Università degli Studi di Perugia

Dipartimento di Matematica e Informatica

AA 2021/2022

Simulazione McDrive

Professore:

Sergio Tasso

Studenti:

Leonardo Angeletti

Riccardo Conti

Indice

1) Introduzione

Il responsabile di un McDonald ha problemi a determinare il numero di dipendenti da attivare, considerando in particolare il servizio McDrive e l'afflusso settimanale.

Avendo un nostro amico che lavora nel McDonald di Città di Castello ci siamo fatti comunicare il numero di scontrini effettuati dal McDrive durante ogni giorno della settimana.

Abbiamo notato che l'affluenza dei clienti al McDrive è maggiore nei venerdì sera e nei sabato sera, e quindi siamo andati a contare il numero di auto che arrivavano durante un sabato dalle ore 18 alle 24, dividendo le auto in arrivo in intervalli di 10 min.

Abbiamo quindi stimato la disciplina delle code e i modelli di arrivo e servizio, come descritto nei paragrafi seguenti. Parte dei dati ricevuti sono stati quindi usati per sviluppare le distribuzioni empiriche, mentre i rimanenti sono stati invece utilizzati per la convalida del simulatore al 90% del livello di confidenza.

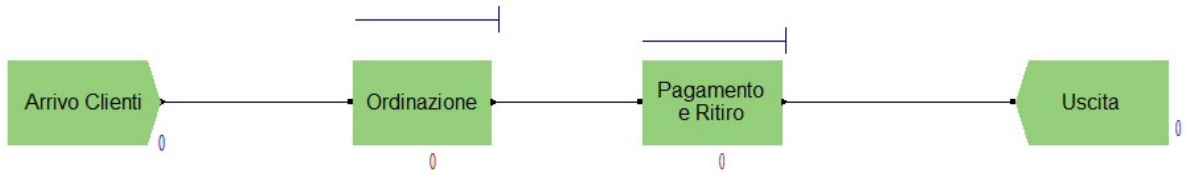
Abbiamo infine riportato una proposta di soluzione al problema sopra descritto.

Il modello di simulazione è stato implementato utilizzando il software Arena Simulation.

McDrive

2) Descrizione del sistema

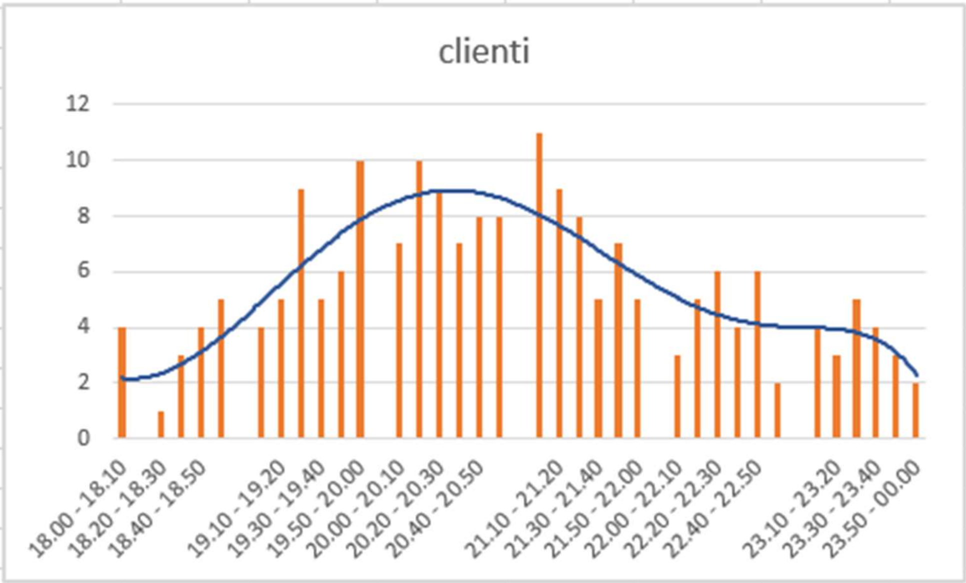
Abbiamo preso come riferimento il McDonald di Città di Castello, dove il il mcDrive funziona in questa maniera: si imbocca una strada che porta fino al punto dove si ordina nel quale gli automobilisti si fermano e un operatore segna gli ordini, per poi passare dall'altra parte dell'edificio dove si ritira ciò che si è ordinato e si paga, per poi andarsene.



