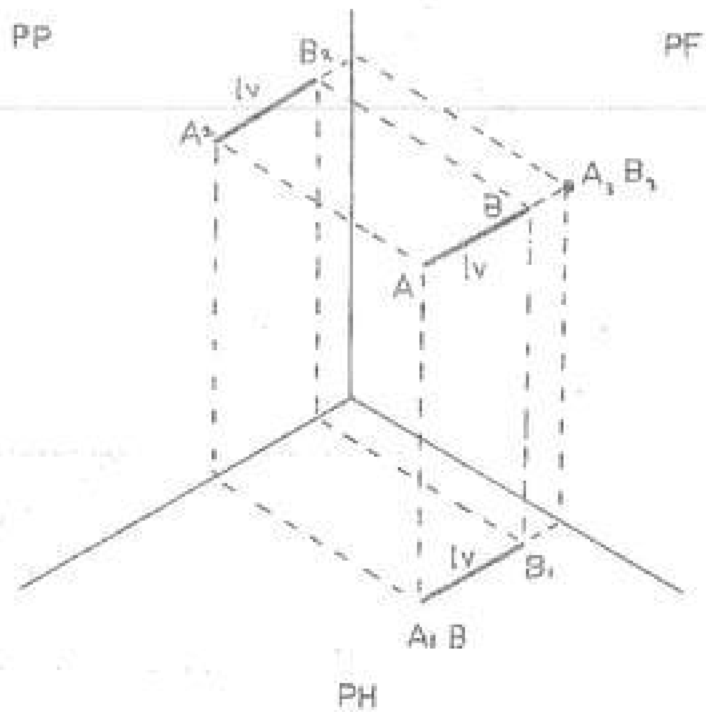


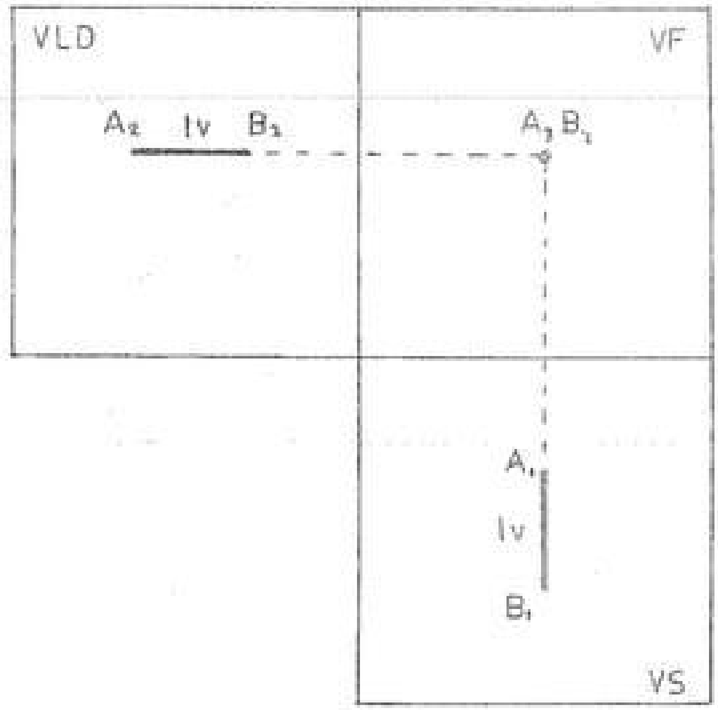
SEGMENTO FRONTAL DE PERFIL



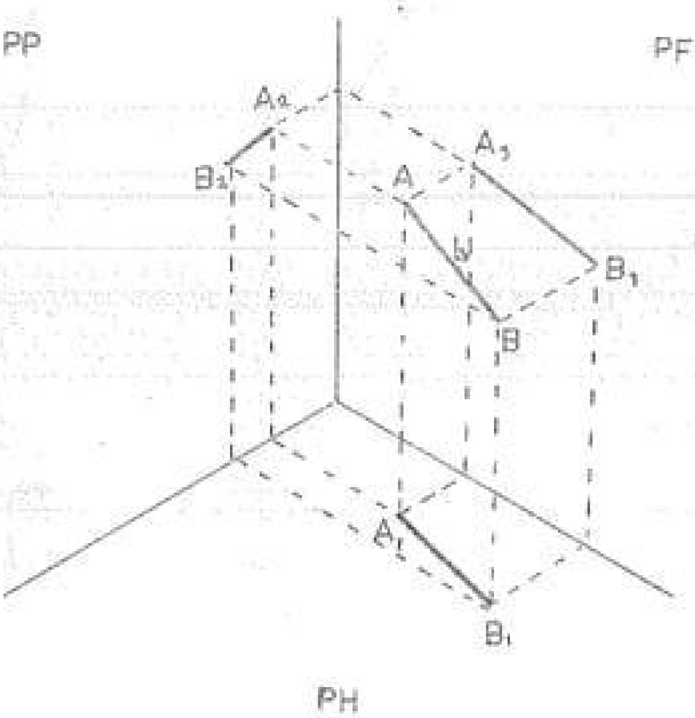


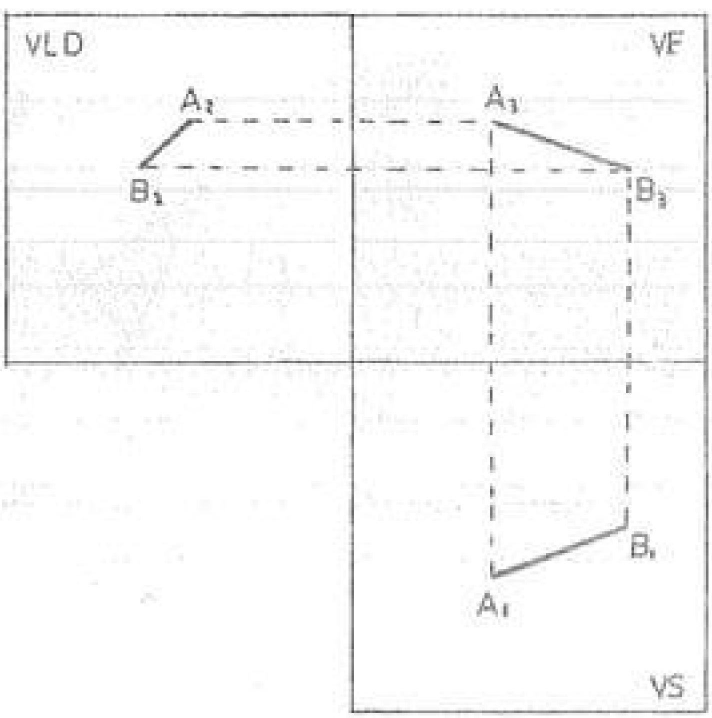
SEGMENTO HORIZONTAL DE PERFIL



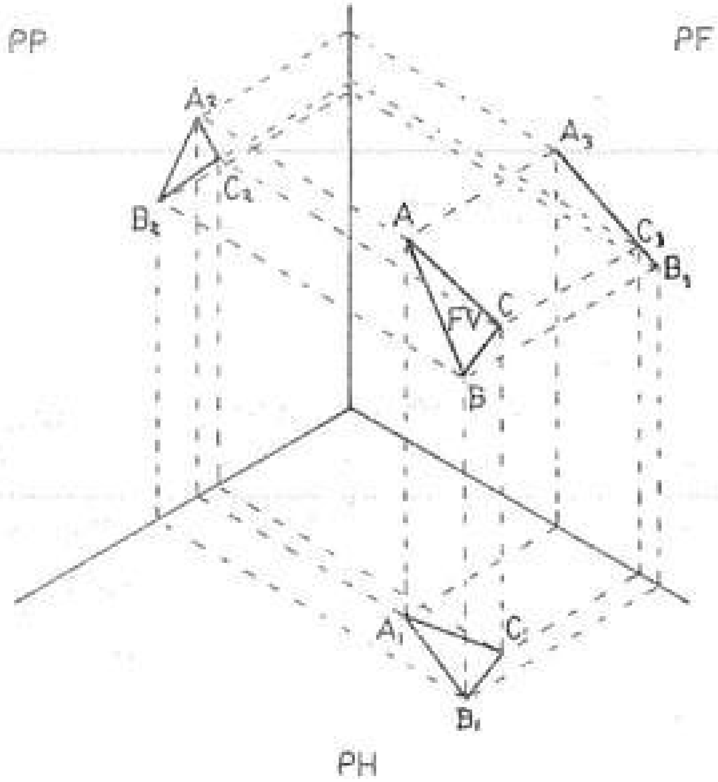


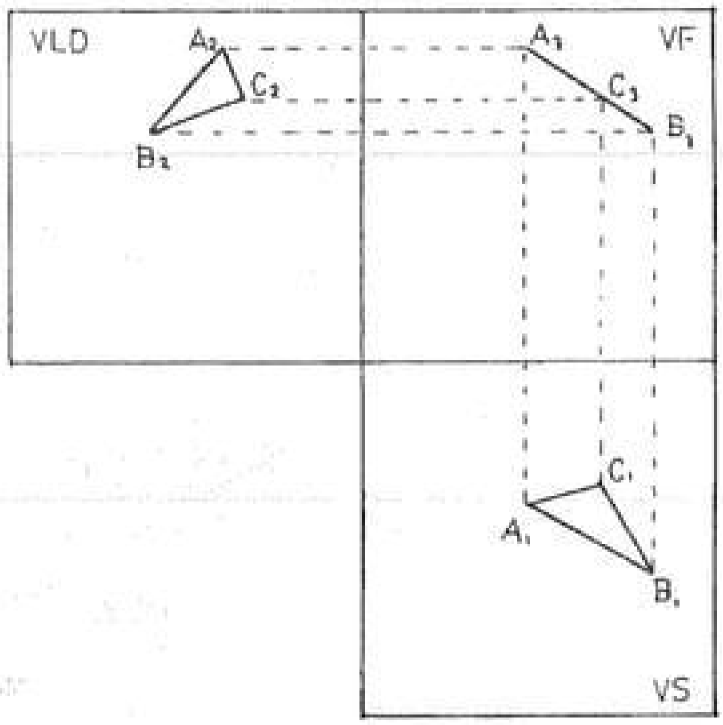
SEGMENTO OBLICUO



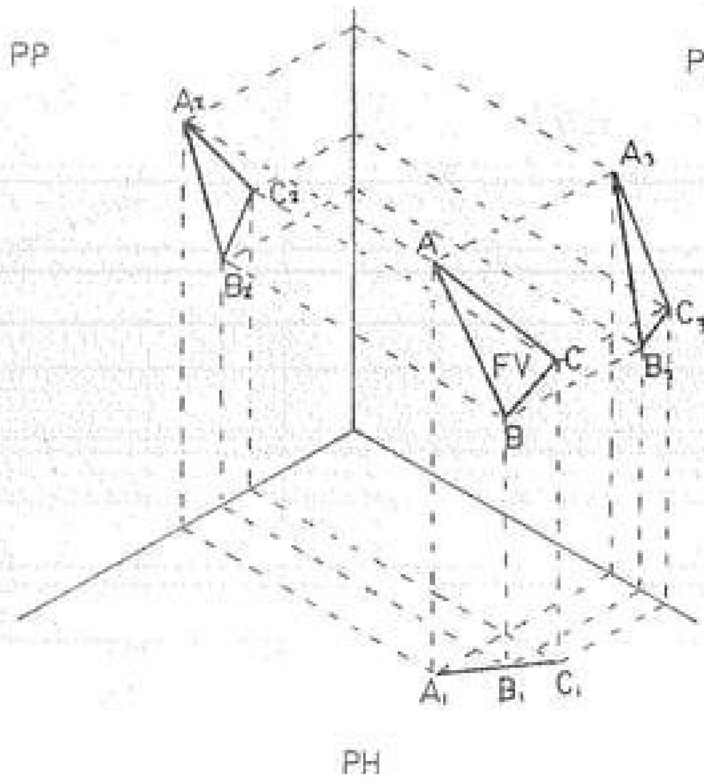


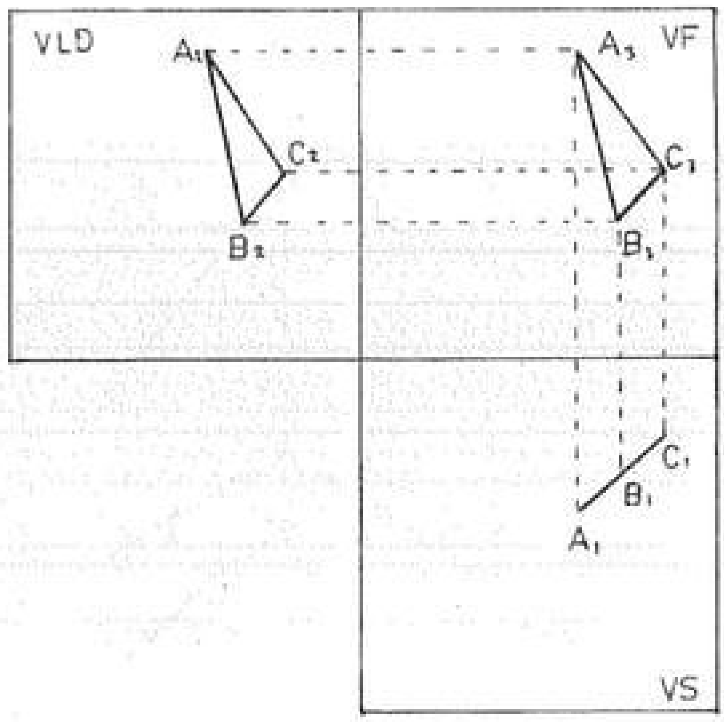
PLANO PERPENDICULAR AL PLANO FRONTAL



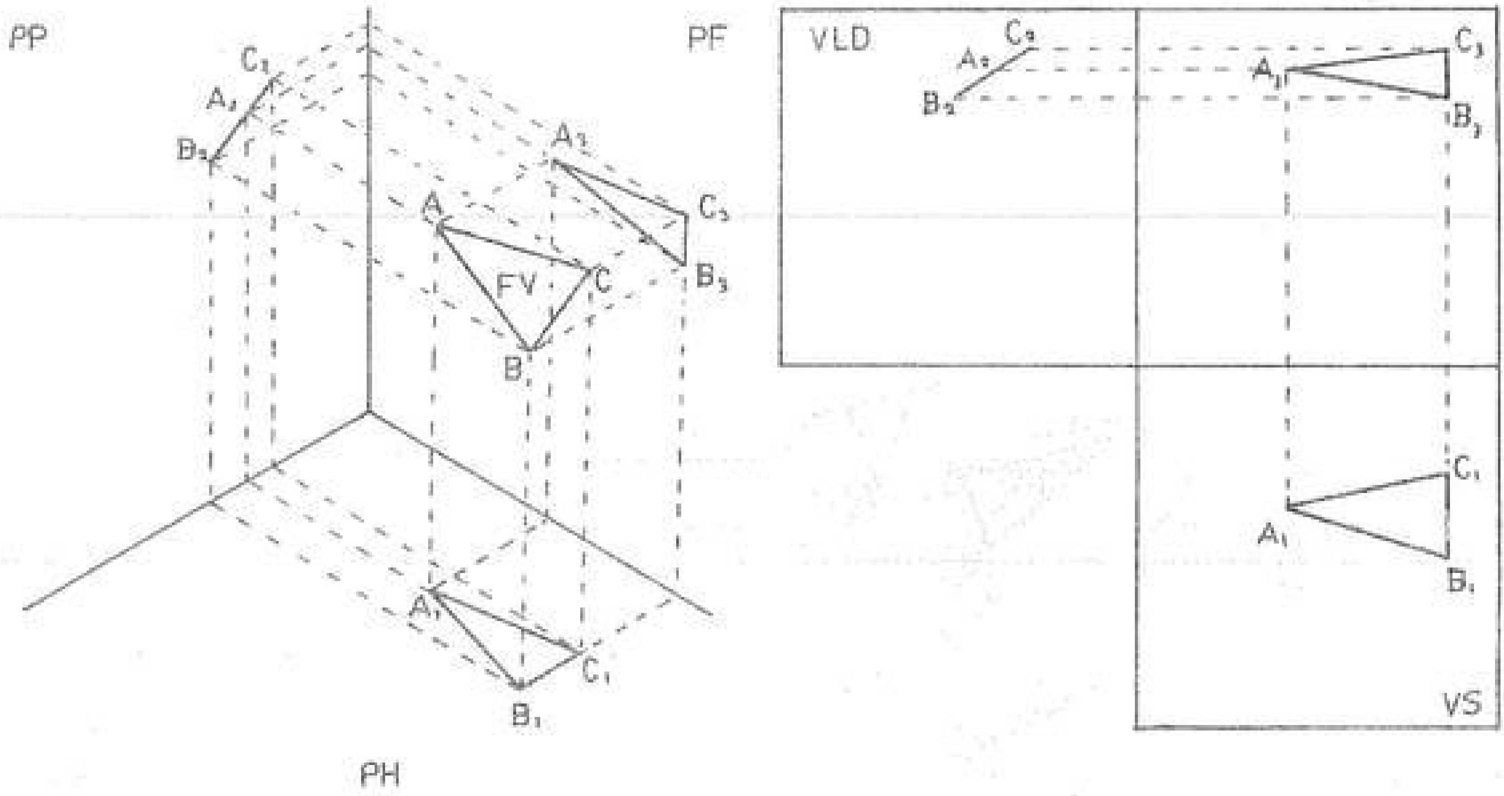


PLANO PERPENDICULAR AL PLANO HORIZONTAL

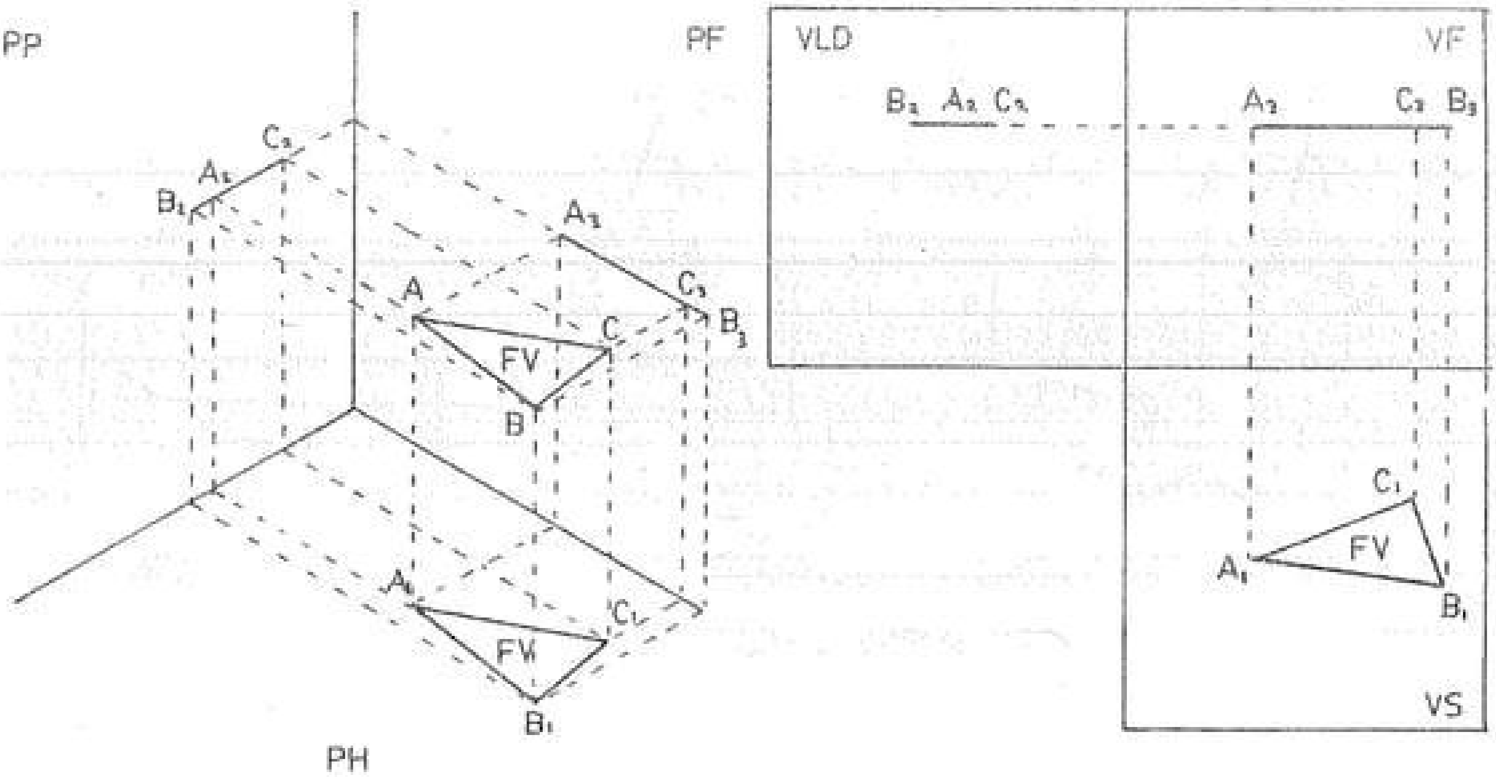




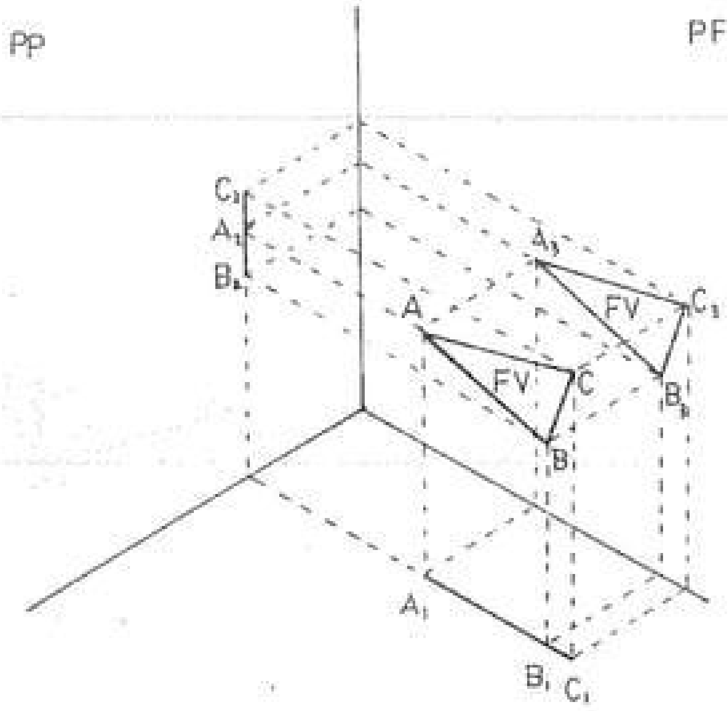
PLANO PERPENDICULAR AL PLANO DE PERFIL

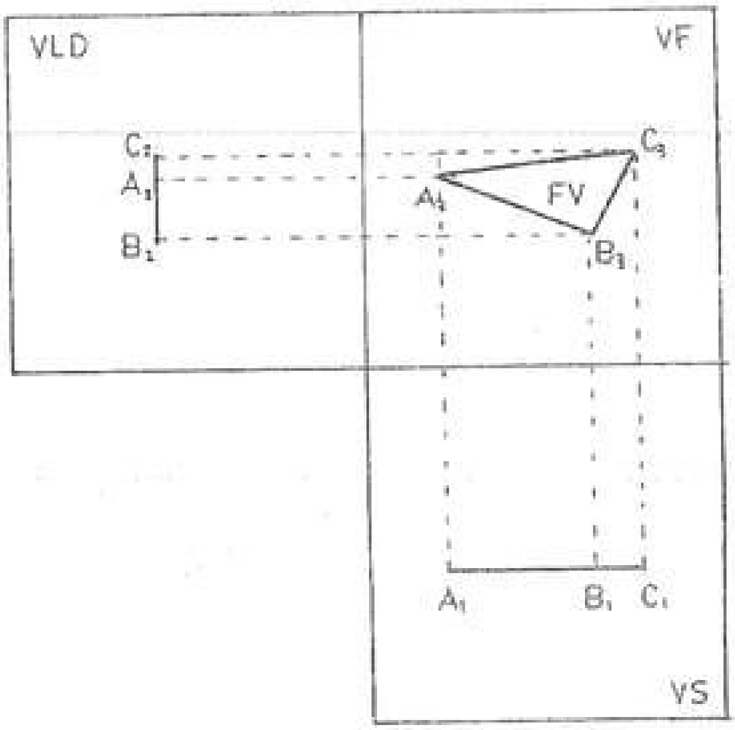


PLANO PARALELO AL PLANO HORIZONTAL

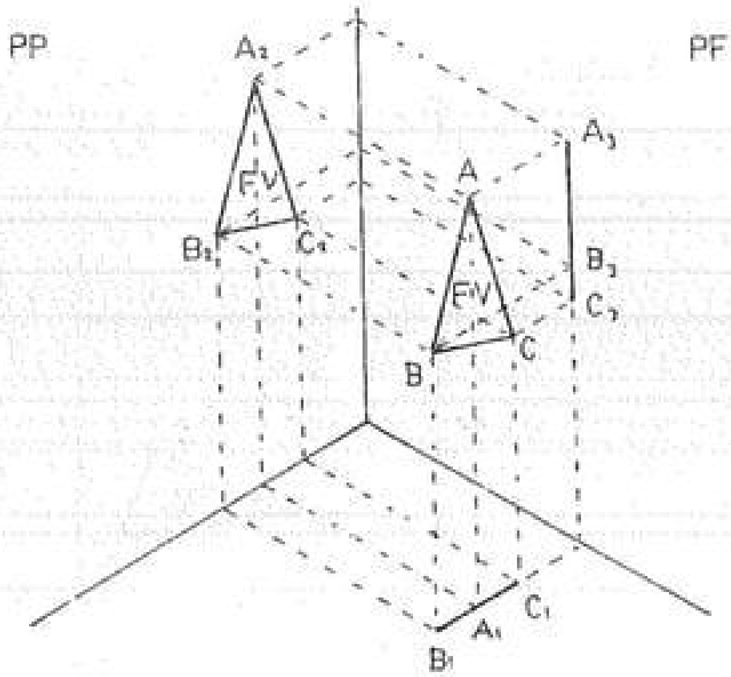


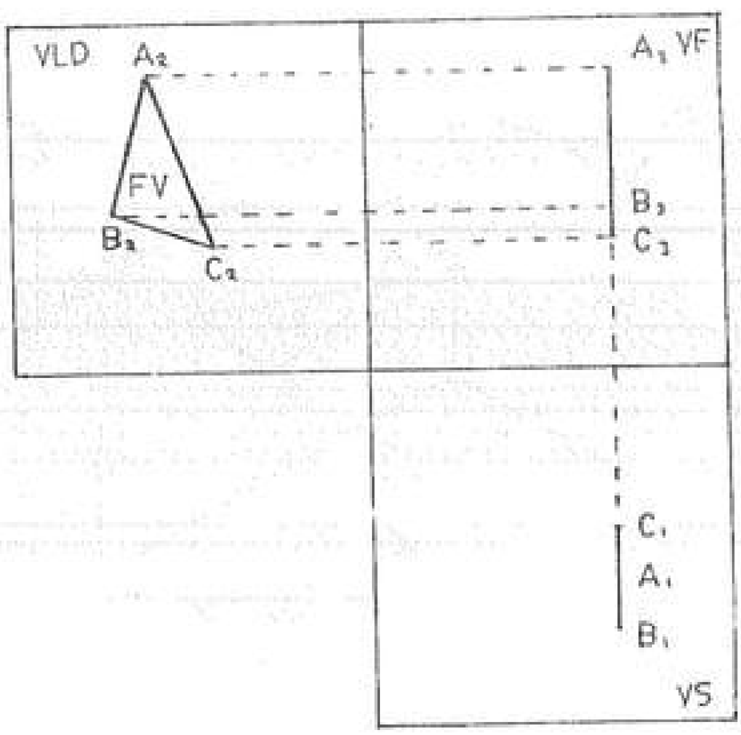
PLANO PARALELO AL PLANO FRONTAL



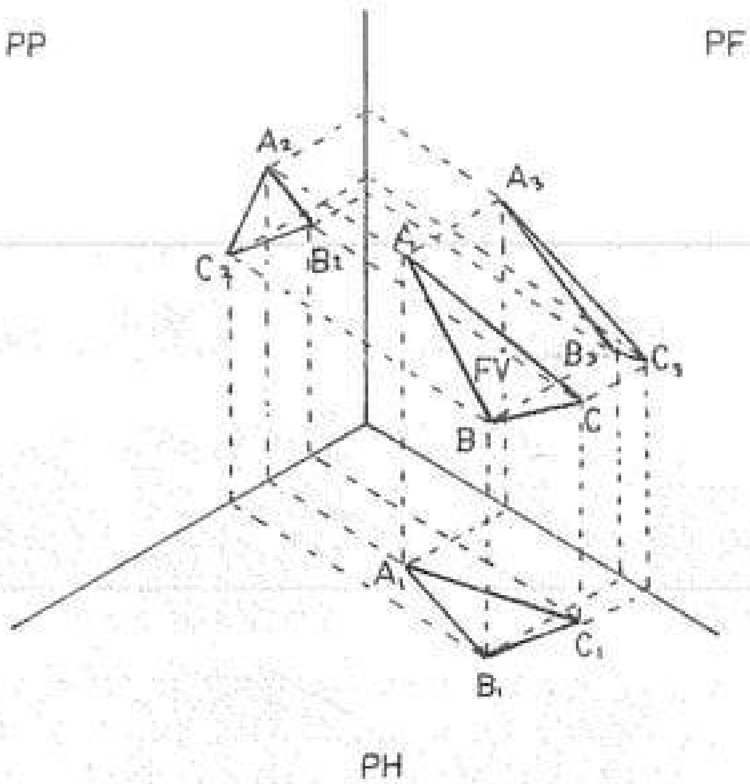


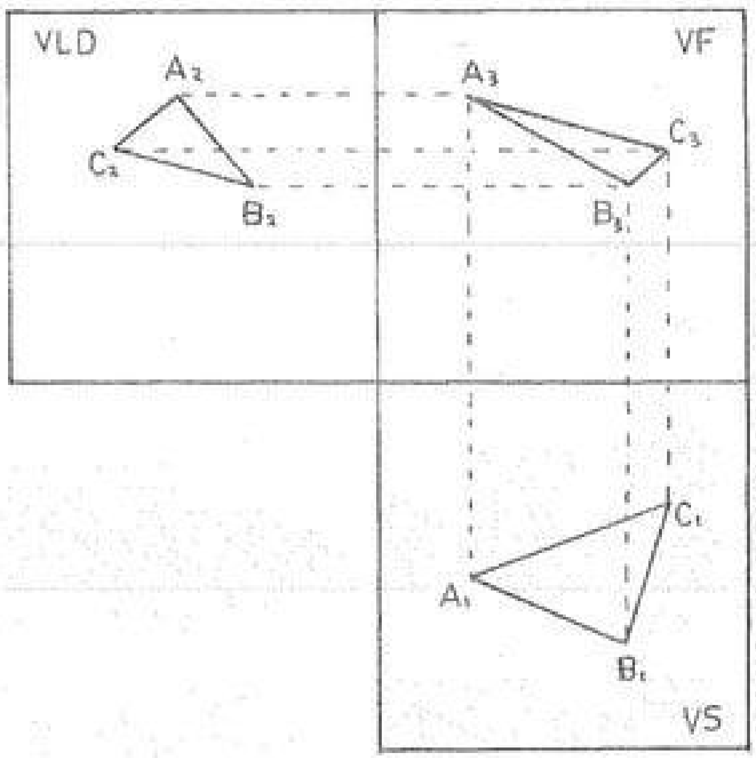
PLANO PARALELO AL PLANO DE PERFIL

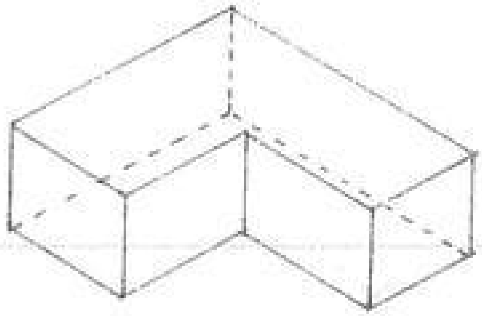


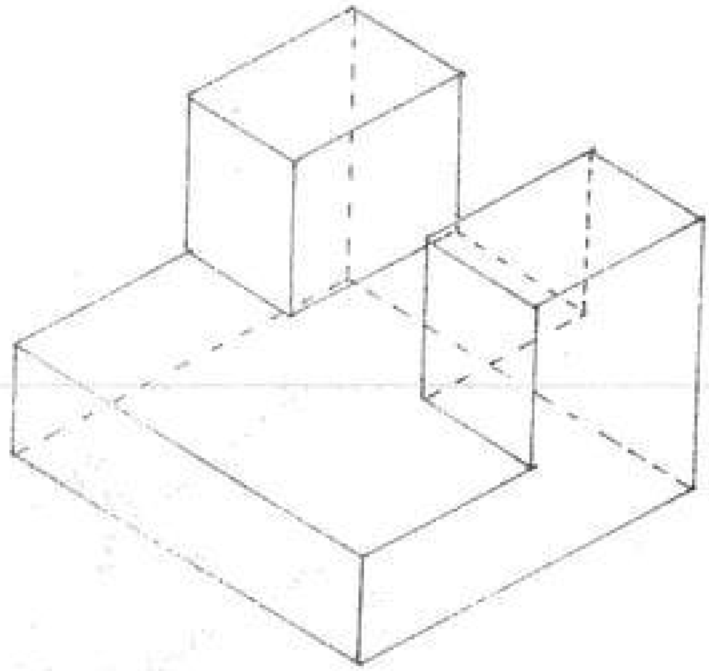


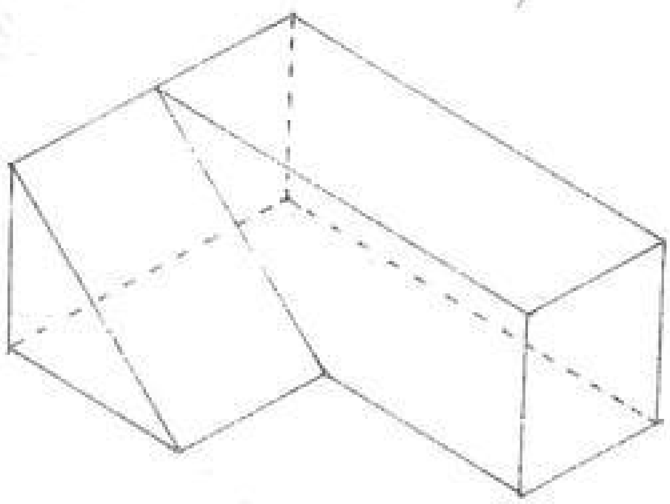
PLANO OBLICUO

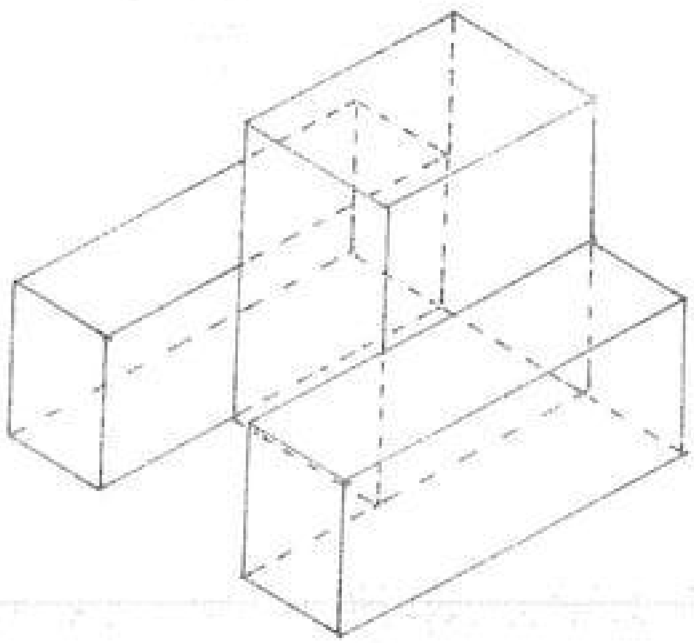


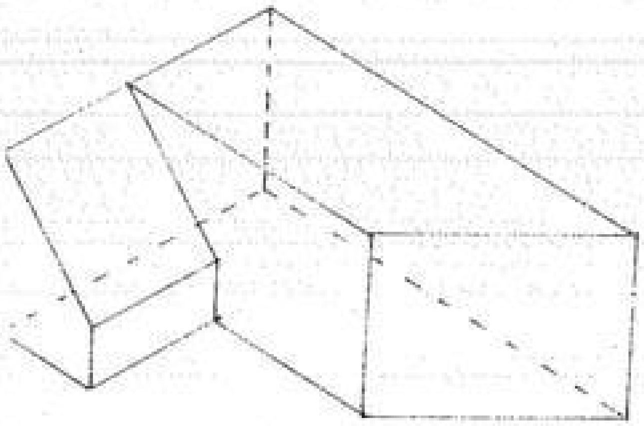


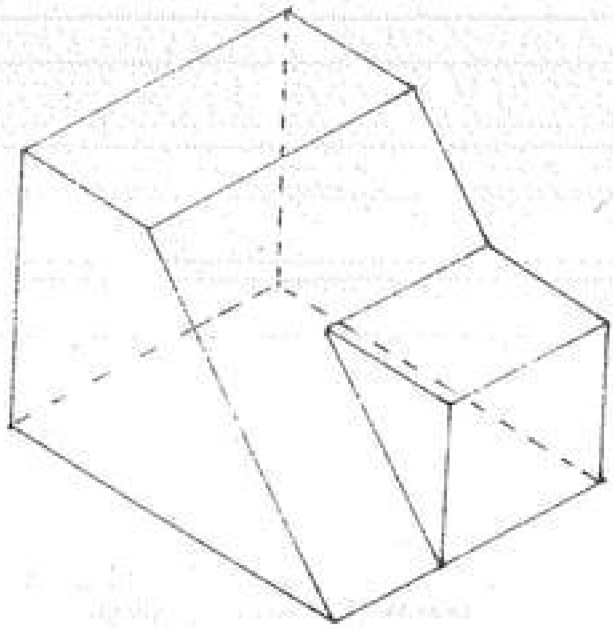


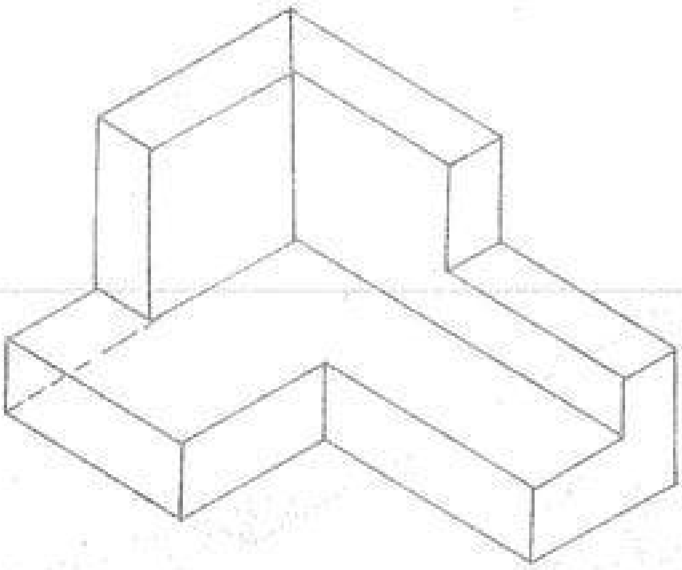
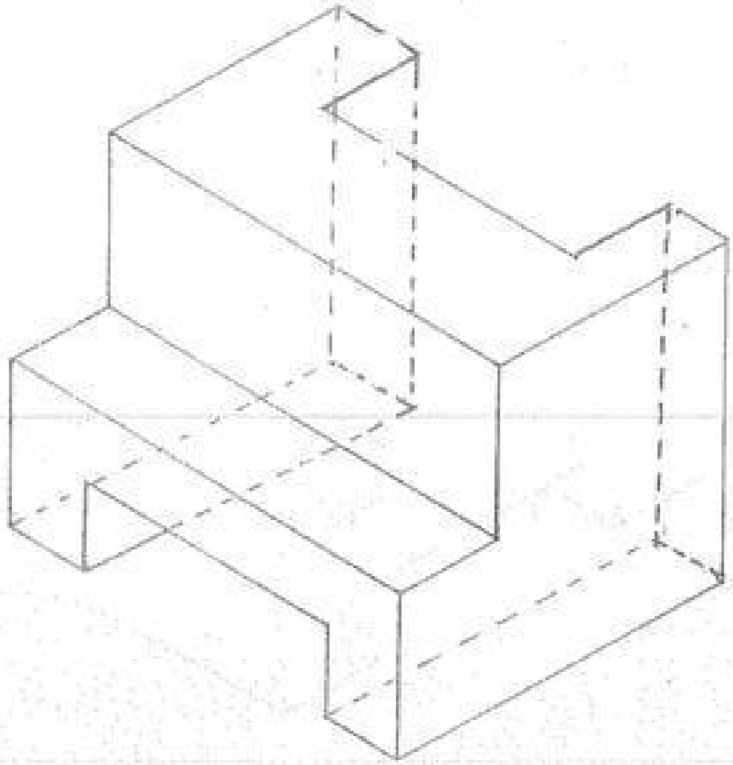
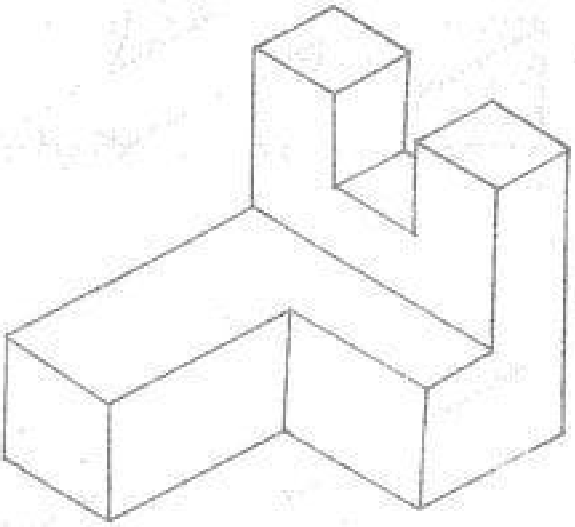
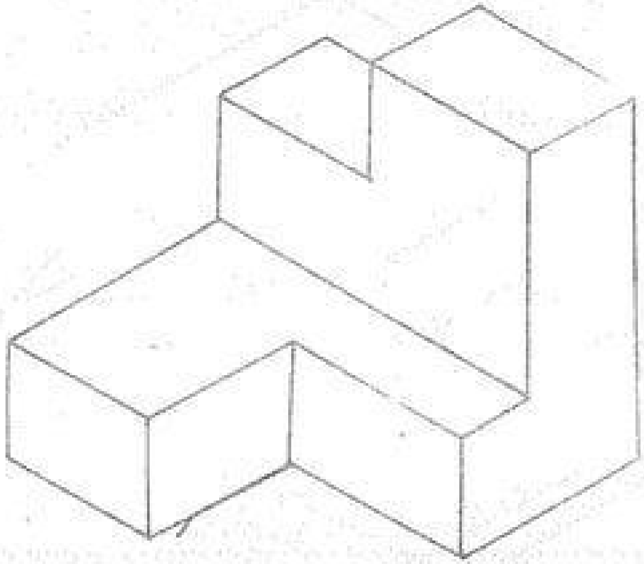
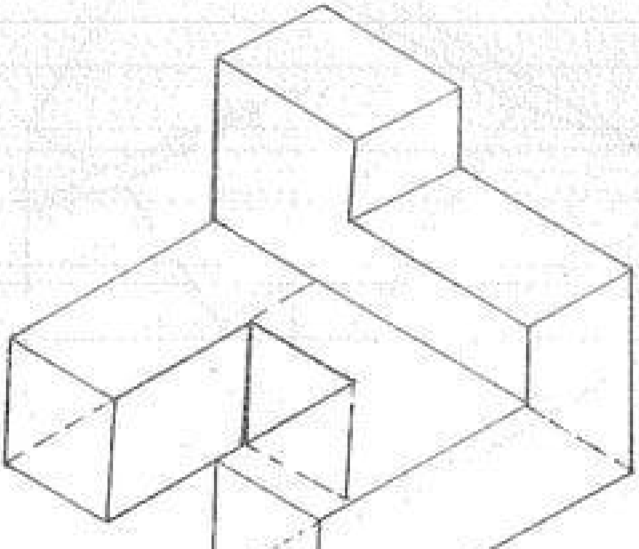
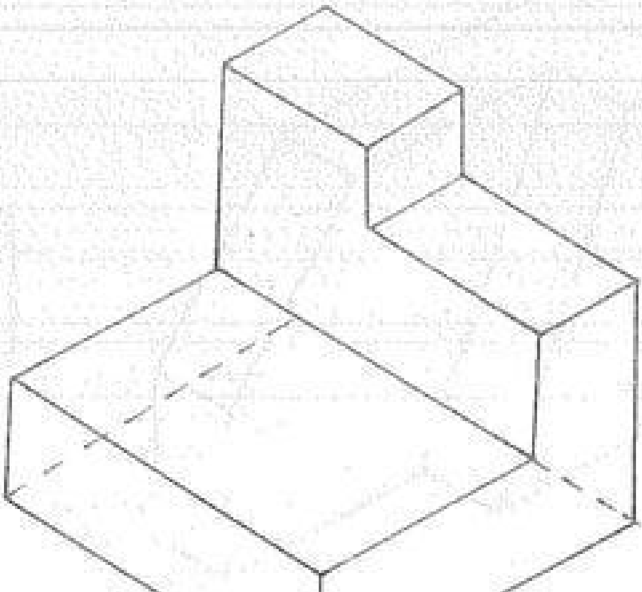


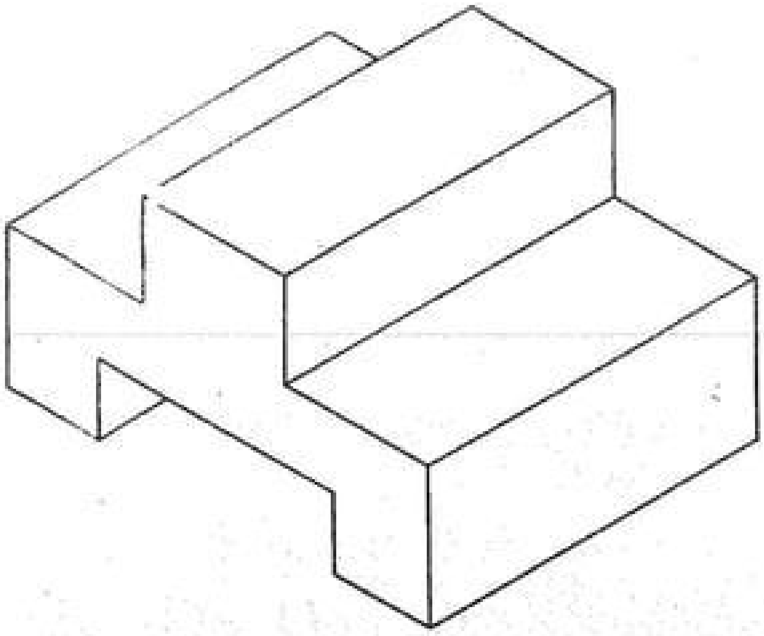
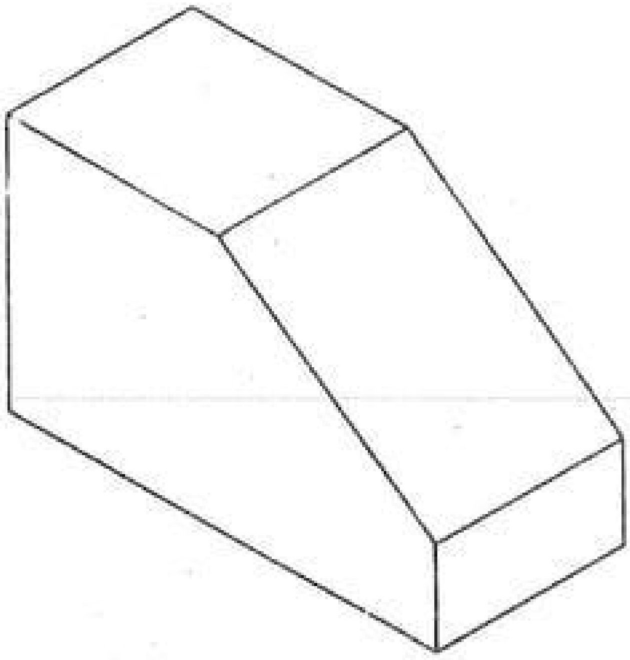
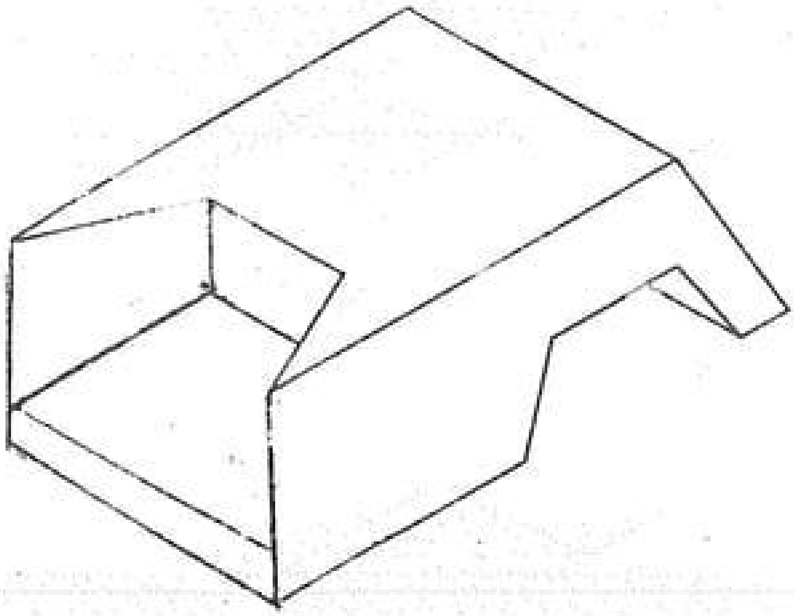
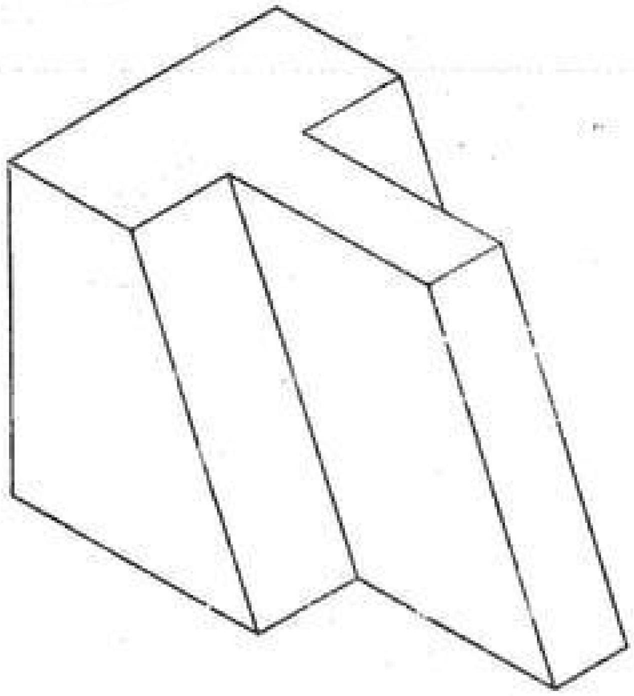
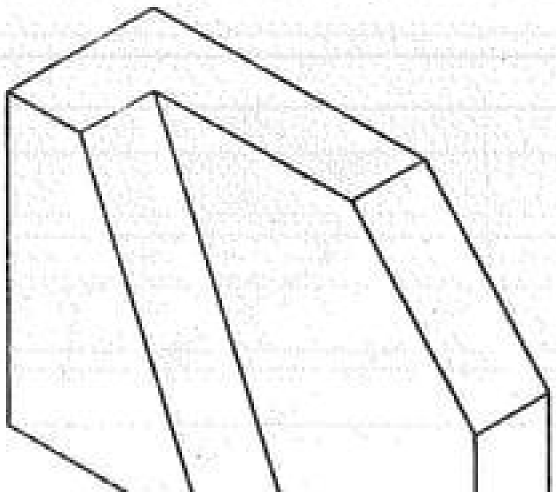
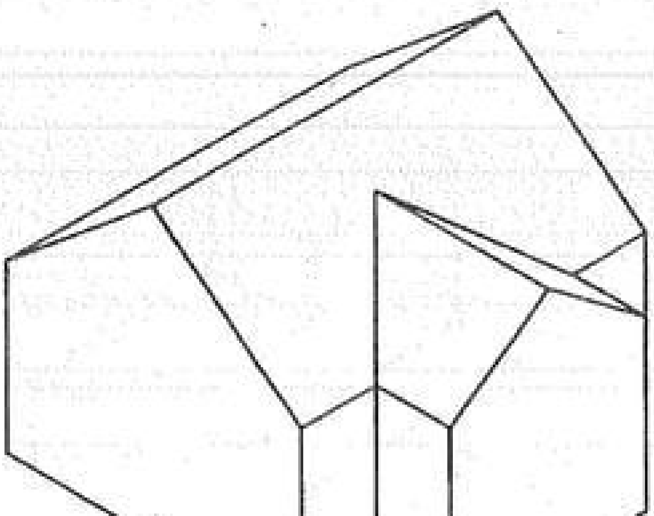


