METODE NUMERICE: Laborator #2
Operaţii cu matrice în Matlab. Rezolvarea recursivă a sistemelor triunghiulare. Inversarea matricelor prin partiţionare.

Noțiuni teoretice

Factorizarea LU

Această metodă presupune descompunerea unei matrice A astfel:

$$A = LU$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

unde L - matrice inferior triunghiulară, U - matrice superior triunghiulară.

În funcție de condițiile impuse, se disting factorizările: Crout ($u_{ii} = 1$), Doolittle ($l_{ii} = 1$) și Cholesky (pentru matrice simetrice și pozitiv-definite). Importanța factorizării LU constă în transformarea unui sistem cu matrice pătratică în două sisteme triunghiulare.

Factorizarea Crout

Sistemul de ecuații din forma generală a factorizării LU este supradeterminat. Pentru rezolvarea lui, condiția ce se impune este: $u_{ii} = 1$, pentru $i = 1 : n$. Factorizarea Crout este:

Pentru $p = 1 : n$

$$l_{ip} = a_{ip} - \sum_{k=1}^{p-1} l_{ik} \cdot u_{kp}, \quad i = p : n$$

$$u_{pj} = \frac{1}{l_{pp}} \cdot \left(a_{pj} - \sum_{k=1}^{p-1} l_{pk} \cdot u_{kj} \right), \quad j = p + 1 : n$$

Factorizarea Doolittle

În acest caz, condiția ce se impune este: $l_{ii} = 1$, pentru $i = 1 : n$, iar factorizarea Doolittle este:

Pentru $p = 1 : n$

$$u_{pj} = a_{pj} - \sum_{k=1}^{p-1} l_{pk} \cdot u_{kj}, \quad j = p : n$$

$$l_{ip} = \frac{1}{u_{pp}} \cdot \left(a_{ip} - \sum_{k=1}^{p-1} l_{ik} \cdot u_{kp} \right), \quad i = p+1 : n$$

Factorizarea Cholesky

Factorizarea Cholesky impune ca $U = L^T$. Ea se aplică numai pentru o matrice simetrică ($A = A^T$) și pozitiv definită ($x^T Ax > 0, \forall x \in R^n, x \neq 0$). Factorizarea Cholesky este:

Pentru $i = 1 : n$

Pentru $j = 1 : i - 1$

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot l_{jk}}{l_{jj}}$$

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}$$

Observație: În implementarea metodei în Octave, în bucla principală `for i=1:n`, se vor calcula mai întâi elementele l_{ij}, apoi elementele l_{ii}.

Rezolvarea sistemelor triunghiulare

Sistem inferior triunghiular:

Forma: $$\begin{cases} a_{11}x_1 & & & & & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & & & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + \cdots + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Soluția: $x_i = \dfrac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} \cdot x_j}{A_{ii}}$, pentru $i = 1 : n$.

Sistem superior triunghiular:

Forma: $$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Soluția: $x_i = \dfrac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij} \cdot x_j}{A_{ii}}$, pentru $i = n : 1$.

Inversarea matricelor prin metoda partiționării

În unele cazuri (de exemplu când anumite zone ale matricei conțin elemente nule), se poate diviza matricea de inversat în patru submatrice A_1, A_2, A_3 și A_4 astfel încât matricele de pe diagonala principală A_1 și A_4 să fie pătratice:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ A_2 & A_4 \end{bmatrix}$$

Dacă se notează inversa matricei A cu

$$X = A^{-1} = \begin{bmatrix} X_1 & X_3 \\ X_2 & X_4 \end{bmatrix},$$

este valabilă ecuația matriceală:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ A_2 & A_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 & X_3 \\ X_2 & X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

În final, rezultă:

$$\begin{cases} X_1 = \left(A_1 - A_3 \cdot A_4^{-1} \cdot A_2\right)^{-1} \\ X_2 = -A_4^{-1} \cdot A_2 \cdot X_1 \\ X_3 = -A_1^{-1} \cdot A_3 \cdot X_4 \\ X_4 = \left(A_4 - A_2 \cdot A_1^{-1} \cdot A_3\right)^{-1} \end{cases}$$

Probleme rezolvate

Problema 1

Scrieţi o funcţie OCTAVE ce realizează factorizarea Crout. Funcţia primeşte ca parametru matricea supusă factorizării şi returnează matricele L şi U rezultate.

Soluţie:

```
function [L U] = crout(A)
  [n n] = size(A);
  L = zeros(n);
  U = eye(n);
  L(1:n,1) = A(1:n,1);

  for p = 1 : n
    for i = p : n
        s = 0;
        for k = 1 : p-1
            s = s+L(i,k)*U(k,p);
        endfor

        % echivalent pentru calculul sumei
        % s = L(i,1:k-1)*U(1:k-1,k);

```

```
            L(i,p) = A(i,p)-s;
        endfor

        for j = p+1 : n
            % --------------------------------
            s = 0;
            for k = 1 : p-1
                s = s+L(p,k)*U(k,j);
            endfor

            % echivalent pentru calculul sumei
            % s = L(k,1:k-1)*U(1:k-1,j);

            U(p,j) = (A(p,j)-s)/L(p,p);
        endfor
    endfor
endfunction
```

Listing 1: Factorizare Crout.