3) Rappresentazione teorica del sistema

Prima di tutto vediamo come sono gli arrivi del nostro sistema, se riusciamo a trovare una qualche distribuzione matematica che seguono. Abbiamo contato gli arrivi dividendoli in intervalli di 10 minuti ciascuno.

ora	clienti
18.00 - 18.10	4
18.10 - 18.20	0
18.20 - 18.30	1
18.30 - 18.40	3
18.40 - 18.50	4
18.50 - 19.00	5
19.00 - 19.10	4
19.10 - 19.20	5
19.20 - 19.30	9
19.30 - 19.40	5
19.40 - 19.50	6
19.50 - 20.00	10
20.00 - 20.10	7
20.10 - 20.20	10
20.20 - 20.30	9
20.30 - 20.40	7
20.40 - 20.50	8
20.50 - 21.00	8
21.00 - 21.10	11
21.10 - 21.20	9
21.20 - 21.30	8
21.30 - 21.40	5
21.40 - 21.50	7
21.50 - 22.00	5
22.00 - 22.10	3
22.10 - 22.20	5
22.20 - 22.30	6
22.30 - 22.40	4
22.40 - 22.50	6
22.50 - 23.00	2
23.00 - 23.10	4
23.10 - 23.20	3
23.20 - 23.30	5
23.30 - 23.40	4
23.40 - 23.50	3
23.50 - 00.00	2



Infine abbiamo raggruppato per evidenziare le frequenze di arrivo dei clienti.

n° clienti	fi freq		totale		
0	1		0		29,94522
1	1		1		20,00077
2	2		4		24,11265
3	4		12		24,44753
4	6		24		13,00463
5	7		35		1,560957
6	3		18		0,835648
7	3		21		7,002315
8	3		24		19,16898
9	3		27		37,33565
10	2		20		41,00154
11	1		11		30,55633
	36		197		248,9722

Calcoliamo media e varianza grazie alle somme delle ultime due colonne della tabella sovrastante per poter ipotizzare una distribuzione.

La media sarà data da 197/36, mentre la varianza sarà 248.9722/(36-1):

media	5,472222
varianza	7,113492
lambda	6,292857

Dato che media e varianza non sono troppo differenti, ipotizziamo una distribuzione poissoniana utilizzando come parametro λ la media tra media e varianza.

Il test che andremo a svolgere è il **Goodness Of Fit**, in quanto, avendo diviso in intervalli da 10 minuti ciascuno, abbiamo n = 36, e sappiamo che con n > 30 è più corretto utilizzare il Goodness Of Fit.

Calcoliamo per ogni **fi** il valore teorico **p(i)** che dovremmo avere se fosse effettivamente una distribuzione poissoniana di ragione λ, dopodiché andiamo a calcolare F_i, moltiplicando ogni valore ottenuto al passo precedente per il totale delle osservazioni (n)

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{x}}{x!} \qquad\qquad F_i = p(i) * n$$

p(i)		Fi
0,001849		0,066581
0,011638		0,418984
0,03662		1,318303
0,076814		2,765297
0,120845		4,350404
0,152092		5,475295
0,159515		5,742541
0,143401		5,162427
0,1128		4,060802
0,078871		2,839339
0,049632		1,786755
0,028393		1,022163
0,972469		35,00889

Abbiamo quasi terminato il nostro test, ci manca solo di raggruppare le nostre frequenze creando dei campioni che contengano un fi >= 5. Decidiamo quindi di raggruppare le frequenze di arrivo di clienti 0,1,2,3, mentre 4 e 5 ne hanno 6 quindi vanno bene, uniamo 6 e 7 e infine raggruppiamo 8,9,10 e 11.