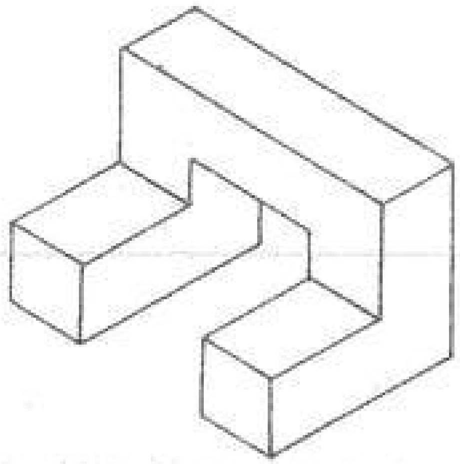
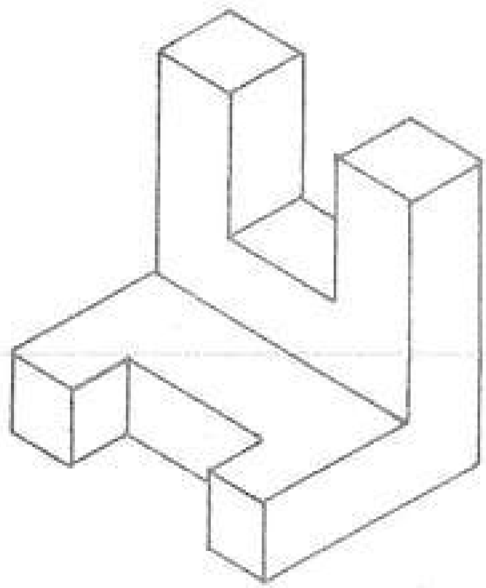
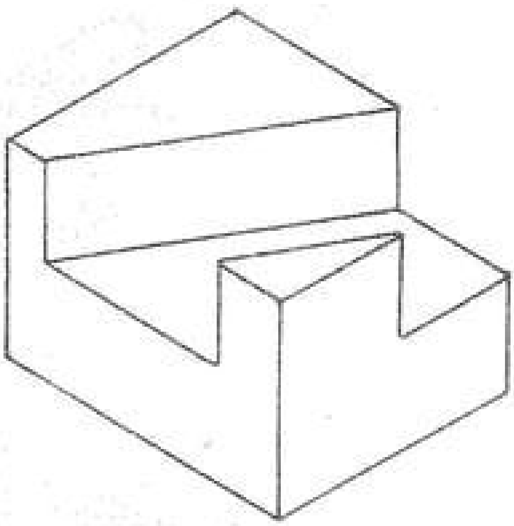
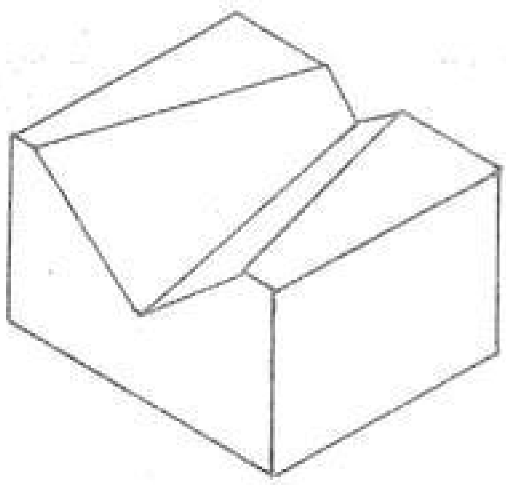
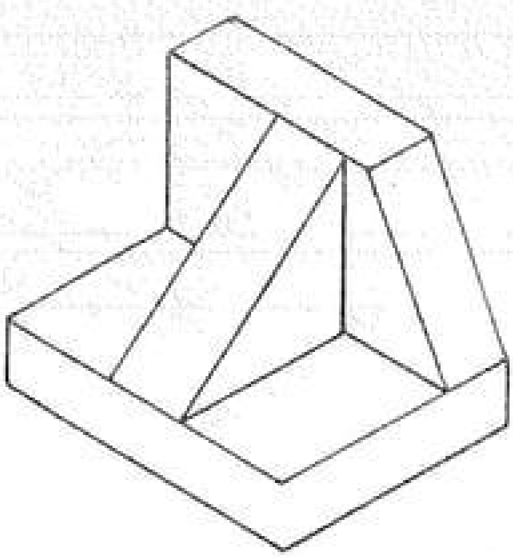
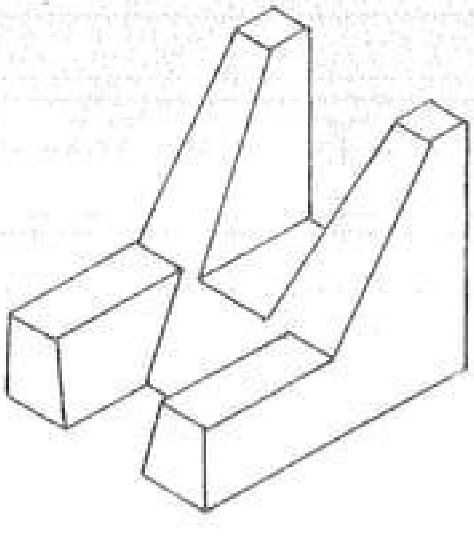


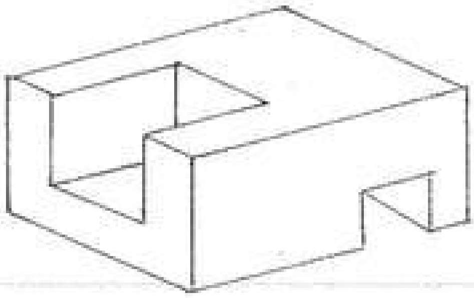
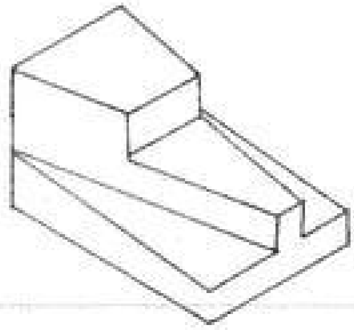
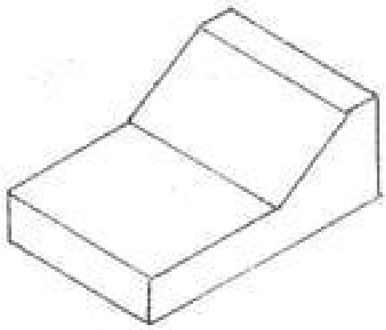
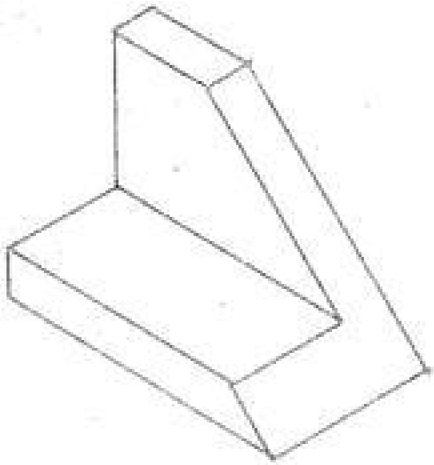
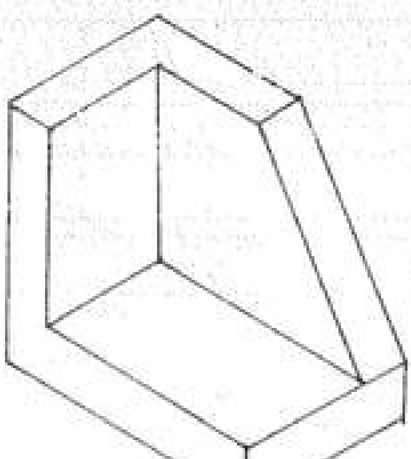
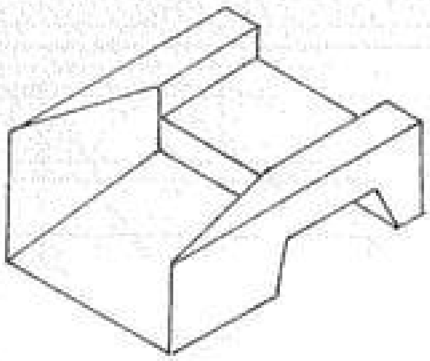


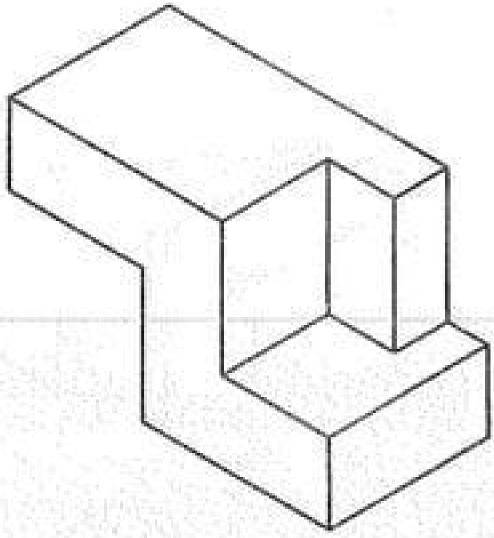
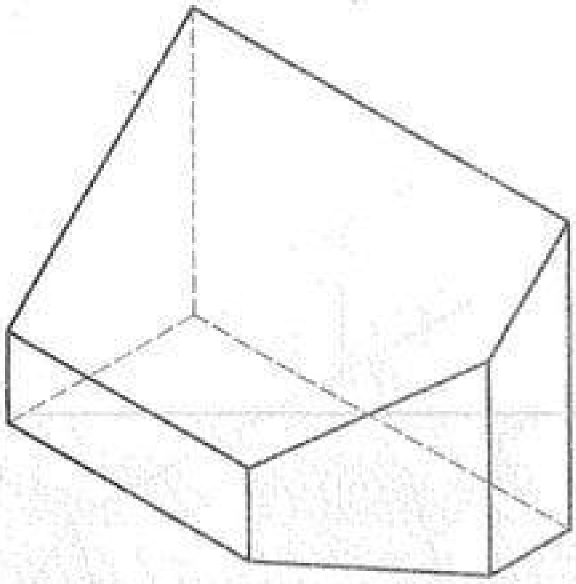
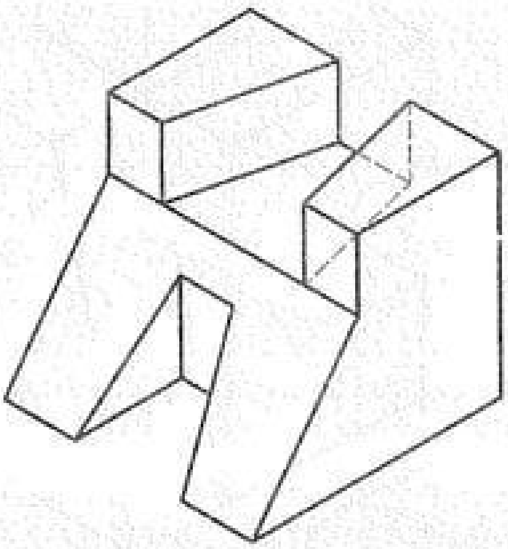
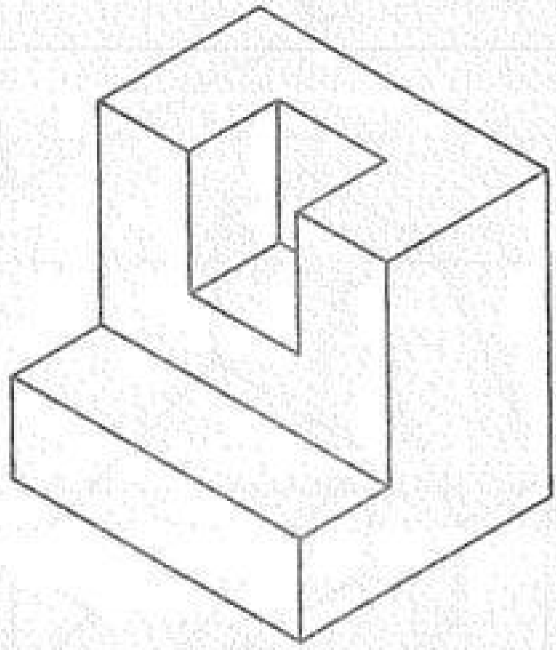
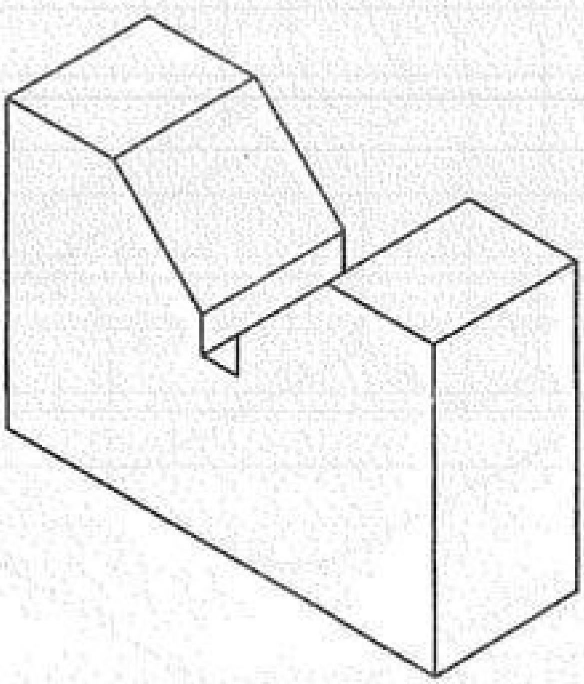
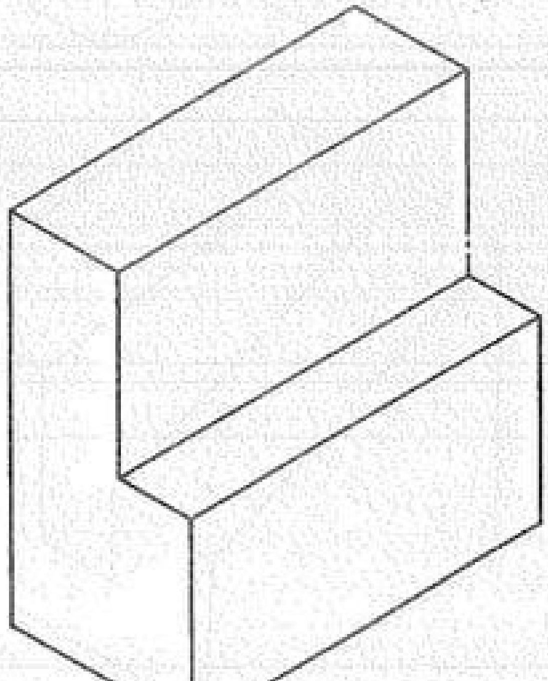


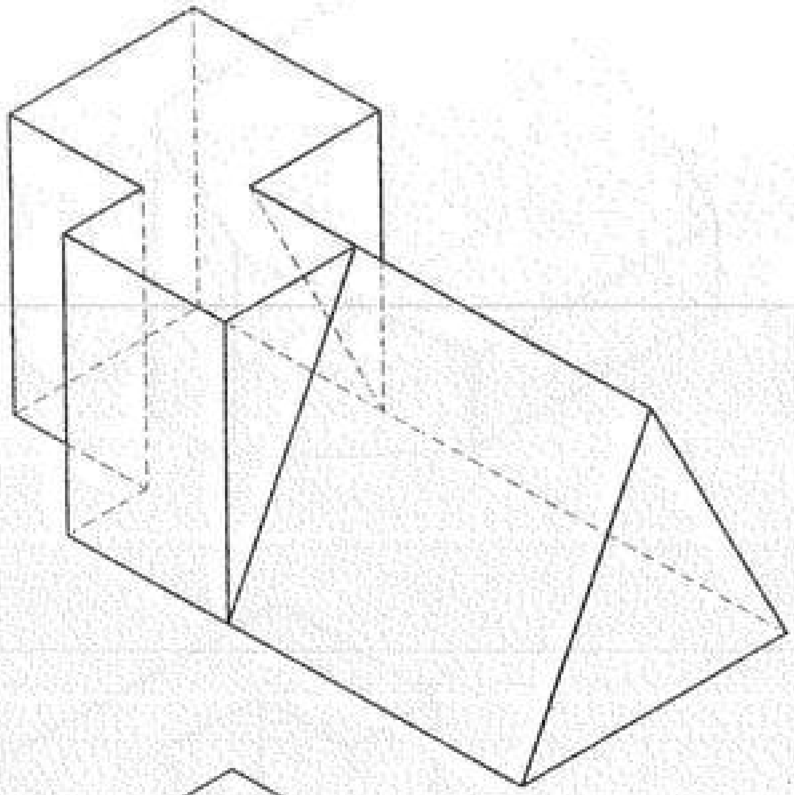







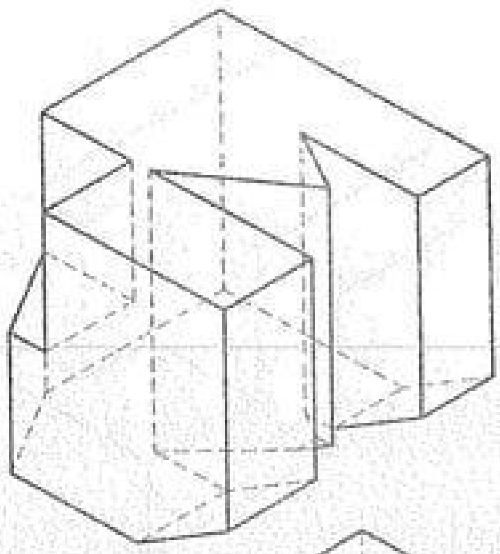







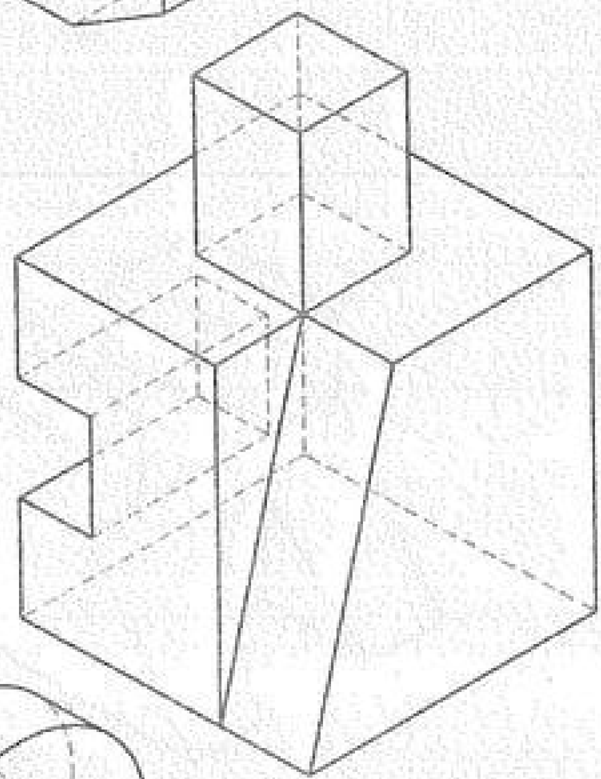







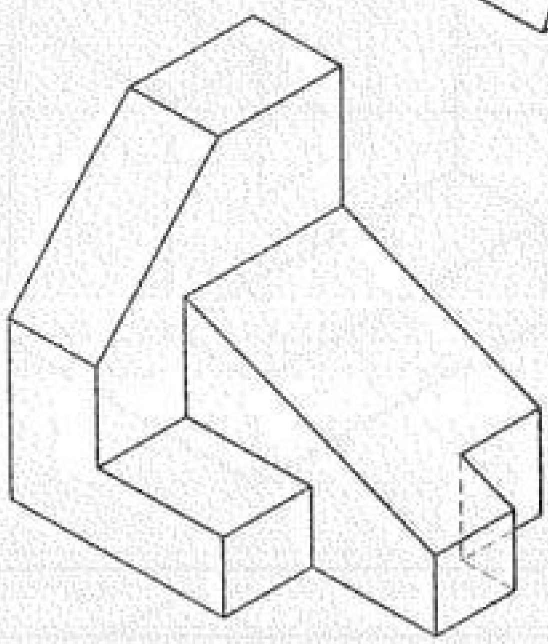







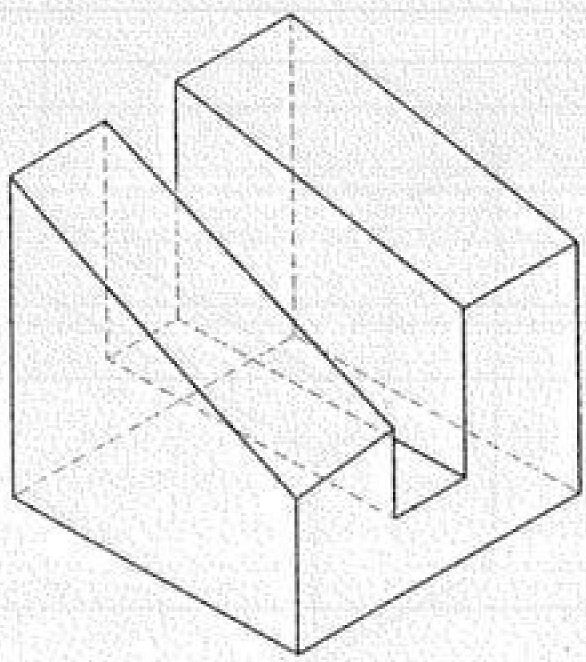







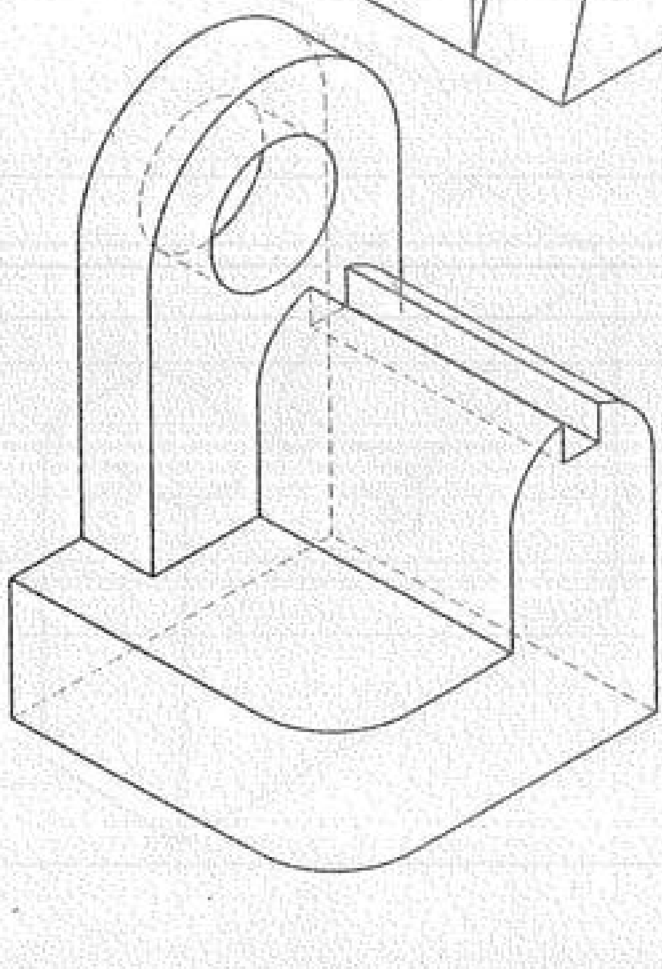


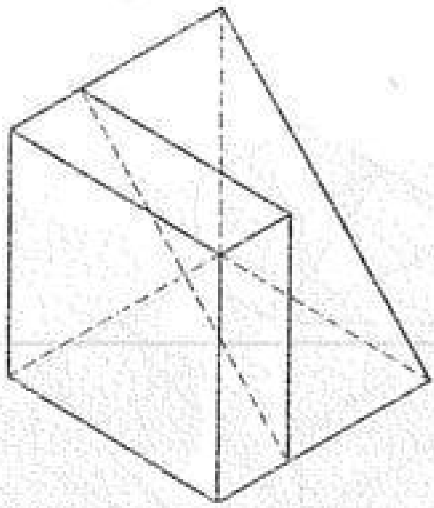
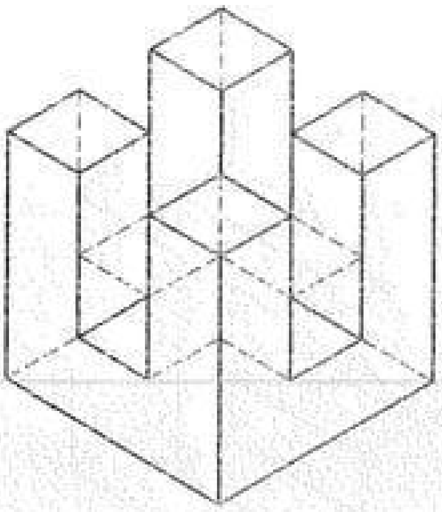
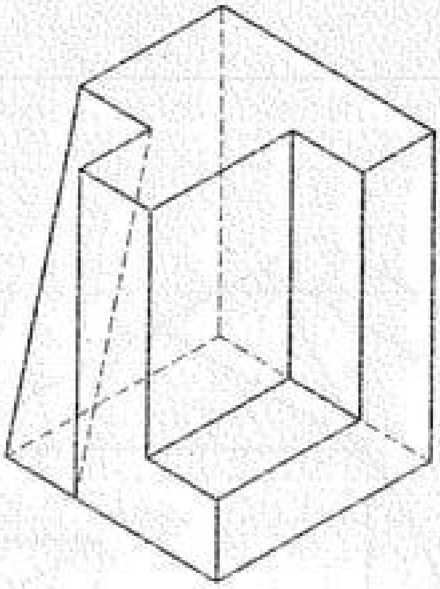
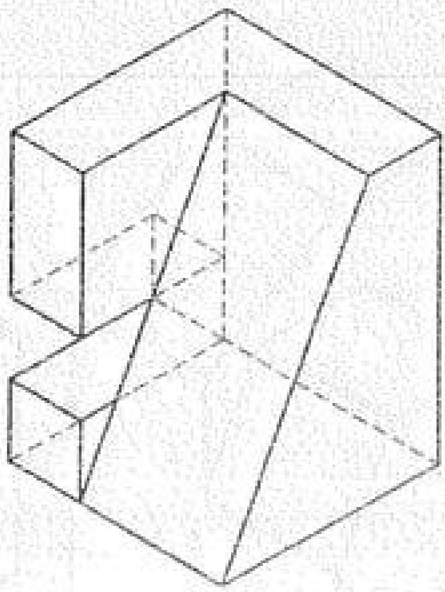
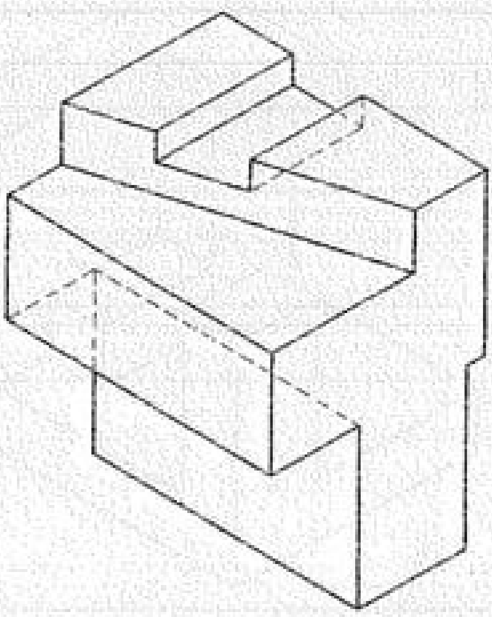
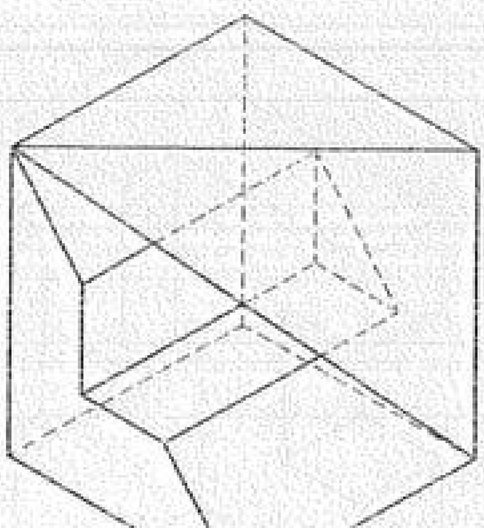


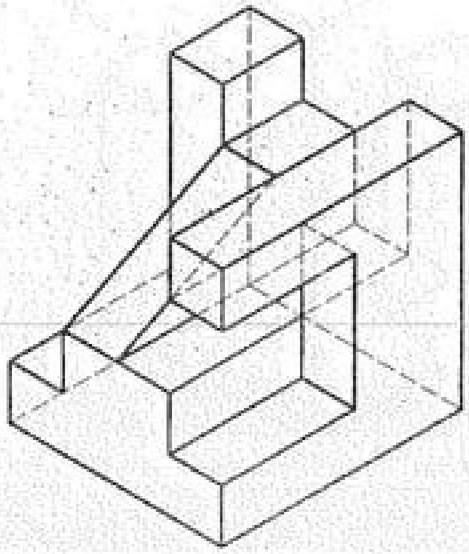
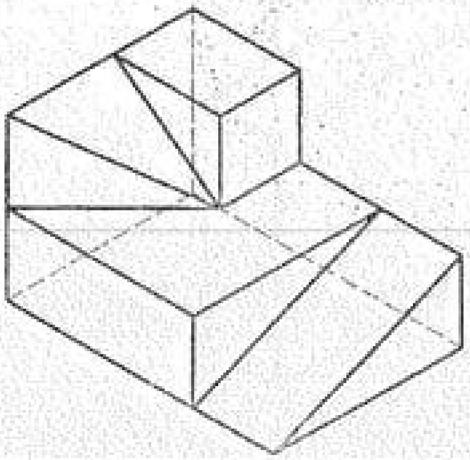
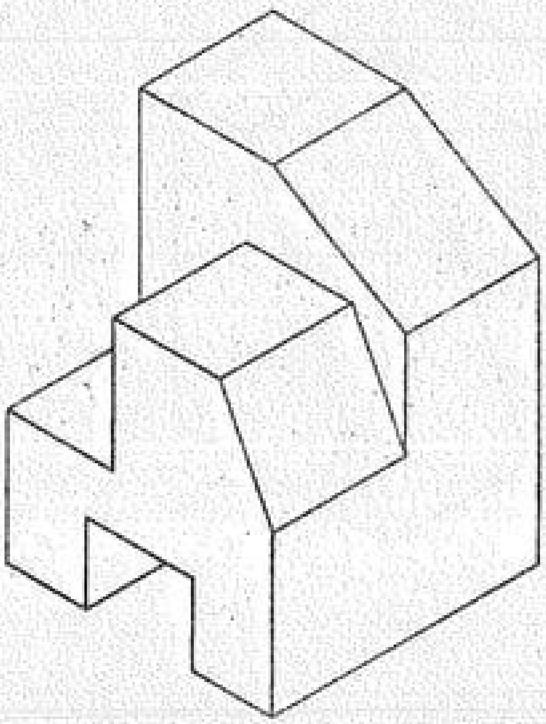
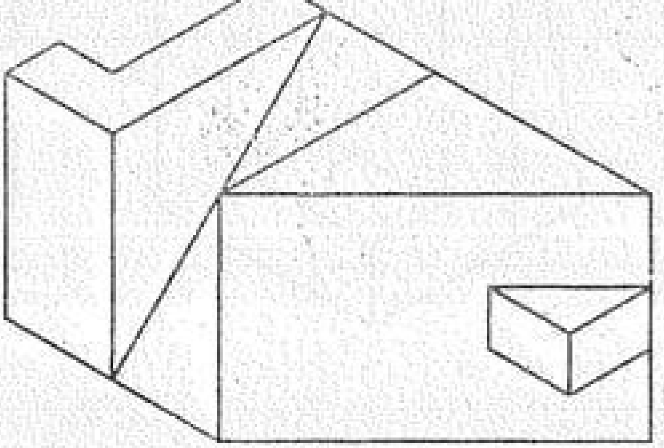
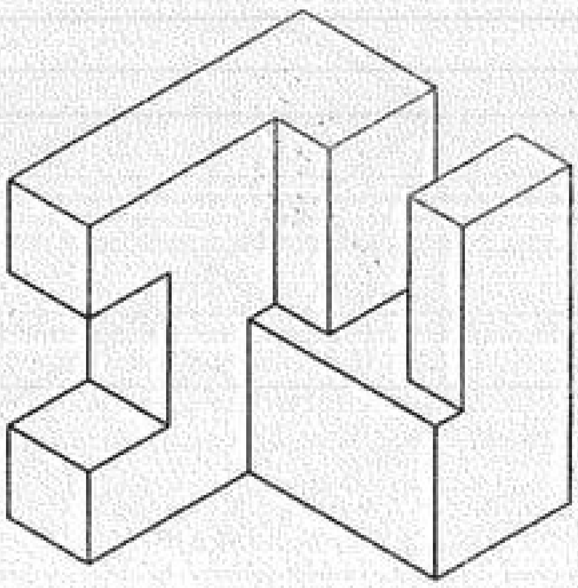
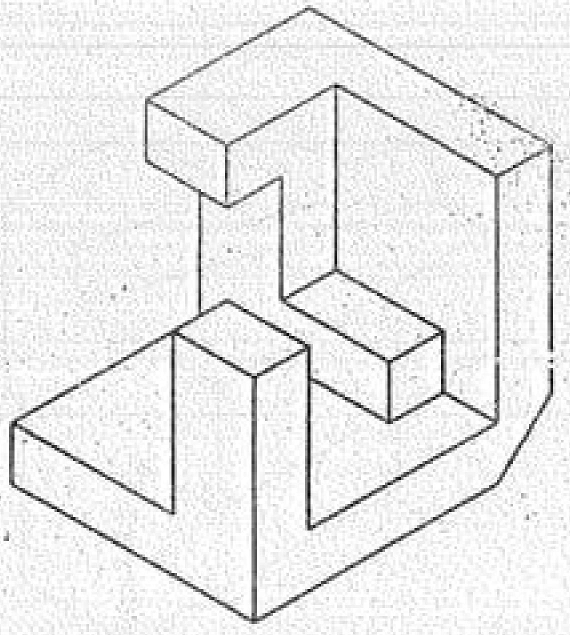


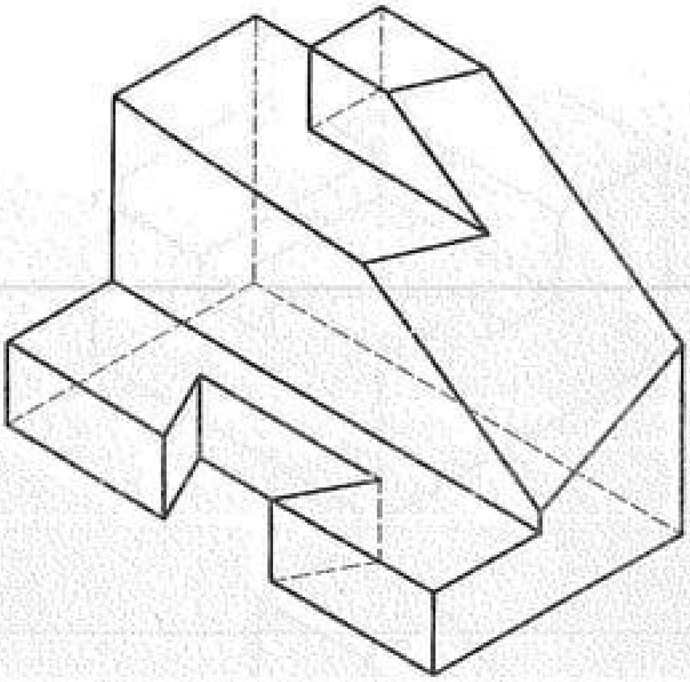
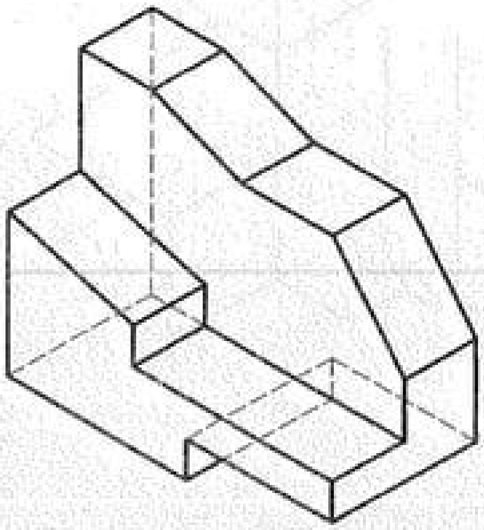
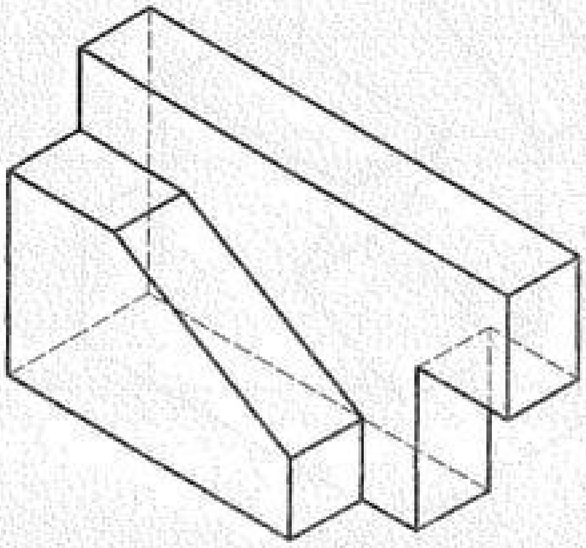
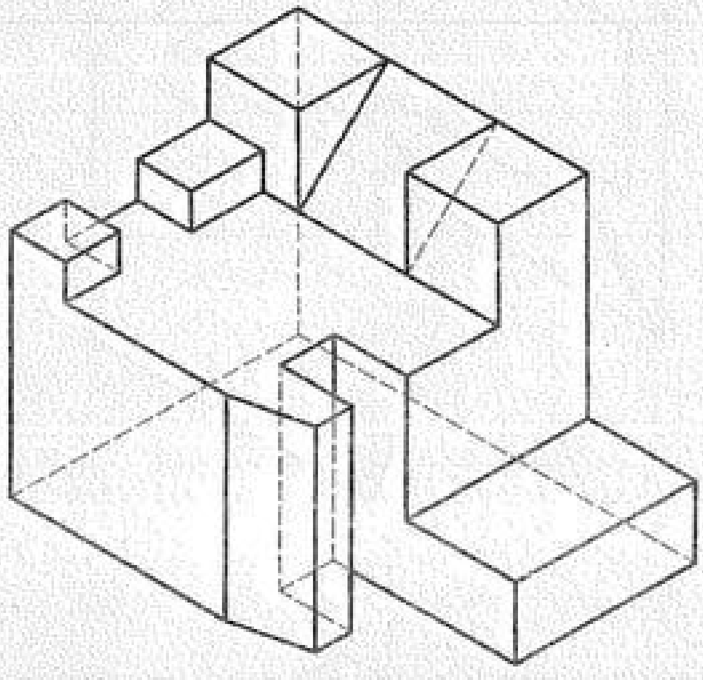
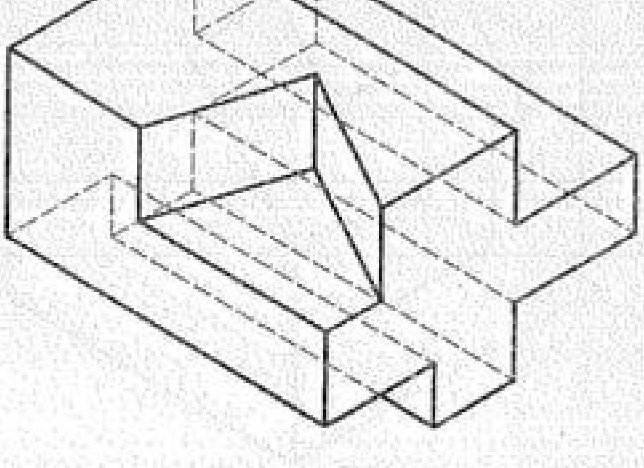
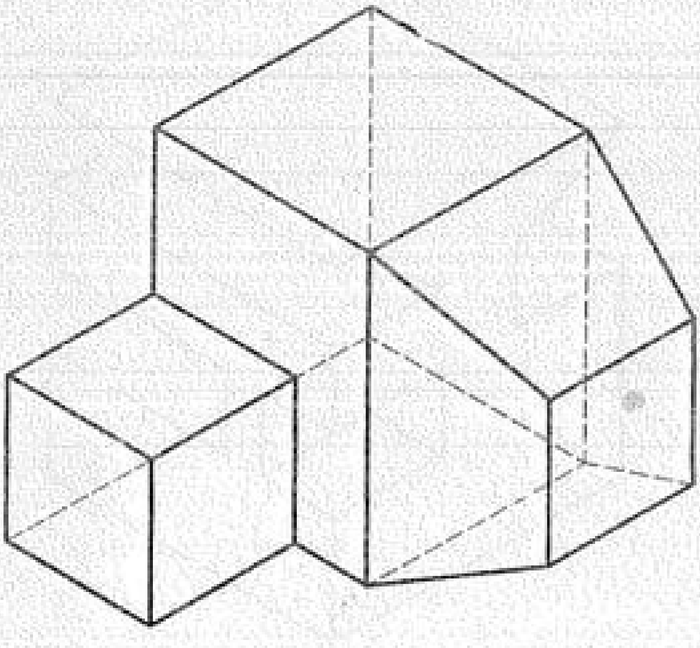


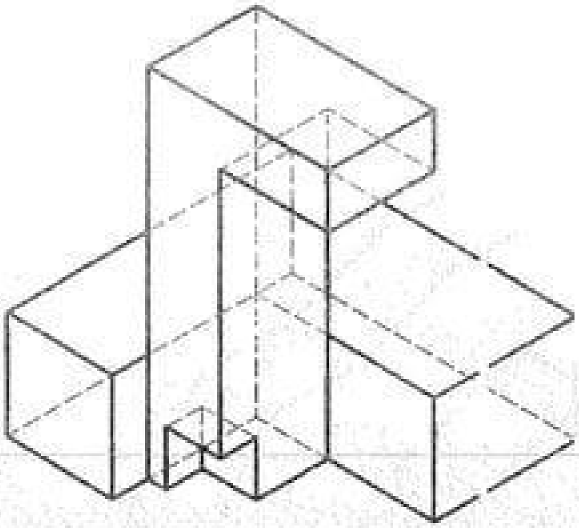
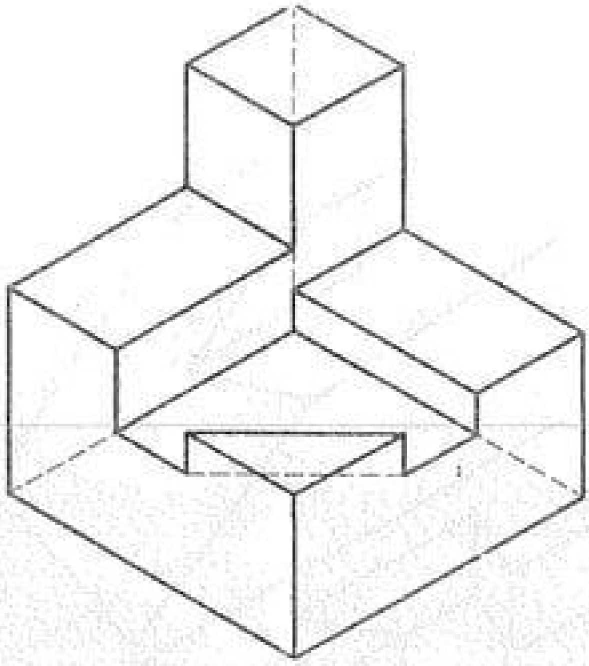
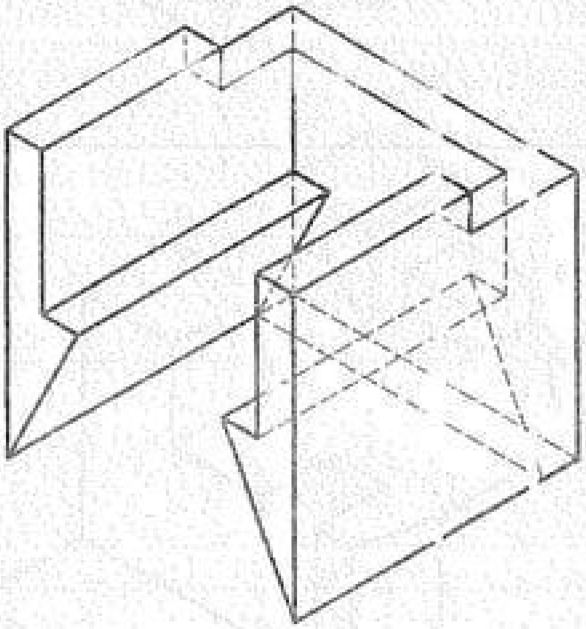
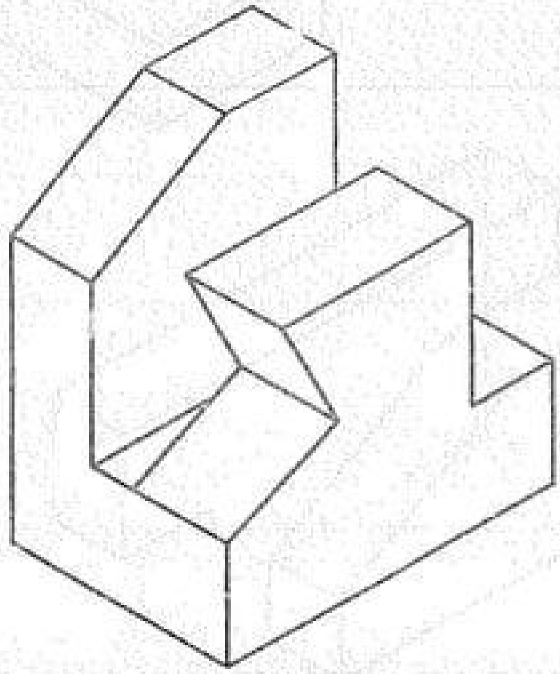
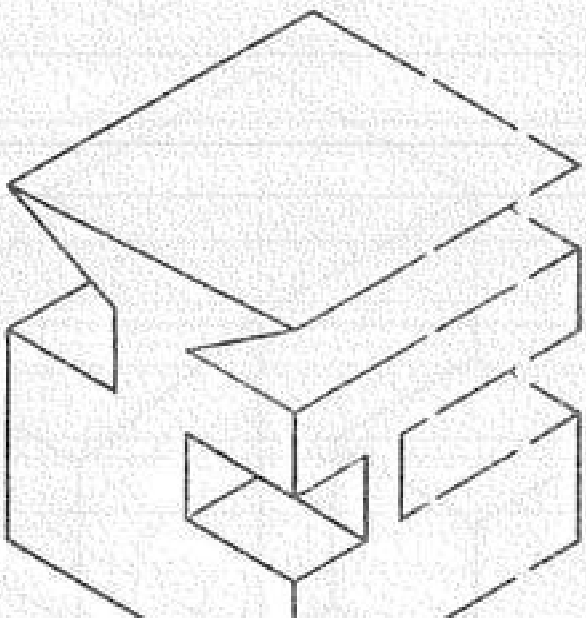
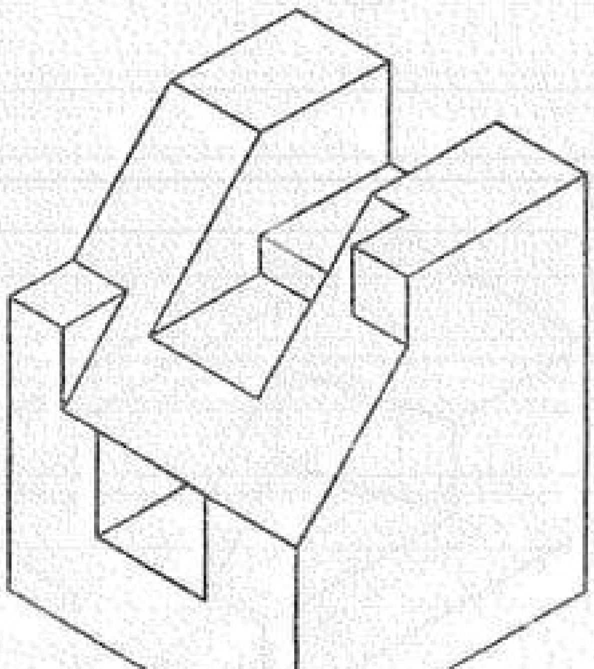