Problema 2

Determinaţi care sunt matricele L şi U rezultate din factorizarea Crout pentru matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Soluţie:

Din definiţie, matricele L şi U vor avea forma următoare:

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}, \text{ respectiv } U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Din $A = L * U$ se pot deduce relaţiile:

$$\begin{cases} l_{11} = 2 \\ l_{11}u_{12} = -1 \\ l_{11}u_{13} = 3 \\ l_{21} = 4 \\ l_{21}u_{12} + l_{22} = 5 \\ l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} = 1 \\ l_{31} = 2 \\ l_{31}u_{12} + l_{32} = 1 \\ l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33} = 2 \end{cases}$$

Din acest sistem de 9 ecuaţii cu 9 necunoscute, rezultă elementele matricelor căutate:

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 \\ 2 & 2 & \frac{3}{7} \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-5}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Problema 3

Pentru aceeaşi matrice A dată la exerciţiul anterior, stabiliţi care sunt matricele L şi U din factorizarea Doolittle.

Soluţie:

Matricele L şi U vor avea forma următoare:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}, \text{ respectiv } U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

Folosind relaţia $A = L * U$, se obţine următorul sistem de ecuaţii:

$$\begin{cases} u_{11} = 2 \\ u_{12} = -1 \\ u_{13} = 3 \\ l_{21}u_{11} = 4 \\ l_{21}u_{12} + u_{22} = 5 \\ l_{21}u_{13} + u_{23} = 1 \\ l_{31}u_{11} = 2 \\ l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = 1 \\ l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = 2 \end{cases}$$

Din sistemul de 9 ecuaţii cu 9 necunoscute, rezultă elementele matricelor L şi U:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{7} & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

Problema 4

Scrieţi o funcţie OCTAVE care aplică factorizarea Doolittle pentru o matrice A, primită ca parametru la intrare şi returnează matricele L şi U corespunzătoare.

Soluţie:

```
function [L U] = doolittle(A)
  [n n] = size(A);
  L = eye(n);
  U = zeros(n);

  for p = 1 : n
    for j = p : n
        s = 0;
        for k = 1 : p-1
            s = s+L(p,k)*U(k,j);
        endfor
        U(p,j) = A(p,j)-s;
    endfor

    for i = p+1 : n
```

```
      s = 0;
      for k = 1 : p-1
          s = s+L(i,k)*U(k,p);
      endfor
      L(i,p) = (A(i,p)-s)/U(p,p);
    endfor
  endfor
endfunction
```

Listing 2: Factorizare Doolittle.

Problema 5

Scrieţi o funcţie OCTAVE care aplică factorizarea Cholesky pentru o matrice A primită ca parametru la intrare şi returnează matricea L corespunzătoare.

Soluţie:

```
function L = cholesky(A)
  [n n] = size(A);
  L = zeros(n);

  for i = 1 : n
    for j = 1 : i-1
      s = 0;
      for k = 1 : j-1
        s = s+L(i,k)*L(j,k);
      endfor
      L(i,j) = (A(i,j)-s)/L(j,j);
    endfor

    s = 0;
    for k = 1 : i-1
      s = s + L(i,k)*L(i,k);
    endfor
    L(i,i) = sqrt(A(i,i)-s);
  endfor
endfunction
```

Listing 3: Factorizare Cholesky.

Problema 6

Considerându-se matricea A specificată mai jos (simetrică şi pozitiv definită), determinaţi matricea L care satisface condiţiile din factorizarea Cholesky.

$$A = \begin{bmatrix} 14 & 8 & 3 \\ 8 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluţie:

Matricea L căutată va avea următoarea formă:

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}$$

Condiţia din cadrul factorizării Cholesky este: $A = L * L^t$. Se pot deduce relaţiile următoare:

$$\begin{cases} l_{11}^2 = 14 \\ l_{11}l_{21} = 8 \\ l_{11}l_{31} = 3 \\ l_{21}^2 + l_{22}^2 = 5 \\ l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} = 2 \\ l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = 1 \end{cases}$$

Astfel, obţinem matricea L:

$$L = \begin{bmatrix} \sqrt{14} & 0 & 0 \\ \frac{4\sqrt{14}}{7} & \frac{\sqrt{21}}{7} & 0 \\ \frac{3\sqrt{14}}{14} & \frac{2\sqrt{21}}{21} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}$$

Problema 7

Dându-se matricea A de mai jos, calculaţi inversa ei prin metoda partiţionării.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluţie:

Considerăm următoarea partiţionare: $A = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ A_2 & A_4 \end{bmatrix}$, unde

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \; A_2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \; A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De asemenea, putem determina următoarele inverse: $A_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$, $A_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Înlocuind toate aceste matrice în relaţiile metodei, putem determina submatricele X_1, X_2, X_3 şi X_4 care compun inversa matricei A, şi anume X. Astfel:

$$X_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \; X_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; X_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix} \; X_4 = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De aici, rezultă matricea finală X, adică inversa matricei A:

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 2 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Probleme propuse

Problema 1

Pentru matricea A dată mai jos, determinaţi matricele L şi U rezultate din factorizarea Crout.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Problema 2

Fie matricea A de la *Problema 1*, determinaţi matricele L şi U rezultate din factorizarea Doolittle.

Problema 3

Fiind dată matricea $A \in R^{n \times n}$ şi un vector coloană $b \in \mathbb{R}$, să se scrie o funcţie OCTAVE care rezolvă sistemul $Ax = b$, folosindu-vă de o funcţie care aplică factorizarea LU pe matricea A și de două funcţii care rezolvă sisteme superior/inferior triunghiulare:

```
function x = SST(A, b)
```

```
function x = SIT(A, b)
```

Problema 4

Calculați inversa pentru matricea A dată mai jos, folosind metoda partiționării.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$