Allo stesso modo raggruppiamo anche i valori delle Fi.

Infine applichiamo la seguente formula per calcolare la nostra V:

$$V = \sum \frac{((f_i - F_i)^2}{F_i}$$

fi raggruppate		Fi raggruppate		formula
8		4,569164		2,576103
6		4,350404		0,625497
6		5,475295		0,050283
7		10,90497		1,398333
9		9,709059		0,051783
36			V=	4,701999

Ora sappiamo che la nostra V vale 4.70, per vedere quanti gradi di libertà abbiamo, applichiamo la seguente formula:

df = n° intervalli -1 - n° parametri della distribuzione

Nel nostro caso, dopo il raggruppamento abbiamo 5 intervalli e abbiamo 1 solo parametro (λ) e quindi

$$df = 5\text{-}1\text{-}1 = 3$$

Vediamo nella tavola del chi-quadro, con 3 gradi di libertà, dove si colloca la nostra V, ovvero 4.70.

Tavola distribuzione CHI-QUADRATO

Gradi di libertà	***Livello di Probabilita' a***									
	1.00	***0.99***	***0.95***	***0.90***	***0.25***	***0.10***	***0.05***	***0.025***	***0.01***	***0.005***
1				0.02	1.32	2.71	3.84	5.02	6.64	7.88
2	0.01	0.02	0.10	0.21	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.07	0.12	0.35	0.58	4.11	6.25	7.82	9.35	11.35	12.84
4	0.21	0.30	0.71	1.06	5.39	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.41	0.55	1.15	1.61	6.63	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.68	0.87	1.64	2.20	7.84	10.65	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.99	1.24	2.17	2.83	9.04	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.73	3.49	10.22	13.36	15.51	17.54	20.09	21.96

Sappiamo quindi che la distribuzione degli arrivi segue una poissoniana perciò il nostro sistema possiede le seguenti caratteristiche:

- I tempi di arrivo seguono appunto una distribuzione poissoniana e quindi gli interarrivi sono esponenziali -> **M**
- I tempi di servizio sono distribuiti esponenzialmente -> **M**
- I dipendenti sono multipli, ma c'è solamente una postazione in cui poter ordinare quindi il sistema ha un servente singolo. -> **1**

Il sistema sarà quindi rappresentato dal modello M/M/1 con i seguenti parametri:

Arrivi

Durante le 6 ore in cui siamo stati lì ad osservare il sistema sono arrivate 197 persone e quindi:

- Ogni ora arrivano mediamente 33 persone
- Ogni minuto arrivano mediamente 0.55 persone

$$\lambda = 33 \text{ ore}^{-1} \quad \text{o} \quad \lambda = \frac{11}{20} \text{ min}^{-1}$$

Servizio

Mediamente il tempo per prendere le ordinazioni è stato di circa 50 secondi per cui:

- Ogni minuto viene servito 1.2 clienti
- Ogni ora vengono serviti 72 clienti

$$\mu = 72 \text{ ore}^{-1} \quad \text{o} \quad \mu = \frac{6}{5} \text{ min}^{-1}$$

Utilizzazione

Calcoliamo ρ di questo sistema applicando la formula

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Svolgiamo i calcoli utilizzando i valori in minuti ed otterremo il valore

$$\rho = \frac{11}{20}\, min^{-1} * \frac{5}{6}\, min^{-1} = \frac{11}{24}$$

Essendo ρ minore di 1, il nostro sistema è in condizione di stazionarietà, possiamo quindi andare a calcolare alcuni valori interessanti.

Partiamo calcolando il tempo medio di attesa in coda **T_w**

$$T_w = (\rho/\mu) / (1 - \rho)$$

e quindi

$$\mathrm{Tw} = \left(\frac{11}{24} * \frac{5}{6} min\right) * \frac{24}{13} = \frac{55}{78} \cong 0.71\, min$$

Vediamo ora il numero medio di utenti in coda **W**

$$W = \frac{\rho^2}{(1-\rho)}$$

e quindi

$$\mathrm{W} = \frac{121}{400} * \frac{24}{13} = \frac{363}{650} \cong 0.56\, utenti$$

Una volta finita la fase di ordinazione, si avanza leggermente con l'auto fino al casello in cui si paga e si ritira il cibo, il tutto in un tempo distribuito esponenzialmente di circa 1.5 minuti. Vediamo ora come cambiano i paramentri.