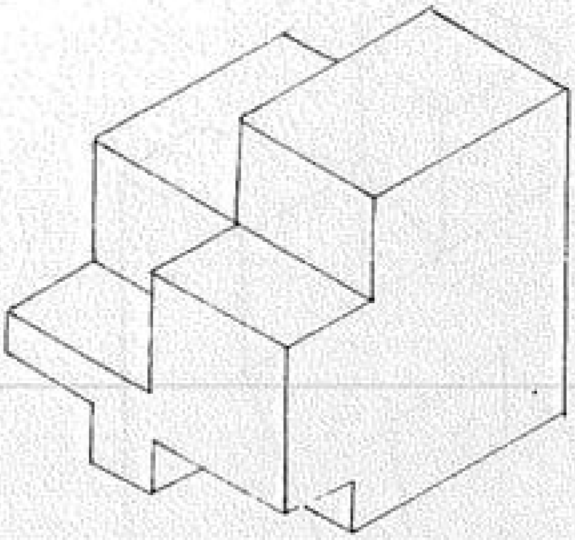


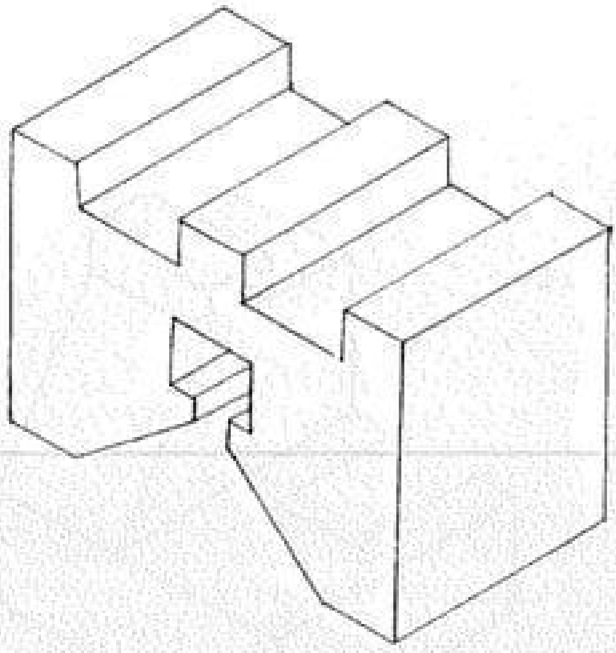







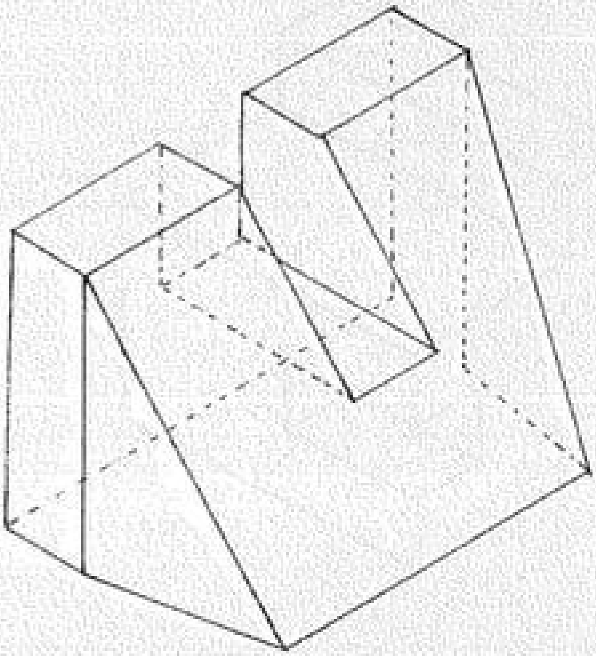







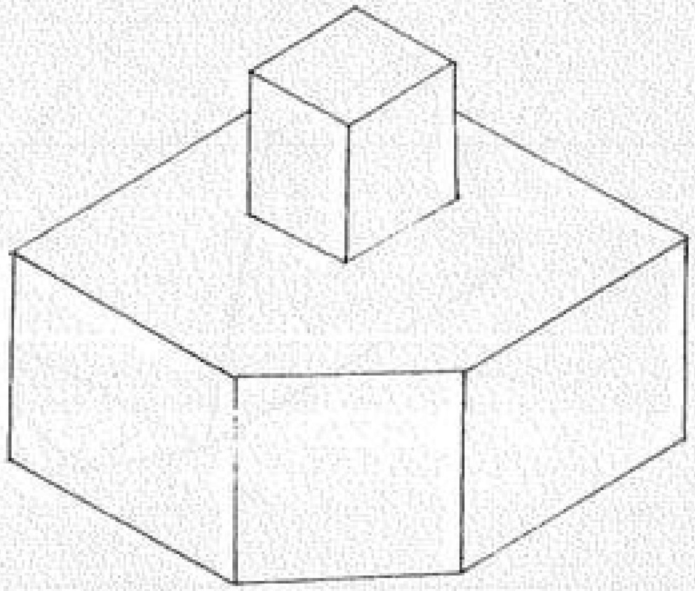







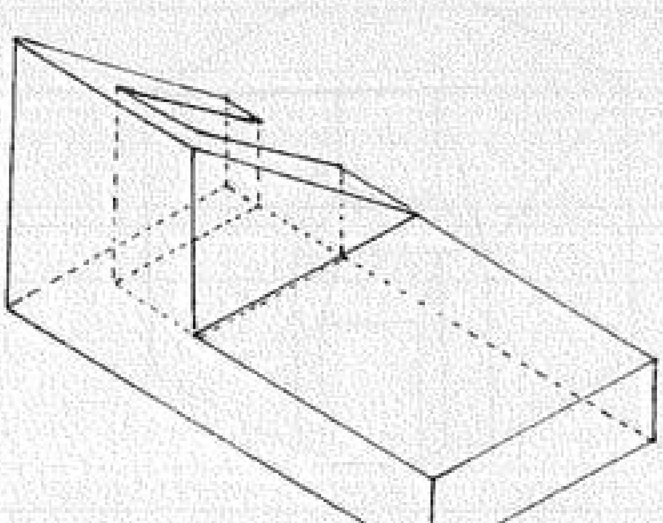







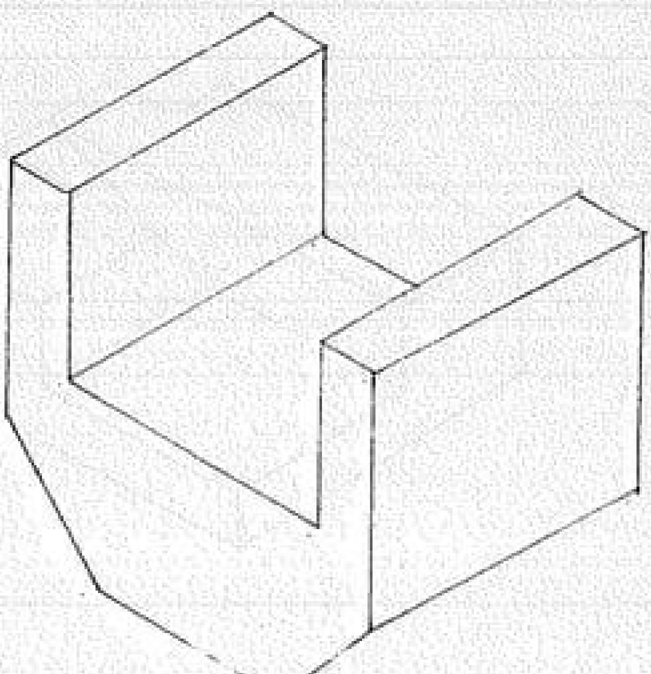


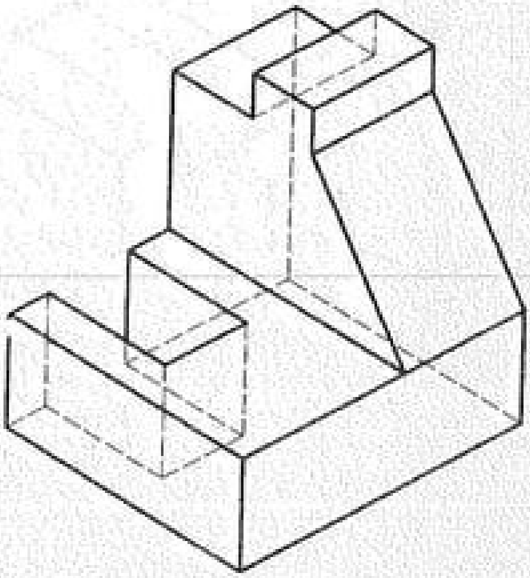
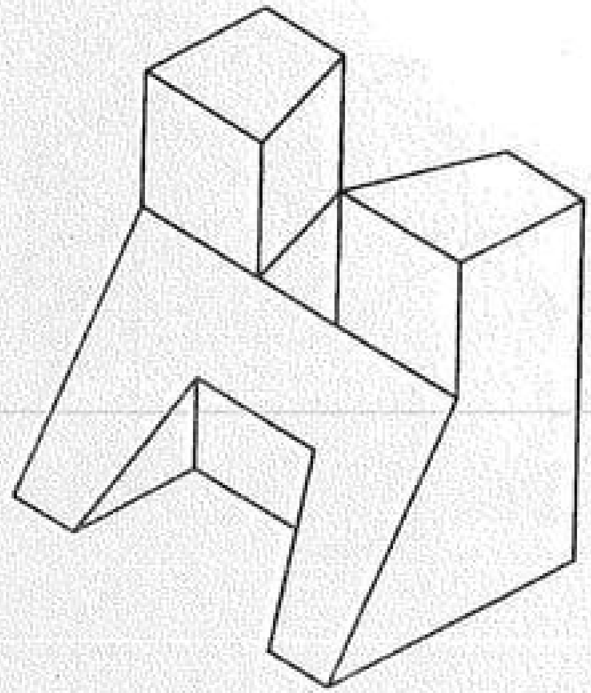
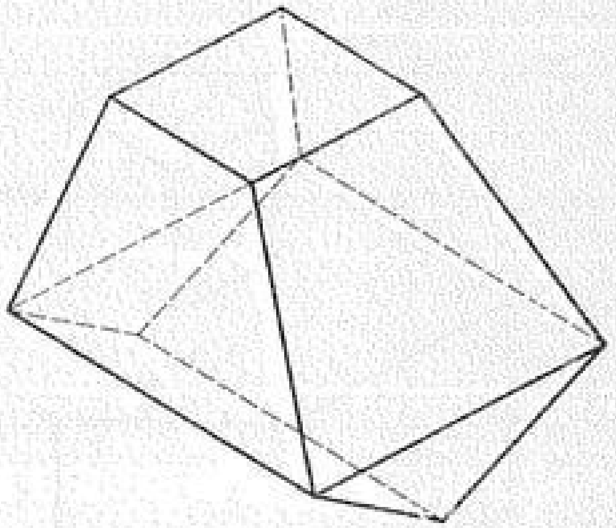
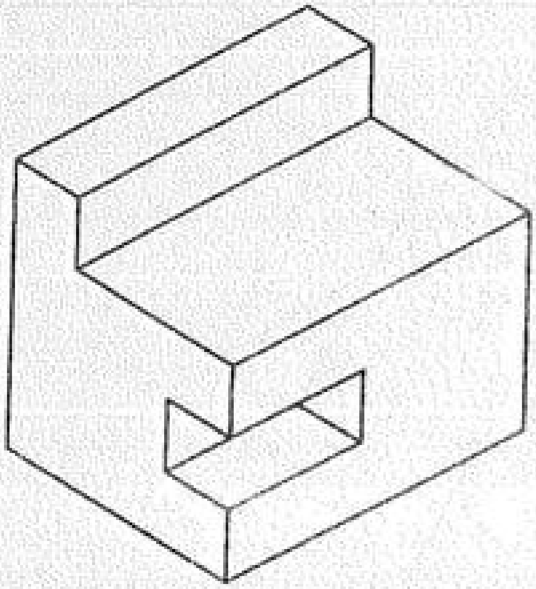
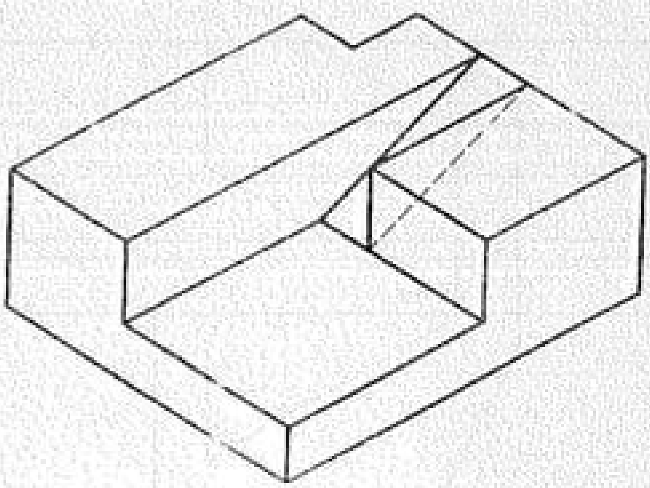
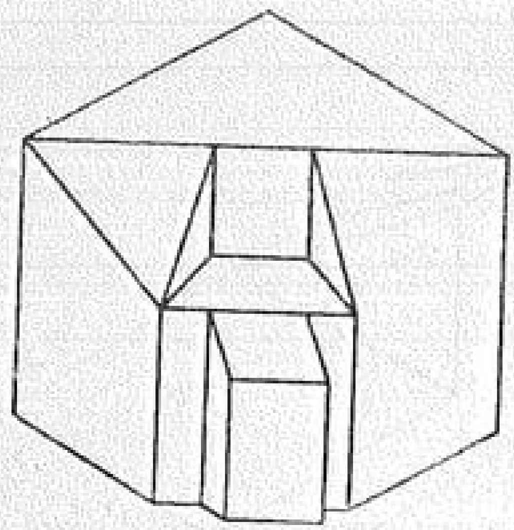


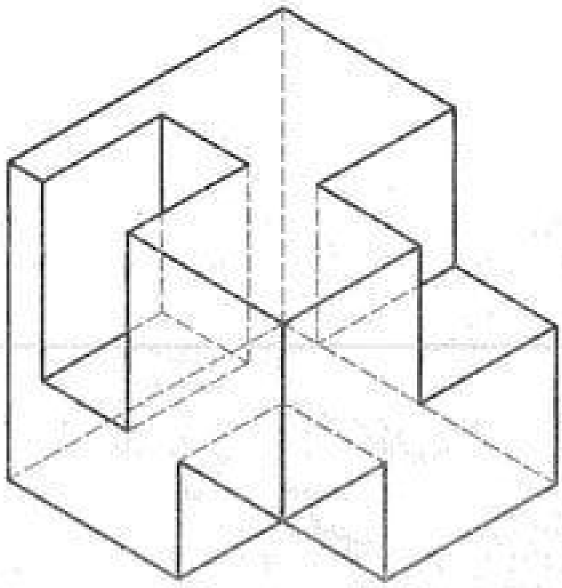
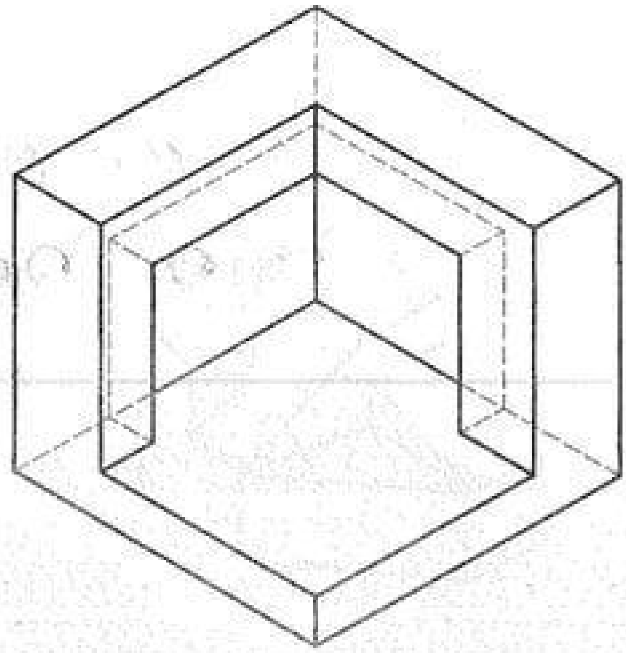
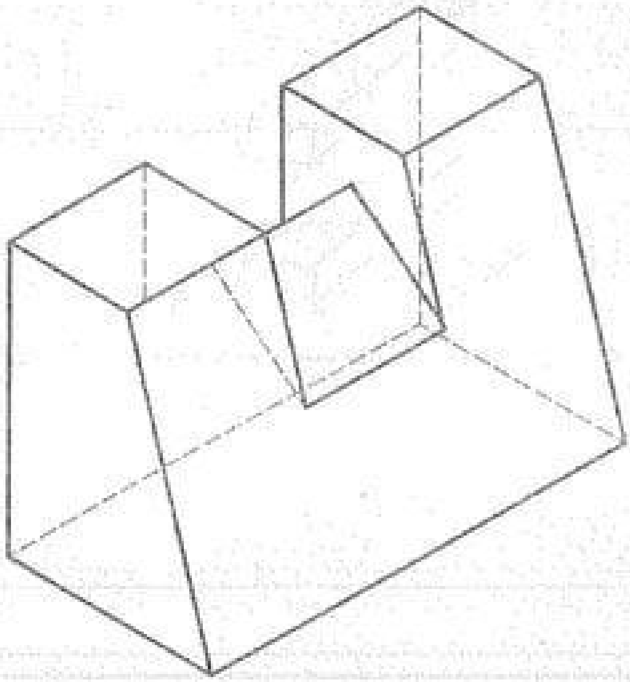
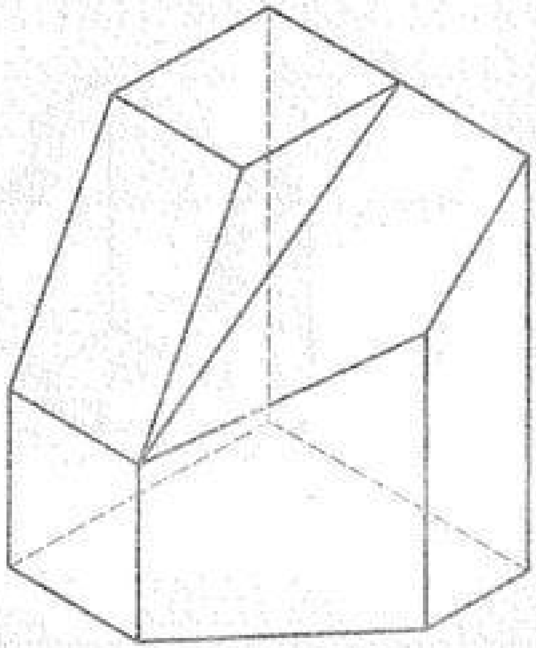
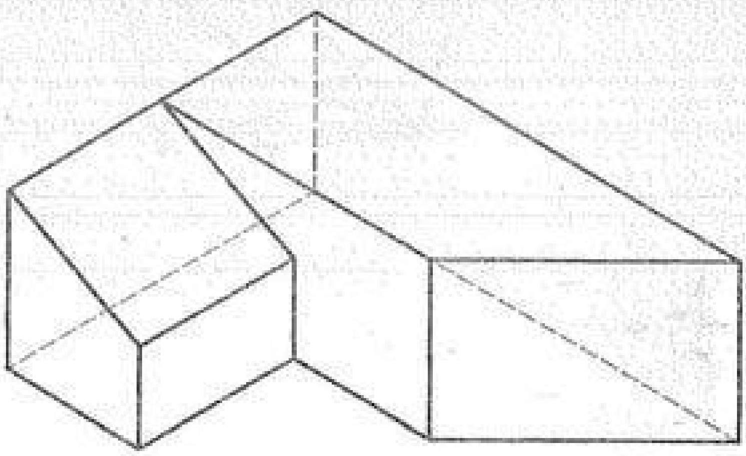
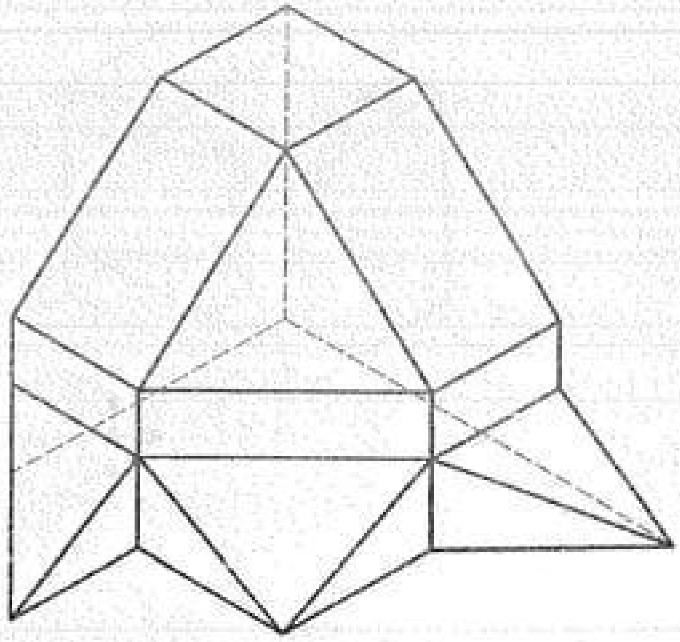


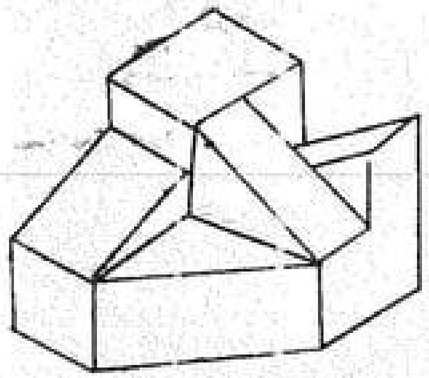
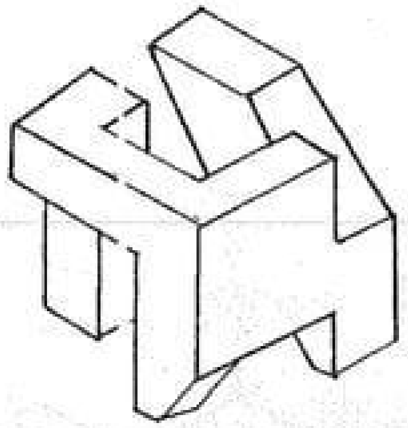
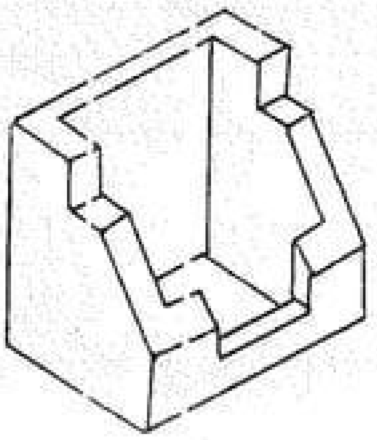
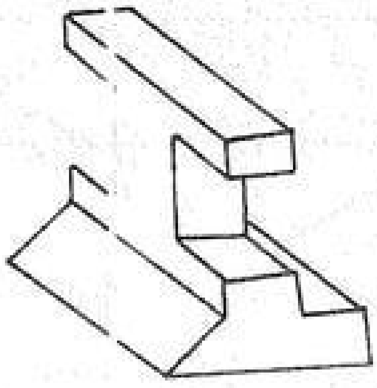
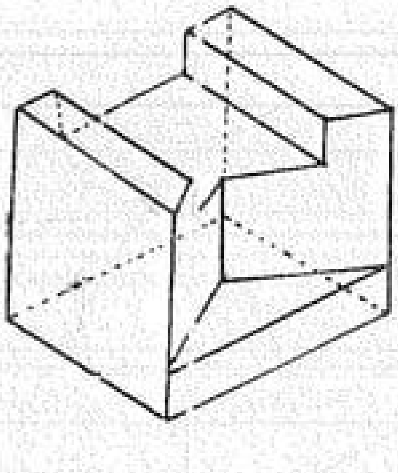
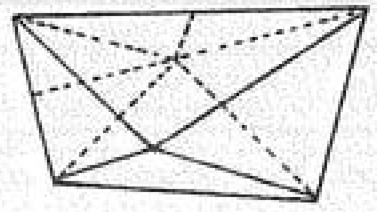


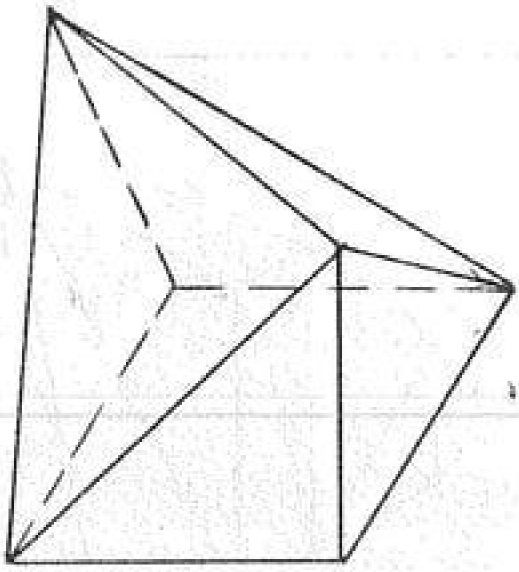
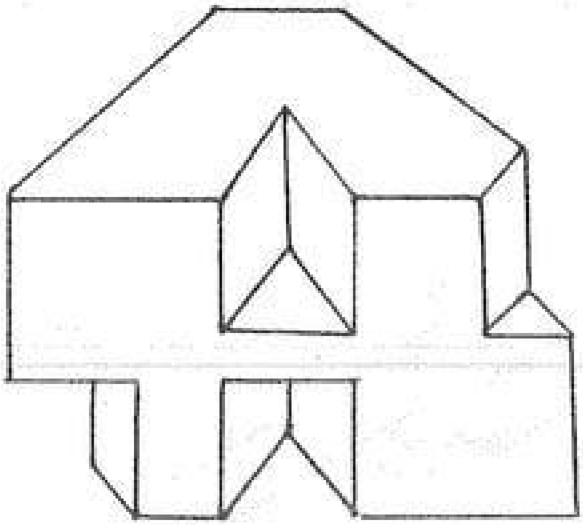
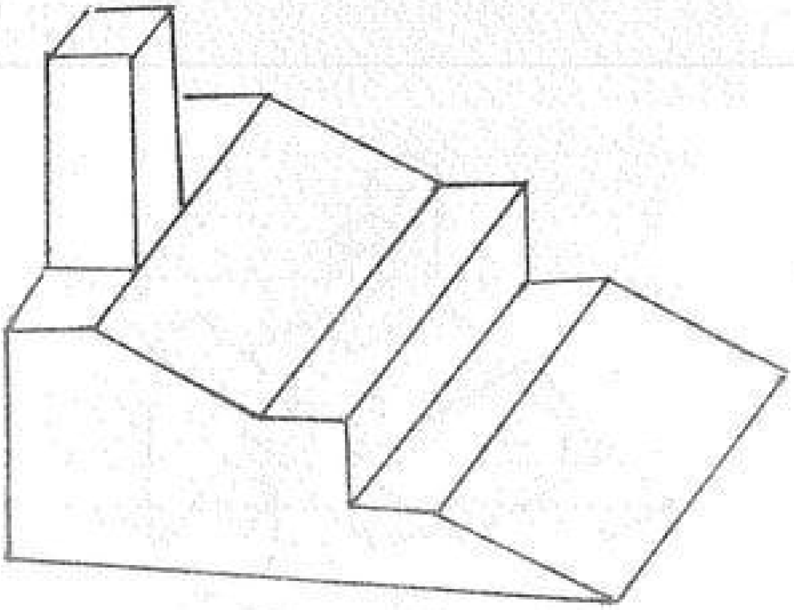
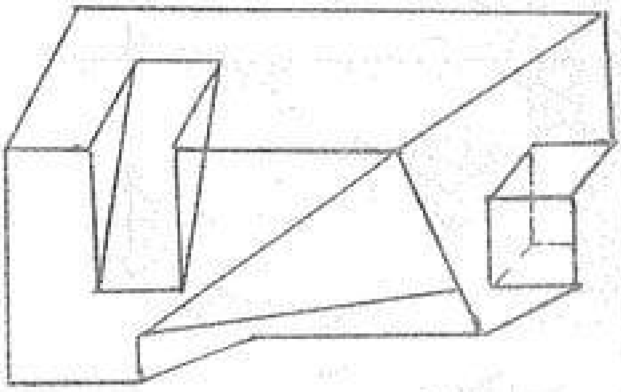
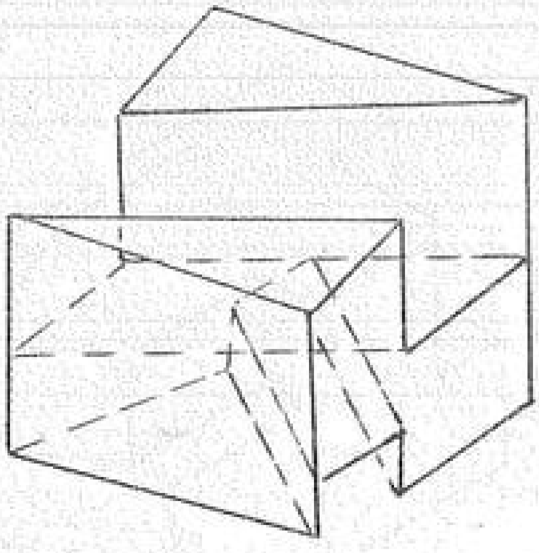
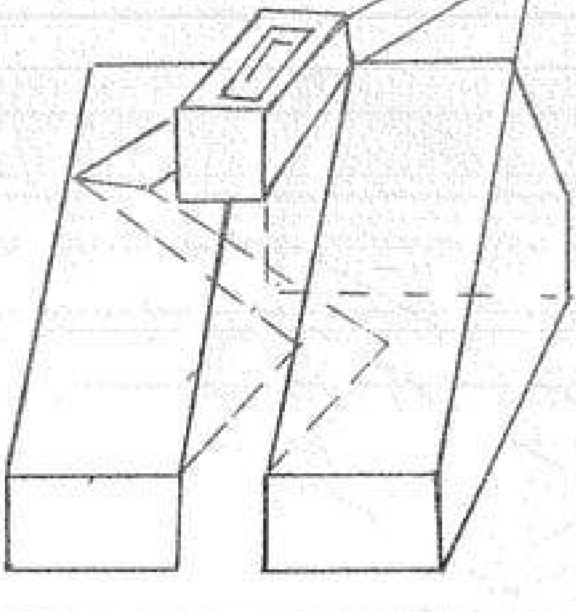


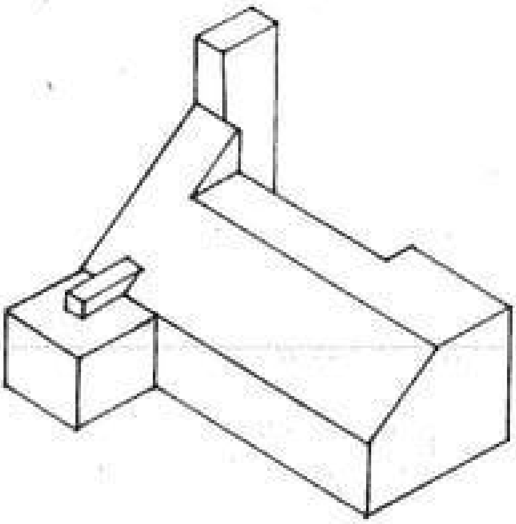
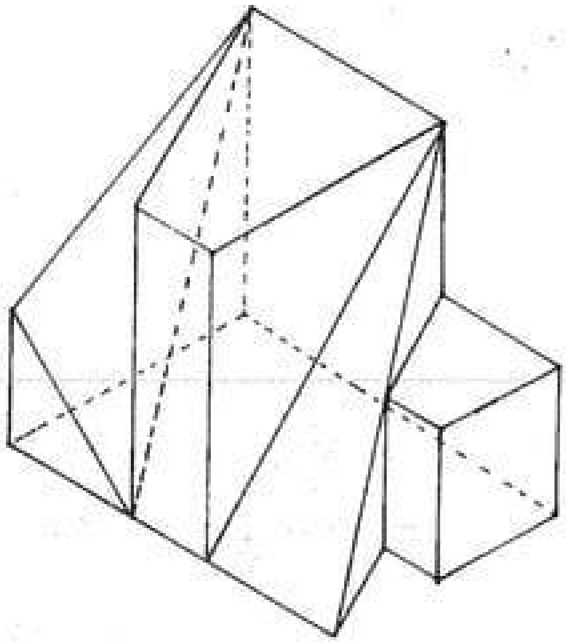
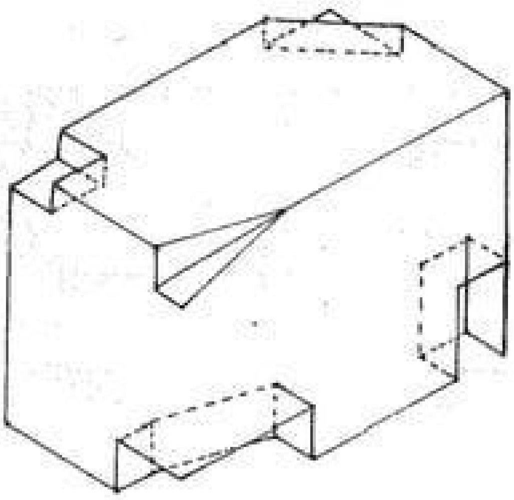
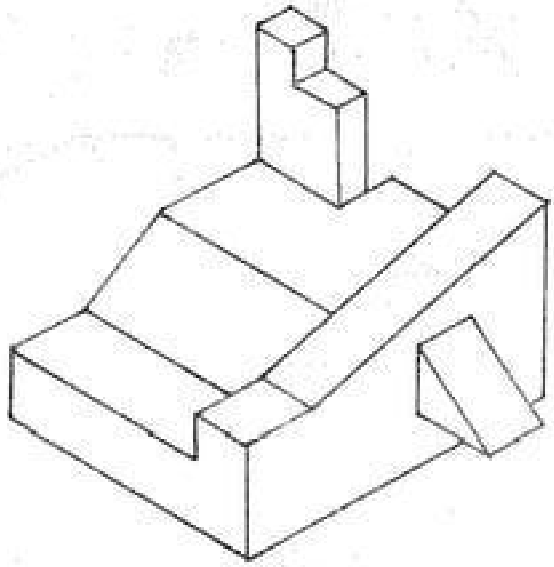
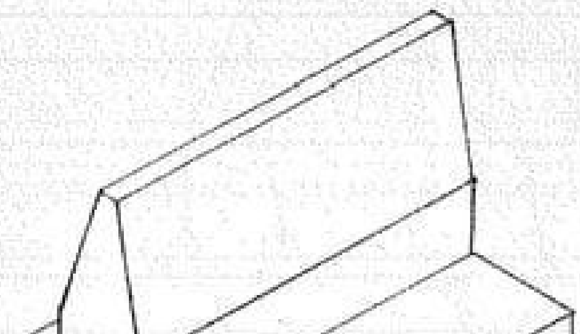
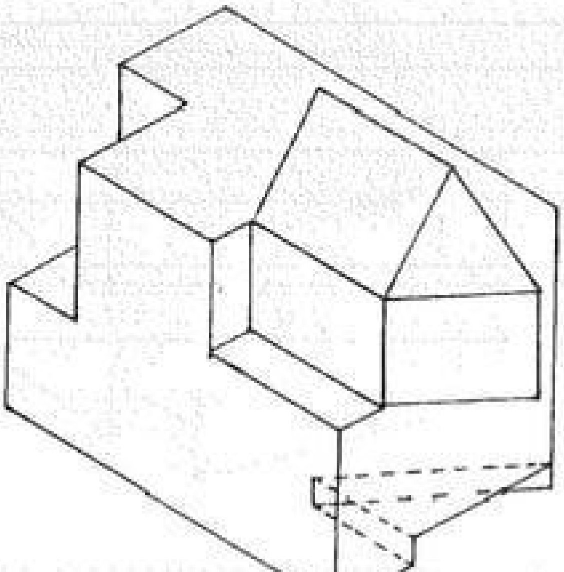


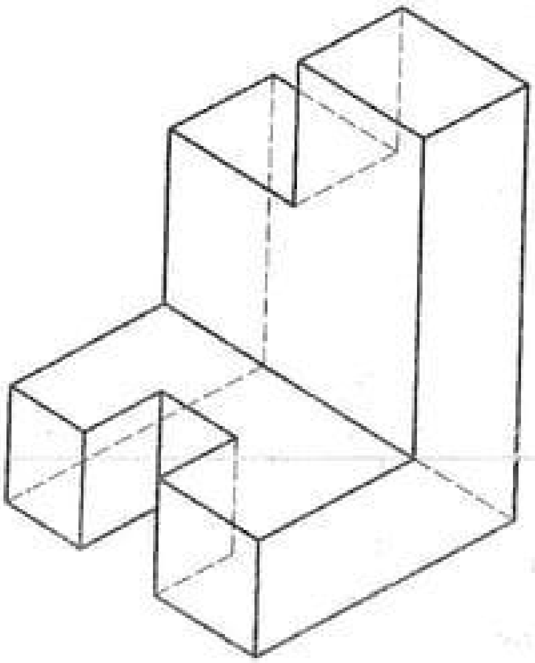
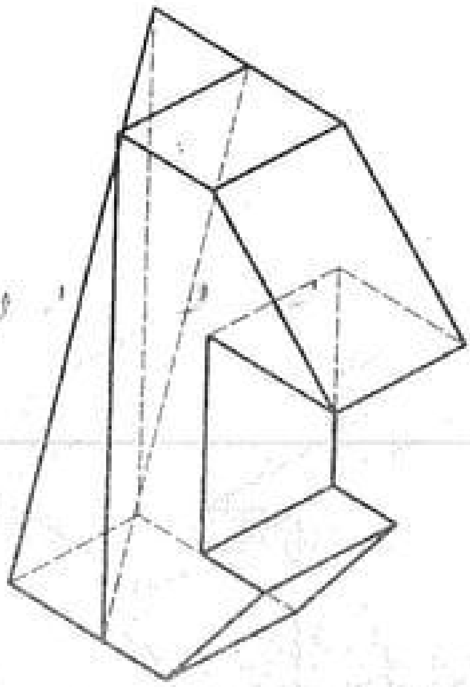
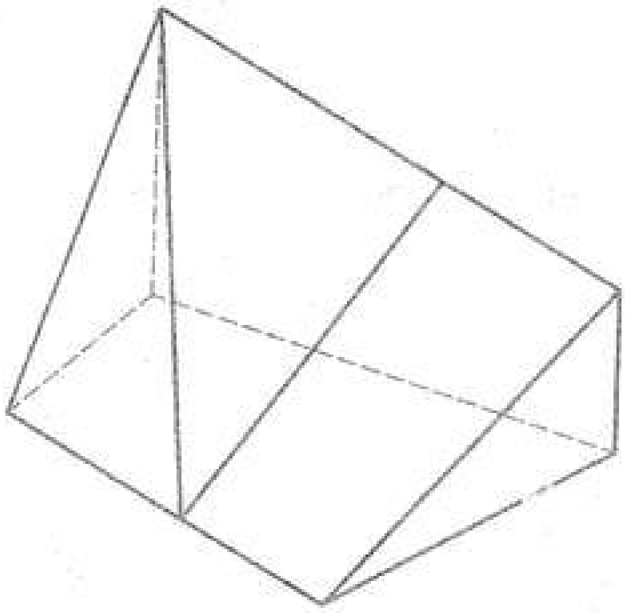
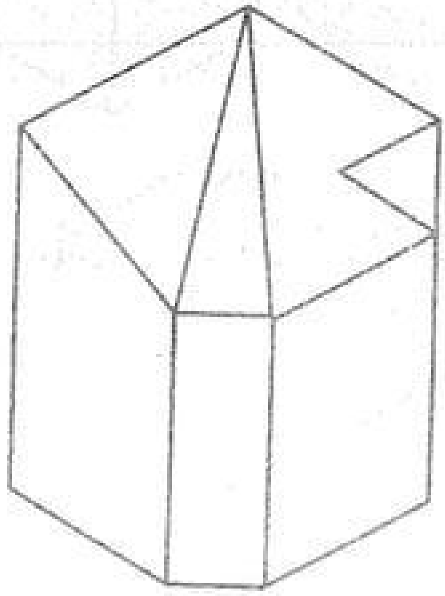
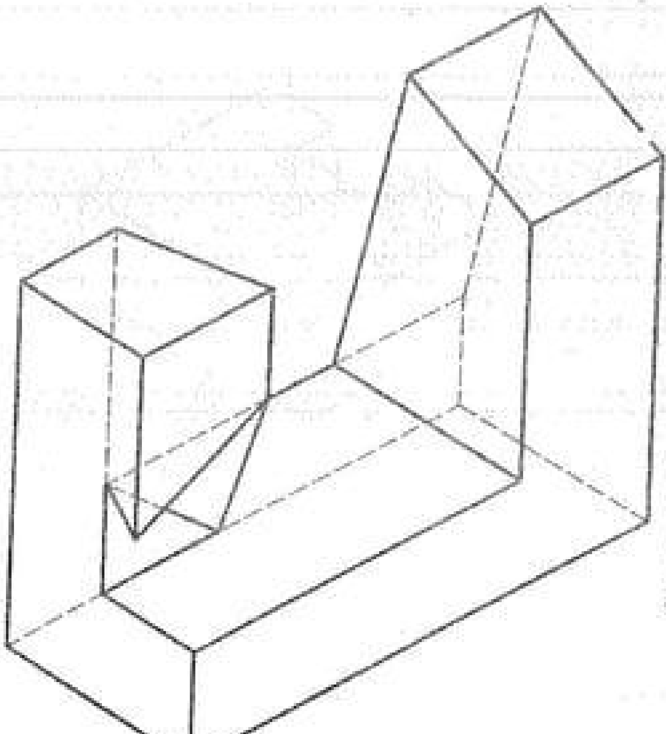
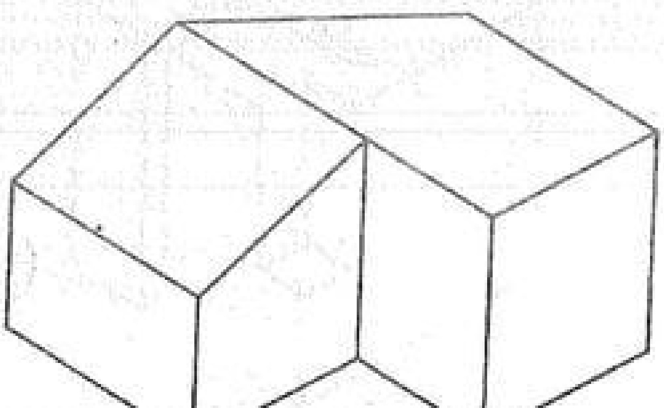







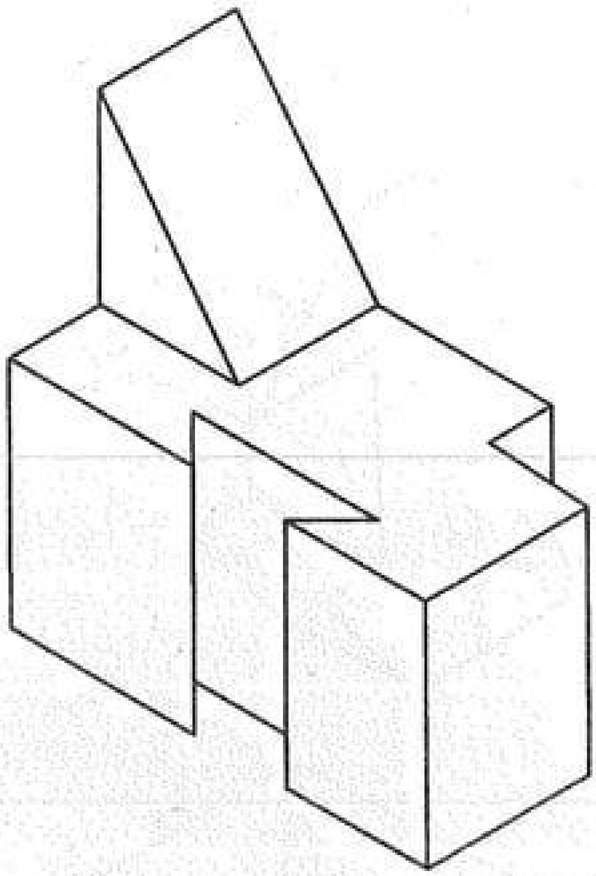







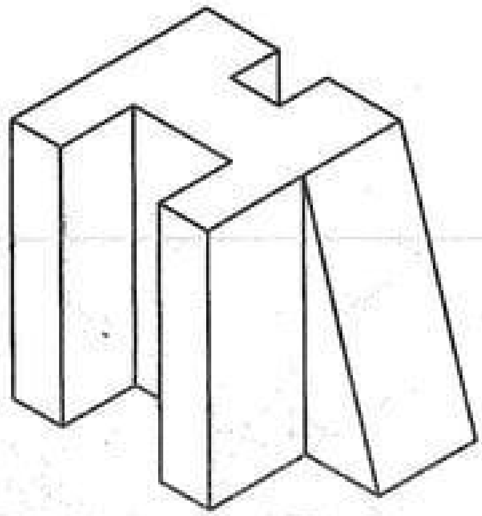







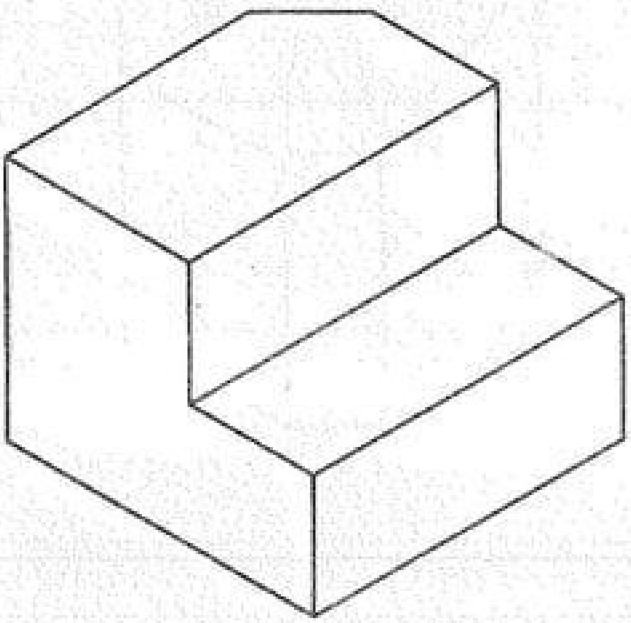







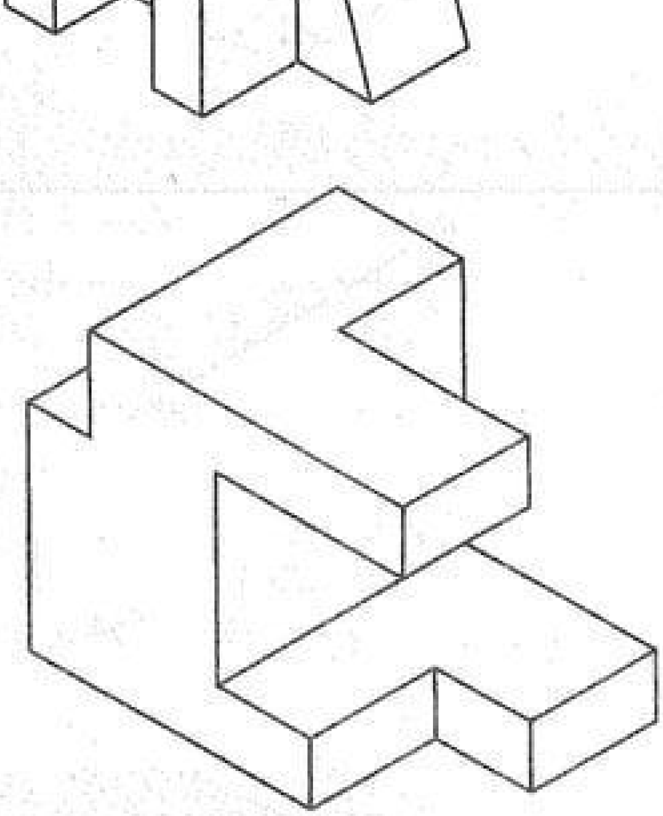







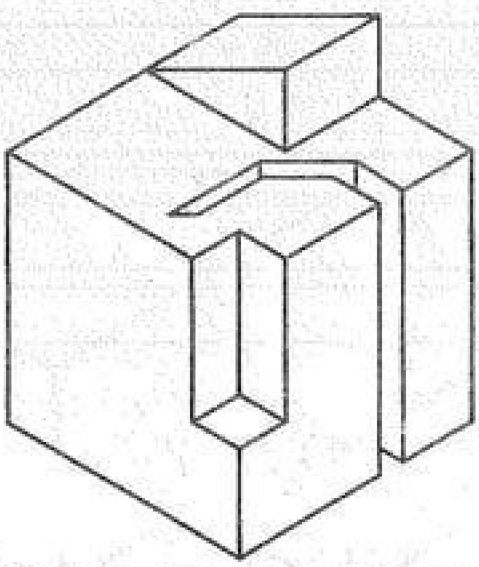







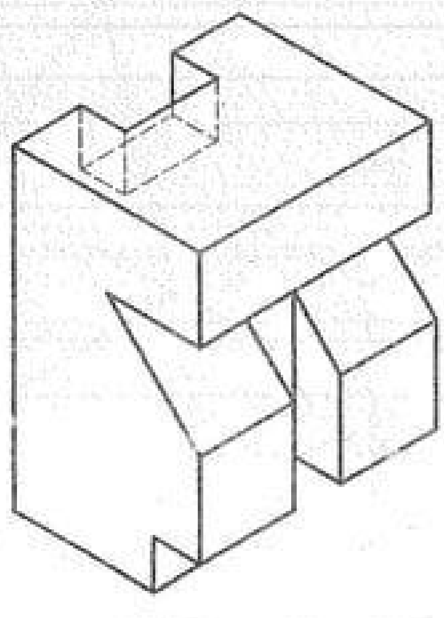


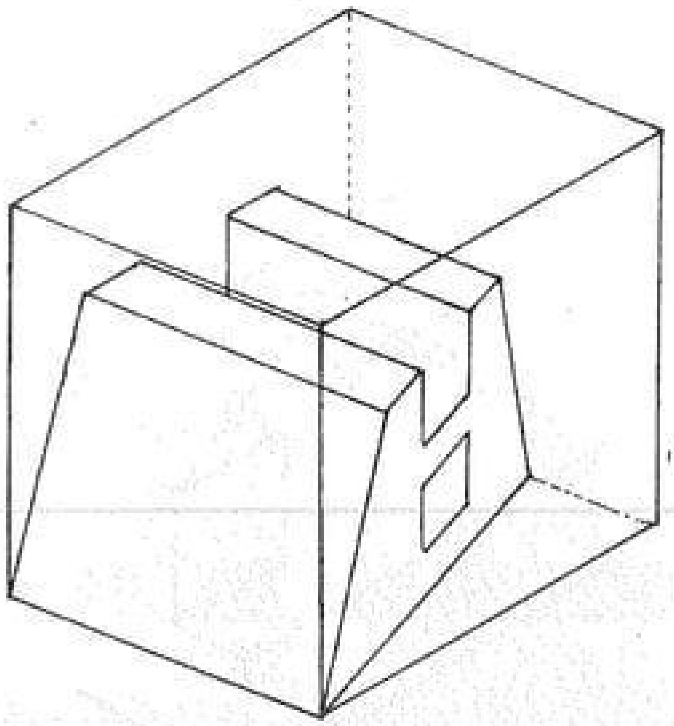
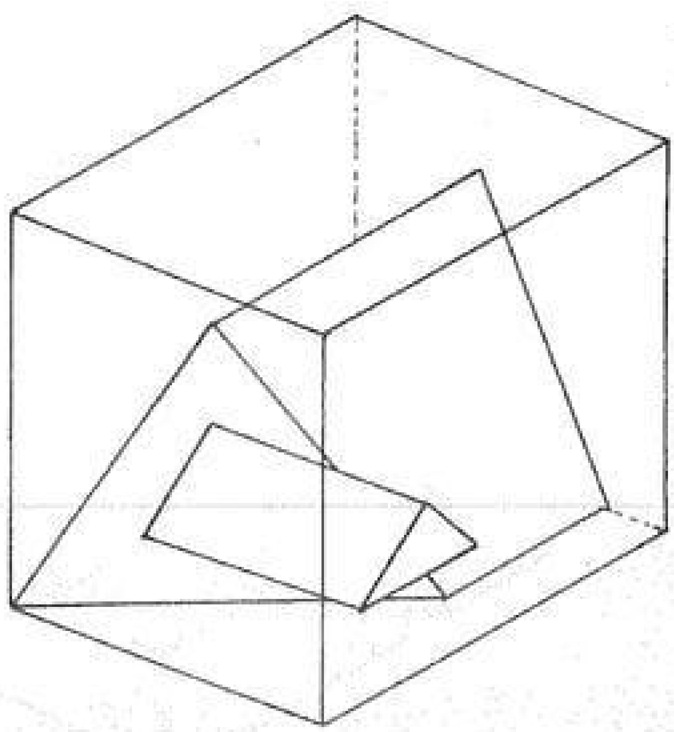
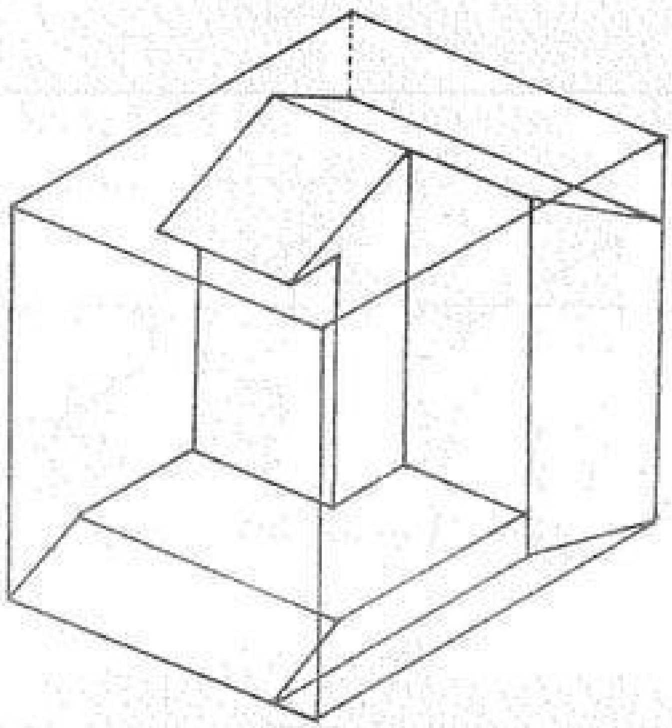
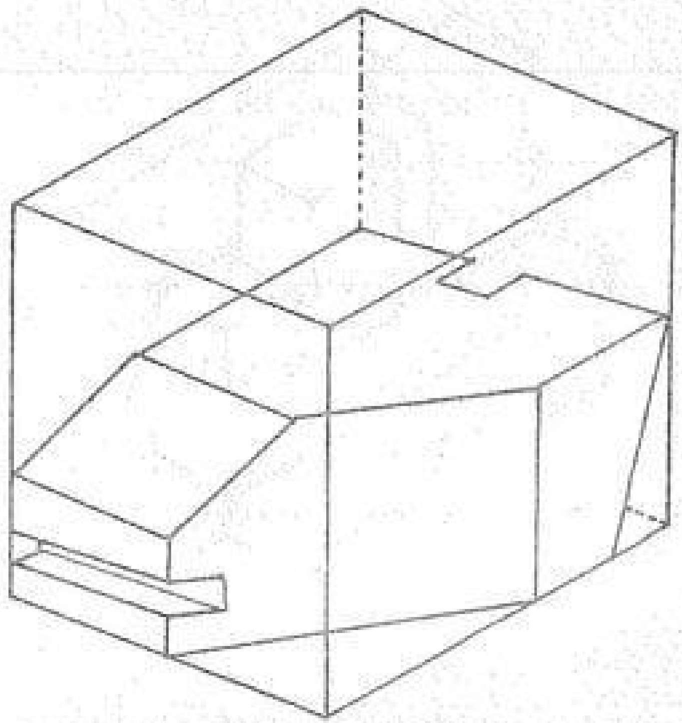
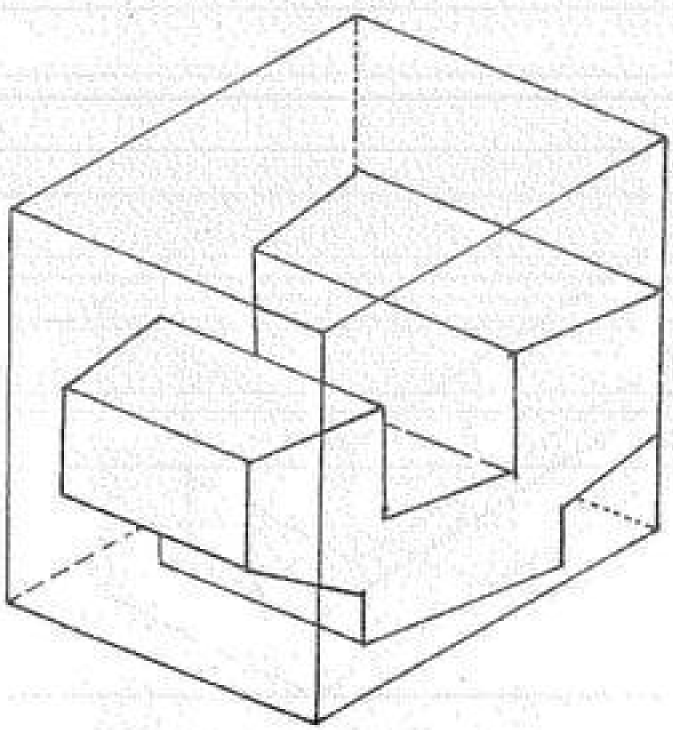
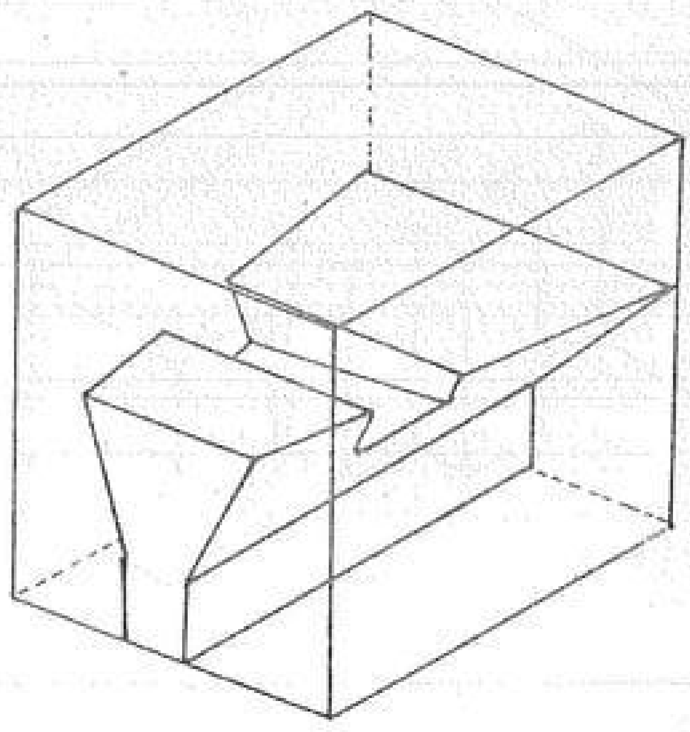


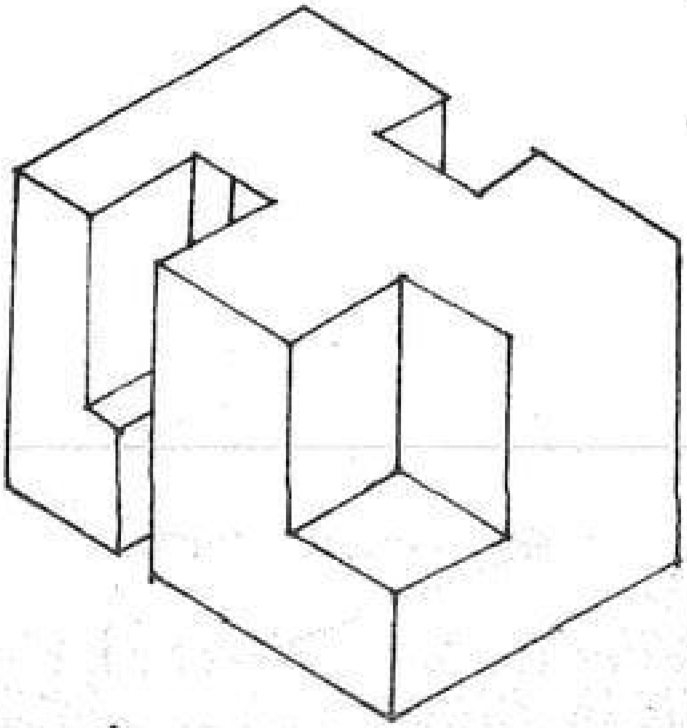


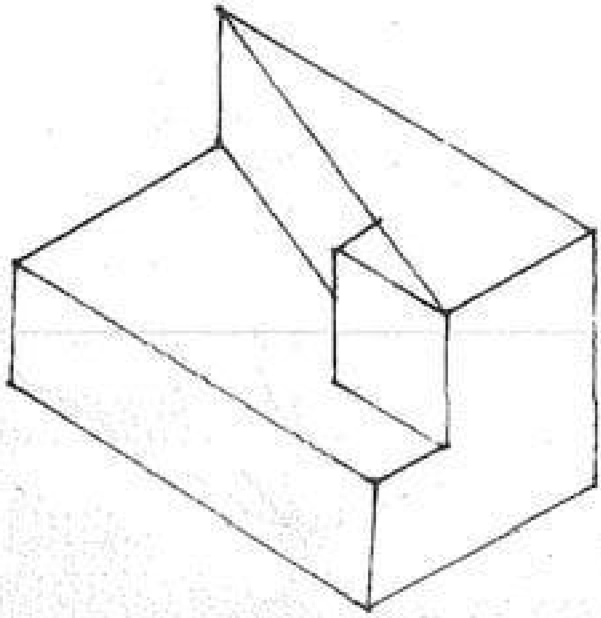


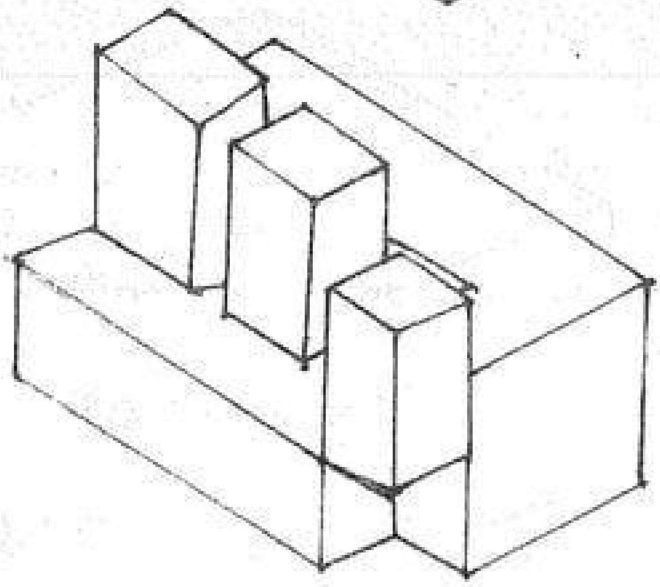


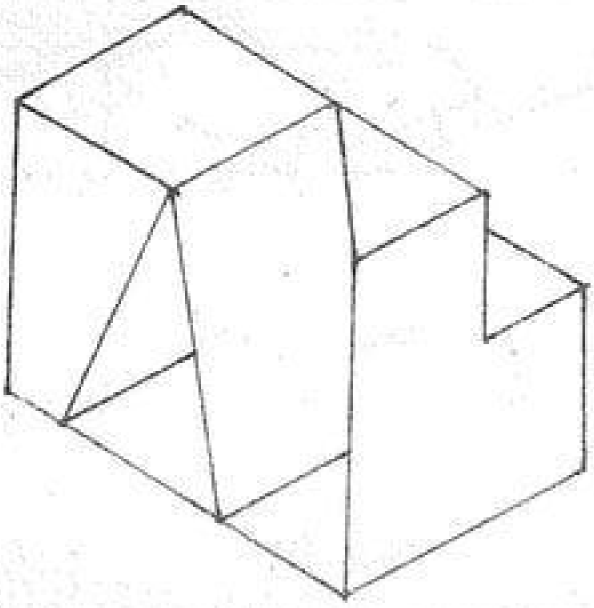


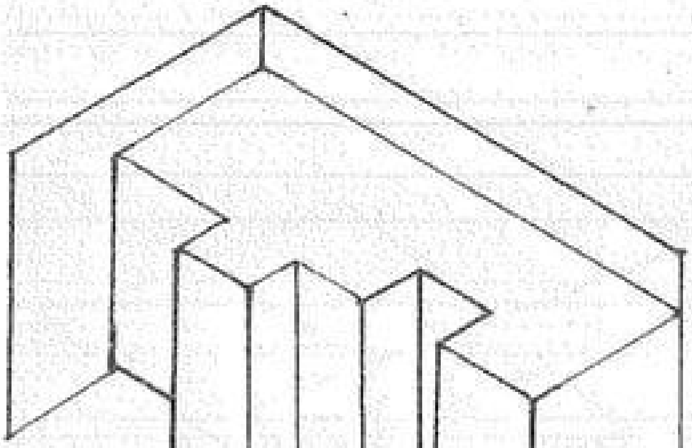







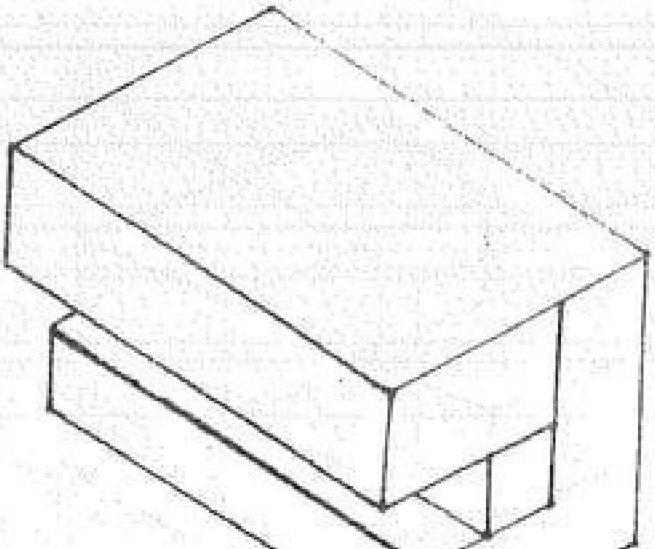


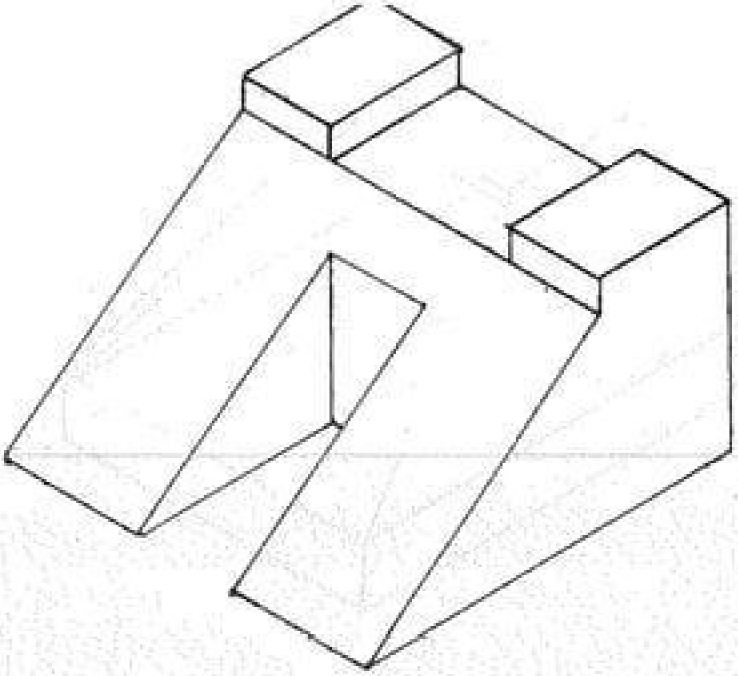
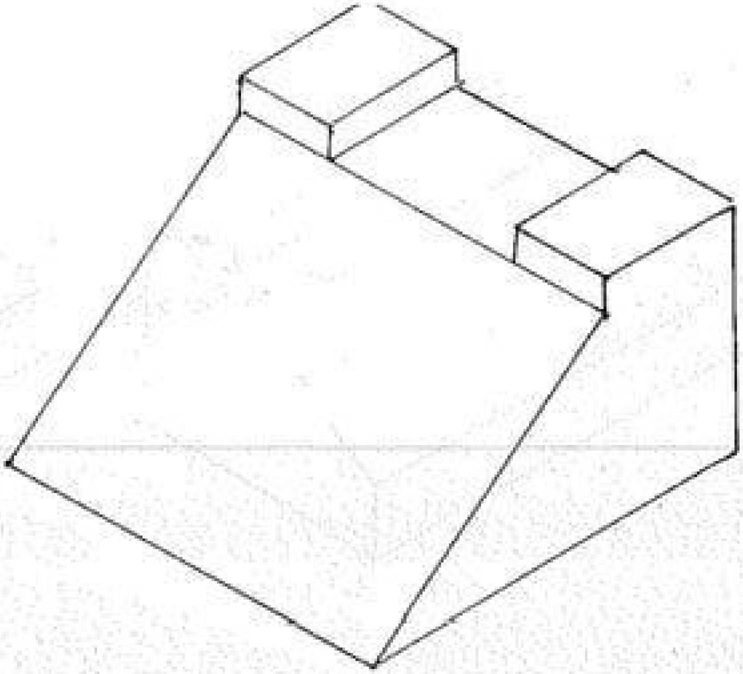
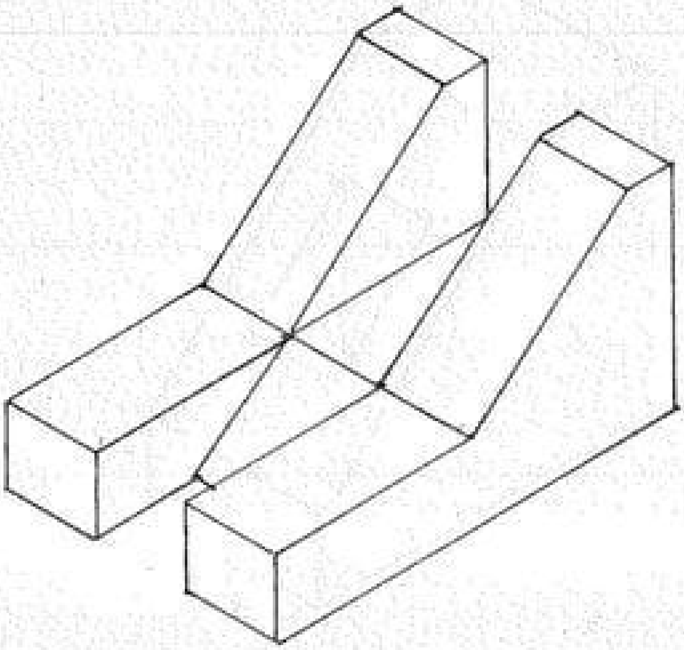
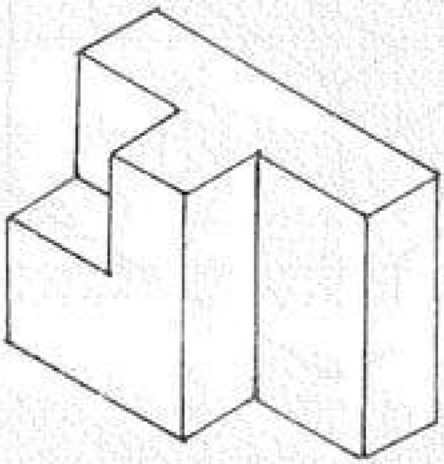
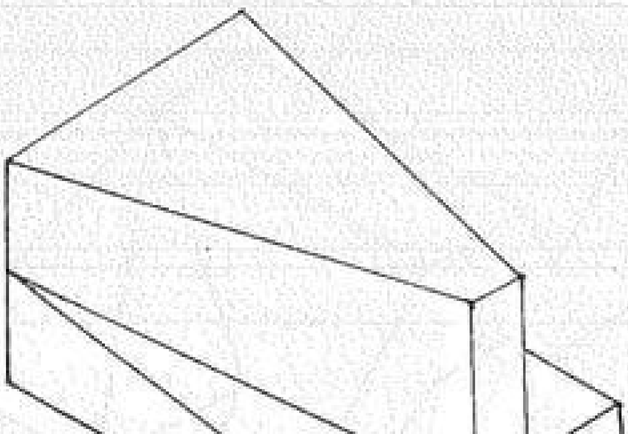
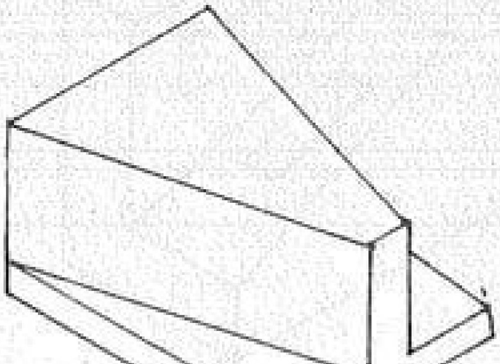


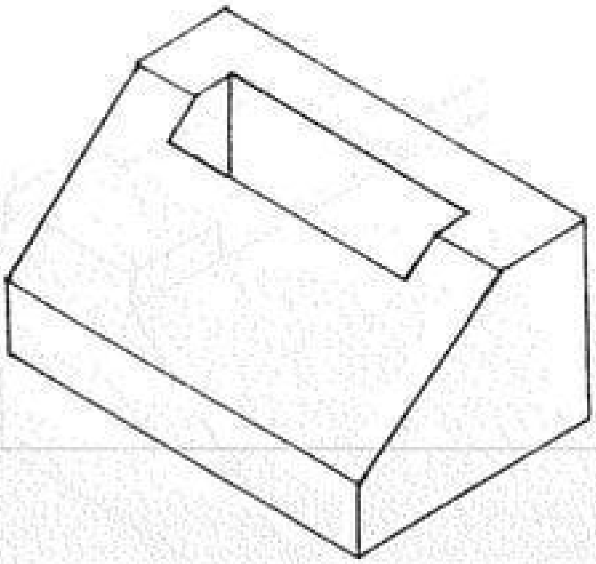
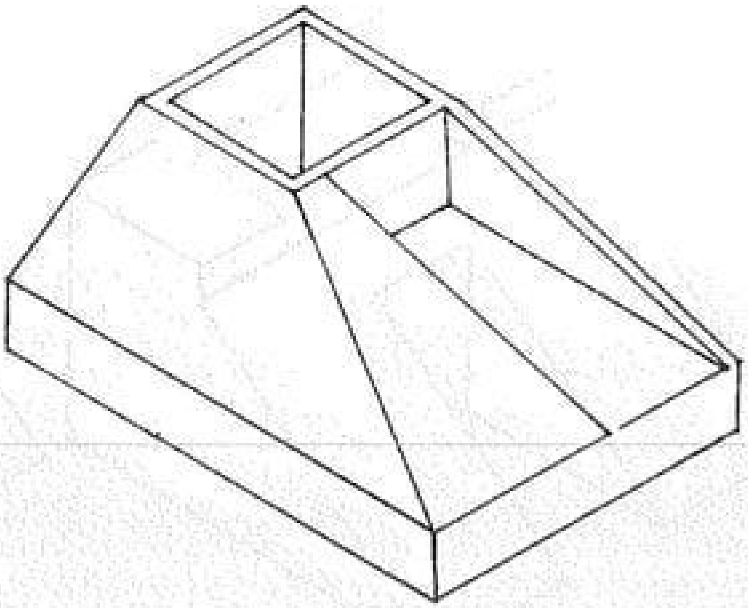
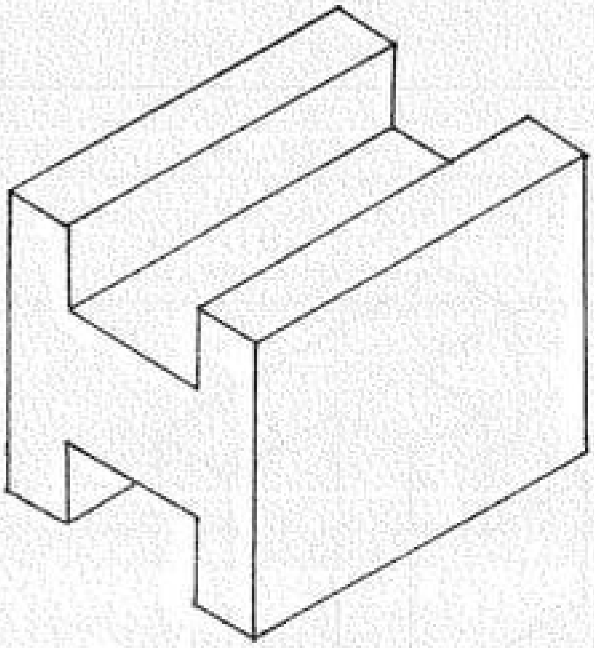
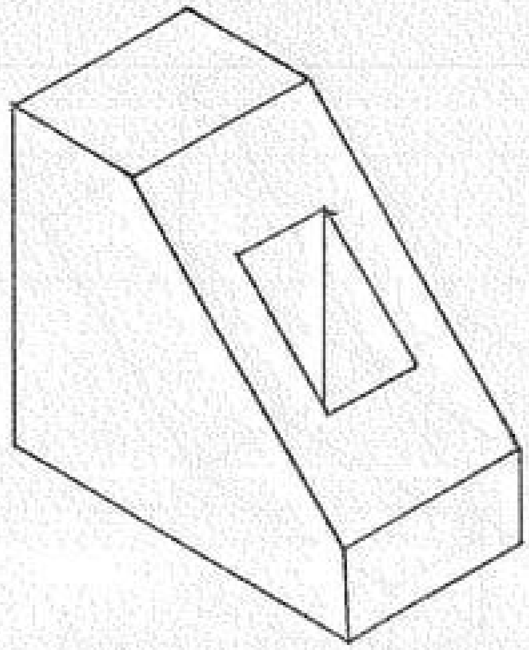
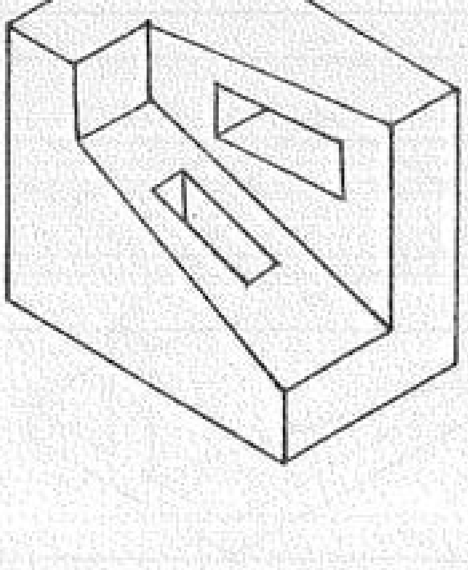
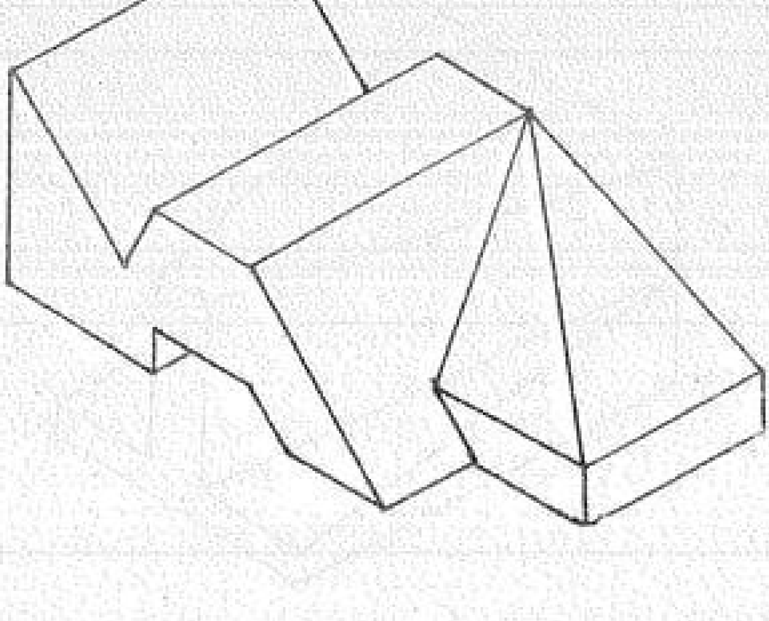


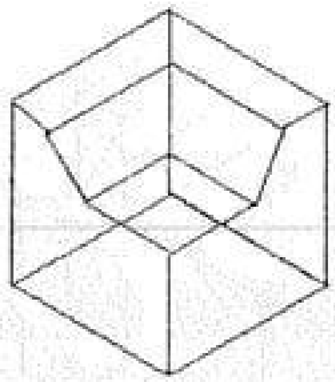
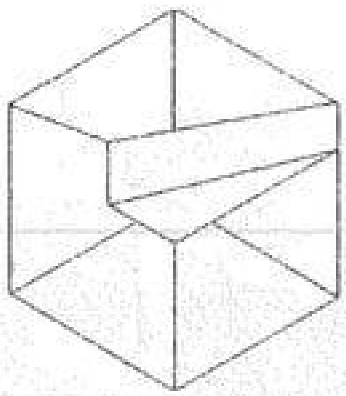
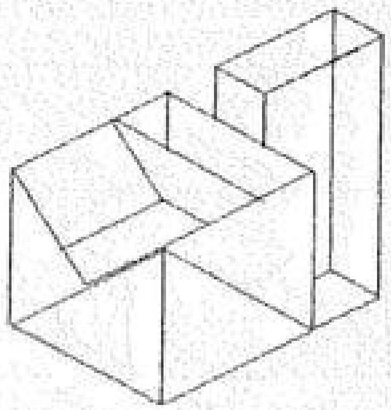
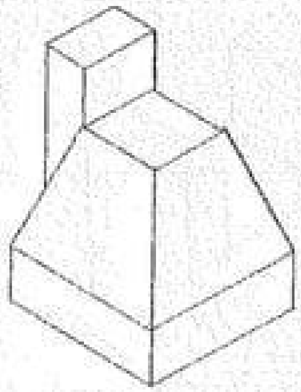
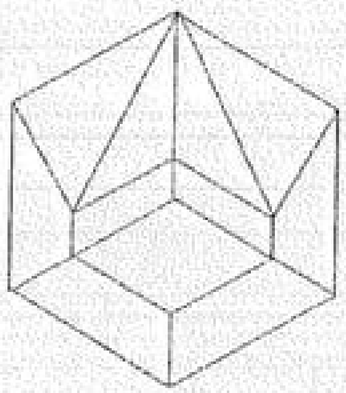
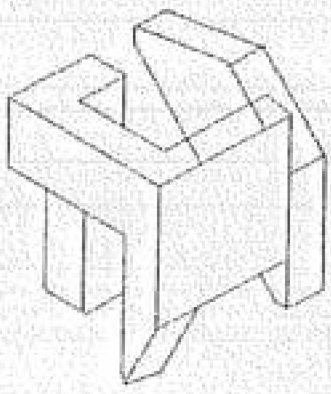