$\lambda = \frac{11}{20}\, min^{-1}$ o $\mu = \frac{2}{3}\, min^{-1}$

$$\rho = \frac{11}{20}\, min^{-1} * \frac{3}{2}\, min^{-1} = \frac{33}{40}$$

Avendo ρ < 1 il sistema non è congestionato, calcoliamone la media di utenti in coda e il tempo medio di attesa in coda teorici.

$$\mathrm{W} = \frac{1089}{1600} * \frac{40}{7} = \frac{43560}{11200} \cong 3.89\ utenti$$

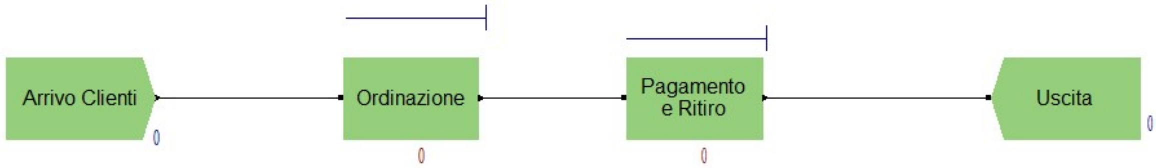
$$\mathrm{Tw} = \left(\frac{33}{40} * \frac{3}{2} min\right) * \frac{40}{7} = \frac{99}{14} \cong 7.07\ min$$

Calcoliamo ora il tempo totale passato da un utente nel sistema, tra tempo in coda e tempo di servizio.

T_{tot} = T_{w1} + T_{s1} + spostamento auto da sportello ordinazione a ritiro + T_{w2} + T_{s2}

T_{tot} = 0.71 *min* + 0.83 *min* + 0.42 *min* + 7.07 *min* + 1.5 *min* = 10.53 *min*

4) Simulazione con Arena e convalida del modello



Per simulare il modello abbiamo utilizzato il software Arena.

Eseguendo la simulazione abbiamo ottenuto i seguenti valori, che non si discostano molto da ciò che avevamo previsto grazie alla teoria.

Parametro	Valore Teorico	Valore Simulato
T_W Ordinazioni	≅ 0.71 *min*	≅ 0.64 *min*
T_W Pagamento e Ritiro	≅ 7.07 min	≅ 7.68 *min*
W Ordinazioni	≅ 0.56 *utenti*	≅ 0.36 *utenti*
W Pagamento e Ritiro	≅ 3.89 *utenti*	≅ 4.33 *utenti*

La colonna Half Width all'interno del report sottostante permette inoltre di determinare se il modello convalida il simulatore. Può avere tre valori:

- **Insufficient**: il numero di campioni non è sufficiente per la convalida del modello.
- **Correlated**: i campioni sono correlati tra loro mentre per convalidare il modello è necessario che i campioni siano distribuiti indipendentemente.
- **Un valore numerico**: Se invece all'interno della colonna comprare un valore numerico, significa che in almeno il 95% delle prove ripetute la media del campione viene riportata all'interno dell'intervallo ±[Half Width] della media del campione.