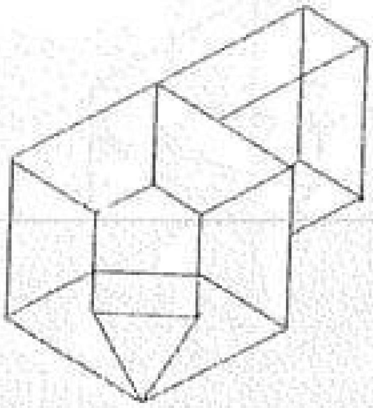


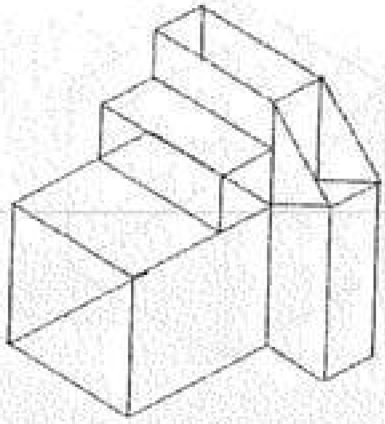


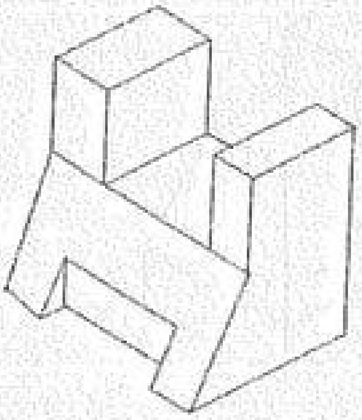







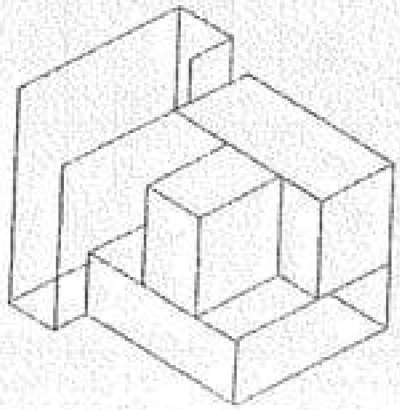







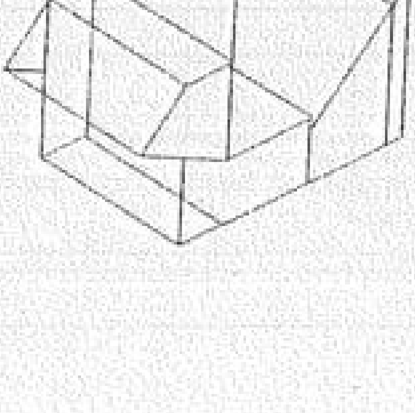







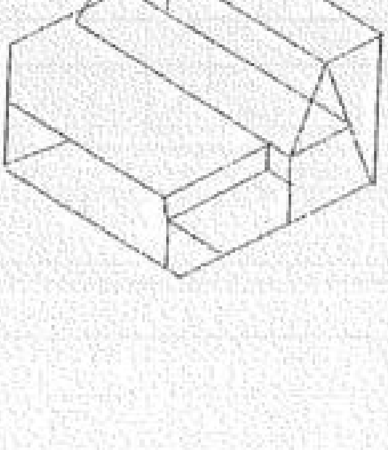


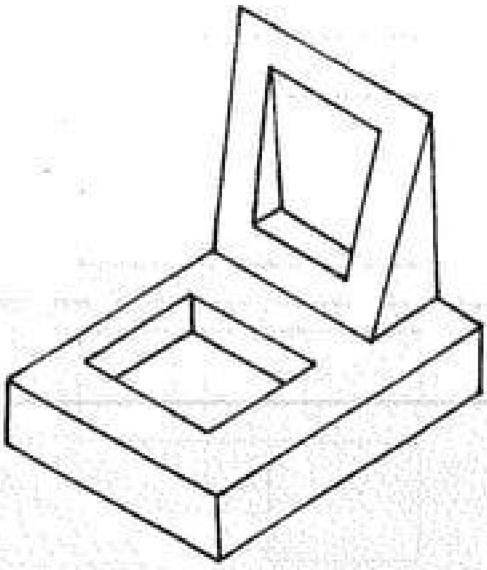


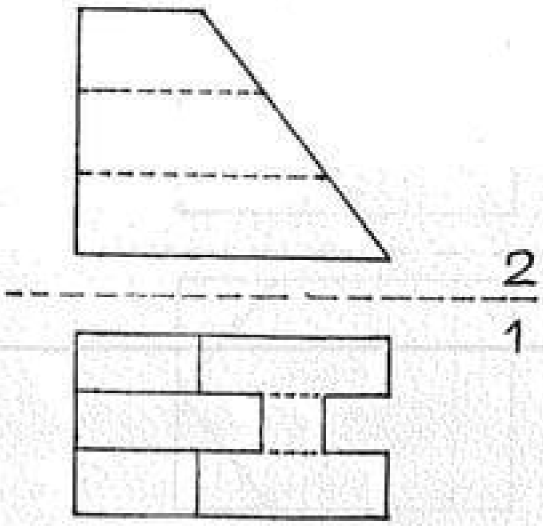


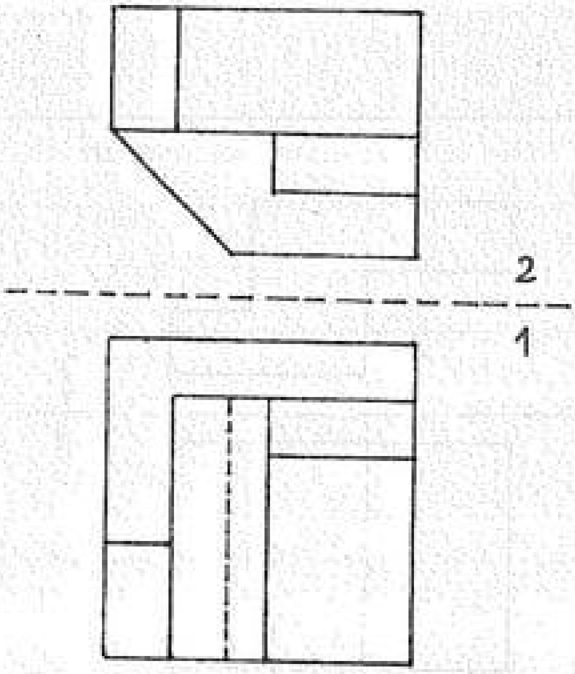


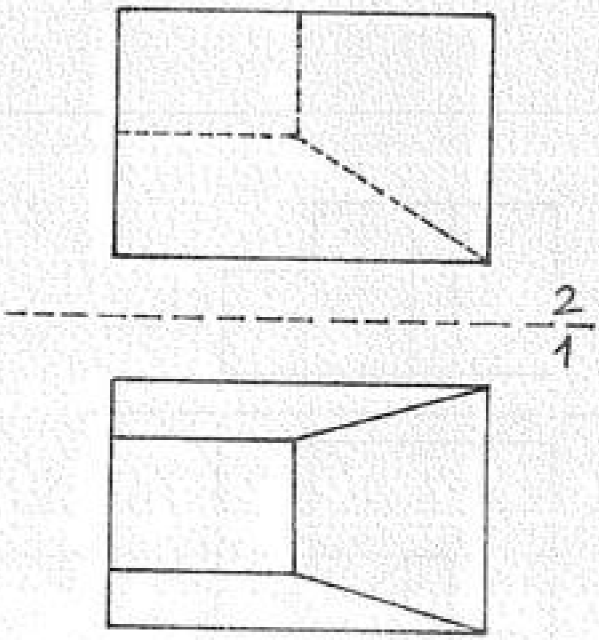


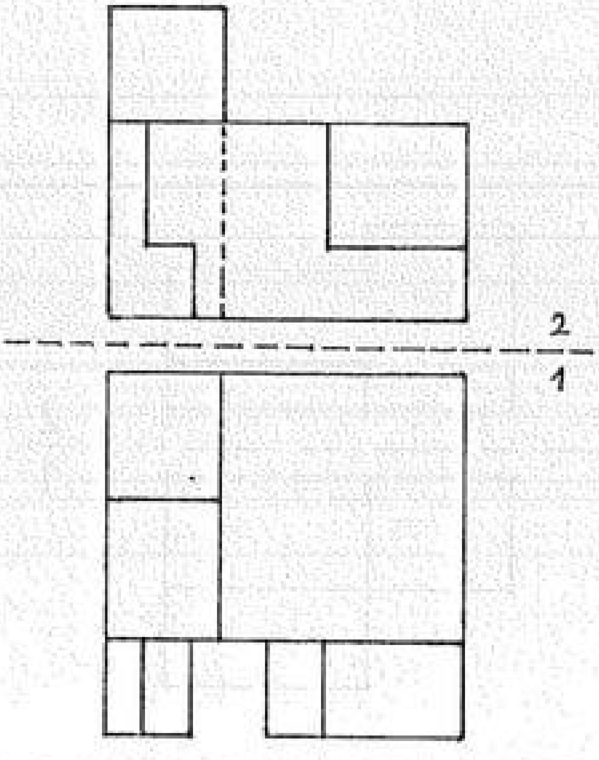


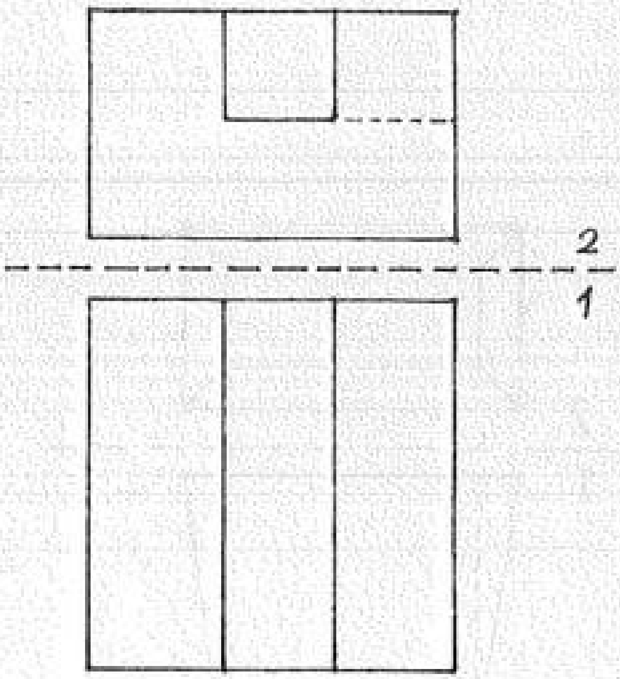


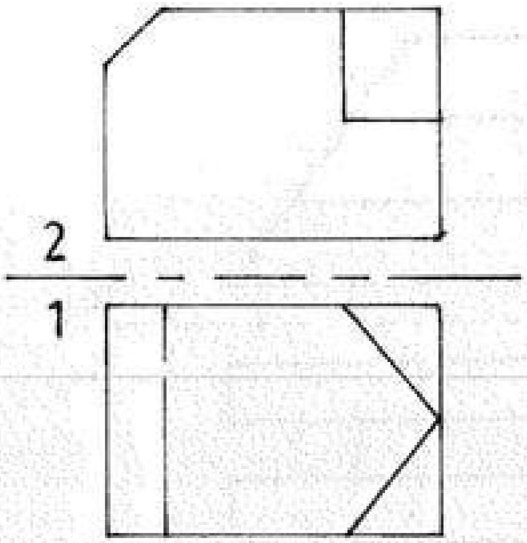

2
1

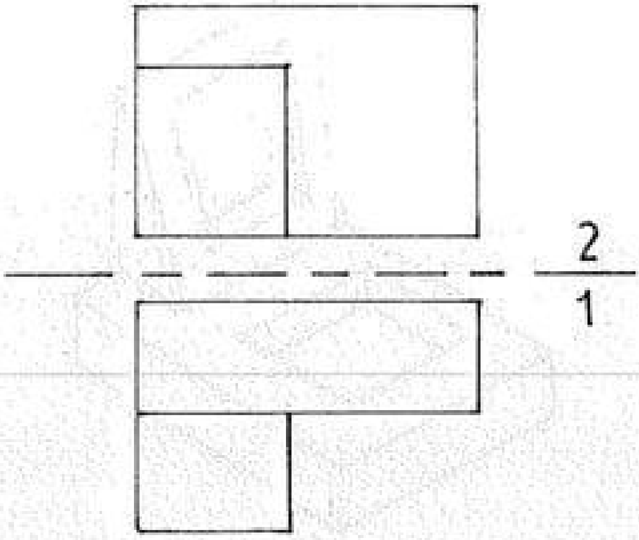

2
1

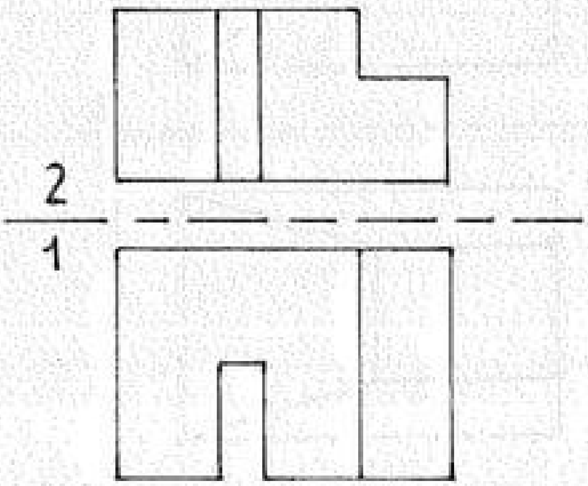

2
1

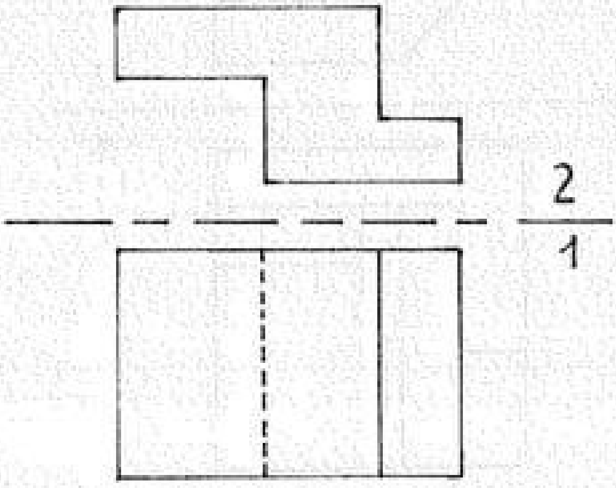

2
1

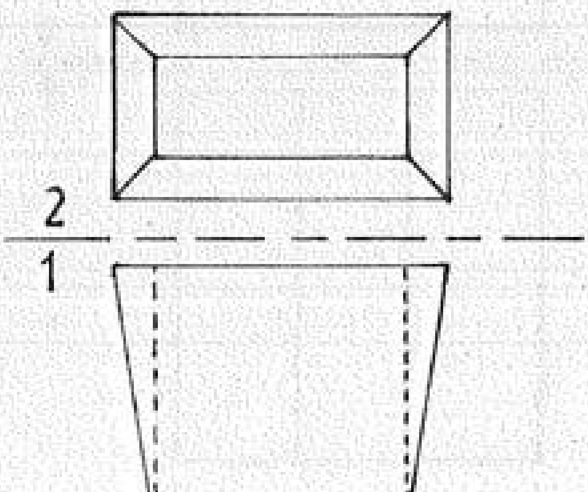

2
1

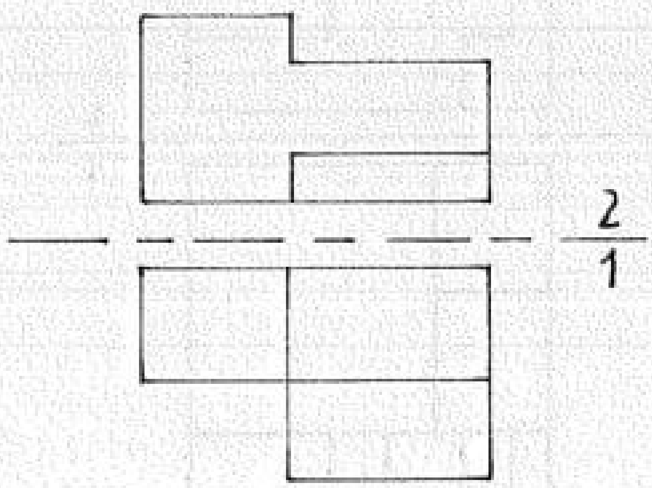

2
1

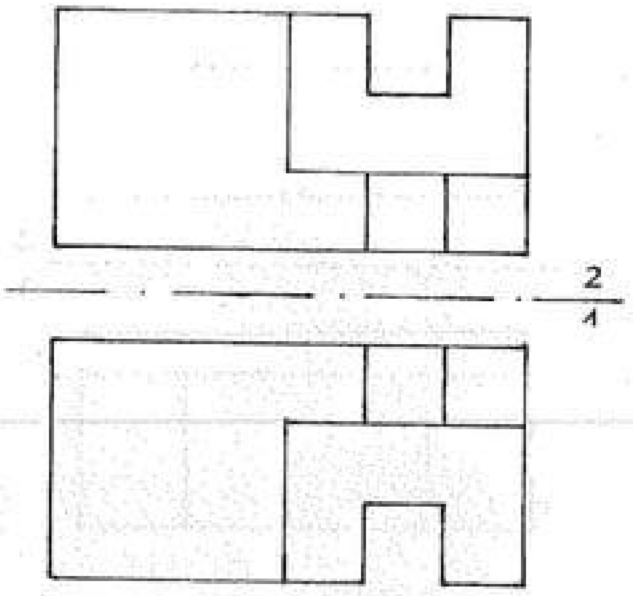

2
1

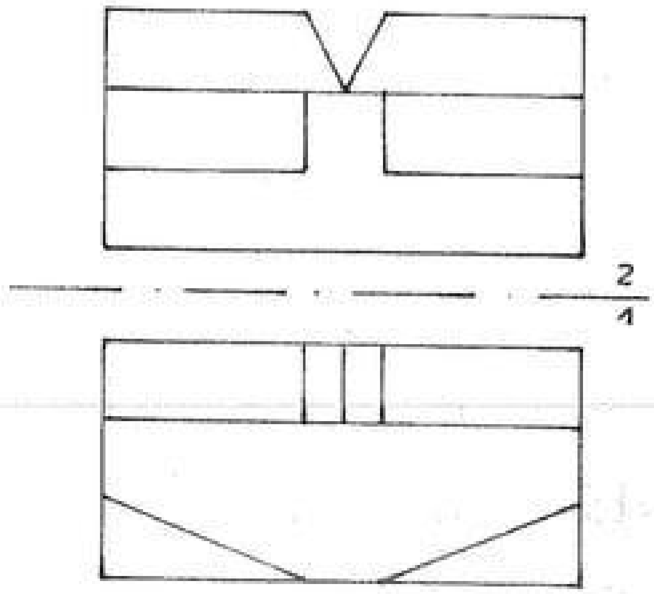

2
1

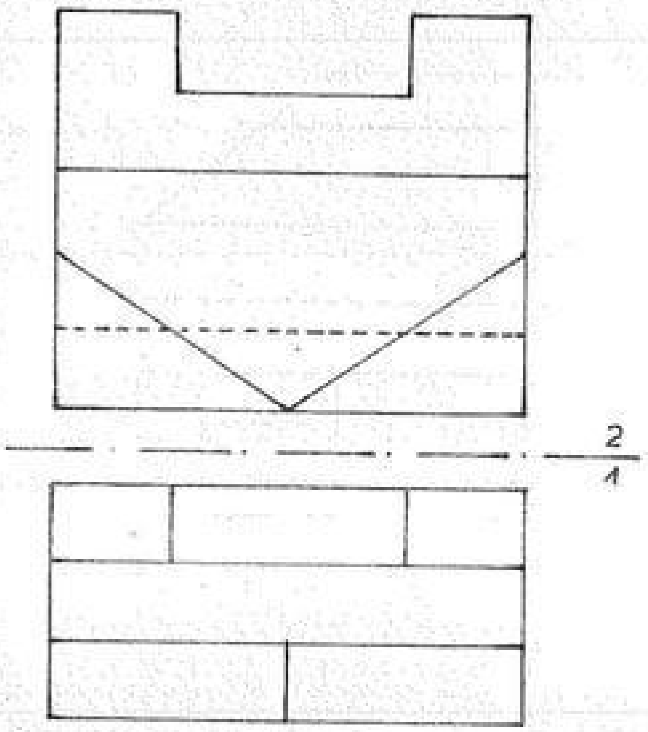

2
1

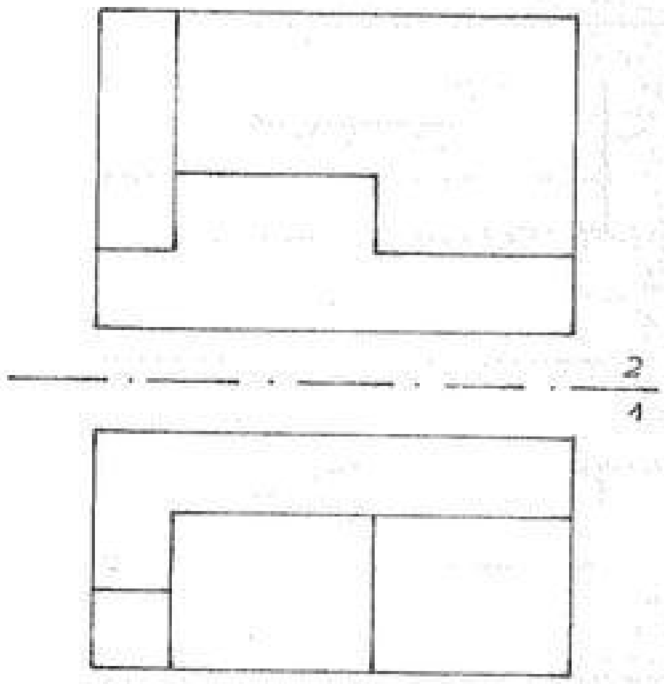

2
1

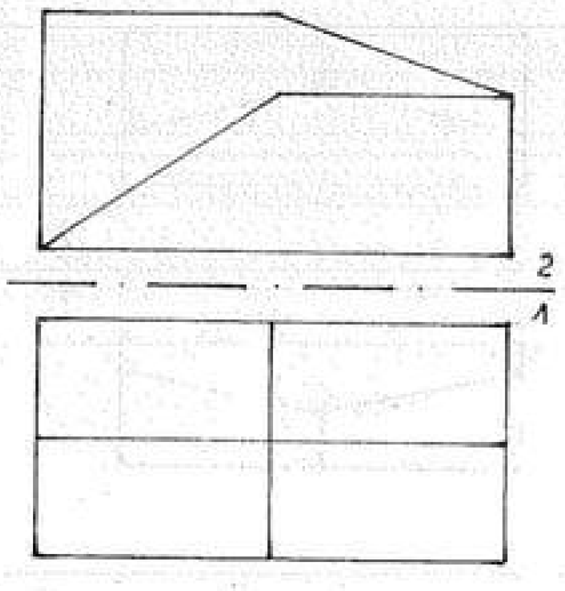

2
1

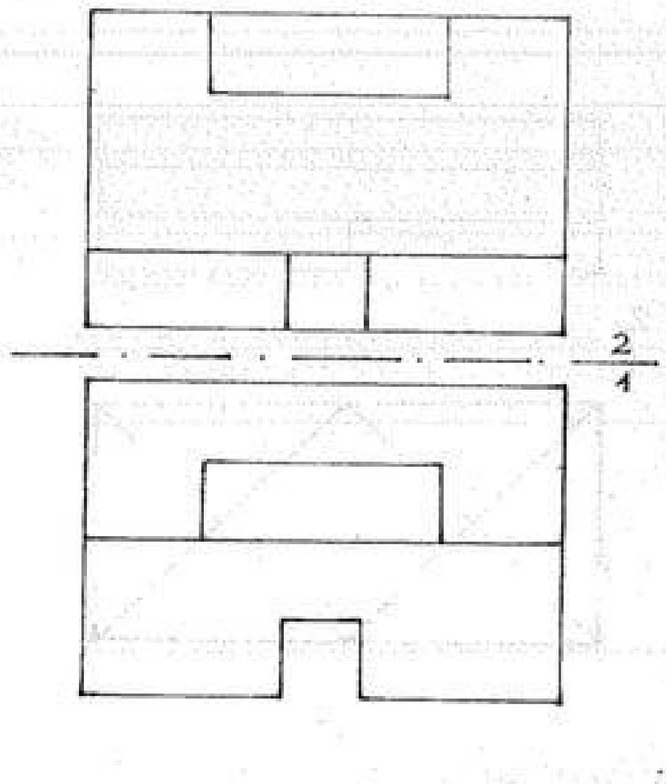

2
1

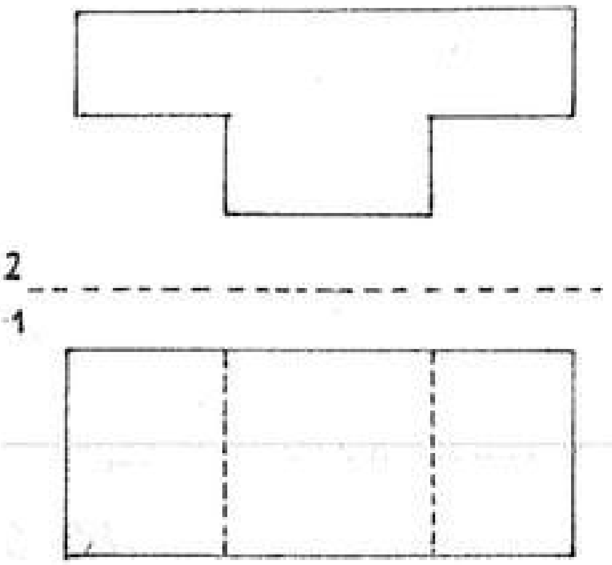

2
1

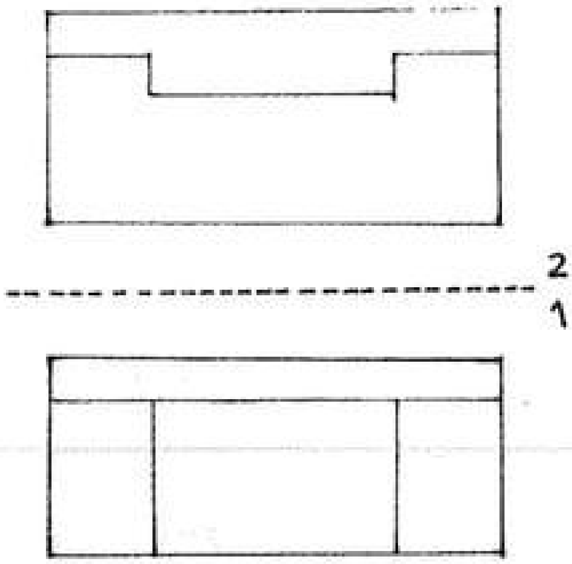

2
1

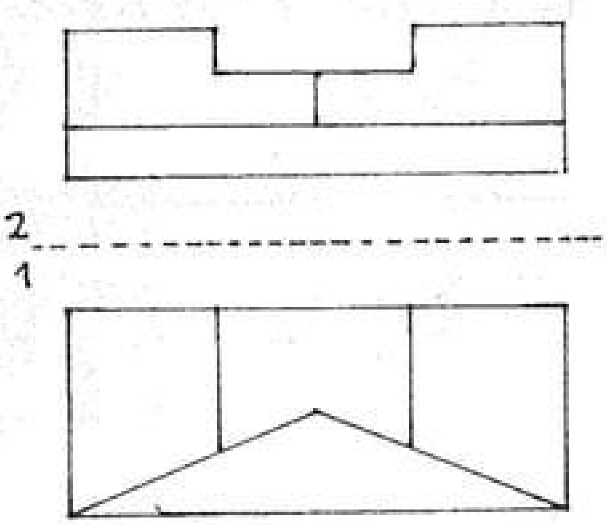

2
1

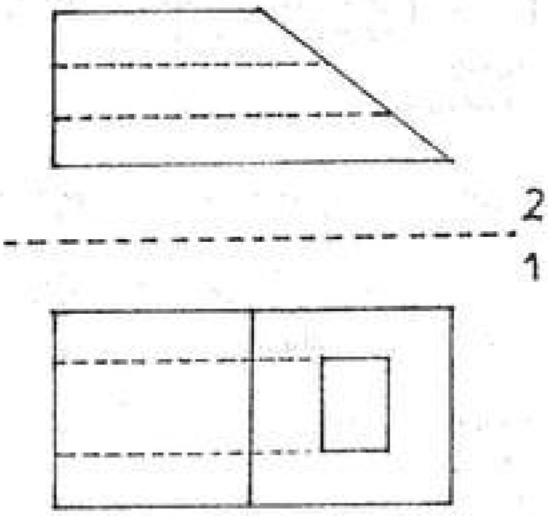

2
1

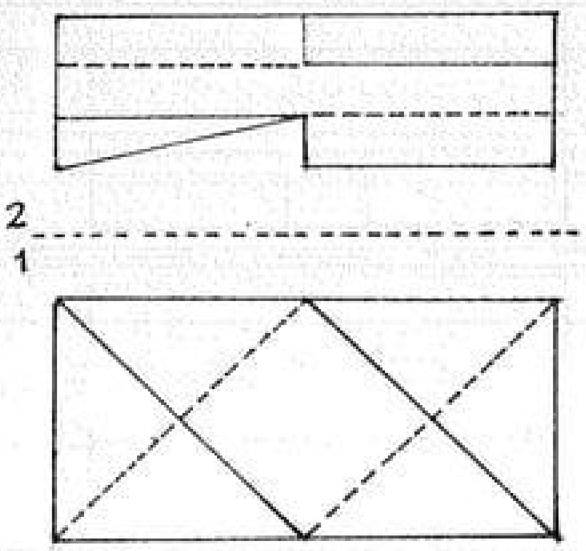

2
1

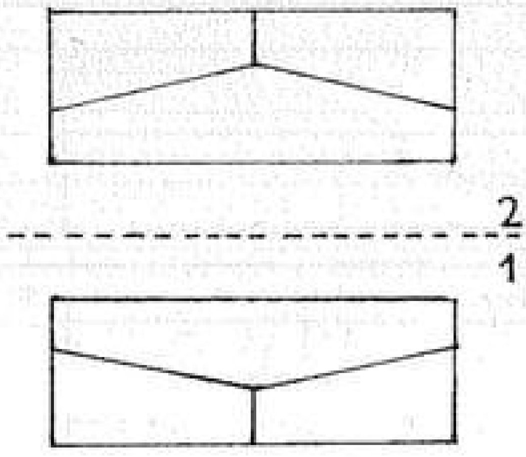

2
1

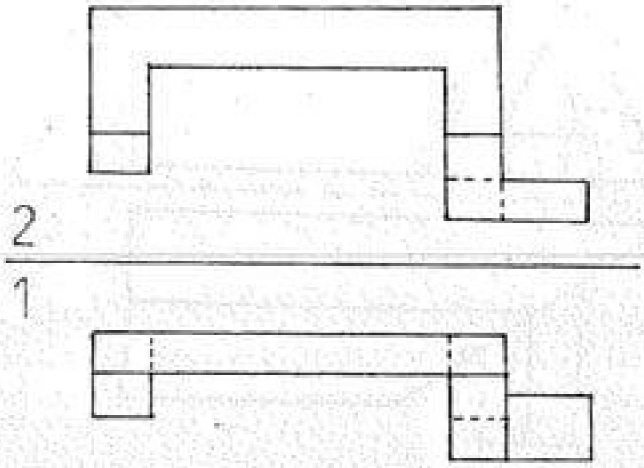

2
1

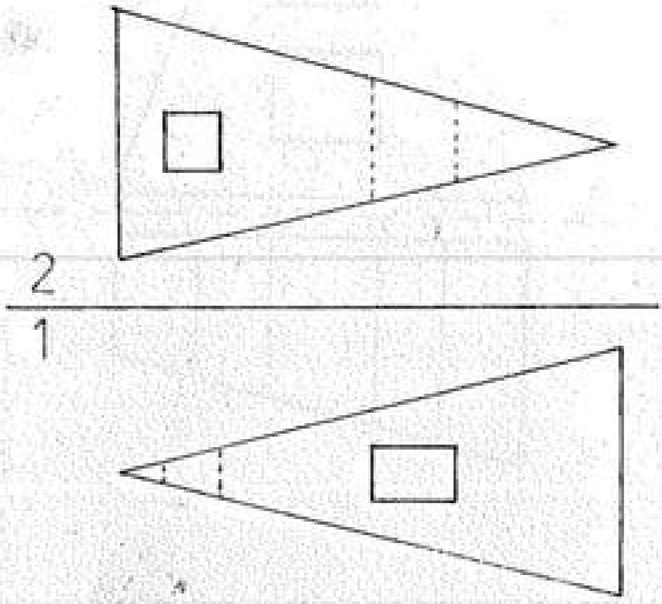

2
1

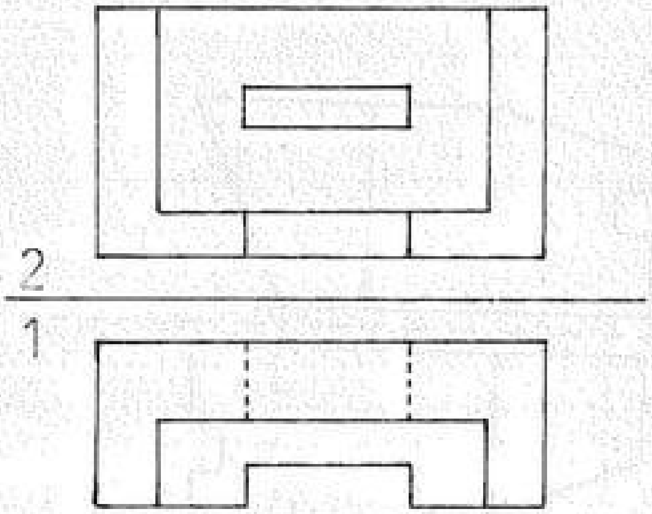

2
1

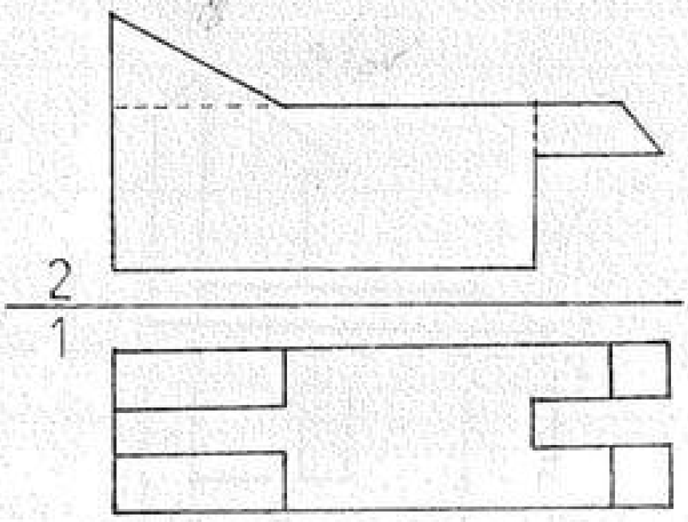

2
1

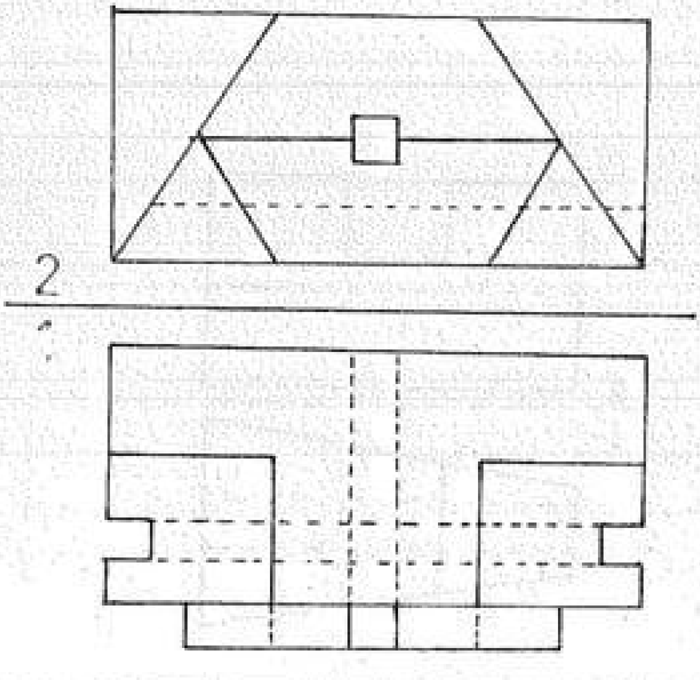

2
1

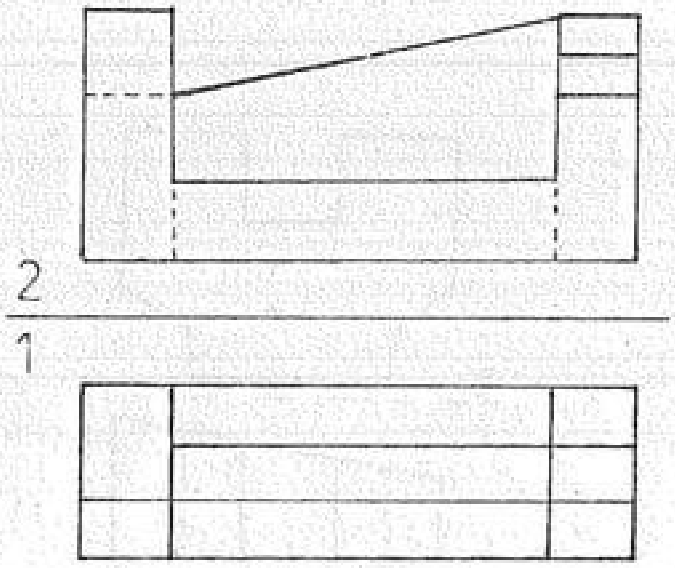

2
1

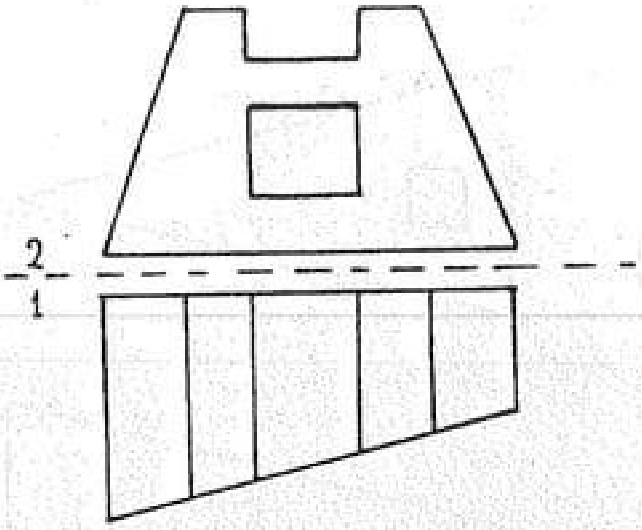
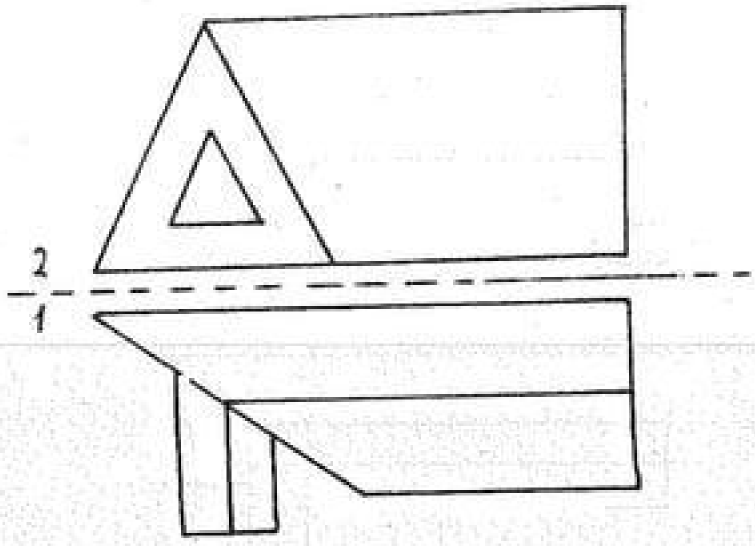
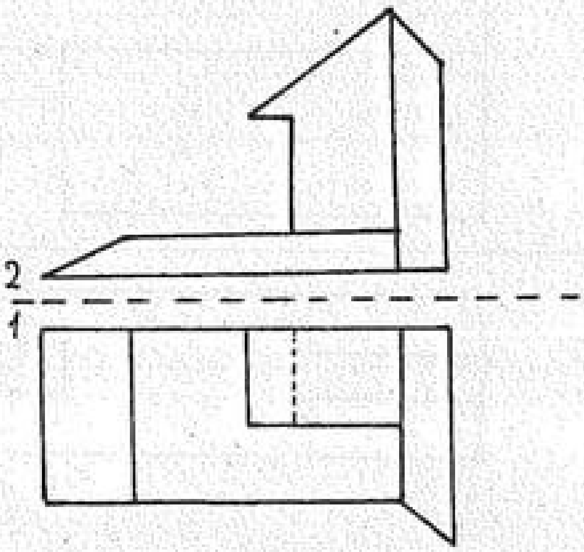
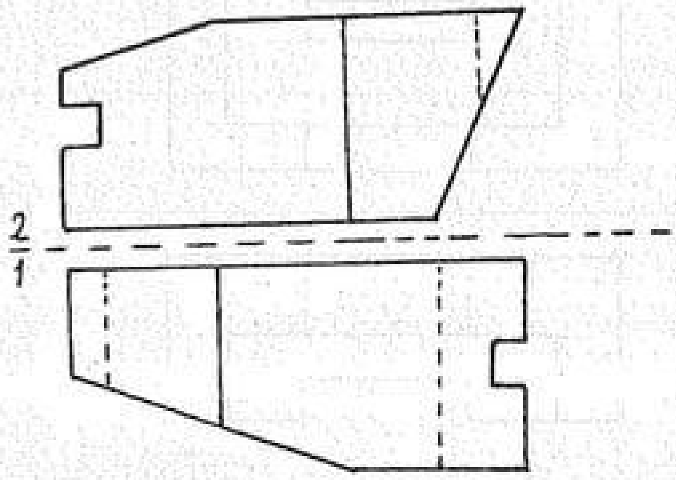
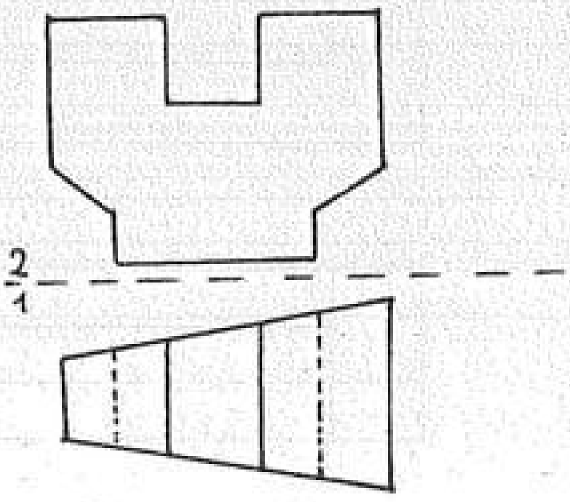
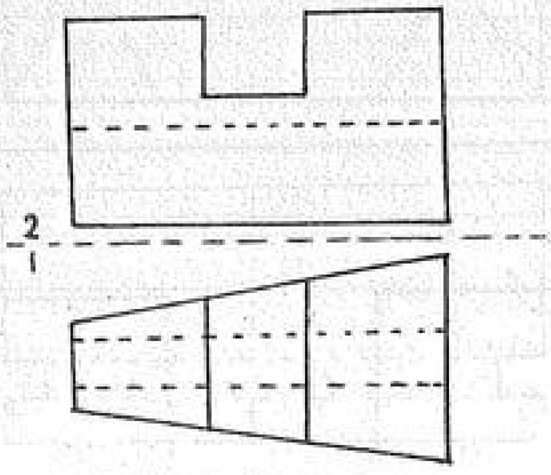

2
1

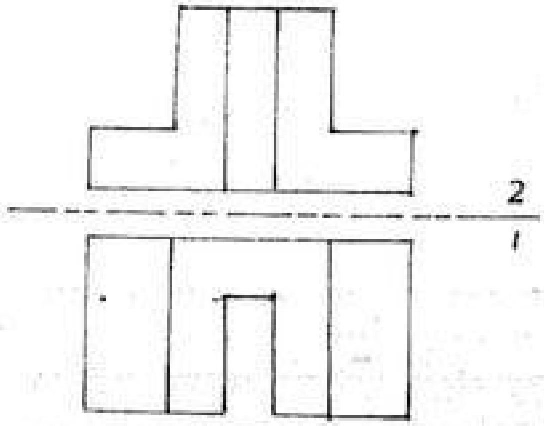

2
1

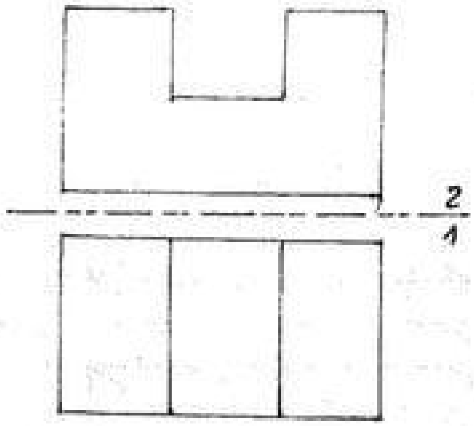

2
1

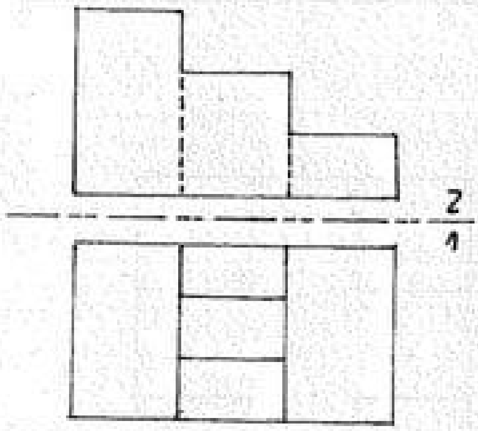

2

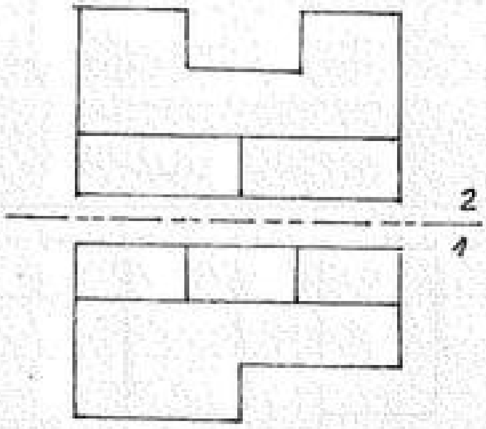

2
1

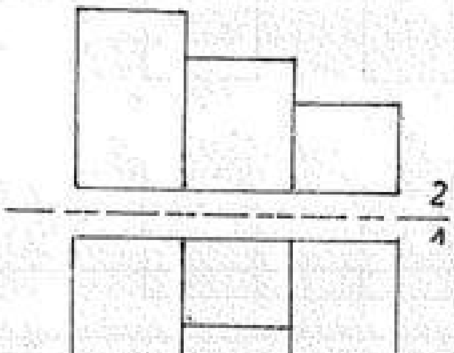

2
1

2
1

2
1

2
1

2
1

2
1

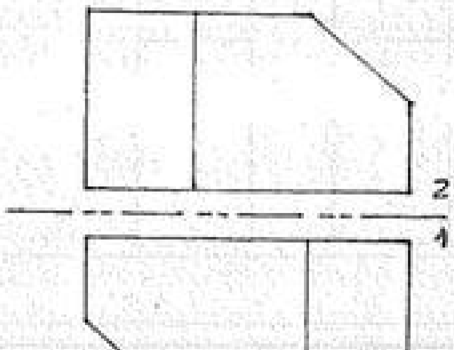

2
1

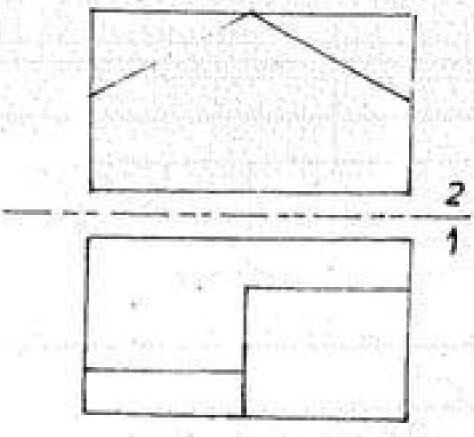

2
1

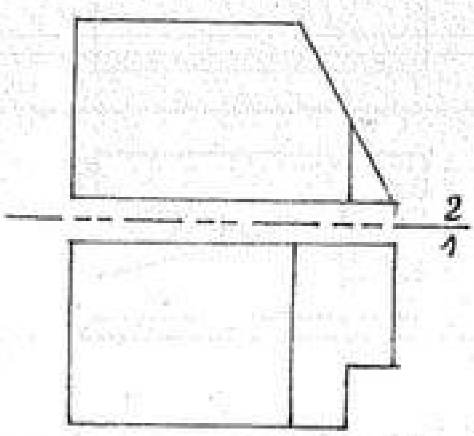

2
1

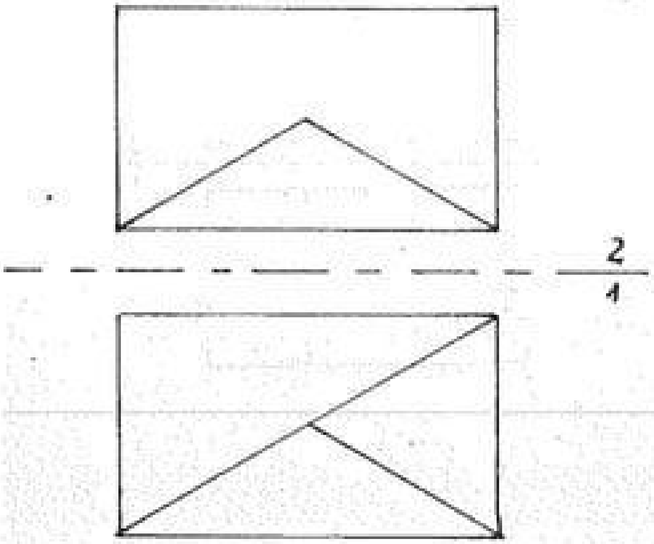

2
1

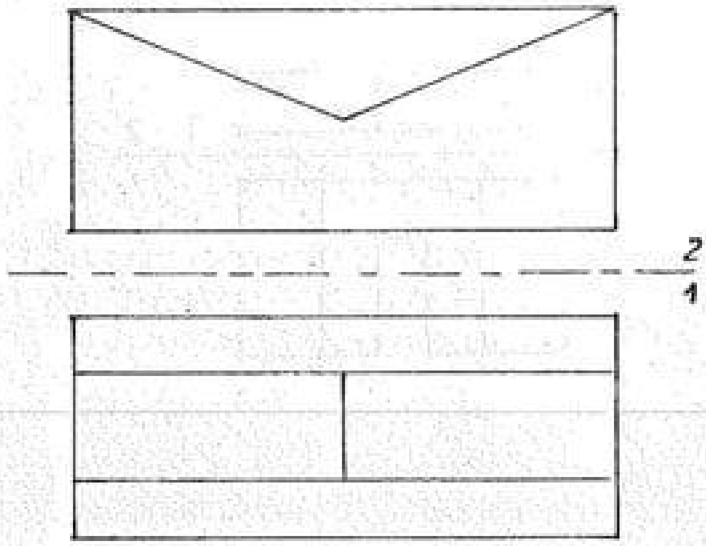

2
1

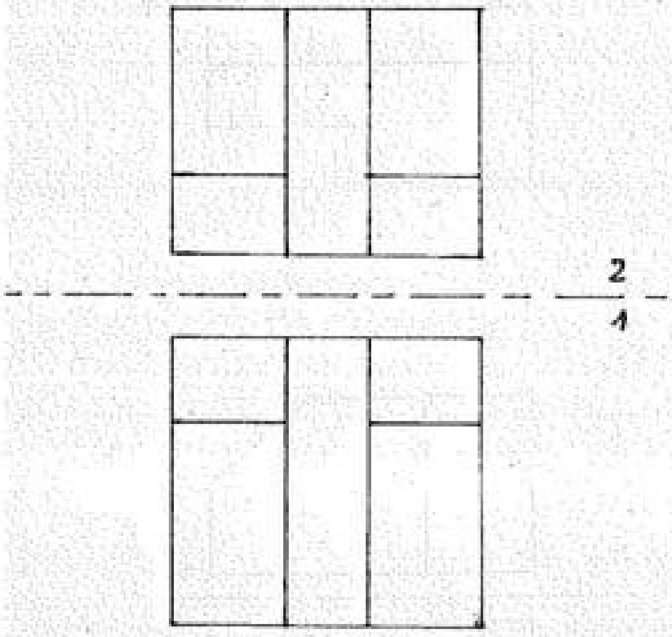

2
1

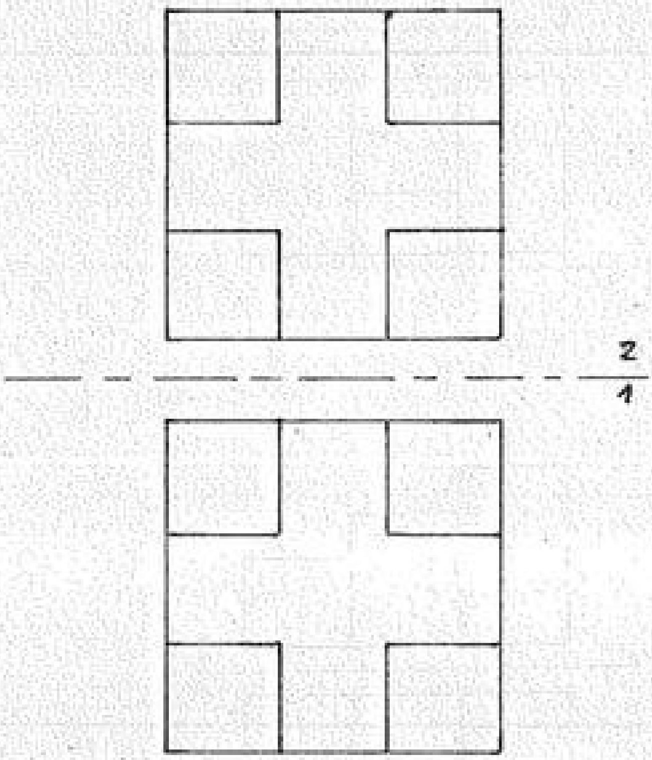

2
1

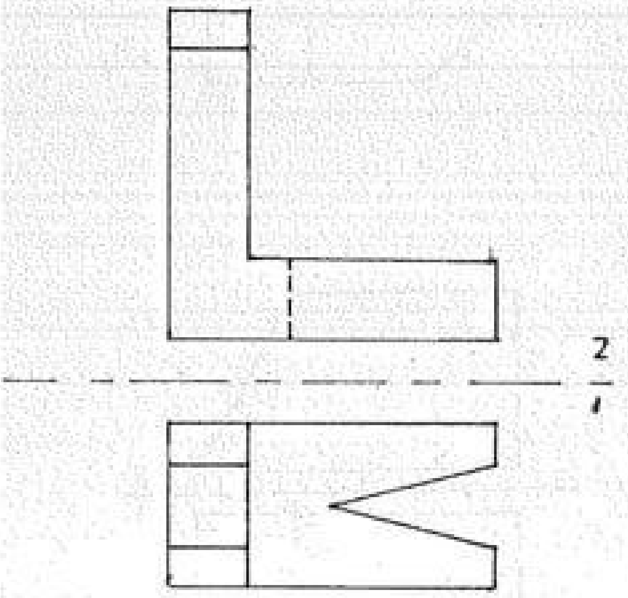

2
1

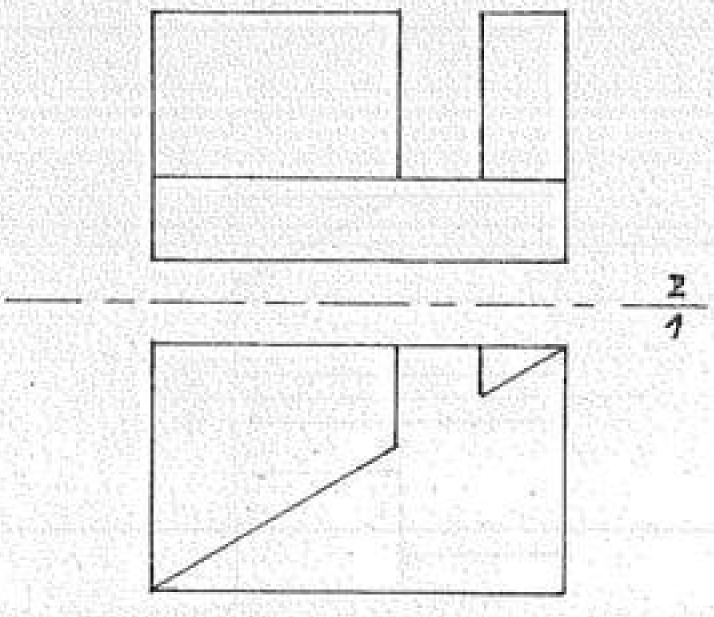

2
1


2
1


2
1


2
1


2
1


2
1

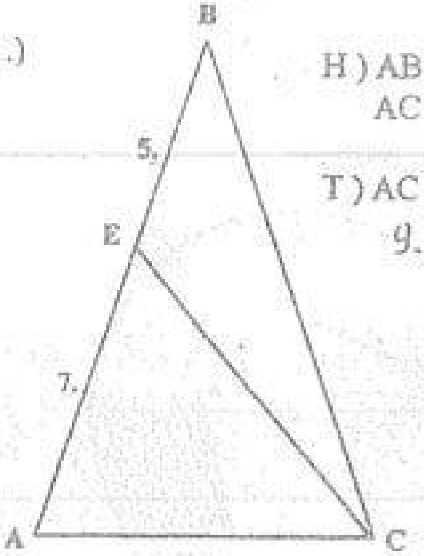
ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FILA A

PROPEDÉUTICO INGENIERÍA * PRIMER EXAMEN DE GEOMETRÍA * 09 – 06 – 2004

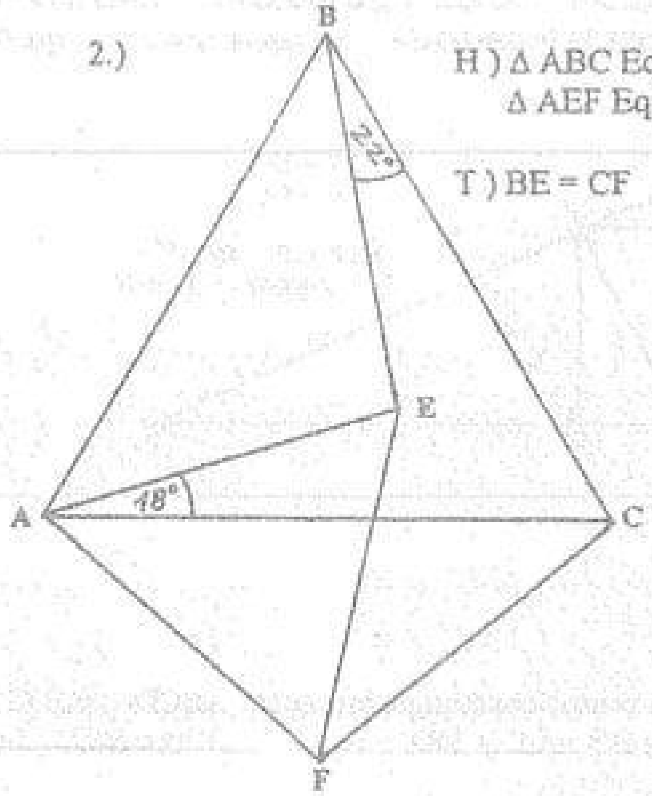
1.) H) AB = BC
AC = CE

T) AC = . ?
9.17



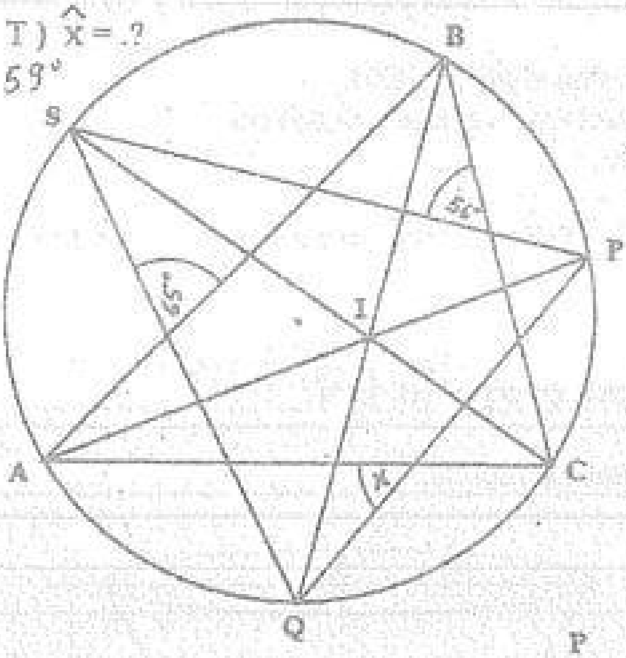
2.) H) Δ ABC Equilátero
Δ AEF Equilátero

T) BE = CF

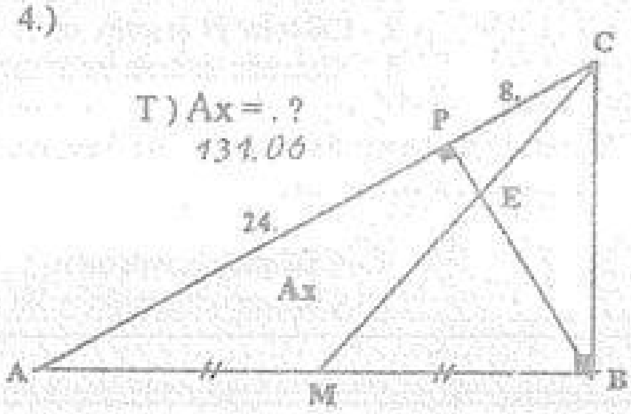


3.) H) . I Incentro Δ ABC

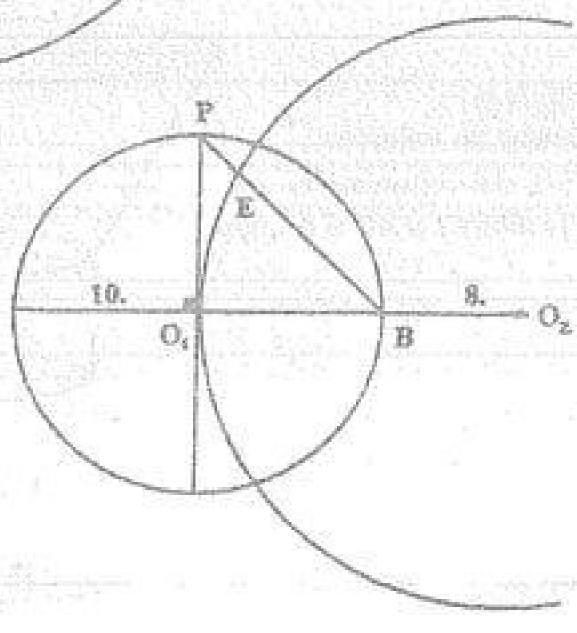
T) $\hat{x}$ = .?
59°



4.) T) Ax = . ?
131.06



5.) T) EB = .?
11.43

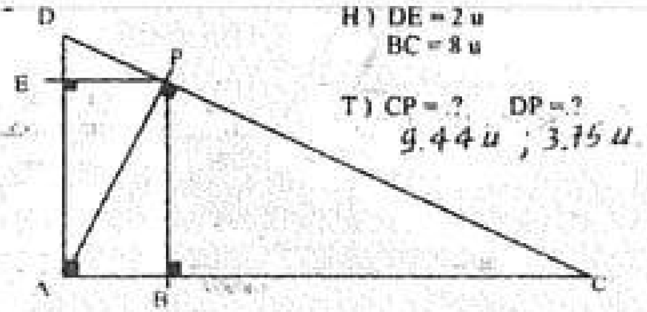


ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

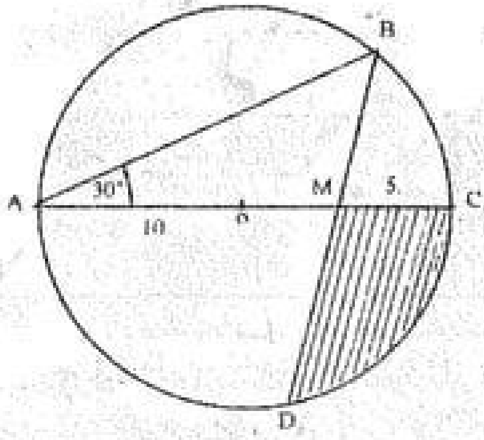
PROPEDÉUTICO INGENIERÍA * EXAMEN FINAL - GEOMETRÍA *

FILA A

1.-



2.- T) A ////// = ?



3.- En un prisma cuadrangular regular ABCD - A´B´C´D´ : AB = BC = CD = DA= 10u. , AA´= BB´= CC´= DD´= 20 u. y D´M = MC´. Se traza un plano por B , D y M.

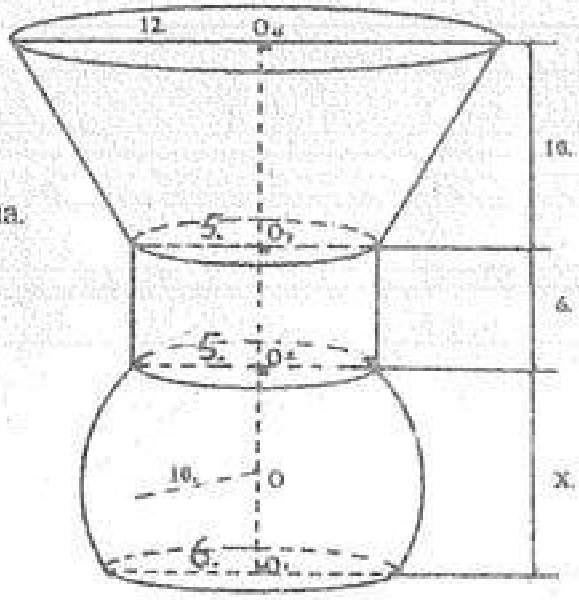
1.- Dibujar la sección que determina el plano BDM.
2.- Calcular el ángulo entre la sección y la base del prisma.
3.- Calcular el área de la sección.

4.- Se tiene una pirámide cuadrangular regular P – ABCD de arista lateral 15 m., y ángulo diedro en una arista lateral de 123°.

1.- Calcular su volumen.
2.- Calcular el ángulo y la distancia entre $\overline{AB}$ y $\overline{PC}$.

5.- El recipiente se encuentra apoyado sobre un plano horizontal.
Calcular :

1.- El valor de x
2.- El volumen del recipiente
3.- Si el recipiente contiene un volumen de agua igual a los 3/5 del volumen del recipiente, calcular la altura del nivel de agua.



12 – 08 – 2004 - Valor de cada problema 1 pto

EXAMEN SUSPENSION * GEOMETRÍA *

FILA A

1º) Se tienen los puntos colineales consecutivos A, B, C, D y E que cumplen

$2BE + 5BC = 7u.$

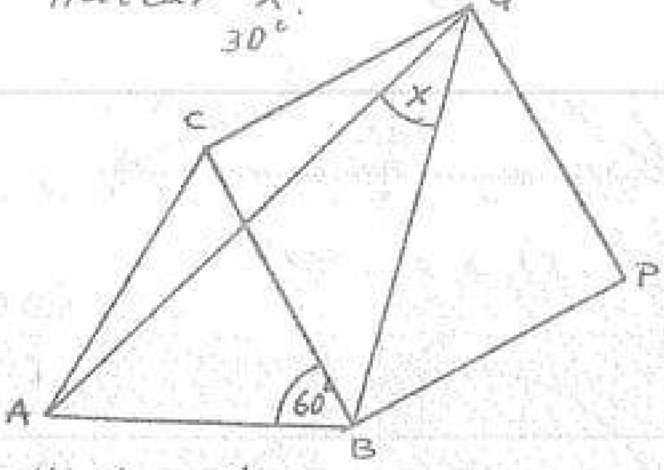
$2AE + 5AC = 7AD$

Hallar la medida de $\overline{BD}$.

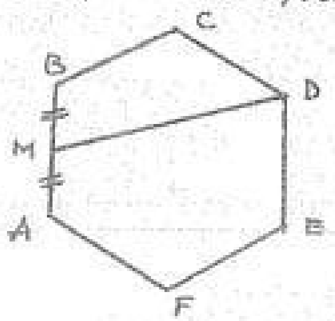
1.0 u.

2º) En la figura AC = BC y BPQC es cuadrado. Hallar $\hat{x}$.

30°



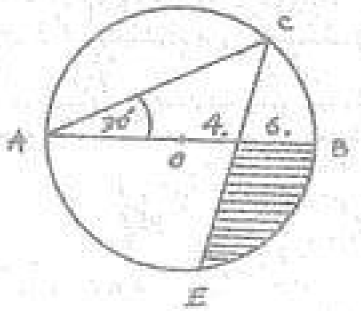
3º) Qué fracción del área del hexágono regular ABCDEF es el cuadrilátero MBCD.



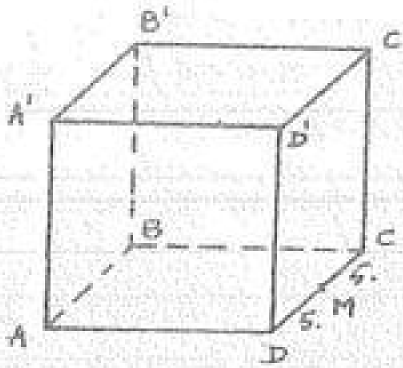
$\frac{1}{3}$

4º) Hallar el Área del gráfico.

44.70



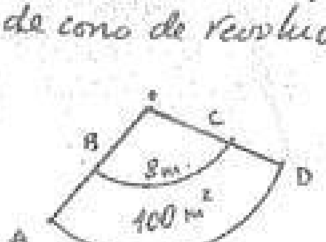
5º) En el cubo de arista 10 m., calcular la distancia entre las rectas $\overline{BD}$ y $\overline{B'M}$



3.33

6º) En un paralelepípedo rectangular los lados de la base miden 5u y 6u. y la diagonal menor del paralelepípedo forma con el plano de la base un ángulo de 56°. Calcular su área total y su volumen.

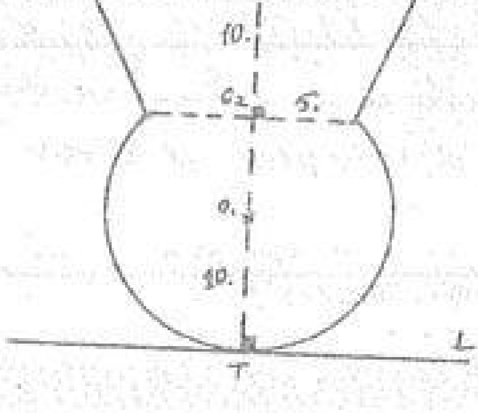
7º) La figura ABCD representa el área lateral de un tronco de cono de revolución. Hallar su volumen.



113.94 m.

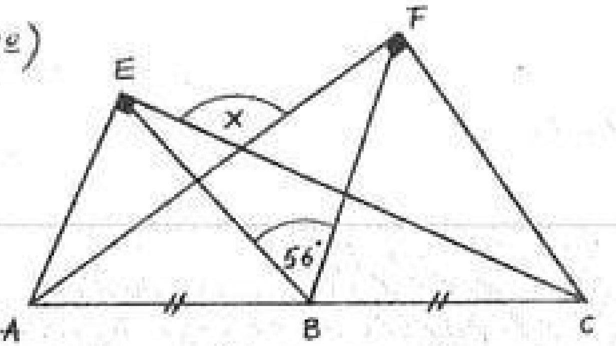
8º) El recipiente contiene un volumen de agua igual a los 2/3 del volumen del recipiente. Calcular la altura del nivel de agua a partir de T.

20.77



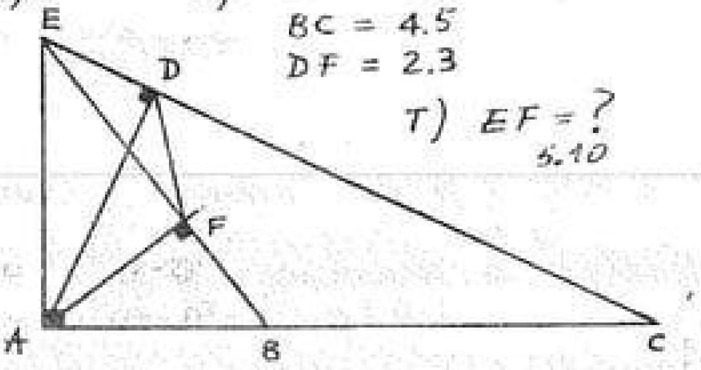
EXAMEN DE UBICACIÓN * GEOMETRÍA * 27-08-2004

1º)

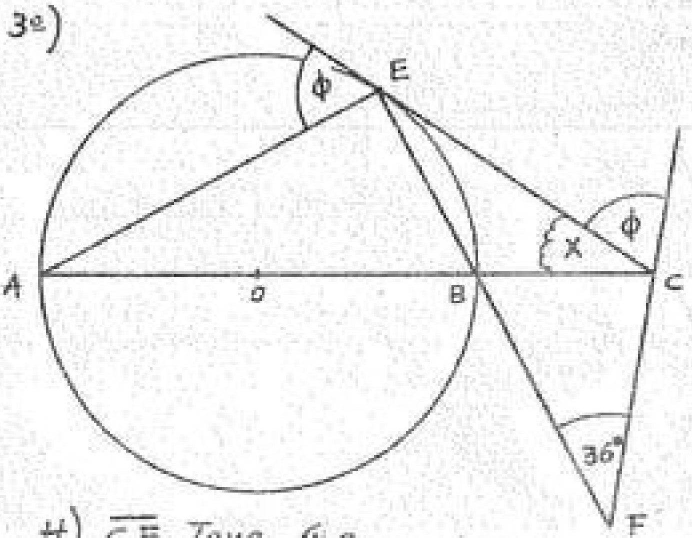


T) $\hat{x} = ?$ 118°

2º) H) EC = 10.
BC = 4.5
DF = 2.3
T) EF = ?
5.10

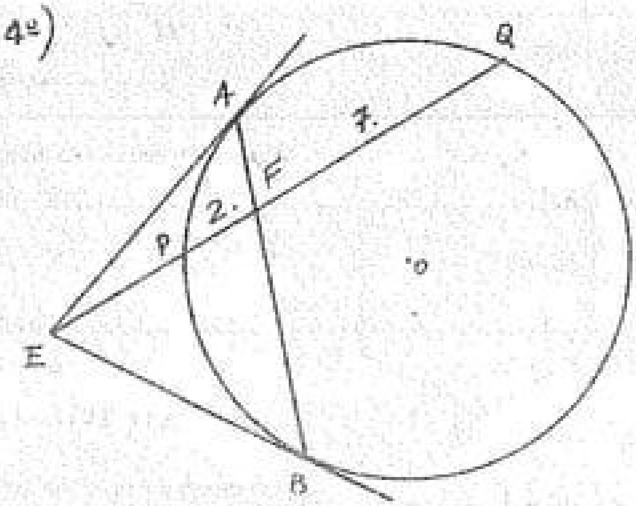


3º)



H) $\overline{CE}$ Tang. $\odot o$
T) $\hat{x} = ?$ 36°

4º)



H) $\overline{EA} \wedge \overline{EB}$ Tang. $\odot o$
T) EP = ? 3,6

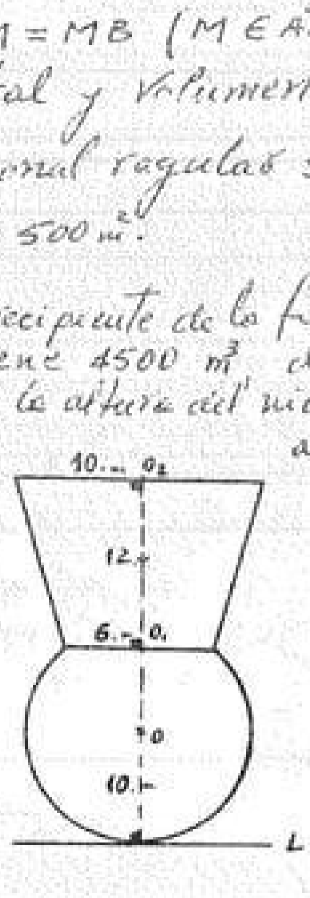
5º) En un paralelepípedo recto su arista lateral mide 16 m. y la base es un rombo ABCD tal que: AM = MB ($M \in \overline{AB}$), MC = 9 m. y MD = 13 m. Calcular el área total y volumen.

6º) Calcular el volumen de un prisma pentagonal regular si su área lateral es de 300 m² y su área total 500 m².

7º) Un recipiente de forma tronco de pirámide cuadrangular regular de dimensiones: arista de la base mayor 10 m, arista de la base menor 6 m y arista lateral 8 m., contiene agua hasta una altura de 5 m. Calcular el volumen de agua.

(El recipiente está apoyado en su base menor)

8º) El recipiente de la figura contiene 4500 m³ de agua. Hallar la altura del nivel del agua a partir de L.

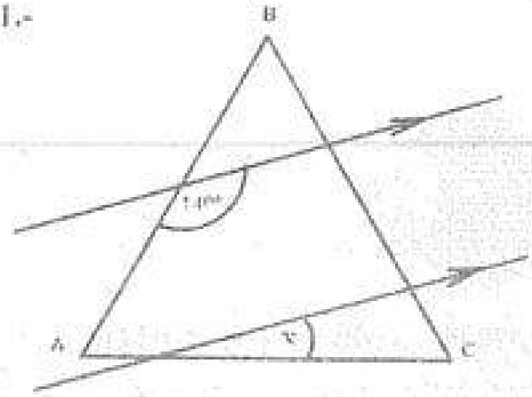


ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

PROPEDEUTICO INGENIERIA * PRIMER EXAMEN - GEOMETRÍA *

FILA A

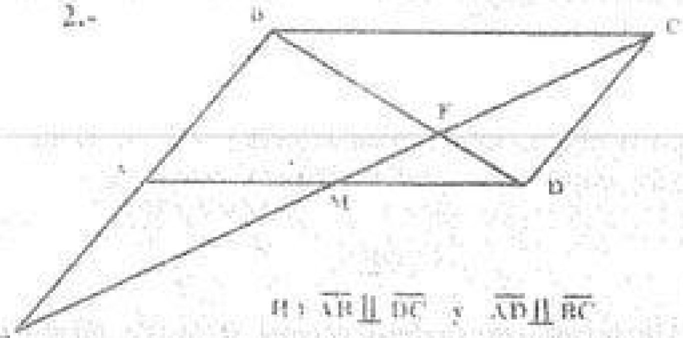
1.-



H) ▲ ABC Equilátero

T) $\hat{X}$ = ? 20°

2.-

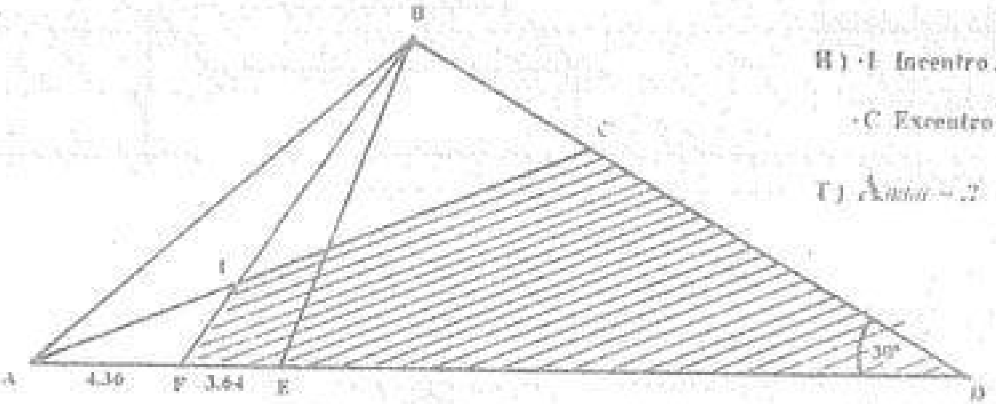


H) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

AM = MD y CF = 20 u.

T) ME = ? 30°

3.-



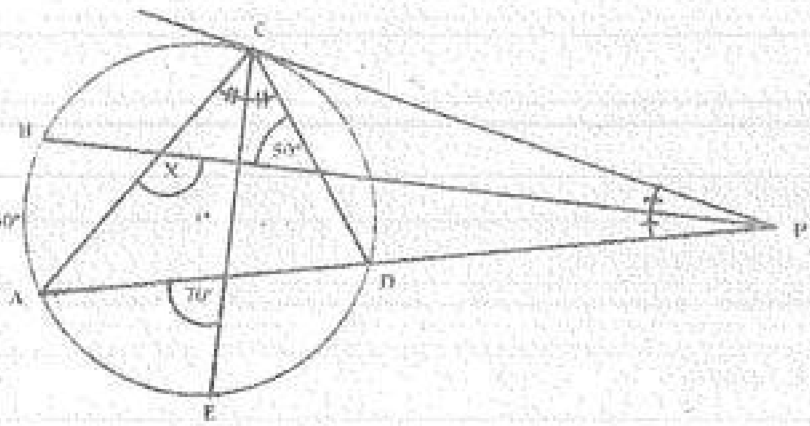
H) ·I Incentro ▲ ABE

·C Excentro ▲ ABE

T) A_{somb} = ? 303.25

4.- En el grafico $\overline{PC}$ es tangente a la circunferencia. Determinar la medida del angulo X

130°



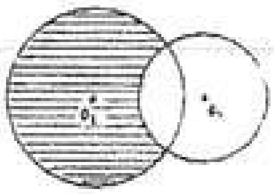
5.- Se tienen dos circunferencias secantes ortogonales de radios 4 m. y 3 m.
Calcular la longitud de una tangente comun. 4.99 m.

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

PROPEDÉUTICO INGENIERÍA * EXAMEN FINAL - GEOMETRÍA *

FILA A

1.- En la figura, los círculos de radios 9 m. y 12 m. son ortogonales. Hallar el área sombreada. 392.6 m²

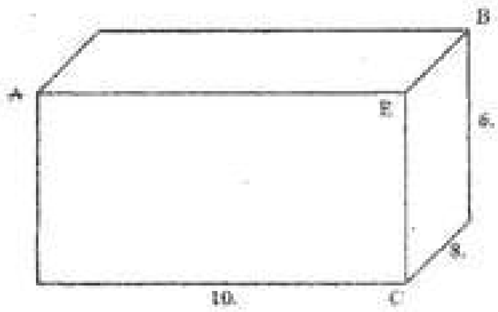


1 punto.

2.- Un prisma pentagonal regular tiene de área lateral 500 m², y de área total 672 m². Hallar el valor de su volumen. 1216.40 m³

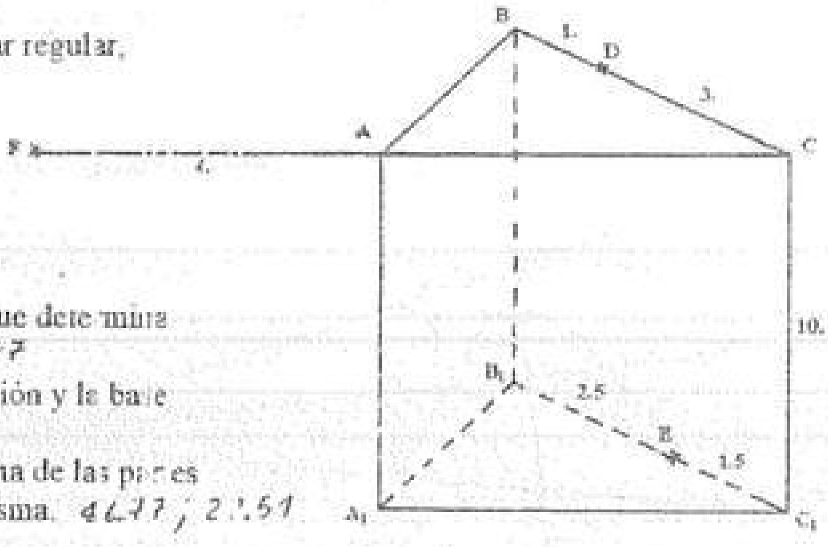
0.5 punto

3.- En el paralelepípedo rectangular calcular la distancia del punto E al plano ABC. 4.33



1 punto

4.- En el prisma triangular regular,



Calcular :

a.- El área de la sección que determina el plano DEF. 24.77

b.- El ángulo entre la sección y la base del prisma. 81.51°

c.- El volumen de cada una de las partes en que se divide el prisma. 46.77 ; 21.51

1.5 punto

5.- Se tiene un tronco de cono de revolución de radios en las bases $R = 10$ cm. ; $r = 5$ cm. y de altura $h = 15$ cm. ; asentado sobre su base mayor. Trazar un plano paralelo a las bases y que lo divida en dos sólidos de volúmenes iguales. Determinar la razón de las áreas laterales de los sólidos resultantes. 1.35

1 punto

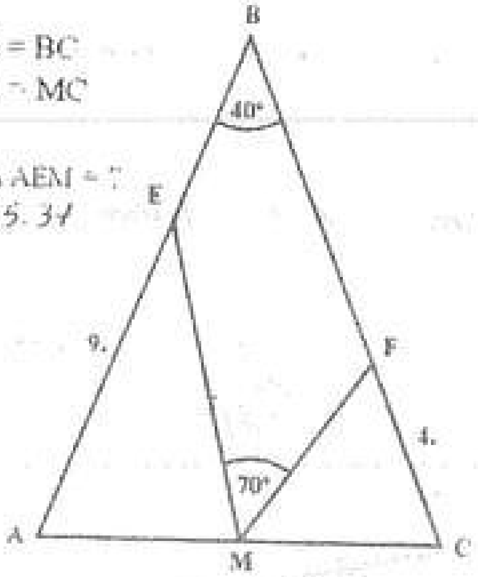
ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

PROPEDEUTICO INGENIERÍA * EXAMEN SUSP - GEOMETRÍA *

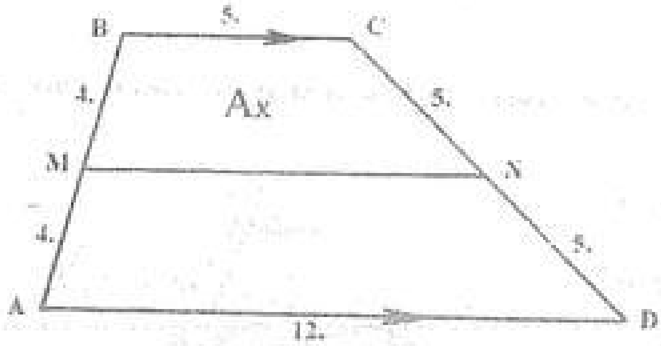
FILA A

1.- H) AB = BC
AM = MC

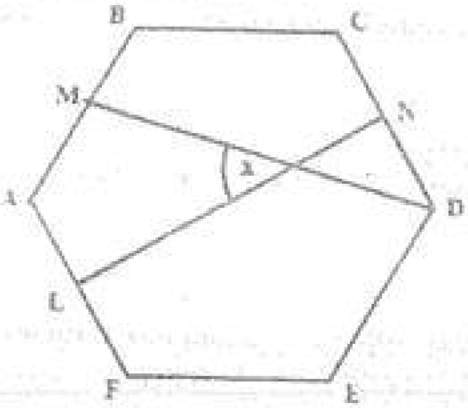
T) A ▲AEM = ?
25.31



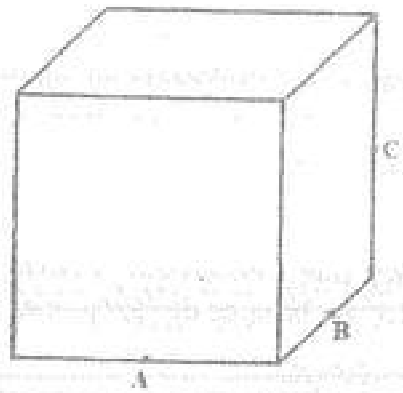
2.- T) Ax = ? 26.19



3.- L, M y N son puntos medios de los lados del hexágono regular. Hallar $\hat{x}$. 43 90''



4.- A, B y C son puntos medios de las aristas del cubo. Hallar el ángulo entre la sección que determina el plano ABC y la base del cubo. 54.73°



5.- Un cilindro de revolución de radio 10 m. y altura 20 m. con su eje dispuesto horizontal, contiene un volumen de agua tal que la superficie húmeda es de 1068 m^2.. Calcular dicho volumen de agua. $3769.90\ m^3$

6.- Un paralelogramo ABCD de lados 8 m. y 6 m. y ángulo que forman las diagonales 36° es la base de una pirámide P - ABCD de altura PH = 20 m. , siendo H el punto de corte de las diagonales de la base. Hallar el area total de la pirámide. $290.37\ m^2$

7.- Un vaso de forma tronco de cono de revolución asentado en su base menor de radio 3 cm contiene agua hasta una altura de 5 cm.. La superficie superior del agua tiene un radio de 3.5 cm. Cuánto subirá el nivel del agua si se introduce un cubo de hierro de arista $\sqrt{2}$ cm..
0.073 cm.

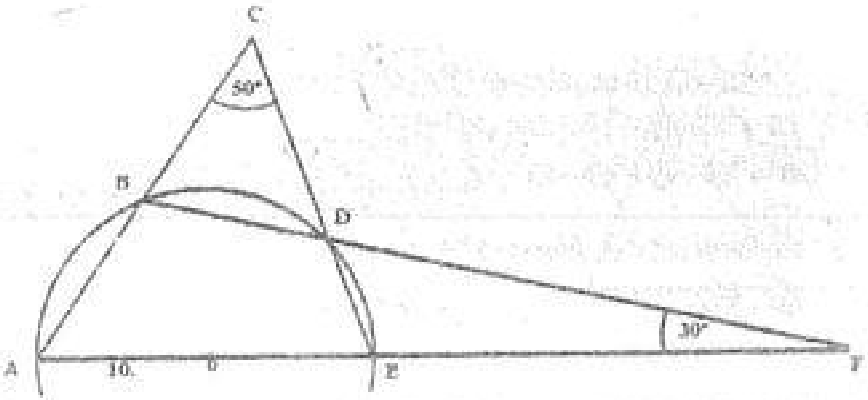
8

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

PROPEDEUTICO INGENIERIA * EXAMEN DE UBICACIÓN - GEOMETRIA *

1.- En un triángulo acutángulo ABC, se trazan las alturas $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$. Demostrar que se cumple :
$a^2 = c \times BF + b \times CE$ 2 puntos.

2.- En la figura, calcular el área del cuadrilátero ABDE. 115.54 3 puntos.



3.- En un rombo ABCD, M es punto medio de su lado $\overline{BC}$ y $\overline{AM}$ se corta con la diagonal $\overline{BD}$ en E. Si : $\widehat{CAM} = 34^\circ$ y EM = 34 cm., calcular el área del rombo. 3 puntos.

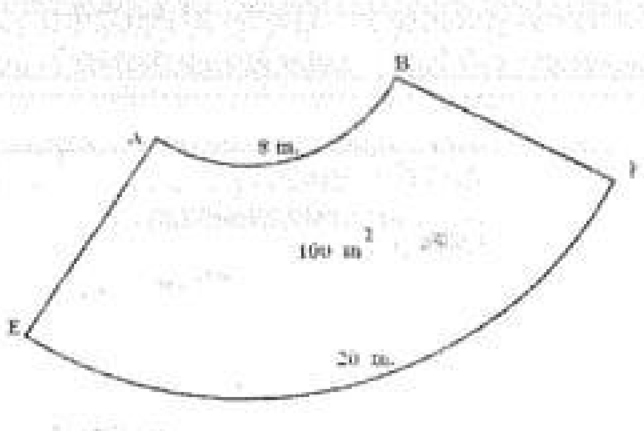
4.- Los planos L y M forman un ángulo de 35° y su arista es $\overline{AB}$. Un punto P del plano L dista de A y de B 7m.. Si el área proyectada por el plano APB en el plano M es de 13.1 m², calcular el ángulo que la recta $\overline{PA}$ forma con el plano M. 3 puntos.

5.- Una pirámide pentagonal regular tiene de área lateral 800 m² y el angulo entre una cara lateral y la base es de 80°. Calcular su volumen. 3 puntos.

6.- Se tiene un tronco de pirámide cuadrangular regular de aristas en las bases $L_1 = 10$ cm.; $l_1 = 5$ cm. y de altura h = 15 cm.; asentado sobre su base mayor. Trazar un plano paralelo a las bases y que lo divida en dos sólidos de volúmenes iguales. Determinar la relación de las áreas laterales de los sólidos resultantes. 3 puntos.

7.- La figura representa el área lateral de un tronco de cono de revolución. Calcular su volumen.

3 puntos.



M.A.Y.A * 04 - 03 - 2005 *

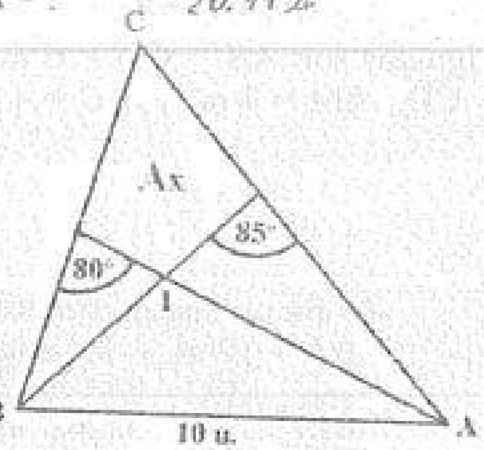
ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

PROPEDEUTICO INGENIERÍA * PRIMER EXAMEN DE GEOMETRÍA *

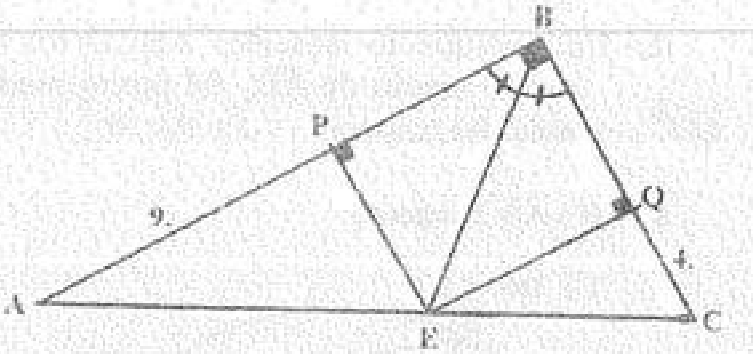
FILA A

1.- H) I Incentro Δ ABC

T) Ax = ? 20.11 u^2

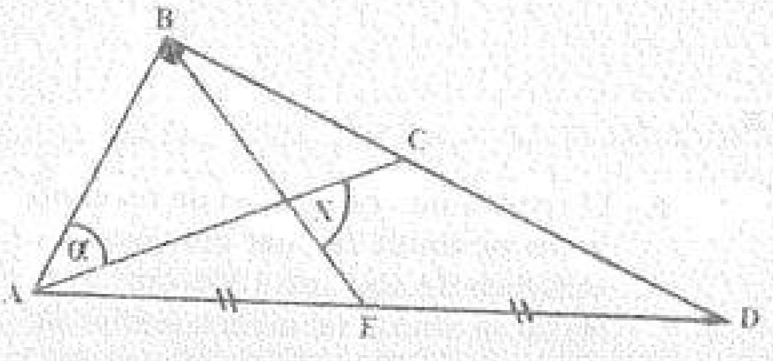


2.- T) BE = ? 8.49



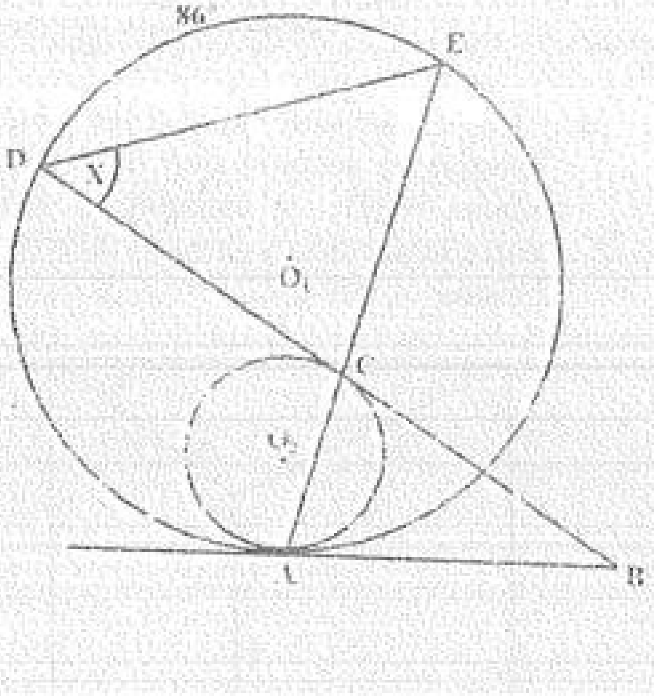
3.- H) AC = CD

T) $\hat{X} = 135° - \frac{3}{2}\hat{\alpha}$



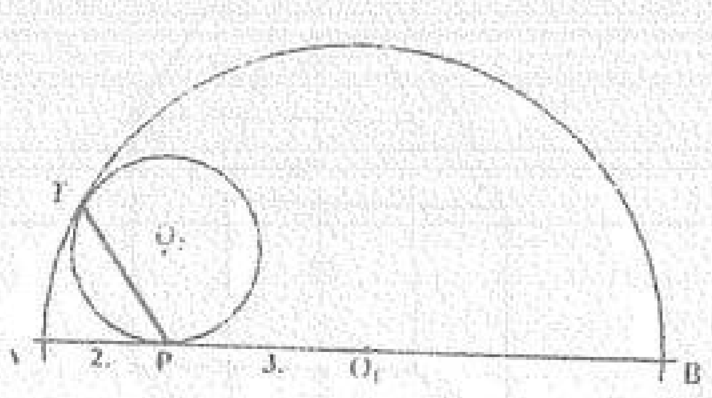
4.- H) $O_1 \wedge O_2$ Tangentes
$\overline{AB}$ Tangente Común
$\overline{BC}$ Tangente O_2

T) $\hat{X}$ = ? 43°



5.- H) $O_1 \wedge O_2$ Tangentes
$\overline{AB}$ Tangente O_2

T) IP = ? 2.70



ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

PROPEDÉUTICO INGENIERÍA * EXAMEN FINAL - GEOMETRÍA *

FILA A

1.- Se tiene los triángulos rectángulos ABC, recto en A y APQ, recto en A, tales que Q pertenece a $\overline{AB}$, C pertenece a $\overline{AP}$ y $\overline{BC}$ con $\overline{PQ}$ se cortan en E. Si : AB = 40, AC = 30, AP = 72 y AQ = 30, hallar el área de la región AQEC.

0,8 pto

545.48

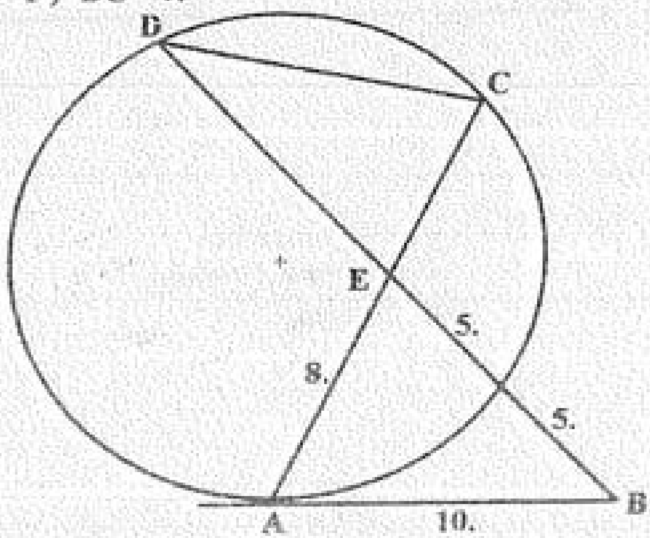
2.- En un trapecio isósceles ABCD los lados iguales son AB = CD = 6 m.. Si L es el punto medio de $\overline{AB}$, M punto medio de $\overline{CD}$, AM = 7 m. y LC = 4 m., hallar el área del trapecio. 23.96 m^2

0,8 pto

3.- **H) $\overline{AB}$ Tangente**

T) DC = .?

0,8 pto

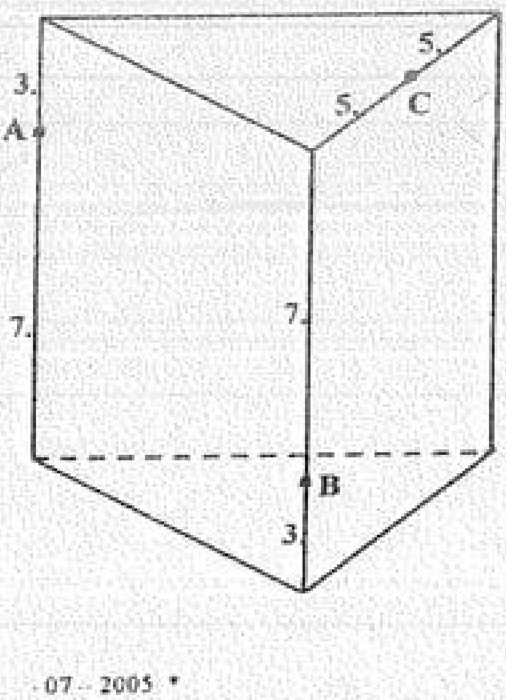


4.- En un ángulo triedro E – ABC, EA = 10 m. y los ángulos planos son : $A\hat{E}C = 55°$, $A\hat{E}B = 44°$ y $B\hat{E}C = 33°$. Hallar el ángulo entre $\overline{AE}$ y el plano BEC. 43.83°

0,8 pto

5.- En el prisma triangular regular, dibujar la sección que determina el plano ABC y calcular el ángulo entre la sección y la base inferior del prisma. 55.27°

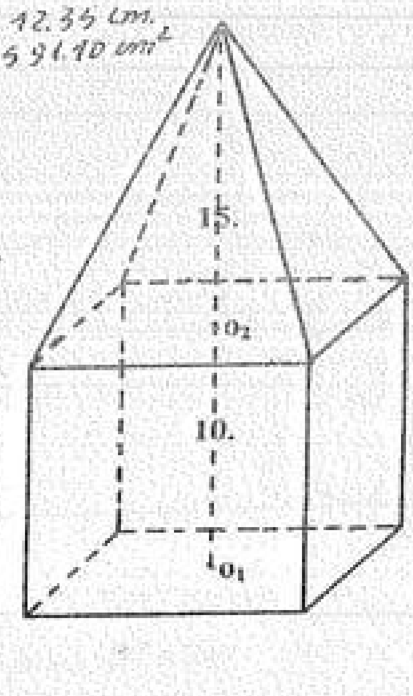
pto



6.- El recipiente compuesto de un cubo y una pirámide regular contiene un volumen de agua de 1200 cm^3. Hallar la altura del nivel superior de agua a partir de la base inferior del cubo y calcular la superficie húmeda.

42.35 cm.
591.10 cm^2

1. pto



ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

PROPEDÉUTICO INGENIERÍA * EXAMEN SUSPENSIÓN - GEOMETRÍA *

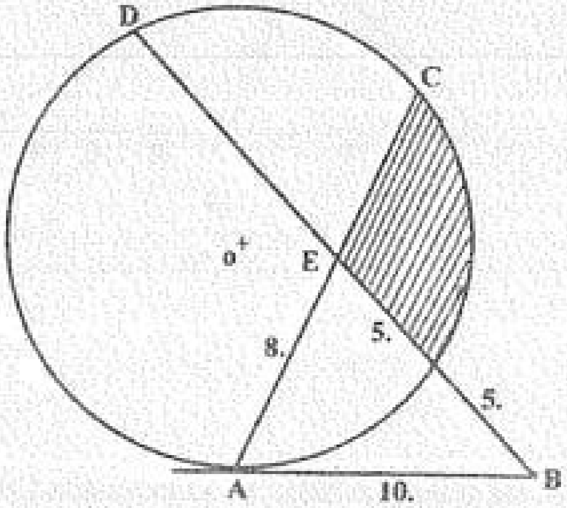
1.- En un triángulo ABC su ángulo $\hat{A}$ mide 50° y M es el punto medio del segmento que une el Incentro I y el Ex-centro Oa relativo al lado $\overline{BC}$. Calcular la medida del ángulo $B\hat{M}C$. 2 ptos. 130°

2.- Se tiene los triángulos ABC y APQ, tales que Q pertenece a $\overline{AB}$, C pertenece a $\overline{AP}$ y $\overline{BC}$ con $\overline{PQ}$ se cortan en E. Hallar la medida del ángulo $\hat{A}$, si : AB = 40, AC = 30, AP = 72, AQ = 30 y el área de la región AQEC es de 500. 3 ptos.
66 44

3.- En un trapecio isósceles circunscriptible ABCD los lados iguales son AB = CD = 6 m. y su área es de 24 m^2. Hallar las bases del trapecio. 3 ptos. 10.4 m ; 1,6 m.

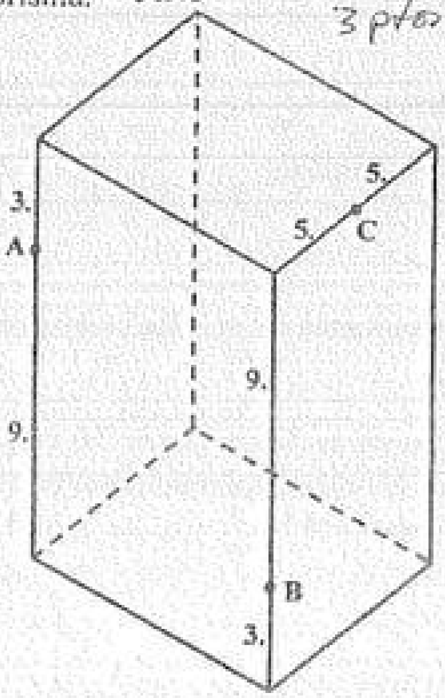
4.- **H) $\overline{AB}$ Tangente**

T) A////// = .? 24.60 3 ptos.

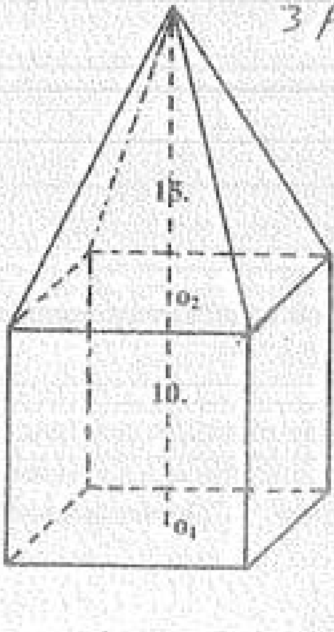


5.- En un ángulo triedro E – ABC, EB = 10 m. y los ángulos planos son : $B\hat{E}C$ = 55°, $A\hat{E}B$ = 44° y $A\hat{E}C$ = 33°. Hallar la distancia de B al plano AEC. 3 ptos.
6.92 m.

6.- En el prisma cuadrangular regular, dibujar la sección que determina el plano ABC y calcular el ángulo entre la sección y la base inferior del prisma. 62.16° 3 ptos.



7.- El recipiente compuesto de un cubo y una pirámide regular contiene un volumen de agua hasta una altura de 15. a partir de la base inferior del cubo. Calcular el volumen de agua. 3 ptos.
1351.85



ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

PROPEDÉUTICO INGENIERÍA * EXAMEN DE UBICACIÓN - GEOMETRÍA *

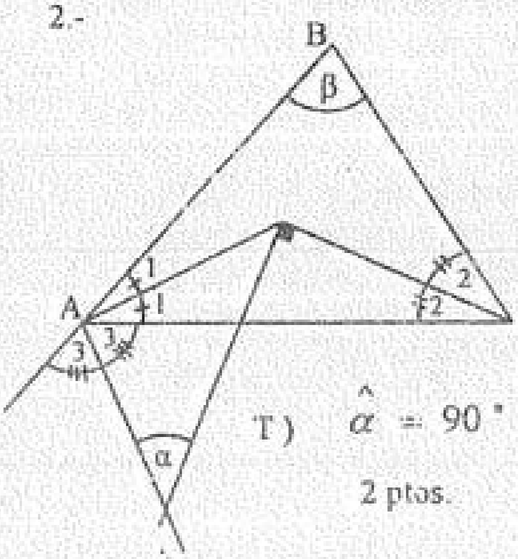
1.-

H) AM = MC
BN = ND

T) $MN = \dfrac{AB + CD}{2}$

2 ptos.

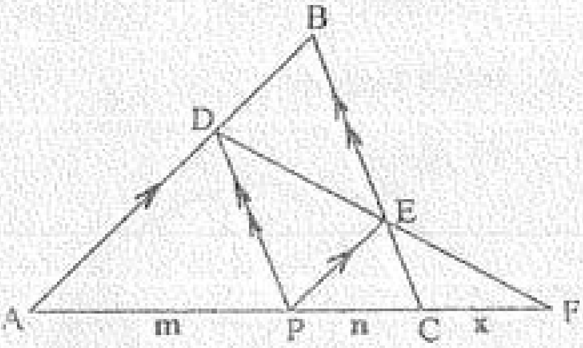
2.-



T) $\hat{\alpha} = 90° - \dfrac{\hat{\beta}}{2}$

2 ptos.

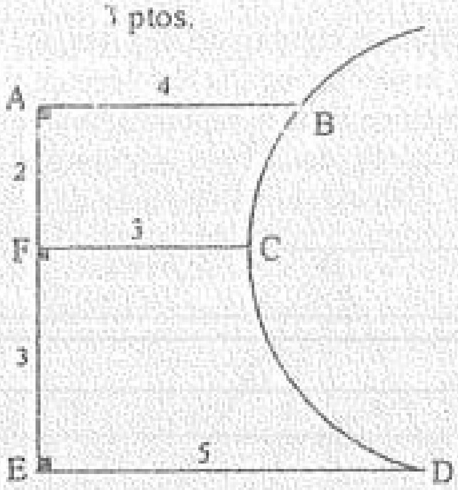
3.-



T) $x = \dfrac{n^2}{m - n}$ 2 ptos.

4.- T) Área de la figura EFCD

3 ptos.



5.- Un triángulo ABC y un cuadrado CEFB son perpendiculares tales que , AB = BC = 10. y AC = 8.. Hallar el ángulo entre el cuadrado CEFB y el plano ABE. 3 ptos.
56.74°

6.- La diagonal de un paralelepípedo rectangular es de 10 m. y forma con una cara lateral un ángulo de 35° y con la otra cara lateral un ángulo de 45°. Calcular el área lateral del paralelepípedo. 3 ptos.
105.85 m²

7.- Se tiene un prisma pentagonal regular de altura 5 m. y de volumen 10 m^3 . Calcular su área lateral.
2 ptos 26.95 m²

8.- En un tronco de pirámide cuadrangular regular las aristas de las bases miden 50 m. y 30 m. y su altura mide 20 m., y contiene un volumen de agua igual a los 4/7 de su volumen, cuando está apoyado sobre su base menor. Calcular la superficie húmeda. 3142.46 m² 3 ptos.

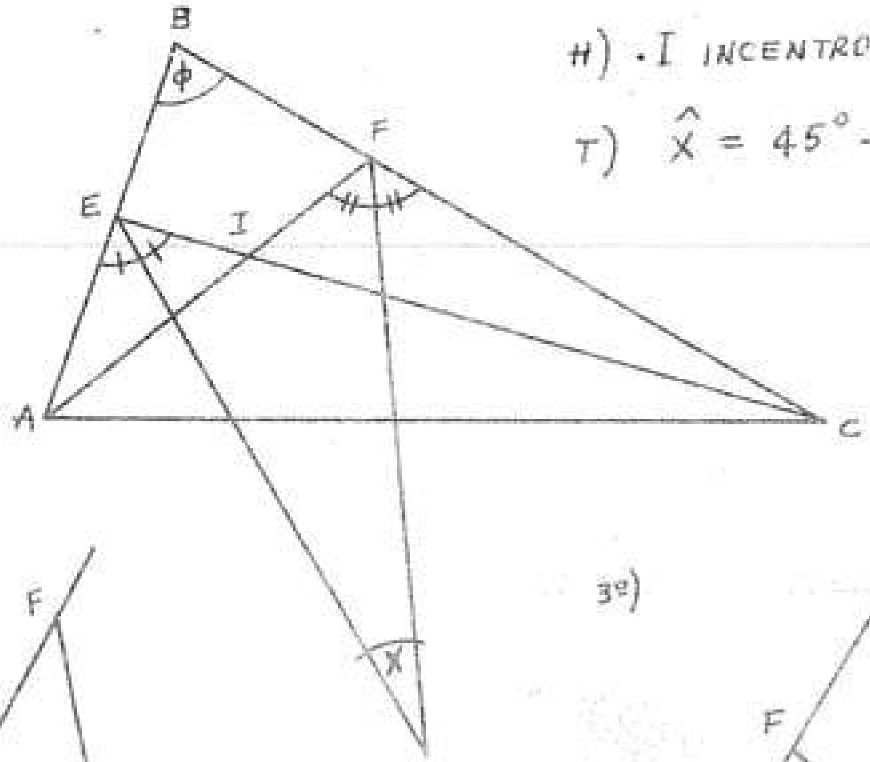
M.A.Y.A. * 15 - 08 - 2005 *

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

PROPEDEUTICO INGENIERIA * PRIMER EXAMEN - GEOMETRIA *

FILA A

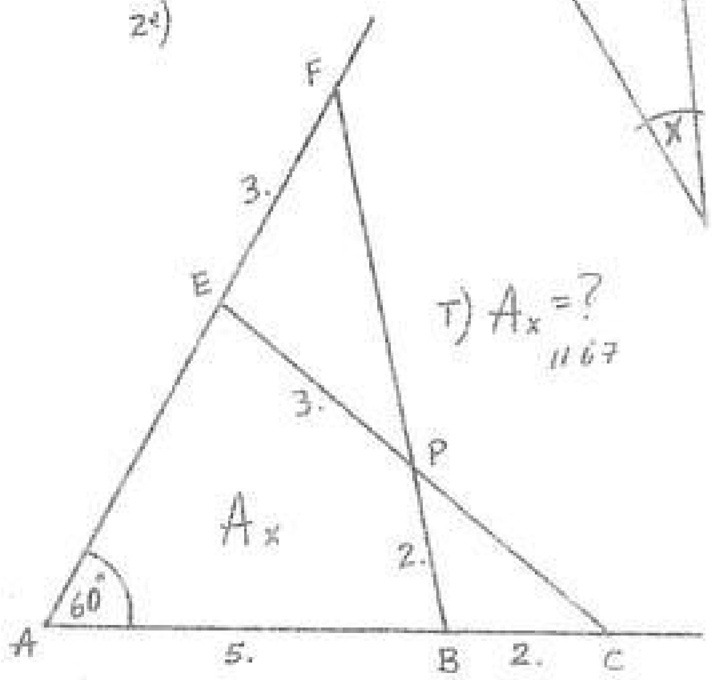
1º)



H) • I INCENTRO ΔABC

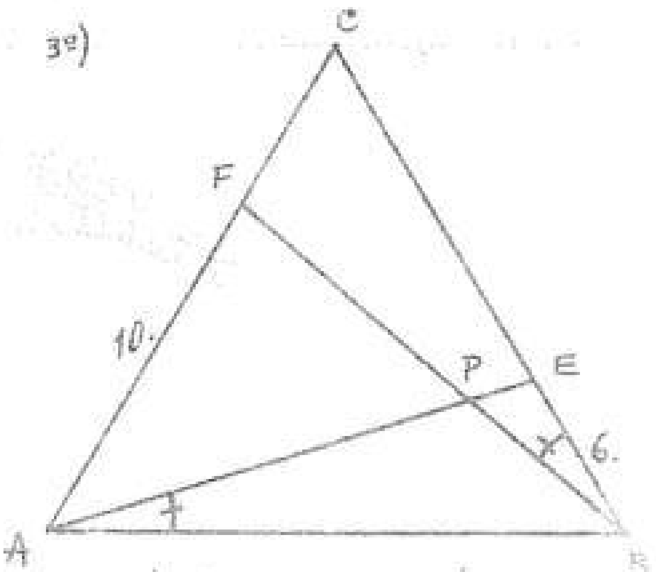
T) $\hat{x} = 45^\circ - \frac{\hat{\phi}}{4}$

2º)



T) $A_x = ?$ 11.67

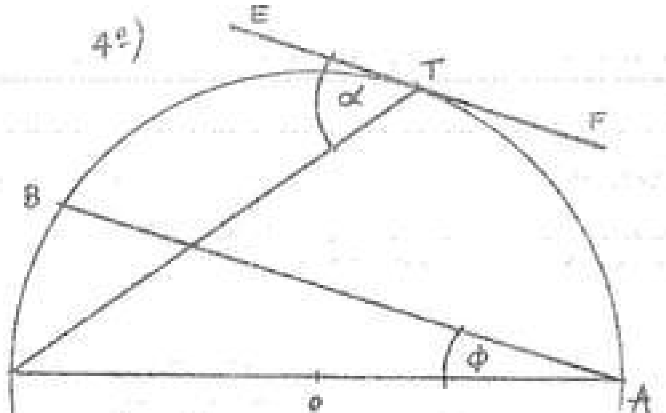
3º)



H) ΔABC EQUILÁTERO

T) $A_{\Delta ABC} = ?$ 110.85

4º)

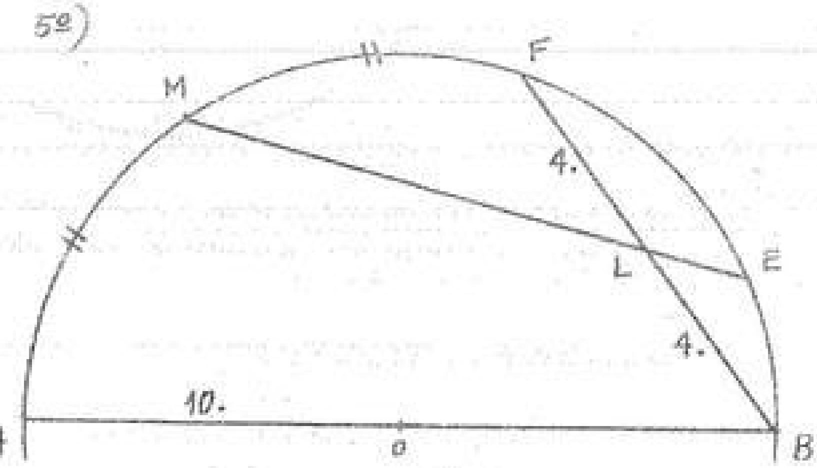


H) $\overline{EF}$ TANGENTE

$\overline{EF} \parallel \overline{AB}$

T) $\phi = 2\alpha - 90^\circ$

5º)



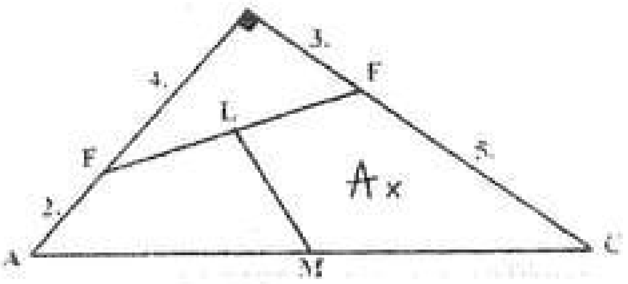
T) $LE = ?$ 1.19

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

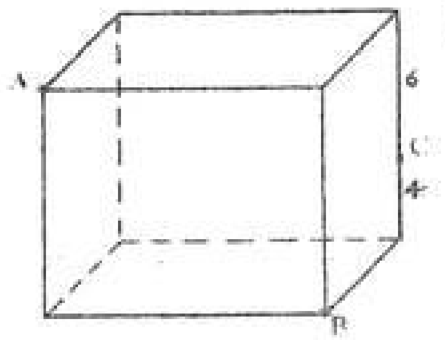
FILA A

PROPEDEUTICO INGENIERIA * EXAMEN FINAL DE GEOMETRIA * 17 – 02 - 2006

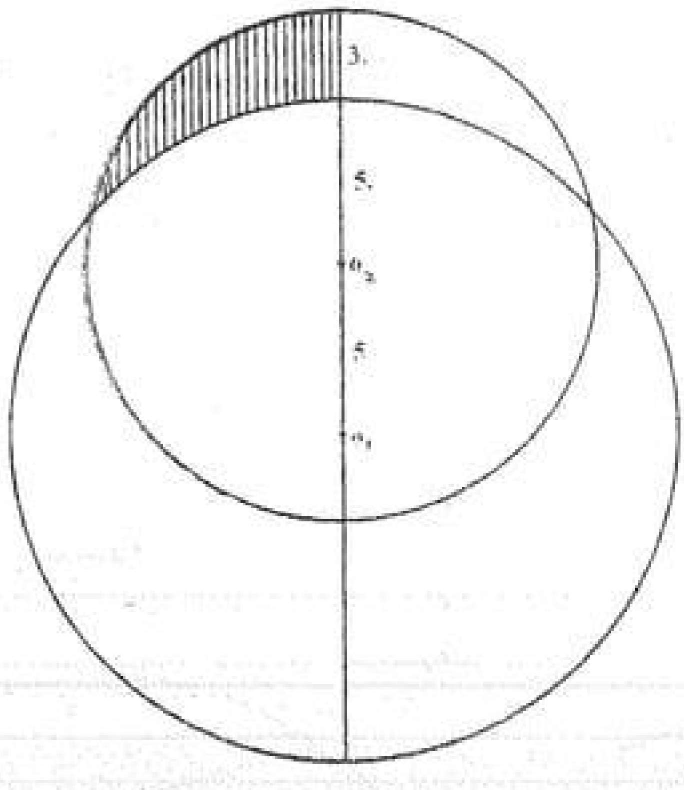
1.- En la figura, L y M son puntos medios
Hallar Ax 10.75



2.- En el Cubo, calcular el volumen de cada una de las partes en que lo divide el plano ABC. (sección del cubo).
326.67
673.33



3.- Calcular A_{som}
19.92



4.- Calcular el volumen de una pirámide cuadrangular regular si sus aristas laterales miden 15 m. y el angulo que forman dos caras laterales adyacentes es de 123°. 812.07 m^3

5.- En un cono de revolución de radio 20 m. y generatriz 36 m. y por un punto ubicado en la generatriz y a los 2/3 de la misma a partir del vértice, se traza un plano paralelo a la base del cono. Determinar el area lateral, el área total y el volumen del tronco de cono resultante.
1256.51 m^2; 3071.37 m^2; 8841.37 m^3

Nota: Valor de cada problema 1 pto.

15

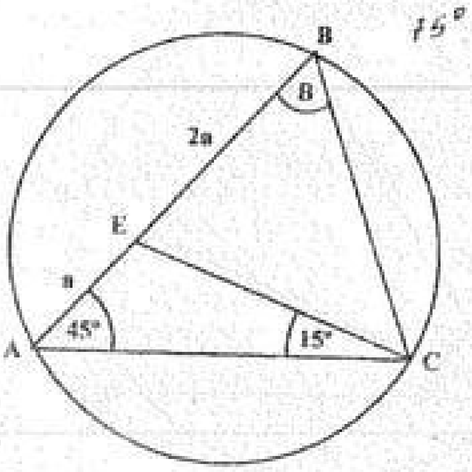
ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

PROPEDÉUTICO INGENIERÍA * EXAMEN SUSPENSOS - GEOMETRÍA *

FILA A

1.- Calcular el valor del ángulo $\hat{B}$.

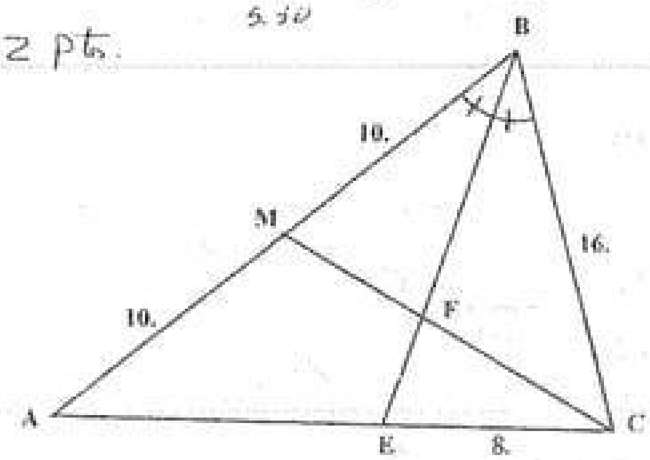
2 ptos. 75°



2.- Calcular el valor del segmento $\overline{MF}$.

5.30

2 ptos.

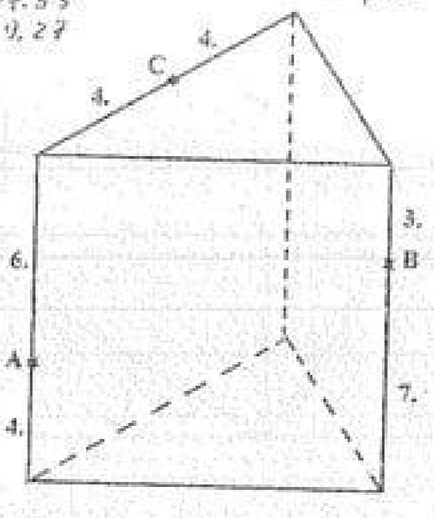


2 ptos. 3.- En un trapecio las bases miden 7m. y 19 m. y sus lados no paralelos miden 10 m. . Hallar el área de cada una de las partes formadas al trazar la base media del trapecio. 40 m; 64 m.

2 ptos. 4.- Un cuadrilátero ABCD está circunscrito a un circulo de radio 3 m. y los ángulos internos opuestos $\hat{B} = \hat{D} = 90°$ y $\hat{A} = 60°$. Calcular su área. 38.79 m^2

5.- En el prisma triangular regular, calcular el volumen de cada una de las partes en que lo divide la sección que determina el plano ABC. 3 ptos.

201.85
69.27



6.- La base de una pirámide es un rombo de ángulo 30° y el radio del circulo inscrito 5 m. . Las caras laterales de la pirámide están inclinadas un ángulo de 71°. Hallar su área lateral, área total y volumen.

3 ptos. 614.27 m^2
814.27 m^2
968 m^3

7.- Un tetraedro regular de arista 20 m. contiene agua hasta una altura de 10 m.. Calcular el volumen de agua.

3 ptos. 981.90 m^3

8.- Las bases de un tronco de cono de revolución son de $4\pi\ m^2$ y $9\pi\ m^2$ y de altura 20 m. Si se traza una sección paralela a las bases y equidistante de las mismas bases, hallar el volumen de cada una de las partes formadas. 3 ptos. 154.69 m^3, 238.73 m^3

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

PROPEDÉUTICO INGENIERÍA * EXAMEN UBICACIÓN - GEOMETRÍA *

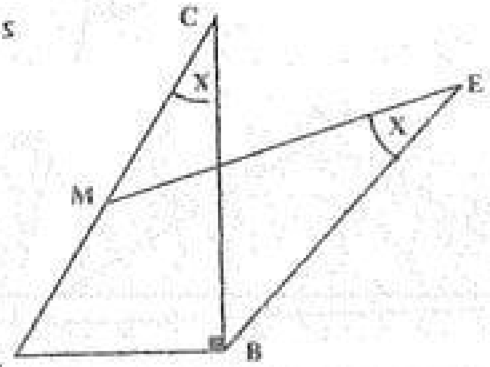
1.- H) .E es el ex-centro del ▲ABC

AM = MC

T) Calcular el valor de los ángulos $\hat{X}$.

45°

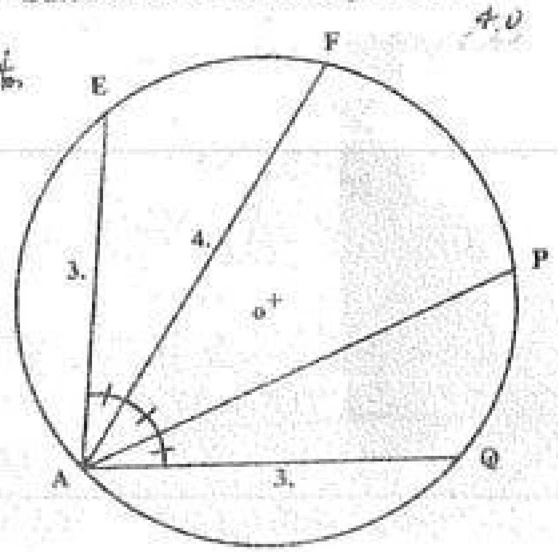
2Ptos



2.- Calcular el valor del segmento $\overline{AP}$.

4.0

2Pto

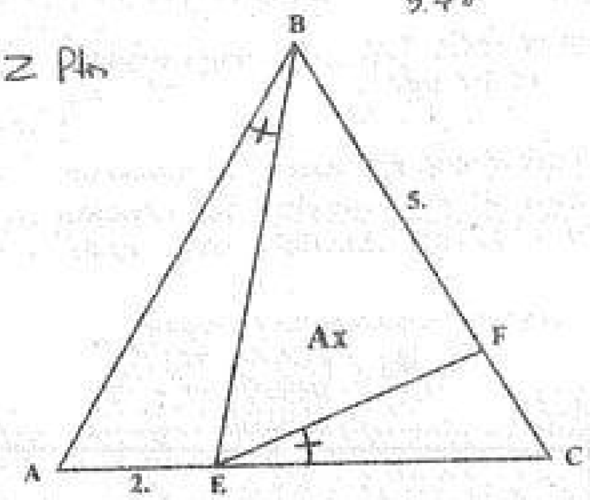


3.- H) ▲ABC es Equilátero

T) Calcular el valor del área Ax

9.46

2 Pto

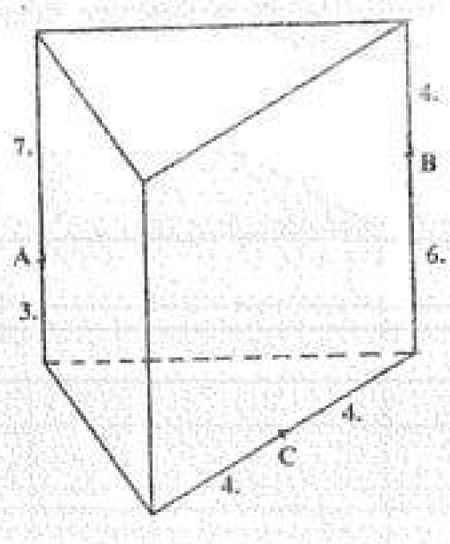


4.- Dos círculos de radios 9 m. y 12 m. son ortogonales. Calcular la medida de su tangente común exterior.

2 Pto.

5.- En el prisma triangular regular, calcular el volumen de cada una de las partes en que lo divide la sección que determina el plano ABC.

3 Pto.



6.- En una pirámide regular de volumen 600 m^3, su altura se divide en tres partes iguales, y por los puntos de división se trazan planos paralelos a su base. Calcular el volumen del sólido intermedio resultante.

3 Ptos

155.56 m^3

7.- Un cilindro de revolución de radio 10 m. y altura 20 m. con su eje dispuesto horizontal, contiene un volumen de agua igual a los 3/5 del volumen del cilindro. Calcular el valor de la superficie húmeda en el cilindro.

3 Pto

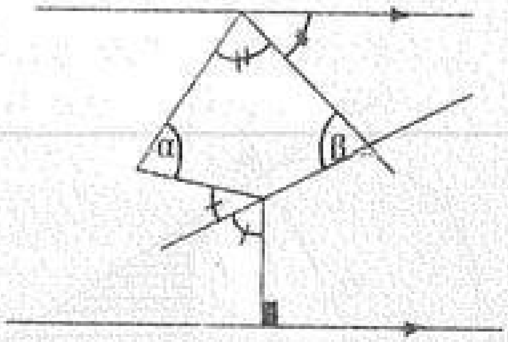
8.- En un cono de revolución R = 10 m. y h = 25 m. se traza una sección paralela a la base por el punto medio de su altura. Calcular la relación en que se divide la superficie lateral.

3 Pto.

M.A.Y.A. * 07-03-2006 *

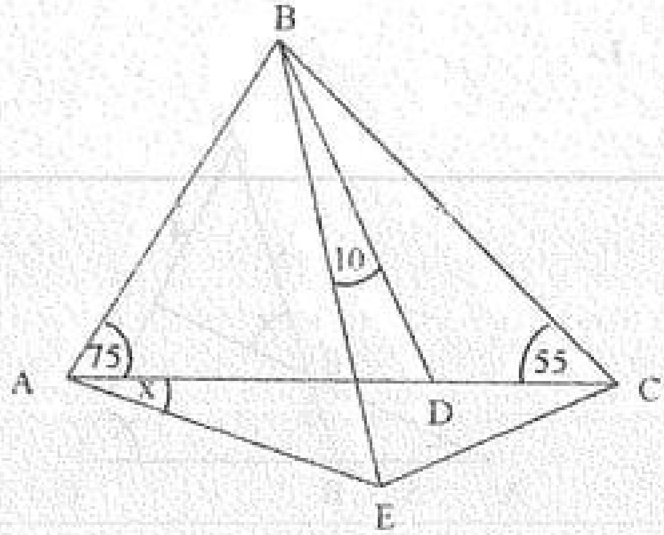
ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
GEOMETRÍA: PRIMER EXAMEN 2006-05-30

1.-



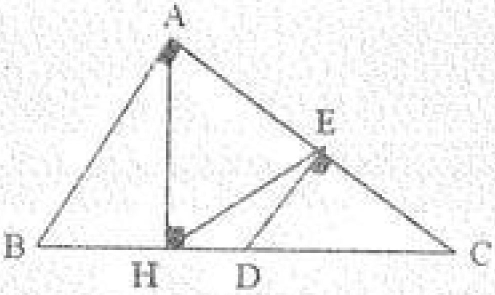
T) $\hat{\alpha} = 270 - 2\hat{\beta}$

2.-



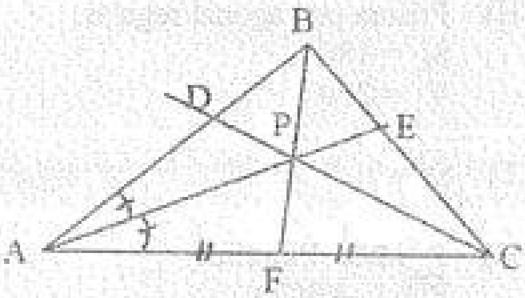
H) AB=BD
BE=BC
T) $\hat{x}$ = ?
30°

3.-



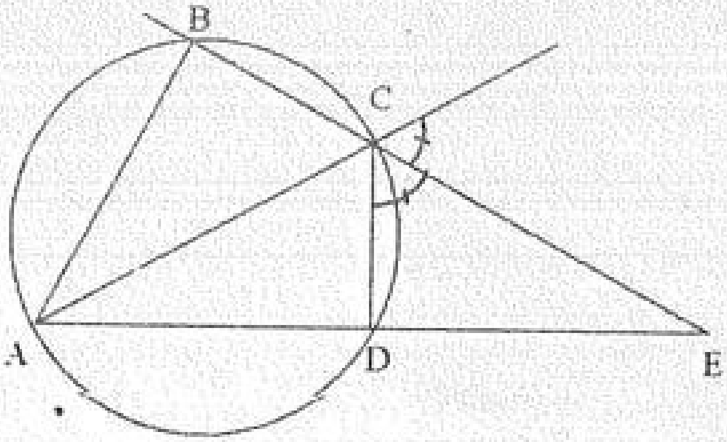
H) AB = 17u.
BD = 20,8u.
DC = 3 HD
T) HE = ?
16.02 μ

4.-



H) AB = 6u.
AC = 8u.
EP = 1,5u.
T) A∆PEC = ? 4.11 μ^2

5.-



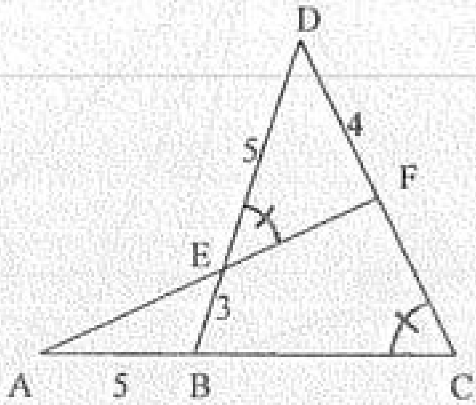
H) AB = 10u.
BC = 5u
T) CE = ?.
15 μ

NOTA: Todos los ejercicios tienen igual valor

13

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
GEOMETRÍA: EXAMEN FINAL 2006-08-04

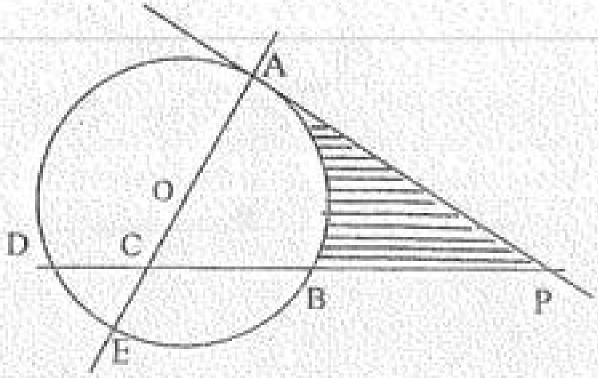
1.-



T) $A_{\Delta AEB} = ?$

7.39

2.-



H) $\overline{AP}$ tangente ; DC = 3 u.;
CB = 4u.; EC = 2,4 u.