10:49:21

Category Overview

Values Across All Replications

Mc_Drive

Replications: 100 Time Units: Minutes

Queue

Time

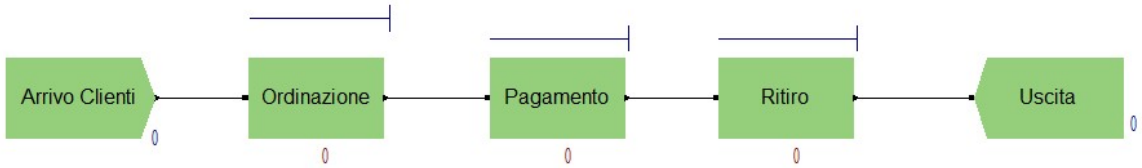
Waiting Time	Average	Half Width	Minimum Average	Maximum Average
Ordinazione.Queue	0.6435	0,02	0.4205	0.9895
Pagamento e Ritiro.Queue	7.6807	0,68	3.5225	20.9980

Other

Number Waiting	Average	Half Width	Minimum Average	Maximum Average
Ordinazione.Queue	0.3595	0,02	0.2264	0.6116
Pagamento e Ritiro.Queue	4.3264	0,41	1.9094	12.3801

Nel nostro caso abbiamo Half Width con dei valori numerici per cui siamo sicuri che il nostro modello convalida al 95% di confidenza.

5) Possibile Soluzione



Abbiamo elaborato una possibile tecnica che riesca a ridurre il tempo medio totale speso nel sistema. La nostra soluzione è quella di aggiungere un casello intermedio tra quello di ordinazione e quello di ritiro del cibo in cui si può pagare dividendo i tempi di servizio in circa 30 secondi al casello per pagare e 1 minuto per ritirare il cibo. Il tempo totale speso nel sistema sarà quindi:

$$T_{tot} = T_{w1} + T_{s1} + \text{spostamento auto da sportello ordinazione a pagamento} + T_{w2} + T_{s2}$$
$$+ \text{spostamento auto da sportello pagamento a ritiro} + T_{w3} + T_{s3}$$

$$T_{tot} = 0.71\ min\ (T_{w1}) + 0.83\ min\ (T_{s1}) + 0.42\ min\ (\text{spostamento}) + 0.19\ min\ (T_{w2}) + 0.5\ min\ (T_{s2}) + 0.42\ min\ (\text{spostamento}) + 1.2\ min\ (T_{w3}) + 1\ min\ (T_{s3}) = 5.27\ min$$

Vediamo se i tempi di attesa in coda rispettano le nostre previsioni teoriche:

Parametro	**Valore Teorico**	**Valore Simulato**
T_w Ordinazioni	≅ 0.71 *min*	≅ 0.64 *min*
T_w Pagamento	≅ 0.19 min	≅ 0.19 *min*
T_w Ritiro	≅ 1.2 *min*	≅ 1.2 *min*
W Ordinazioni	≅ 0.56 *utenti*	≅ 0.36 *utenti*
W Pagamento	≅ 0.11 *utenti*	≅ 0.11 *utenti*
W Ritiro	≅ 0.67 *utenti*	≅ 0.69 *utenti*

11:13:30

Category Overview

Values Across All Replications

Mc_Drive

Replications: 100 Time Units: Minutes

Queue

Time

Waiting Time	Average	Half Width	Minimum Average	Maximum Average
Ordinazione.Queue	0.6442	0,03	0.4122	1.2047
Pagamento.Queue	0.1889	0,01	0.1185	0.2762
Ritiro.Queue	1.2382	0,05	0.8133	2.7676

Other

Number Waiting	Average	Half Width	Minimum Average	Maximum Average
Ordinazione.Queue	0.3604	0,02	0.2233	0.7297
Pagamento.Queue	0.1055	0,00	0.06177854	0.1586
Ritiro.Queue	0.6917	0,03	0.4421	1.6740

Anche in questo caso il valore Half Width è un valore numerico per cui la simulazione è convalidata almeno al 95%, inoltre i valori emersi dall'esecuzione della simulazione sono molto vicini ai valori ipotizzati.

La soluzione proposta sfrutta la possibilità di avere un dipendente in più che stia nello sportello del pagamento, e non sappiamo se sia effettivamente economicamente vantaggioso per il proprietario.

Si potrebbe nel caso effettuare quest' aggiunta nei soli momenti in cui ci sono un numero elevato di auto in coda, mentre per il tempo restante il dipendente può svolgere altre mansioni e il sistema ritorna a funzionare come ha sempre funzionato.