T) A//// = ? 17.29 u.

3.- H) Prisma pentagonal regular.
$S_L = 180\ u^2$
$V = 250\ u^3$

T) $S_T = ?$

4.- H) P- ABCD Pirámide.
$\overline{PD} \perp ABCD$
ABCD cuadrado
AF = FB = BG = GC = 12 u.
PE = ED = 20 u.

T) Superficie de la sección que pasa por E, F y G
Relación de los volúmenes formados al construir la sección.

5.- H) Tronco de cono de revolución
Generatriz = 17 u.
$S_L = 544\pi\ u^2$
$S_T = 1088\pi\ u^2$

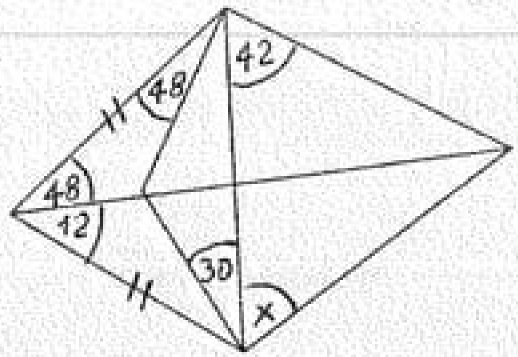
T) V = ?

NOTA: Todos los ejercicios tienen igual valor

19

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
GEOMETRÍA: EXAMEN SUPLETORIO 2006-08-14

1.-



T) $\measuredangle X = ?$ **(3 puntos)**
96°

2.- H) ΔABC...rectángulo
$\measuredangle A = 90°$
$\overline{AD}$ bisectriz $\measuredangle A$
$A_{\Delta ADC} = 12.u^2$
$AB = 4$ u.

T) $A_{\Delta ABD} = ?$ **(3.5 puntos)**
$5.49 u^2$

3.- Por el vértice A de un triángulo escaleno ABC y los pies de la mediana y la bisectriz relativas al vértice A, se hace pasar un círculo que corte a $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ en P y Q. Demostrar que BP = CQ **(3.5 puntos)**

4.- Los planos P y Q de arista AB forman un diedro de 35°. Un punto M situado en el plano P dista de A y de B 7u. Si el ángulo entre $\overline{MA}$ y el plano Q es 32°. Calcular la proyección del ΔAMB en el plano Q. **(3.5 puntos)** $14.16 u^2$

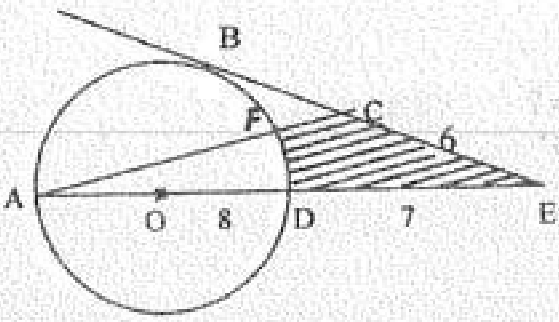
5.- Un recipiente esta compuesto de un cilindro de revolución de dimensiones R = 15u. h = 10 u. y un cono de revolución de dimensiones R= 15 u. y h = 20 u. contiene agua en un volumen igual a los 5/7 del volumen del recipiente. Calcular la altura del líquido si esta apoyado en la base del cilindro. **(3.5 puntos)** 12.12 u

6.- H) Tronco de pirámide pentagonal regular
Apotema = 17 u.
$S_L = 1632 u^2$
$S_T = 3264 u^2$

T) V = ? $6551.46 u^3$ **(3.0 puntos)**

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
GEOMETRÍA: EXAMEN DE UBICACION 2006-08-22

1.-

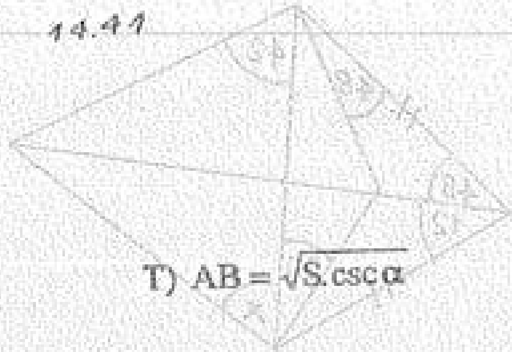


H) $\overline{BE}$ Tangente

T) $A_{////} = ?$ **(2,5 puntos)**

14.41

2.- H) ABCD Trapecio isósceles circunscriptible
AD base mayor
BC base menor
$\sphericalangle B = \alpha$
$A_{ABCD} = S$

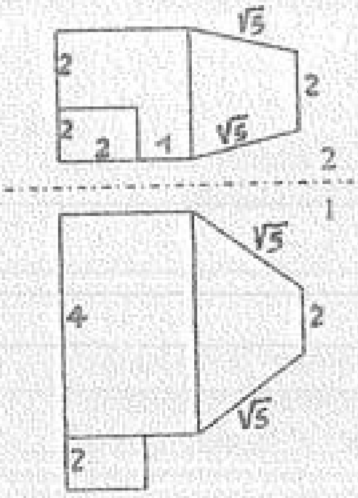


T) $AB = \sqrt{S . \csc\alpha}$

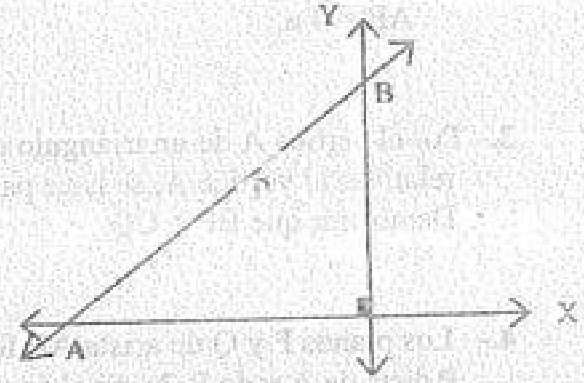
(2,5 puntos)

3.- Un cilindro de revolución de R= 6 u. y h = 20 u. está dispuesto horizontalmente y Contiene agua, si la superficie húmeda es 554,58 u^2. Calcular el volumen de agua.
(2,5 puntos)

4.- Dadas las vistas: frontal 2 y superior 1.
a) Dibujar el objeto; **(2,0 puntos)**
b) Calcular su volumen **(3,0 puntos)**



5.-



H) $\frac{PB}{BA} = -\frac{1}{2}$; P (-3; 1)

T) Ecuación de AB

$x - 3y + 6 = 0$

(2,5 puntos)

6.- H) Δ ABC
AB: $3X - Y - 3 = 0$
BC: $X - 3Y - 25 = 0$
CA: $3X + Y - 15 = 0$

T) Ecuación de la circunferencia ex inscrita al triángulo ABC. (Tangente al lado AB)
(2,5 puntos)

$(x+11)^2 + (y-6)^2 = 360$

7.- H) Cónica
P (1;-2) elemento de la cónica
Foco F (-2; 2), Directriz: $2X - Y - 1 = 0$

T) Ecuación de la cónica

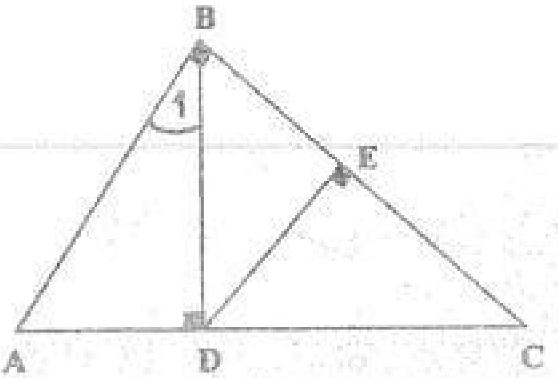
(2,5 puntos)

21

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL **Fila A**

GEOMETRIA Y DIBUJO **PRIMER EXAMEN** **11-2006**

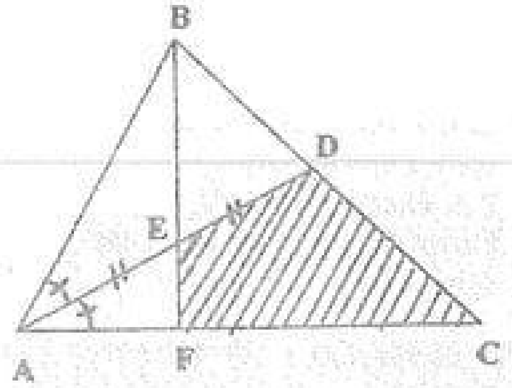
1)



H) AD = 14,40 u.
DE = 15,36 u.

T) $\measuredangle 1$ = ? 31°
$S_{\triangle ABC}$ = ? 382.63 u²

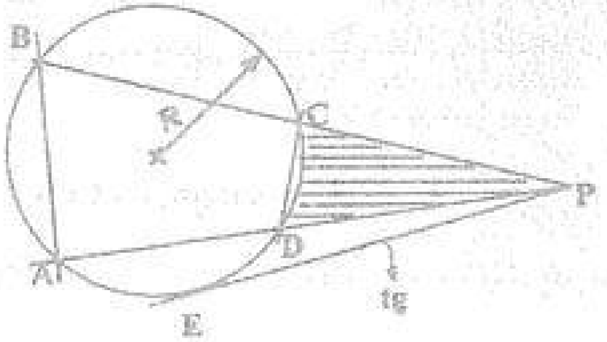
2)



H) AB = 6 u.
AC = 8 u.
EF = 1,52 u.

T) AF = ? 2.4 u
$S_{////}$ = ? 10.32 u²

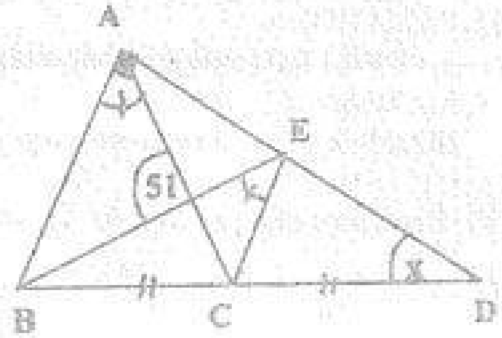
3)



H) PE = 29,93 u.
AD = 40 u.
BA = 30 u.
CD = 7,5 u.

T) R = ? 25.32 u
$S_{////}$ = ? 11.72 u²

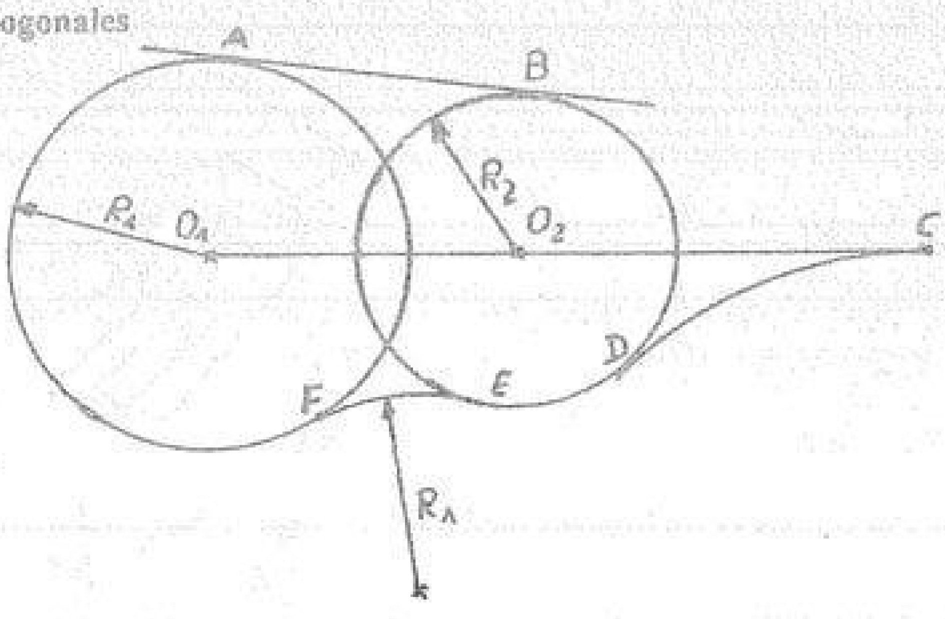
4)



T) ABCE inscriptible
$\measuredangle$ X = ? 11°

5) Reproducir el siguiente gráfico

H) $\Theta(O_1; R_1)$ y $\Theta(O_2; R_2)$ ortogonales
AB Tangente Común
$O_2C = 2R_1$



Nota: Todos los ejercicios igual valor

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL — Fila A

GEOMETRÍA Y DIBUJO **EXAMEN FINAL** **02-2007**

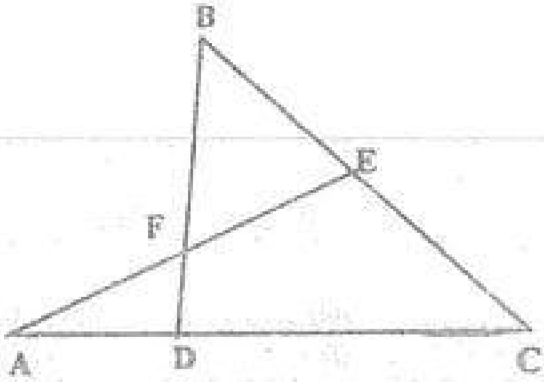
1)

H) ABCD RECTÁNGULO
A (-6 ; 6) ; B(-3 ; -3)
P es elemento del eje Y, y
Punto de intersección de las diagonales

T) Ecuación CD $3x+y-18=0$

(1.0)

2)



H) BE = EC = 4 u.
DA = 3 u ; AF = FE
BF = 6 u. (0.5)

T) S △ BFE = ? $8.34\,u^2$

3)

H) PARÁBOLA
A (2 ; 8) Extremo del lado recto
Eje focal : $2x - 3y + 7 = 0$
Directriz a la derecha del lado recto

T) Ecuación de la parábola (1.0)
$4x^2 - 12xy + 9y^2 - 50x - 94y + 452 = 0$

4)

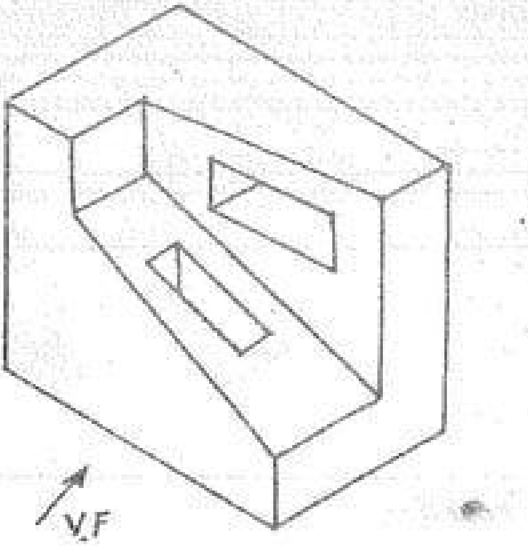
H) HIPÉRBOLA
Asíntota: $4x - 3y - 1 = 0$
Asíntota : $4x + 3y - 31 = 0$
Foco: F_1 (4 ; 10)

T) Ecuación de la Hipérbola (1.0)
$\frac{(y-5)^2}{16} - \frac{(x-4)^2}{9} = 1$

5)

H) ABCDE – A'B'C'D'E' PRISMA REGULAR **T) Volumen**
BE' = 13 u.
La proyección de BE' en la base es 5 u. (1.0)

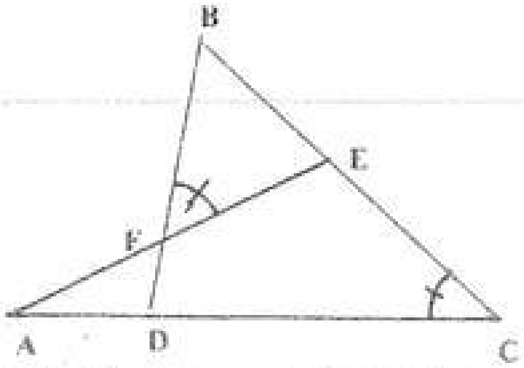
6) Dibujar la vista frontal, la vista superior y la vista lateral derecha del siguiente sólido.
(0.5)



ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

GEOMETRÍA Y DIBUJO — EXAMEN SUPLETORIO — 02-2007

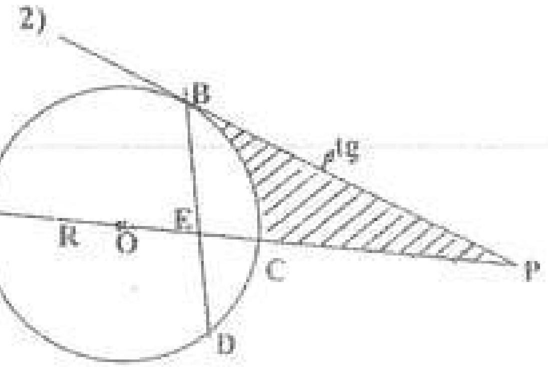
1)



H) AD = 5 u.
DF = 3 u.
FE = 3, 75 u.
EC = 6 u.

T) S ▲FBE = ?
$7.39 u^2$

2)



H) EB = 7 u.
ED = 4 u.
R = 8 u.
PC = 9 u.

T) S ////// = ?
25.41

3) La distancia del origen de coordenadas a una recta es 3 u., si esta recta forma con los ejes de coordenadas un triángulo de área 75 / 8. Determinar la ecuación de la recta.

$4x+3y+15=0$; $3x+4y+15=0$

4) H) ʘ (O1; R1) Y ʘ (O2; R2) ORTOGONALES
$O_1O_2 = 17$ u.
O_1O_2: $8X - 15Y = 0$
ʘ (O1; R1): $X^2 + Y^2 = 64$

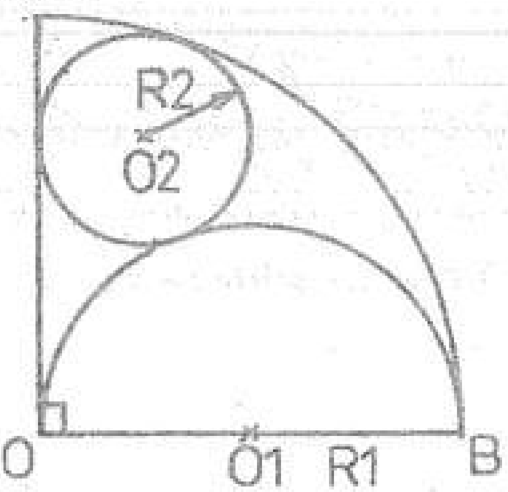
T) Ecuación del ʘ (O2; R2)
$(x+15)^2+(y+8)^2=225$

5) H) F_1 (4; 13)
A (4; -19) extremo eje mayor
Excentricidad = 15/17
Eje menor entre A y F_1

T) Ecuación de la elipse
$\frac{(x-4)^2}{64}+\frac{(y+2)^2}{289}=1$

6) H) ABCDE - A'B'C'D'E' TRONCO DE PIRÁMIDE REGULAR
Apotema base mayor = 20u. ; Apotema base menor = 12 u.
Apotema del tronco de pirámide = 10 u.
T) Volumen del tronco $5696.10 u^3$

7) Reproducir el siguiente gráfico si se conoce el radio R

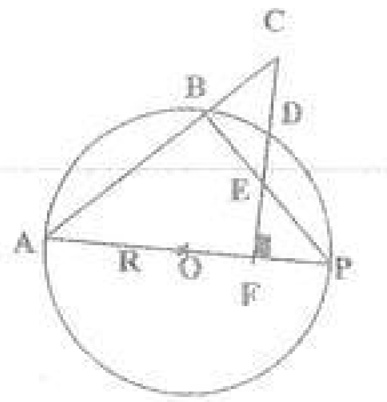


Nota: Los ejercicios 1, 2, 3, 4, 5, 6, tienen el valor 3.0 ; el ejercicio 7 tiene el valor de 2.0 puntos.

ESCUELA POLITÈCNICA NACIONAL

GEOMETRÍA Y DIBUJO **EXAMEN DE UBICACIÓN** **02-2007**

1)



T) $DF^2 = CF \times EF$

2) Calcular los lados de un trapecio isósceles, si los lados no paralelos y la base menor tienen igual longitud, su altura es 12 u. y la superficie 288 u^2. 15 u ; 33 u

3) H) A (5 ; 3)
B (2 ; 6)
C (- 6 ; 6)
D (-1 ; - 9)

T) ABCD Inscriptible

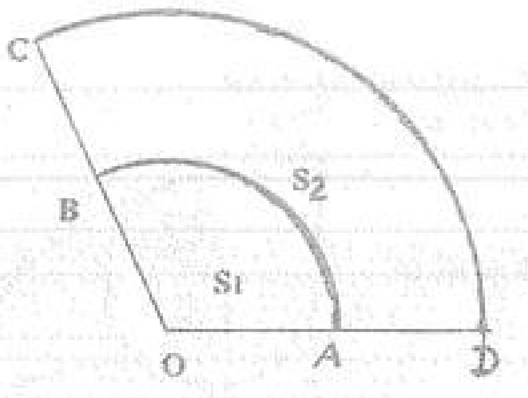
4) H) PARÁBOLA
Vértice (-3 ; 1)
Extremo del lado recto A (- 9 ; 3)
Directriz a la derecha del lado recto

T) Ecuación de la parábola
$x^2 - 2xy + y^2 + 24x + 8y + 48 = 0$

5) H) Asíntota: $13X - 9Y - 38 = 0$
Asíntota: $X + 3Y - 14 = 0$
Directriz: $3X + Y - 26 = 0$

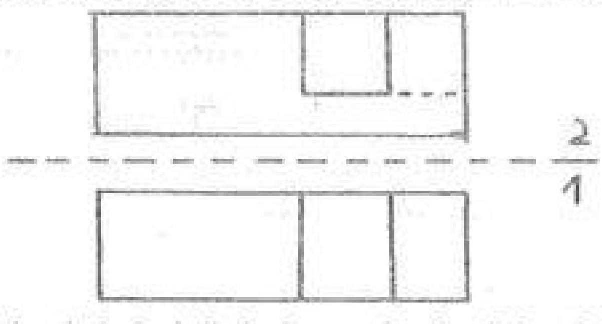
T) Ecuación de la Hipérbola
$13x^2 + 30xy - 27y^2 - 220x + 12y - 352 = 0$

6)



H) $\overset{\frown}{CD} = 10\pi$ u
$S_1 = 15\pi\ u^2$
$\overline{AD} = 6$ u
T) Volumen del tronco de cono que Se puede construír con S2

7) Dibujar el sólido correspondiente si se conoce: la vista frontal (2), y la vista superior (1)

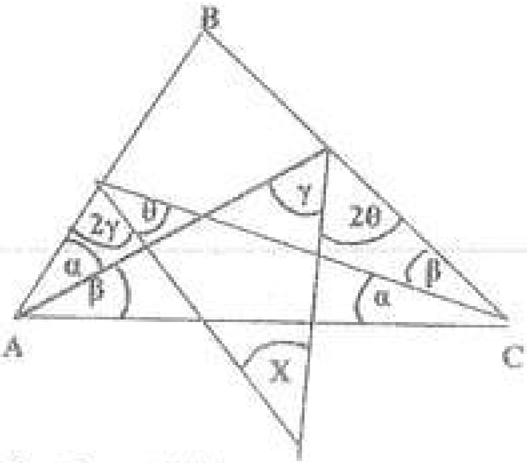


Nota: Los ejercicios 1, 2, 3, 4, 5, 6, tienen el valor 3.0 ; el ejercicio 7, el valor de 2.0 puntos.

25

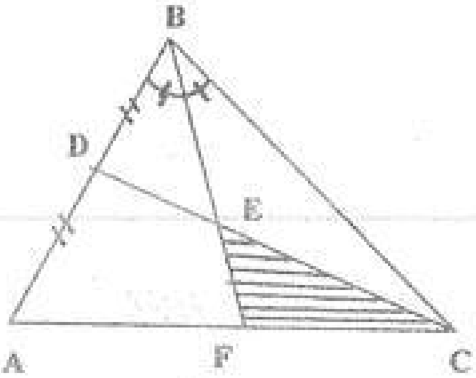
ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

:OMETRIA Y DIBUJO **PRIMER EXAMEN** **05-2007**

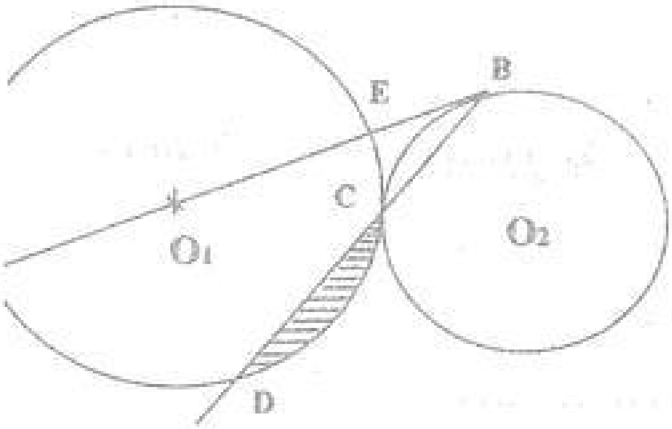


$< X = ?$ 60^{o}

2) ▲ ABC



H) AB = BF = 6 u. T) S //// = ? 4.22
BC = 8 u.

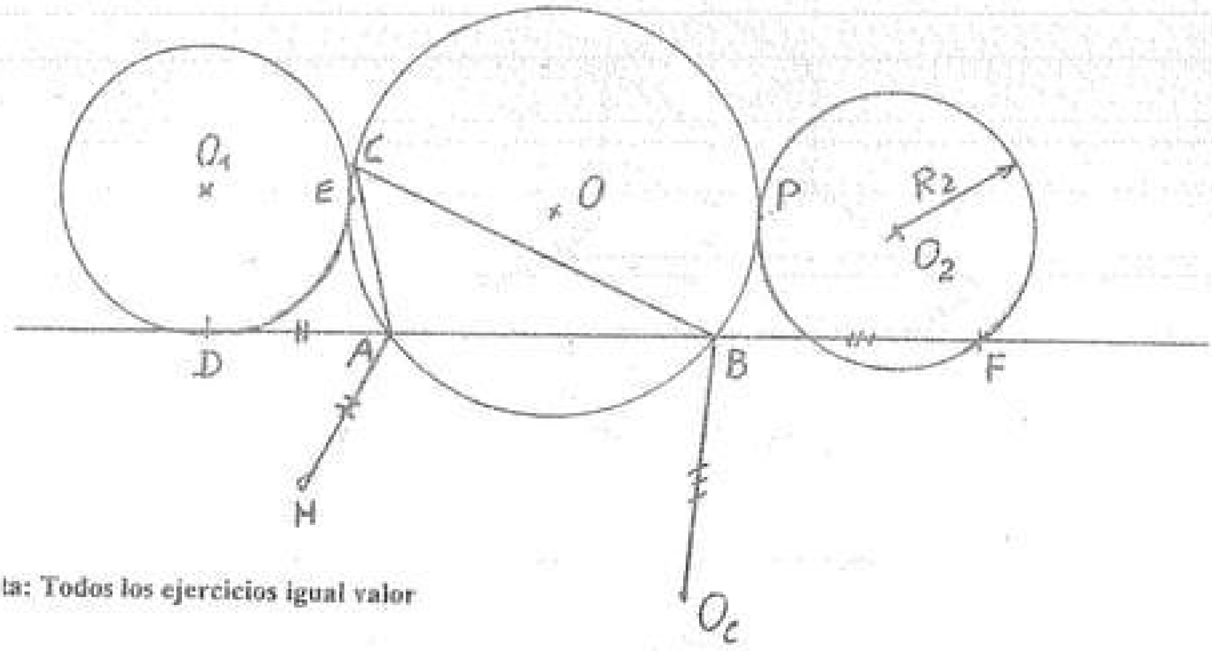


H) O (O_1,R_1) tg a O (O_2,R_2) en C
$\overline{AB}$ tangente a O (O_2,R_2) en B
$R_1 = 11$ u.
$R_2 = 5$ u.
T) Area ///// = ? $18.43\,u^2$

4) Calcular la longitud del segmento que une los puntos de tangencia, del círculo inscrito en un trapecio isósceles con los lados no paralelos, si las bases miden: 6 y 15 u. 8.57 u.

Reproducir el siguiente gráfico

H ORTOCENTRO ▲ ABC ; $\overline{AD} = \overline{AH}$; $\overline{BO_C} = \overline{BF}$; Oc EXCENTRO ▲ ABC

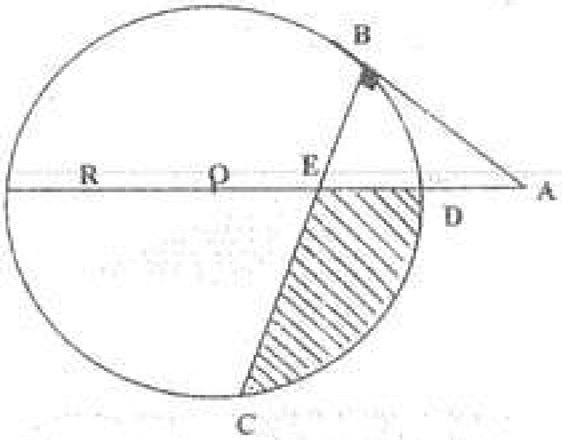


ta: Todos los ejercicios igual valor

ESCUELA P0LITÈCNICA NACIONAL

GEOMETRÌA Y DIBUJO **EXAMEN FINAL** **JULIO / 2007**

1.-



H) ED = DA
R = 9 u.
OE = 4 u.
T) $S_{////}$ = ? 51.72 u^2

(1.0)

2.- H) ABCD TRAPECIO ISÒSCELES
AD: 5X + 6Y + 14 = 0 (BASE MAYOR)
C (4; 3/2)
AB: 3X – 5Y + 17 = 0

T) ECUACIÒN DE CD

(1.0)

666x – 25y – 2239 = 0

3.- H) HIPÈRBOLA
e = 5/ 4
DIRECTRIZ: 3X + Y – 26 = 0
VÈRTICE A (8; 4)
CENTRO A LA IZQUIERDA DIRECTRIZ

T) ECUACIÒN DE LA HIPÈRBOLA

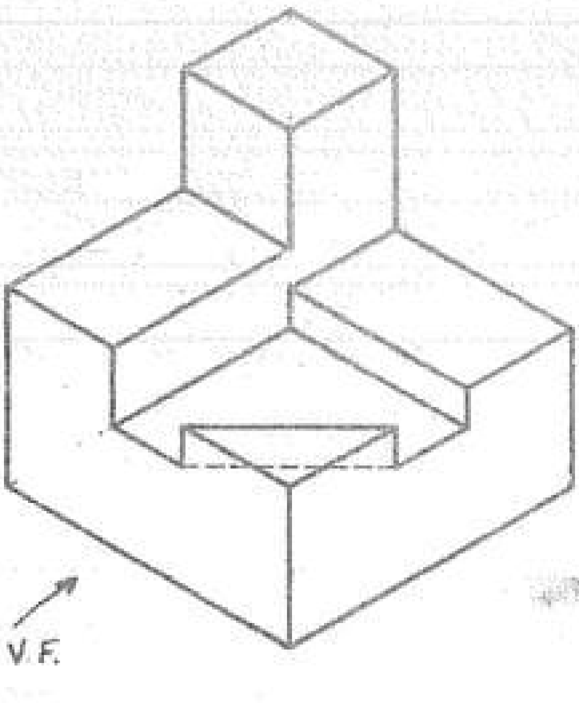
(1.0)

$7x^2 + 18xy - 17y^2 - 124x + 12y + 192 = 0$

4.- En un tronco de pirámide pentagonal regular de dimensiones: arista de la base mayor 10 u., arista de la base menor 6 u., altura 12 u., apoyado en su base mayor, se construye una sección paralela a las bases formando dos sólidos equivalentes. Calcular las áreas laterales de los dos sólidos formados. (1.0)

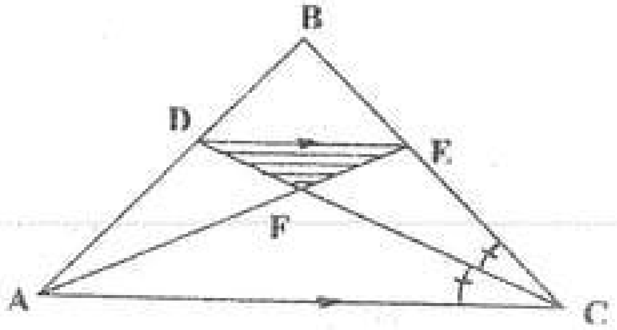
5. Dibujar la proyección en el espacio y las vistas principales de un trapecio rectángulo paralelo al plano de perfil. (0.5)

6.- Dibujar las vistas: frontal, superior y lateral derecha del siguiente sólido. (0.5)



ESCUELA P0LITÈCNICA NACIONAL

GEOMETRÌA Y DIBUJO **EXAMEN SUPLETORIO** **AGOSTO / 2007**



H) BC = 6 u.
AC = 4 u.
AF = 2u.
T) $S_{////}$ = ? $0.86u^2$

(4.0)

2.- H) ABCD RECTÀNGULO
A (4 ; 2); B(1 ; 8)
S_{ABCD} = 15

T) ECUACIÒN DE CD = ?
$2x+y-5=0$
(4.0) $2x+y-15=0$

3.-H) ELIPSE
VÈRTICE A (8/3 ; -1/3) EJE MAYOR
e = 1 / 2; DIRECTRIZ: X + Y – 1 = 0
(Eje menor a la derecha del vértice)

T) ECUACIÒN ELIPSE = ?
$7x^2-2xy+7y^2-46x+2y+71=0$
(4.0)

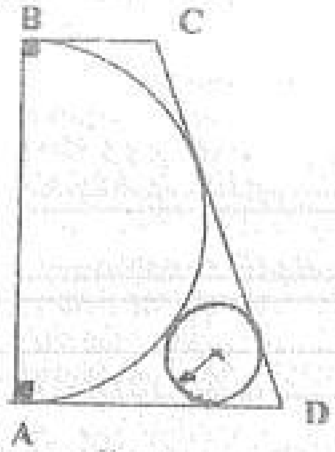
4.- En un tronco de pirámide pentagonal regular se construye una sección paralela a las bases, formando dos sólidos de áreas laterales iguales. Calcular los volúmenes de los dos sólidos formados. Dimensiones: lado de la base mayor 10 u.; lado de la base menor 6u.; altura del tronco 5u. **(4.0)**

5.-Reproducir el siguiente gráfico, utilizando los siguientes datos:

BC: ______________

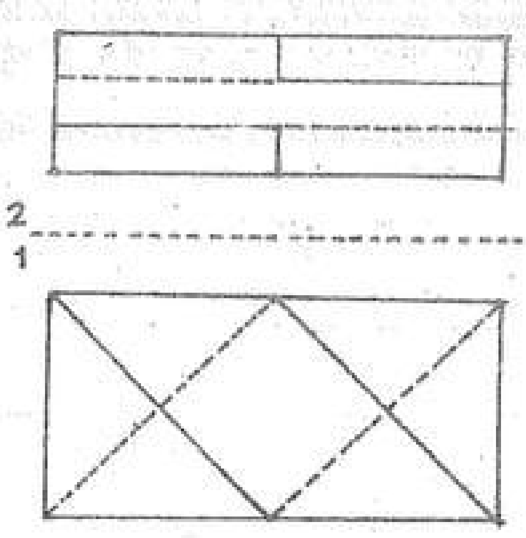
AB: ________________________________

(2.0)



6.- Dadas las vistas: Frontal 2; Superior 1. Dibujar el sólido correspondiente

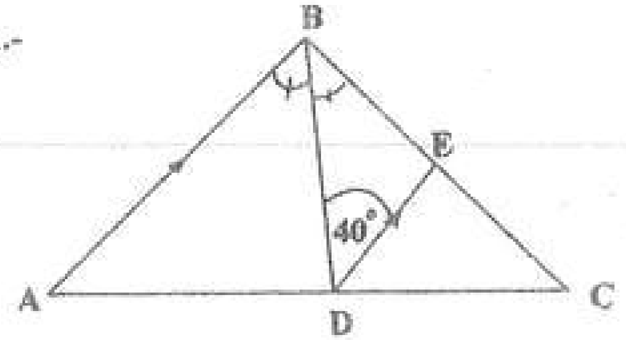
(2.0)



ESCUELA P0LITÈCNICA NACIONAL

GEOMETRÌA Y DIBUJO **EXAMEN DE UBICACIÒN** **AGOSTO / 2007**

1.-

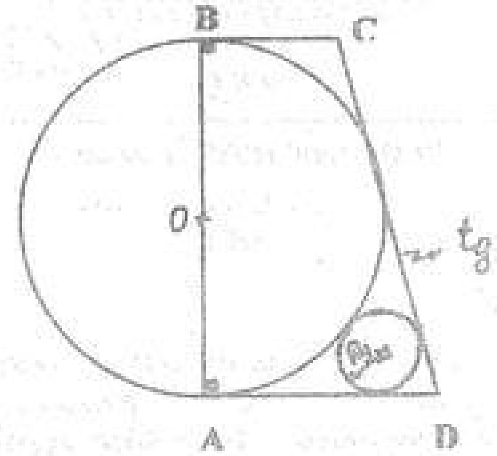


H) BA = 9 u.
BC = 10 u.

T) S_{DEC} =? $12,28\ u^2$

(3.0)

2-



H) AB = 12 u
CD = 13 u.

T) R_I =? $2,47\ u$

(3.0)

3.-H) ABCD ROMBO
A (1 ; 3) ; B(10 ; 5)
$S_{ABCD} = 40\ u^2$

T) ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA INSCRITA EN EL ROMBO

(3.0) $(x-2)^2+(y-1)^2=\frac{400}{85}$

4-H) PARÀBOLA
A (1; 1) ELEMENTO DIRECTRÍZ
B (-9; 3) ELEMENTO DE LA PARÀBOLA
F (-5; -1) FOCO

T) ECUACIÒN PARÀBOLA
$x^2-2xy+y^2+24x+8y+48=0$

(3.0)

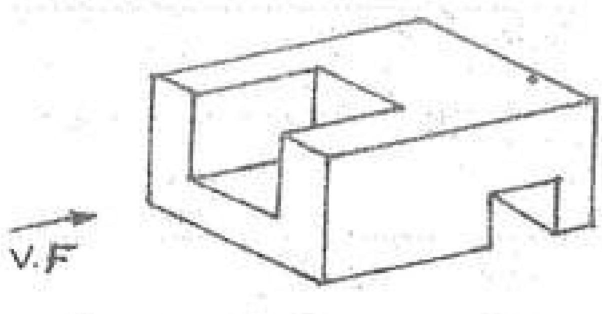
5.-H) HIPÈRBOLA
$13X - 9Y - 38 = 0$ ASÍNTOTA
$X + 3Y - 14 = 0$ ASÍNTOTA
A (2; 2) VÈRTICE

T) FOCOS DE LA HIPÉRBOLA

(3.0) $F_1\left(\frac{35}{4};\frac{17}{4}\right)$
$F_2\left(\frac{5}{4};\frac{7}{4}\right)$

6- Un tronco de cono de revolución apoyado en su base mayor contiene agua, si la superficie húmeda es $1113.76\ u^2$ calcular la altura del líquido. Dimensiones del tronco de cono: R = 12 u., r = 4 u., h = 14 u. $11,56\ u$ (3.0)

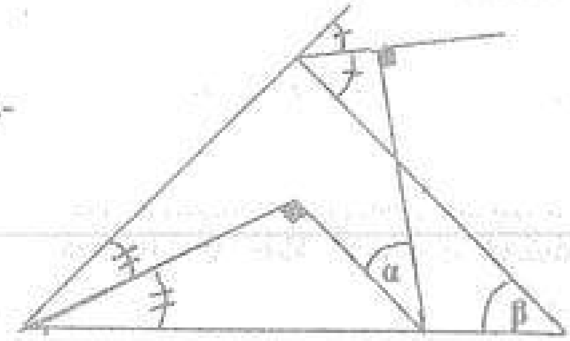
7.- Dibujar las vistas: Frontal, Superior y Lateral Derecha del siguiente objeto (2.0)



ESCUELA P0LITÈCNICA NACIONAL

GEOMETRÌA Y DIBUJO **PRIMER EXAMEN** **NOVIEMBRE / 2007**

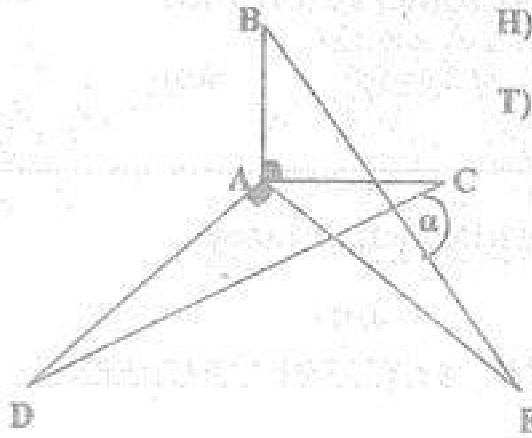
1.-



T) $\hat{\beta} = 2\hat{\alpha}$

(0.7)

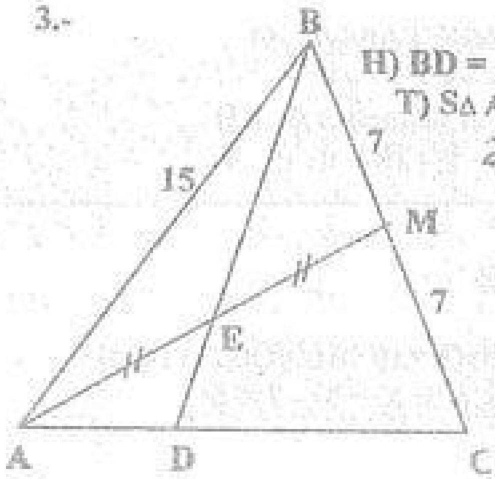
2-



H) AB = AC
AD = AE
T) $\hat{\alpha}$ =?
90°

(0.7)

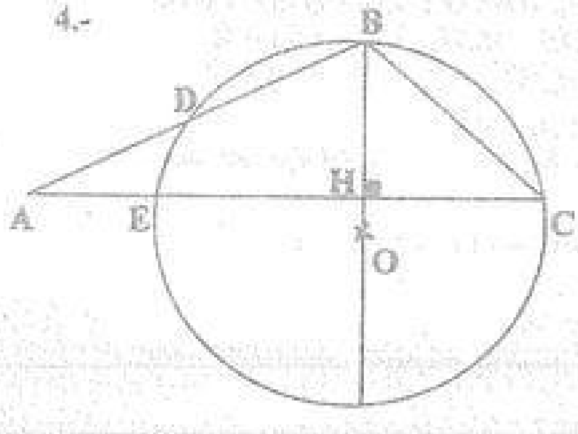
3.-



H) BD = 13.76u.
T) S∆ ABD =?
24,18 u^2

(0.7)

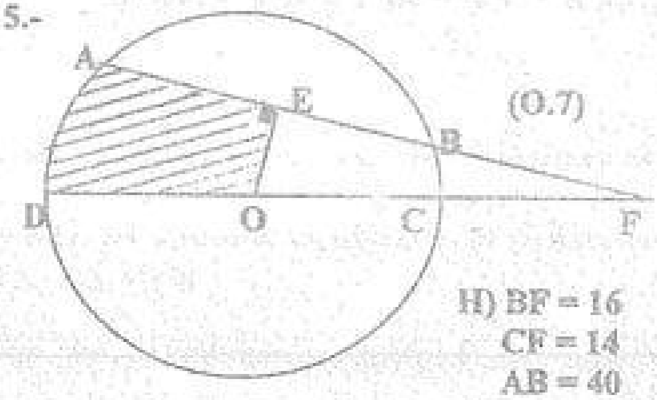
4.-



(0.7)

T) $BC^2 = AB \times DB$

5.-

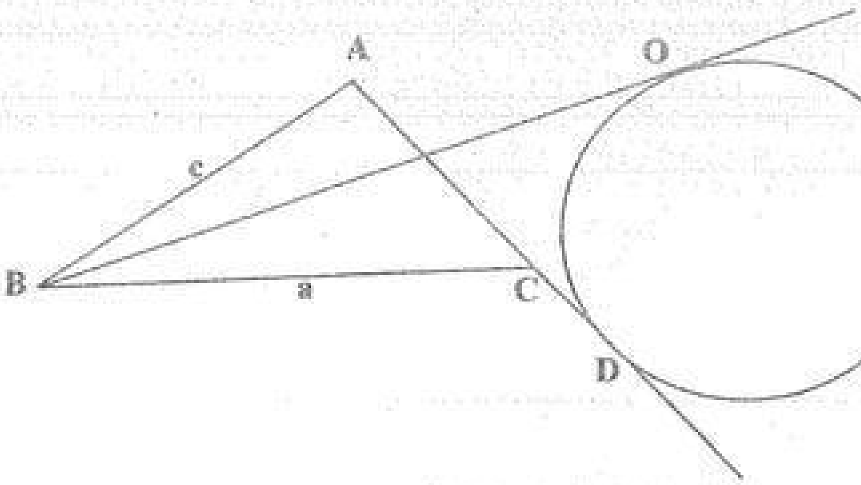


(0.7)

H) BF = 16
CF = 14
AB = 40
T) S//// =?
474,47 u^2

6.- Reproducir el siguiente gráfico con los siguientes datos: $\hat{A} = 90^0$, O excentro ∆ ABC

a ______________________ c ______________________



(0.5)

ESCUELA POLITÈCNICA NACIONAL

GEOMETRÌA Y DIBUJO EXAMEN FINAL ENERO / 2008

1.- Desde un punto interior de un polígono regular de n lados, se trazan perpendiculares a todos sus lados, si la suma de estas perpendiculares es a, cuanto mide su apotema. (0.7) a/n

2.- H) ABCD RECTÁNGULO
AC: $X + 4Y - 10 = 0$
P (1; 1) es elemento de AD
DB: $4X + Y - 25 = 0$

T) ECUACIONES DE CD Y AD (0.7)
$3x - 3y - 40 = 0$
$x + y - 2 = 0$

3.- H) ELIPSE
$e = 1/2$
EXTREMO EJE MENOR: A (4, 4)
EJE FOCAL: $X + Y - 2 = 0$

T) ECUACIÒN DE LA ELIPSE (0.7)
$7x^2 + 2xy + 7y^2 - 16x - 16y - 128 = 0$

4.- H) $16X^2 - 9Y^2 + 96X + 72Y + 144 = 0$

T) ECUACIÒN DE LA DIRECTRIZ FOCOS (0.7)
$5y - 36 = 0$
$5y - 4 = 0$
$F_1(-3, 9)$
$F_2(-3, -1)$

5.- Por traslación de ejes, el nuevo origen de una cónica es (2; 4) y luego de una rotación con un ángulo de 45^0 su ecuación se transformó en $(X'')^2 - (Y'')^2 = 16$. Determinar la ecuación de la cónica en el sistema de coordenadas XY. (0.7)

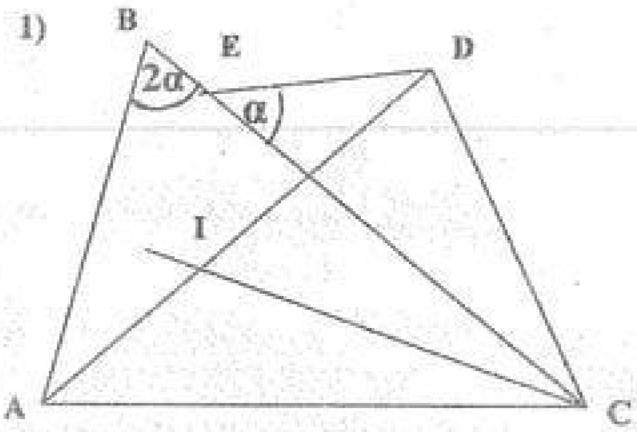
$xy - 2x - 2y = 0$

6. Dibujar un heptágono regular si su apotema es: (0.5)

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

GEOMETRIA Y DIBUJO **EXAMEN SUPLETORIO** **02-2008**

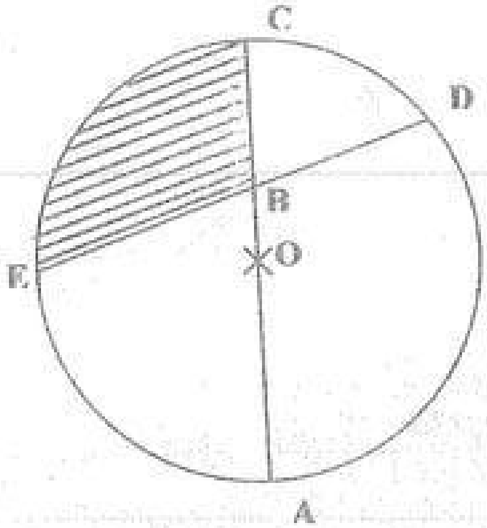
1)



H) I INCENTRO Δ ABC (3)
E EXCENTRO Δ IDC

T) ∢α = ? 30°

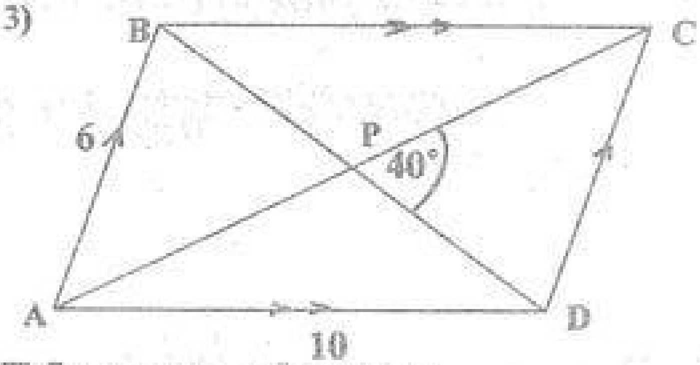
2)



H) OB = 8 u. (3)
BD = 4,5 u.
ARCO $\widehat{AD}$ = 3 ARCO $\widehat{EC}$

T) A//// = ? 13.56 u²

3)



T) SABCD = ? (3) 26.85

4) H) ABCD ROMBO
CF = FD
AF ∩ BD = E (2; -5)
F (7; -14)
∢DEF = 45°

T) ECUACIONES AC Y BD
(3)
$7x - 2y - 24 = 0$
$2x + 7y - 15 = 0$

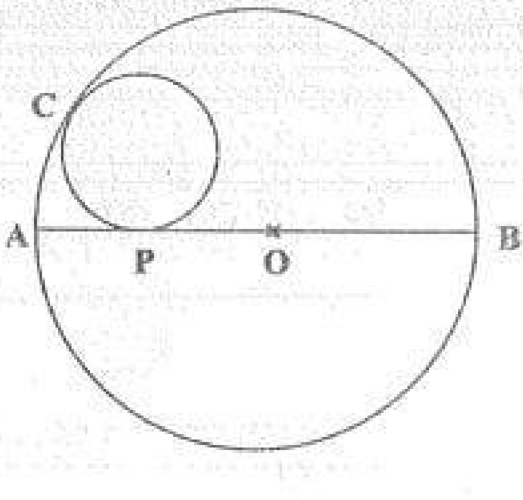
5) H) PARABOLA
F (5; 1)
V (3; 2) (3)

T) ECUACIÓN PARÁBOLA
$x^2 + 4xy + 4y^2 - 54x - 8y + 129 = 0$

6) H) CONICA: $XY - 2Y - 4X = 0$

T) FOCOS = ? (3)
(6;8) ; (-2;0)

7)



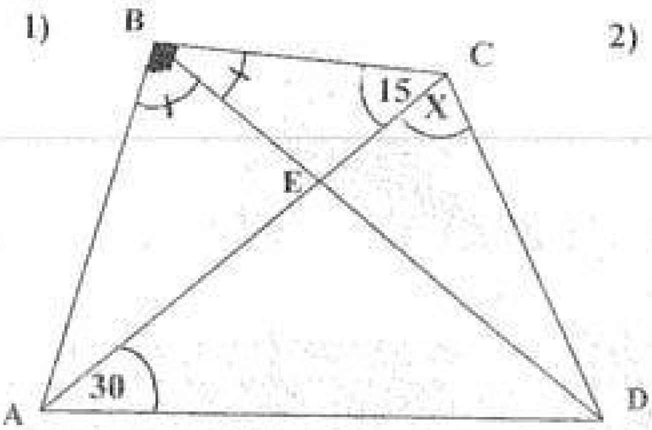
H) AP = $\frac{2}{5}$ AB (2)

T) REPRODUCIR EL GRAFICO

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

GEOMETRIA Y DIBUJO **EXAMEN DE UBICACION** **02-2008**

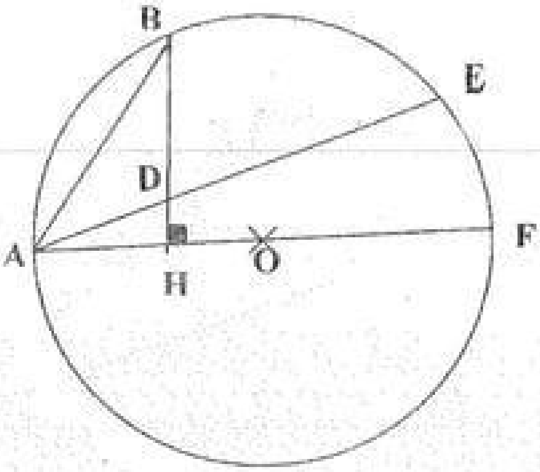
1)



T) $\measuredangle X = ?$ (3)

15°

2)



T) $AB^2 = AE.AD$ (3)

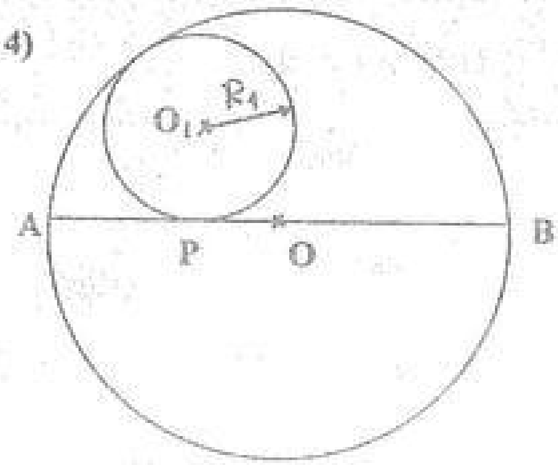
3)

H) ABCD ROMBO
CF = FD
$AF \cap BD = E$
FE = 3 u.
$\measuredangle DEF = 40°$

T) $A_{ABCD} = ?$ (3)

$106,37\ u^2$

4)



H) $AP = \frac{1}{4}\ AB$

A(-2;-10) ; B (10; 6) (3)

T) ECUACION O (O_1; R_1)

$\left(x+\frac{15}{4}\right)^2 + (y+2)^2 = \frac{225}{16}$

$(x+2)^2 + \left(y+\frac{15}{4}\right)^2 = \frac{225}{16}$

5)

H) e = 1/2
EXTREMO EJE MAYOR A (4;4)
EJE FOCAL: X+Y-2=0

T) ECUACIÓN DE LA CONICA (3)

$7x^2+14xy+7y^2-12x-12y-96=0$

$7x^2-2xy+7y^2-12x-12y-96=0$

6)

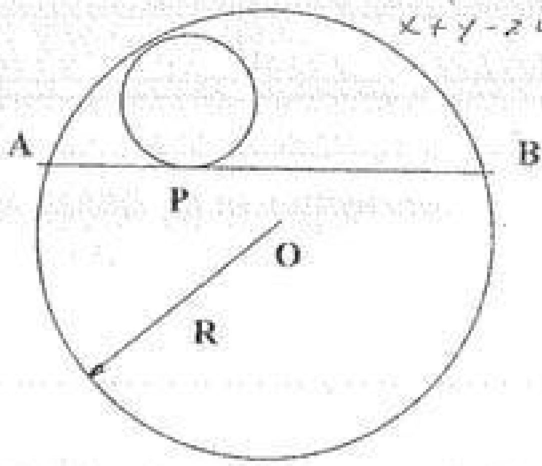
H) CONICA: XY − 4 = 0

T) ECUACIONES DE LAS DIRECTRICES (3)

$x+y+2\sqrt{2}=0$

$x+y-2\sqrt{2}=0$

7)



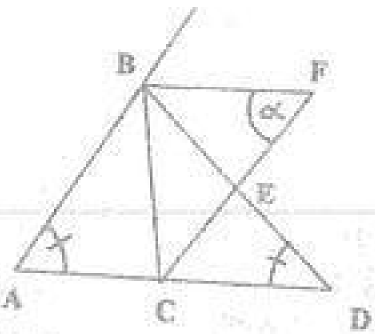
H) $AP = \frac{2}{5}\ AB$

T) REPRODUCIR EL GRÁFICO
(2)

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

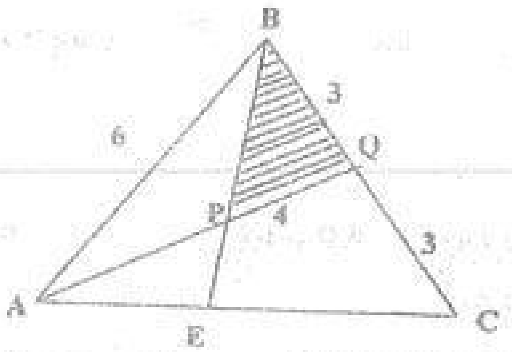
GEOMETRÍA Y DIBUJO **PRIMER EXAMEN** **14-05-2008**

1)



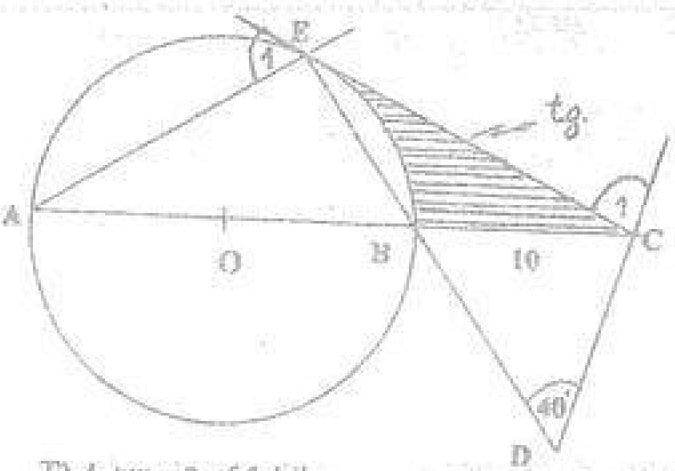
H) F ex centro Δ ABC
E circuncentro Δ BCF
T) $\hat{\alpha}$ = ? 54°

2)



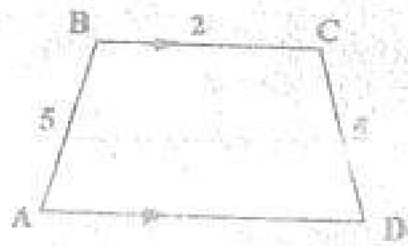
H) EC = 2 AE
T) A/// = ? 3.87

3)



T) A //// = ? 51.57

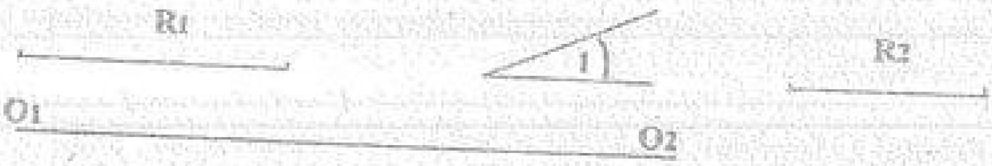
4)

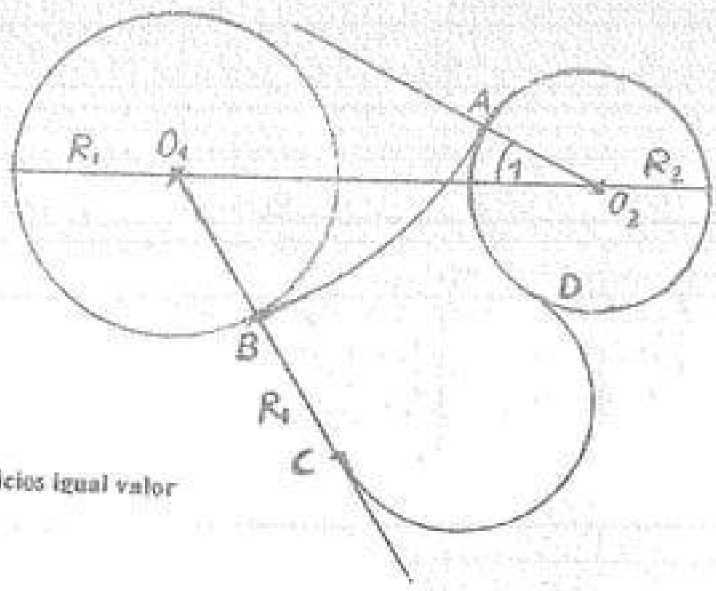


H) AABCD = 20 u²
T) AD = ? 5 u

5) REPRODUCIR EL SIGUIENTE GRÁFICO

H)





Nota: Todos los ejercicios igual valor

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

GEOMETRIA Y DIBUJO **EXAMEN FINAL** **07-2008**

1)

H) A (-4 ;-3) ; B(6 ; 12)

C (8; 0)

D es elemento de $\overline{AB}$

E es elemento de $\overline{BC}$

$\overline{DE} \parallel \overline{AC}$

$\dfrac{S\triangle BDE}{S\triangle ABC} = \dfrac{9}{25}$

T) Ecuación $\overline{DE}$ (0.7)

$x - 4y + 12 = 0$

2)

H) Centro C $(\frac{10}{3} ; \frac{1}{3})$

Directriz: $x + y - 1 = 0$

$e = \frac{1}{2}$

T) Ecuación de la cónica en el sistema x - y

(0.7) $7x^2 - 2xy + 7y^2 - 46x + 2y + 71 = 0$

3)

H) $17x^2 + 3xy - 7y^2 - 75 = 0$

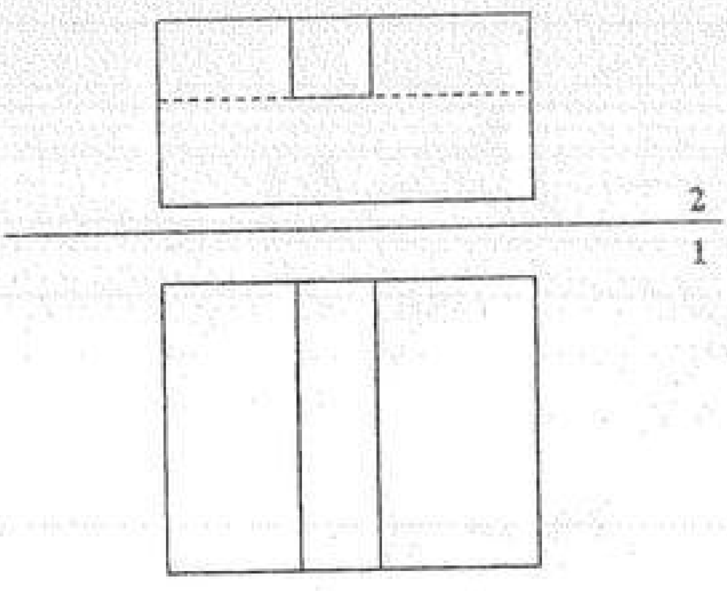
T) Focos en el sistema $x - y$ (0.7)

$(3,86 ; 0,24) ; (-3,86 ; -0,24)$

4) En una pirámide pentagonal regular, apotema de la base es 18u, apotema de la pirámide 30u. Calcular el ángulo entre dos caras laterales. (0.7) 123,91°

5) Dado un tronco de cono de revolución de dimensiones; R = 20u, h = 18u, r = 12u, apoyado en su base mayor. Se traza un plano paralelo a las bases dividiendo al tronco de cono en dos solidos que tienen superficies laterales iguales. Determinar en que relación están sus volúmenes. 0,186 (0.7)

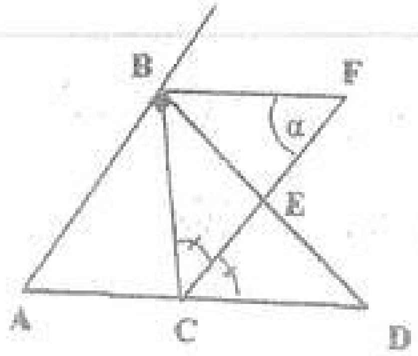
6) Dadas las vistas: Frontal 2, Superior 1 Dibujar el solido correspondiente (0.5)



ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

GEOMETRIA Y DIBUJO **EXAMEN SUPLETORIO** **08-2008**

1)



H) E circuncentro Δ BCF
AB = BD
T) $\alpha = ?$ (3.5)

2)

H) Centro C $(\frac{10}{3};\frac{1}{3})$
Directriz: $x + y - 1 = 0$
$e = 2$

T) Ecuación de la cónica en el sistema x - y

(3.5)

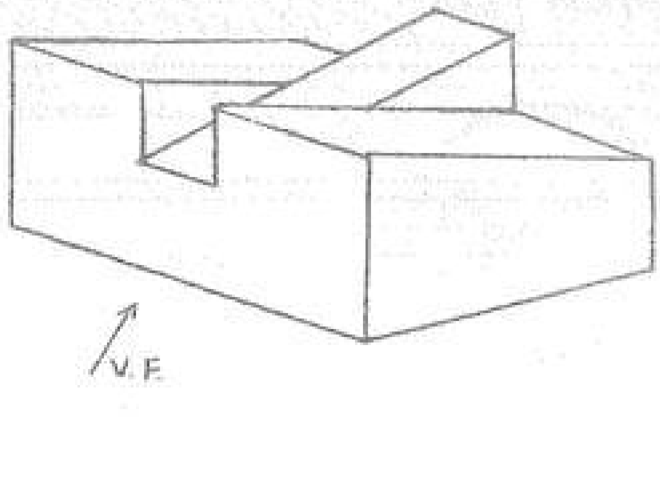
3) Después de hacer una rotación de 3,56° se obtuvo la siguiente ecuación

$\frac{(x')^2}{4,36} - \frac{(y')^2}{10,58} = 1$ Encontrar la ecuación de la cónica en el sistema x - y (3,5)

4) En una pirámide pentagonal regular, apotema de la pirámide 30u, el ángulo entre dos caras laterales es 123,9°. Calcular el volumen de la pirámide (3,5)

5) Dado un tronco de cono de revolución de dimensiones; R = 20u, h = 18u, r = 12u, apoyado en su base mayor. Se traza un plano paralelo a las bases dividiendo al tronco de cono en dos solidos equivalentes. Determinar en que relación están sus áreas laterales.
(3,5)

6) Dibujar la vista Frontal (0,5), la vista superior (0,5) y la vista lateral derecha (1,5). Del siguiente sólido.

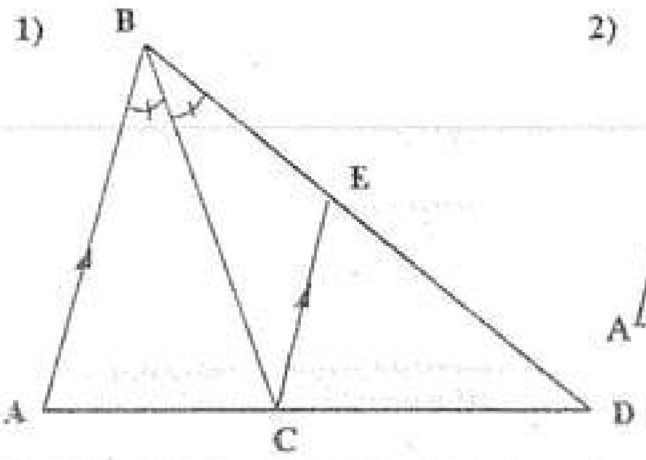


36

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

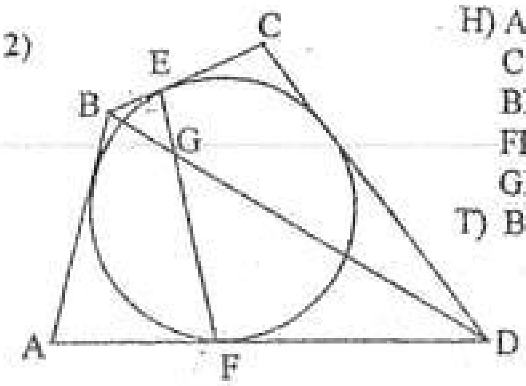
GEOMETRIA Y DIBUJO **EXAMEN DE UBICACION** **08-2008**

1)



H) $AB = 12$ u.
$BD = 18$ u.
$S_{\triangle BCE} = 25.53\ u^2$
T) $S_{\triangle BCA} = ?$ (3)

2)



H) ABCD cuadrilátero Circunscriptible
$BE = 4u$
$FD = 8u$
$GD = 10u$
T) $BG = ?$

(3)

3) H) ABCD PARALELOGRAMO
$\overleftrightarrow{AB}$: $X - 7Y + 39 = 0$
$\overleftrightarrow{AD}$: $5X - Y - 9 = 0$
$\overline{AC} \cap \overline{BD} = P(6; 4)$
T) ECUACIÓN DE $\overleftrightarrow{BD}$ (3)

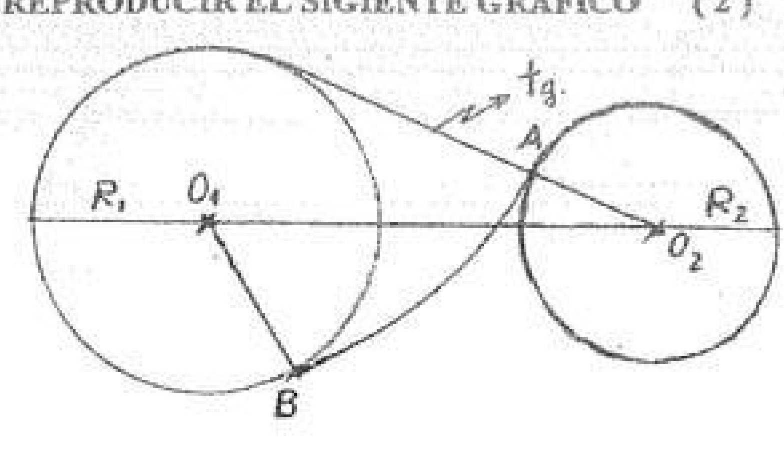
4) H) PARÁBOLA
$A(-6; 9) \in$ DIRECTRIZ
$F(2; 5)$
$B(4; -1) \in$ CURVA
T) ECUACIÓN PARABOLA (3)

5) Por uno de los lados de la base inferior y por el vértice opuesto de la base superior de un prisma triangular regular, se traza una sección. El ángulo entre esta sección y la base inferior es 70^0, el área de la sección $30\ u^2$. Calcular el volumen del prisma. (3)

6.- Dado un tronco de pirámide cuadrangular regular, apoyado en su base mayor, de dimensiones: lado de la base mayor 20u., lado de la base menor 8u. apotema 10 u.; contiene agua hasta una altura de 6u.. Calcular el volumen de agua. (3)

7.- H)

T) REPRODUCIR EL SIGIENTE GRÁFICO (2)



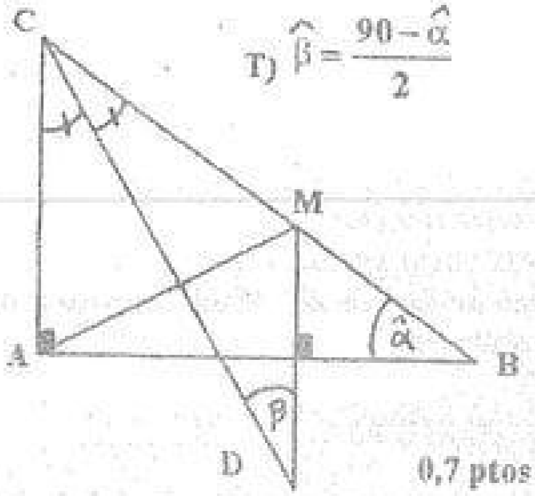
37

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

GEOMETRIA Y DIBUJO **PRIMER EXAMEN** **11-2008**

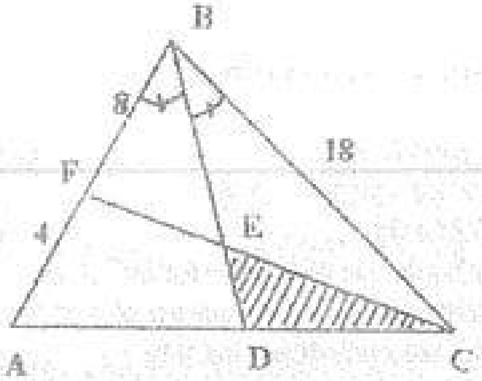
1)

T) $\hat{\beta} = \dfrac{90 - \hat{\alpha}}{2}$



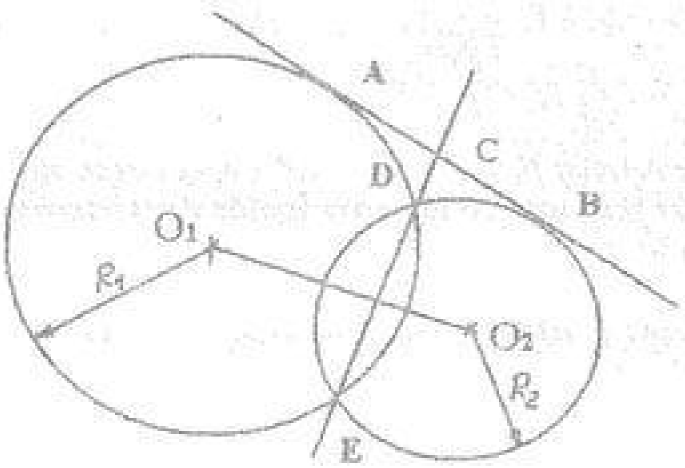
0,7 ptos

2)



H) BD = 13,85 T) $A_{///}$ = ? 0,7 ptos

3)



H) Θ (O_1,R_1) y Θ (O_2,R_2)

Ortogonales

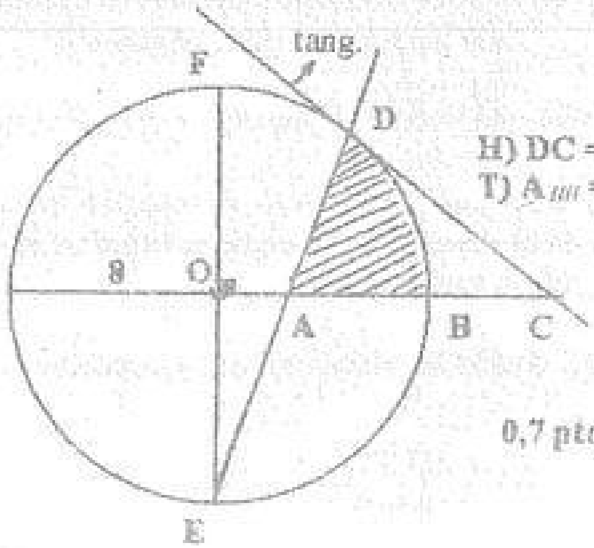
$\overline{O_1O_2} = 15$

$R_1 = 12$ u.

$\overline{AB}$ tangente externa común

T) CD = ? 0,7 ptos

4)

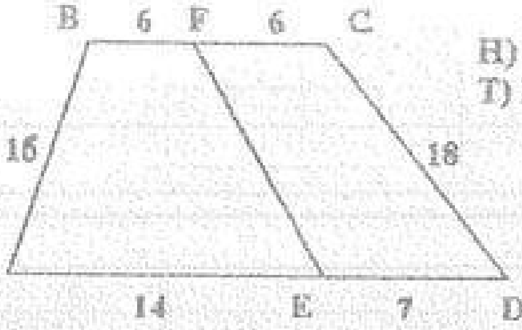


H) DC = 6

T) $A_{///}$ = ?

0,7 ptos

5)



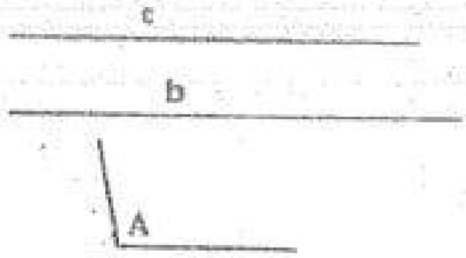
H) $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$

T) EF = ?

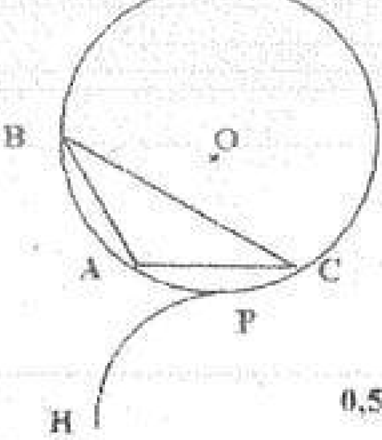
0,7 ptos

5) Reproducir el siguiente gráfico

H)



H ORTOCENTRO $\triangle$ ABC



0,5ptos

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

GEOMETRIA Y DIBUJO **EXAMEN FINAL** **01-2009**

1) H) $12y^2 - 4x^2 + 72y + 16x + 44 = 0$

T) Ecuaciones de las directrices (0,7) $y+2=0$ $y+4=0$

2) H) PARÁBOLA
Directriz: $x + y - 2 = 0$
Vértice: $(-3; 1)$
$x^2-2xy+y^2+24x+8y+48=0$
T) Ecuación de la parábola en el sistema de coordenadas x-y

3) H) PRISMA PENTAGONAL REGULAR
ABCDE base inferior
A'B'C'D'E' base superior
$\overline{AC'}$ forma un ángulo de 70° con la base inferior
Area lateral: 100 u^2

T) Volumen del prisma (0,7)
72,72

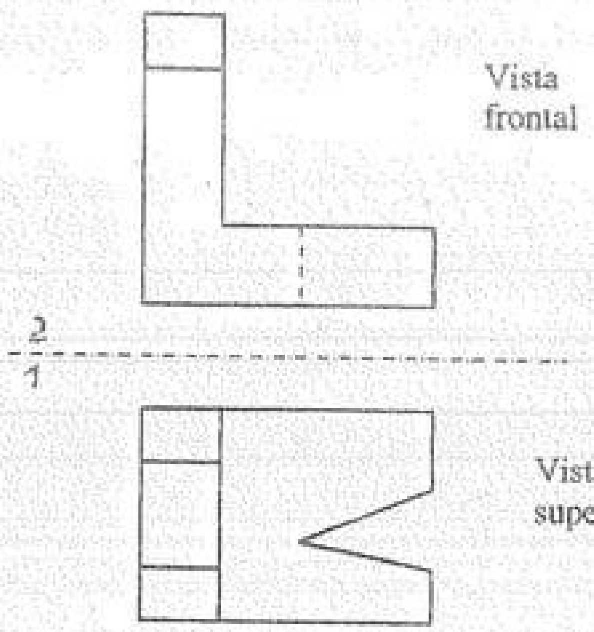
4) H) ABCD Trapecio isósceles circunscriptible
$\overline{AD}$ base mayor: $3x - 5y - 6 = 0$
B (-4; 4)
$\overline{AE} = \overline{EB}$; E (-6; -1)
70,19

T) S_{ABCD}

(0,7)

5) Un tronco de cono de revolución de dimensiones: R = 6 u, r = 2, h = 8 u, contiene agua, si la superficie húmeda es 140 u^2. Calcular la altura del nivel del líquido si esta apoyado en su base menor. 5,40 (0,7)

6) Dadas las vistas frontal y superior, dibujar el sólido correspondiente. (0.5)

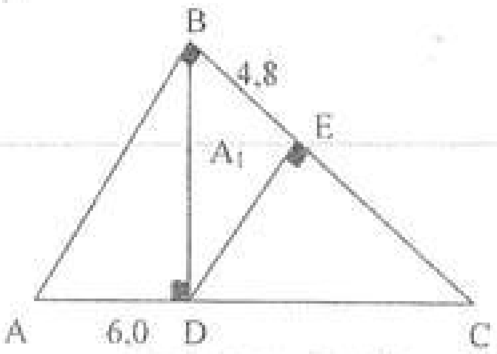


39

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

GEOMETRÍA Y DIBUJO **EXAMEN SUPLETORIO** **2009-02**

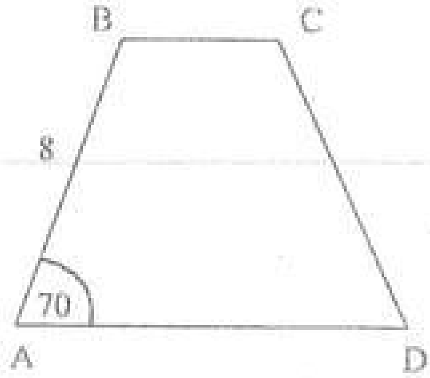
1)



T) A_1=? (3.0 ptos)

15,36

2)

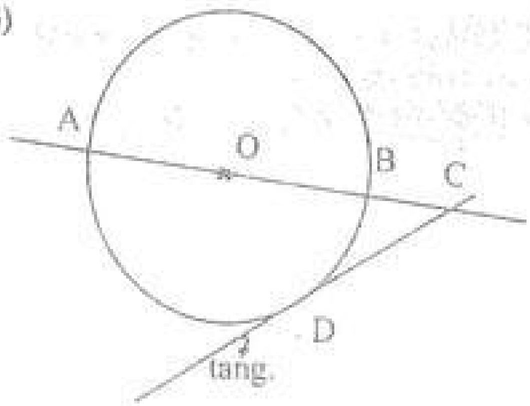


H) ABCD trapecio isósceles circunscriptible

T) A_{ABCD} = (3.0 ptos)

60,16

3)



H) Ecuación CD: $X - 2Y - 2 = 0$

Ecuación AC: $X + 2Y - 26 = 0$

A (-4; 15)

T) Ecuación de la circunferencia (3.0 ptos)

$(Y-4)^2+(Y-11)^2=80$

4) H) $9X^2 + 25Y^2 - 36X + 150Y + 36 = 0$

T) Focos (3.0 ptos)

$F_1(6;-3)$
$F_2(-2;-3)$

5) H) $XY - 4X - 4 = 0$

T) a, b, c (3.0 ptos)

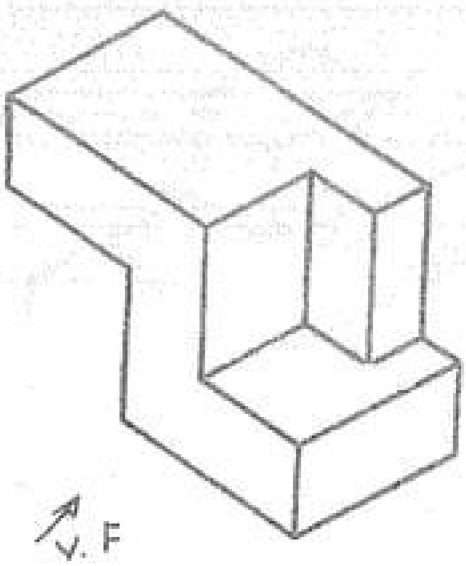
$a = 2\sqrt{2}$
$b = 2\sqrt{2}$ $c = 4$

6) H) P- ABCD Pirámide cuadrangular regular
Ángulo entre la arista lateral y la base =25,12°
Volumen P- ABCD = 884 u^3

T) Área total (3.0 ptos)

880

7) Dibujar las vistas: Frontal, Superior y Lateral Derecha del siguiente sólido (2.0 ptos)

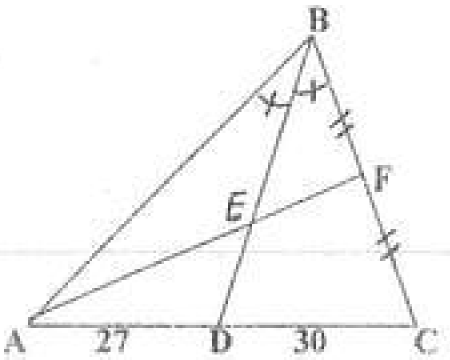


40

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

GEOMETRÍA Y DIBUJO **EXAMEN DE UBICACIÓN** **2009-02**

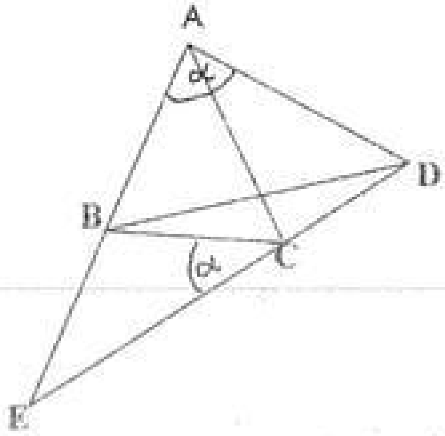
1)



H) ED = 23

T) $S_{\triangle ADE}$ (3.0 ptos)

2)



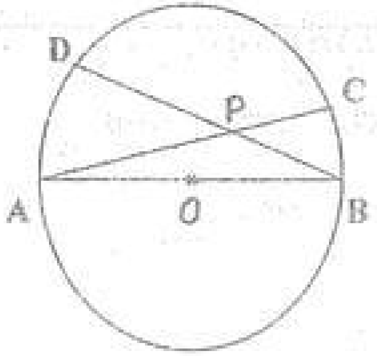
H) A(-5;7); Tg α = 8; ED: X-2Y-6=0

BD: Y-2=0

T) ECUACIÓN AC (3.0 ptos)

11X+3Y+34=0

3)



T) AB^2= AC.AP+BD.BP (3.0 ptos)

4) H) ELIPSE

F(2;3)

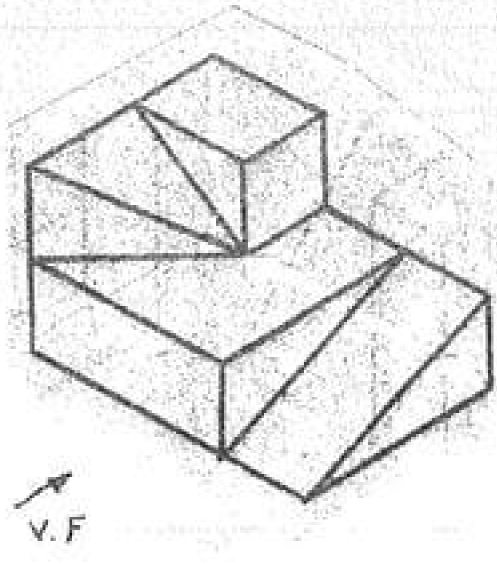
DIRECTRIZ: X+Y+7=0 (a la izquierda del foco); lado recto = 4

T) ECUACIÓN ELIPSE (3.0 ptos)

5) Un hojalatero quiere construir un recipiente de forma prisma pentagonal regular de altura 35 cm. , dispone de una lámina rectangular de aluminio de dimensiones 35 cm. x 135 cm. Hallar el volumen del máximo recipiente que puede construir. (3.0 ptos)

6) Una hoja de papel ABCD tamaño A4, se dobla por los puntos medios de AB y BC (E punto medio de AB y F punto medio de BC), el ángulo diedro E-F formado es de 72°. Calcular el volumen de la pirámide B-EFCDA (3.0 ptos)

7) Dibujar las vistas: Frontal, Superior y Lateral Derecha del siguiente sólido (2.0 ptos)

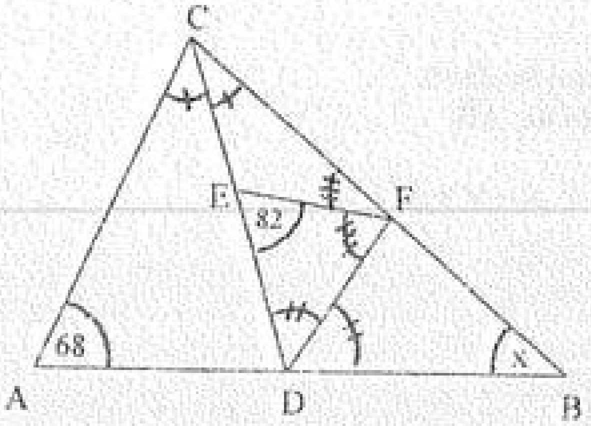


41

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

GEOMETRÍA Y DIBUJO **PRIMER EXAMEN** **05-2009**

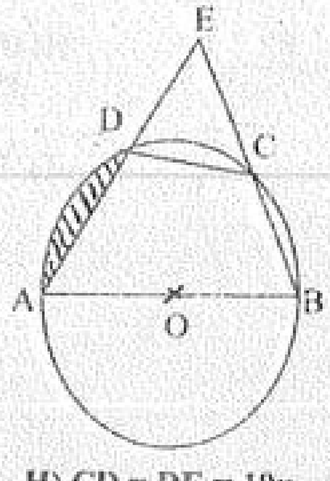
1.



T) $\measuredangle X = ?$ (0.7)

40°

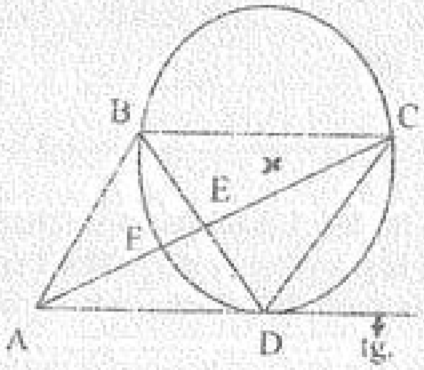
2.



H) CD = DE = 10u
EB = 20u

T) A//// = ? (0.7) 9,05

3.



H) ABCD paralelogramo
AC = 10u
BD = 5.4 u

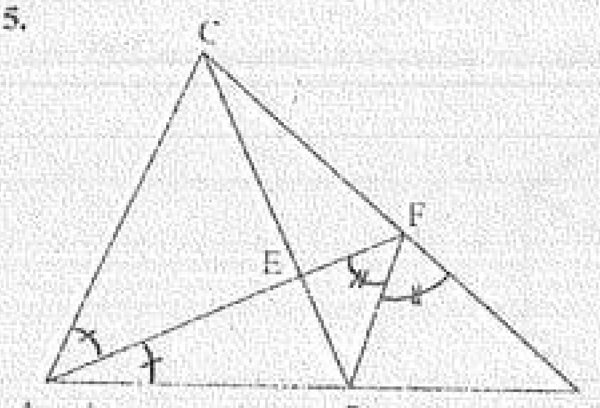
T) $A_{ABCD} = ?$ (0.7) 26,86

4. H) ABCD INSCRIPTIBLE
AB = 54.2 u
BC = 63 u
CD = 26 u
AD = 18.2 u

T) BD = ? (0.7)

52,45

5.



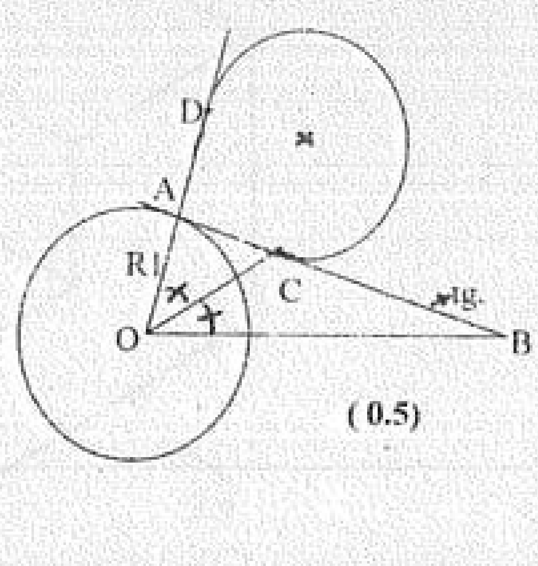
H) AC = 12 u
EF = 2.5 u
DF = 3.0 u
AD = 10 u

T) $A\Delta_{FEO} = ?$ (0.7) 3,55

6. H) R1

O B

T) Reproducir el siguiente gráfico

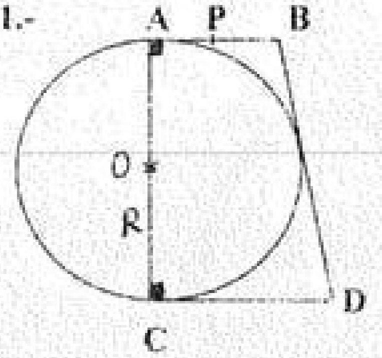


(0.5)

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

GEOMETRIA Y DIBUJO EXAMEN FINAL 07-2009

1.-



H) Θ (O; R): $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 25 = 0$
P (1; 4) es elemento de $\overline{AB}$

T) Ecuación de $\overline{AB}$ $x - y + 3 = 0$

(0.7)

2) H) ELIPSE
Directriz: $x - 2y + 10 = 0$
Vértice: V_1 (8; 8) extremo eje mayor
Centro (2;-4)
T) Ecuación de la elipse en el Sistema de coordenadas x-y (0,7)
$19x^2 + 4xy + 16y^2 - 60x + 120y = 0$

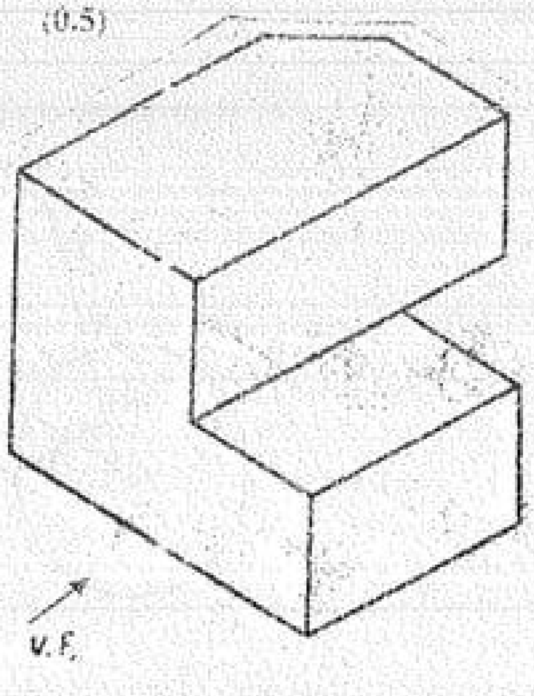
3) H) $4x^2 - 4xy + y^2 + 5\sqrt{5}\,x + 5 = 0$
T) Vértice de la cónica en el sistema de coordenadas x-y (-0,89 ; 0,45)
(0,7)

4) Los planos P y Q de arista $\overline{AB}$, forman un ángulo diedro de 40^0. Un punto M localizado en el plano P forma el Δ MAB; MA = MB; $S_{\Delta MBA} = 17\ u^2$, si la proyección del Δ MAB en el plano Q es el Δ ABH, AH = HB= 7u. Calcular el ángulo que la recta $\overline{MB}$ forma con el plano Q. (0,7) $38{,}87^0$

5) Un tronco de cono de revolución de dimensiones: R = 14 u, r = 12, h = 16 u, contiene agua, hasta la mitad de su altura. Se suelta una piedra en el tronco de cono y se sumerge totalmente. Si el nivel del líquido sube 5u. Calcular el volumen de la piedra. (0,7)

2530,75

6) Dibujar las vistas: frontal, superior y lateral derecha, de acuerdo a las normas DIN del siguiente sólido. (0.5)

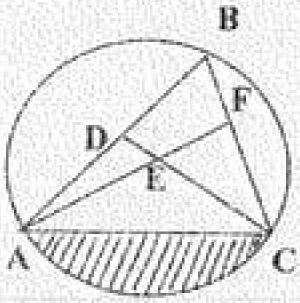


ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

GEOMETRIA Y DIBUJO **EXAMEN SUPLETORIO** **07-2009**

1.- En un ΔABC, $\measuredangle A > 90^0$, D es el pie de la altura trazada desde B, E es el pie de la altura trazada desde C, H es el ortocentro del ΔABC, $\measuredangle HBE = \measuredangle EBC$, $EF \perp BC$, $F \in BC$. Demostrar que $DC = 2 FE$ (3.5 puntos)

2. -



H) $AD = 4\,u.$
$DB = 6\,u.$
$DE = 2.5\,u.$
$EC = 11.26\,u.$
$FC = 9\,u.$

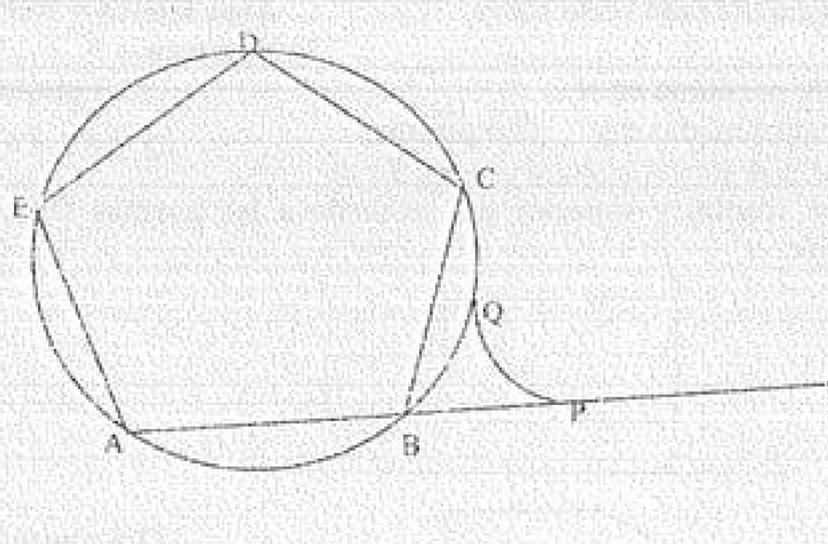
T) $S_{////}$ =? **(3.5 puntos)**

3.- H) HIPERBOLA
Directriz: $3\sqrt{3}\,x + 3y - 2\sqrt{3} = 0$
Vértice: $V_1\,(1;\ \sqrt{3}/3)$
Centro $(0;\ 0)$
T) Ecuación de la hipérbola en el Sistema de coordenadas x-y (3.5 puntos)

4.-Después de hacer uma rotación de 63.43^0 se obtuvo la siguiente ecuación $(y'-1)^2 = -\,x'$. Determinar la ecuación la cónica en el sistema x-y (3.5 puntos)

5) Dado un tronco de pirámide cuadrangular regular: arista de la base mayor 12u., arista de la base menor 8 u., apotema del tronco de pirámide 14u. Contiene agua hasta una altura 6 u. Calcular el volumen del agua si está apoyado en su base mayor. (3.5 puntos)

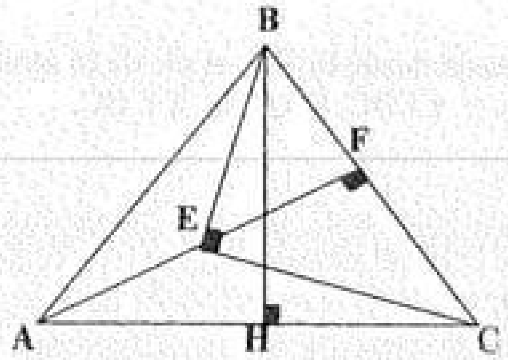
6) H) ABCDE Polígono regular
Radio del polígono: ——————————
BP = 2/3 AB
T) Reproducir el siguiente gráfico (2.5 puntos)



ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

GEOMETRIA Y DIBUJO **EXAMEN DE UBICACION** **07-2009**

1.-

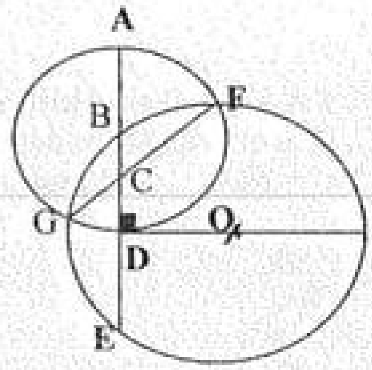


H) AB = BC

(3.5 puntos)

T) $EC = \sqrt{2}/2\ AC$

2.-

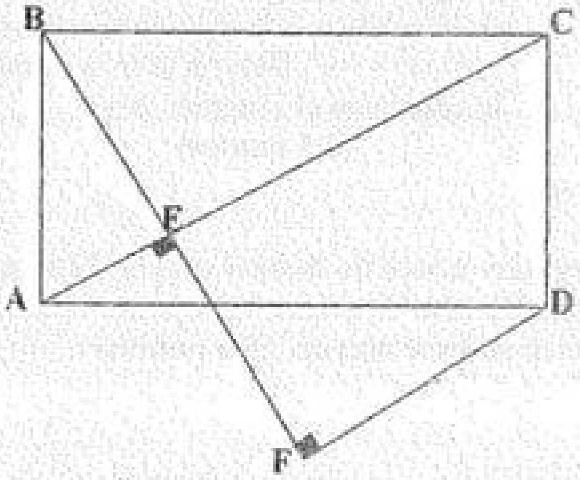


H) BC = 2u.

Θ (B; BA) (3.5 puntos)

T) AE = ? 12

3.-



H) ABCD RECTÁNGULO

D(-5; -2)

BF: x+3y-7=0

AC: 3x-y+1=0

T) S_{ABCD} = ? 36,00

(3.5 puntos)

4.- H) PARÁBOLA

Tangente en el vértice: 2x-y-4 = 0

A(7;5) extremo del lado recto sobre el eje focal

T) Ecuación de la parábola en el Sistema de coordenadas x-y (3.5 puntos)

$x^2+4xy+4y^2-54x-8y+129=0$

5) H) P-ABCDE Pirámide regular

Diedro P-A = 120^0

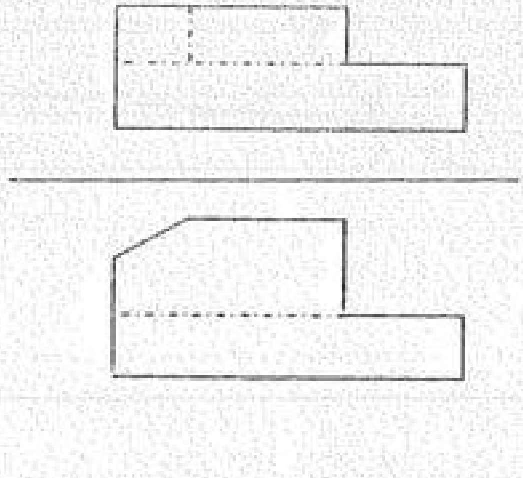
Area lateral = 900 u^2

T) Volumen = ?

(3.5 puntos)

2911,76

6) Dadas las vistas: frontal y superior de acuerdo a las normas DIN, dibuje el sólido correspondiente.



(2.5 puntos)

BIBLIOGRAFÍA

ANTONOV, N. VIGODSKY, M. NIKITIN, V y SANKIN, A. *1000 Problemas de Aritmética, Álgebra, Geometría y trigonometría.* Madrid. 1975. Paraninfo S. A.

BACHMANN, A y FORBERG, R. *DibujoTécnico.* Barcelona. 1975. Labor S.A.

BRUÑO, G. M. *Geometría, Curso Superior.* Bilbao. 1964. Grijalva S.A. 12va. Edición.

CABALLERO, Luis Ubaldo. *Geometría.* Lima. San Marcos.

COXETER, H.S.M. *Fundamentos de la Geometría.* México. 1971. Limusa-Wiley S.A.

GALLEGOS, Alva Fernando. *Geometría.* Lima. 2000. San Marcos.

GARCÍA ARDURA, M. *Problemas gráficos y numéricos de Geometría.* Madrid. 1960. Tipografía Artística.

HEMMERLING, Edwin M. *Geometría Elemental.* México. 1975. Limusa.

HUIZA de la CRUZ, José. *Geometría.* Lima. San Marcos.

JURGENSEN. DONNEILY y DOLCIANI. *Geometría Moderna.* México. 1973. Publicaciones Culturales S. A.

LIDSKI, V y otros. *Problemas de MatemáticasElementales.* Moscú. 1978. Edit. MIR. 2da. Edición.

MASIN, A. ANTON, R. DOMENECH, J. *Geometría Descriptiva.* La Habana. 1986. Pueblo y Educación.

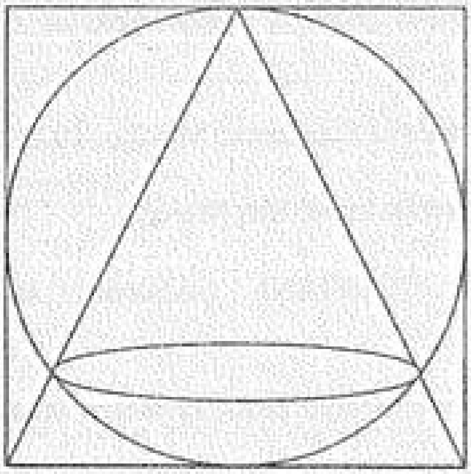
MOISE, Edwin E. FLOYD, L. DOWNS, Jr. *Serie Matemática Moderna.* Bogotá. 1972. Norma. Tomo4.

POKROVSKAIA, A. *Dibujo Industrial.* Moscú. 1972. Edit. MIR.

SANTIBAÑEZ, J. *Geometría.* Lima. 1980. Offsam W & C Jaime. 2da. Edición.

SHNEIDER, W y SAPPERT, D. *Manual Práctico de Dibujo Técnico.* Barcelona. 1975. Reverte S. A.

GEOMETRIA PLANA Y DEL ESPACIO
DIBUJO



G. CALVACHE
T. ROSERO
M. YACELGA

Pedidos a los telf. : 2599576 -- 099212012