SORTAREA TOPOLOGICĂ

Șl. Dr. Ing. Șerban Radu
Departamentul de Calculatoare
Facultatea de Automatică și Calculatoare

Sortarea topologică a grafurilor orientate

- Sortarea topologică este o operație care poate fi modelată cu ajutorul grafurilor
- Operația este utilă în situația în care anumite elemente sau evenimente trebuie dispuse într-o anumită ordine

Sortarea topologică

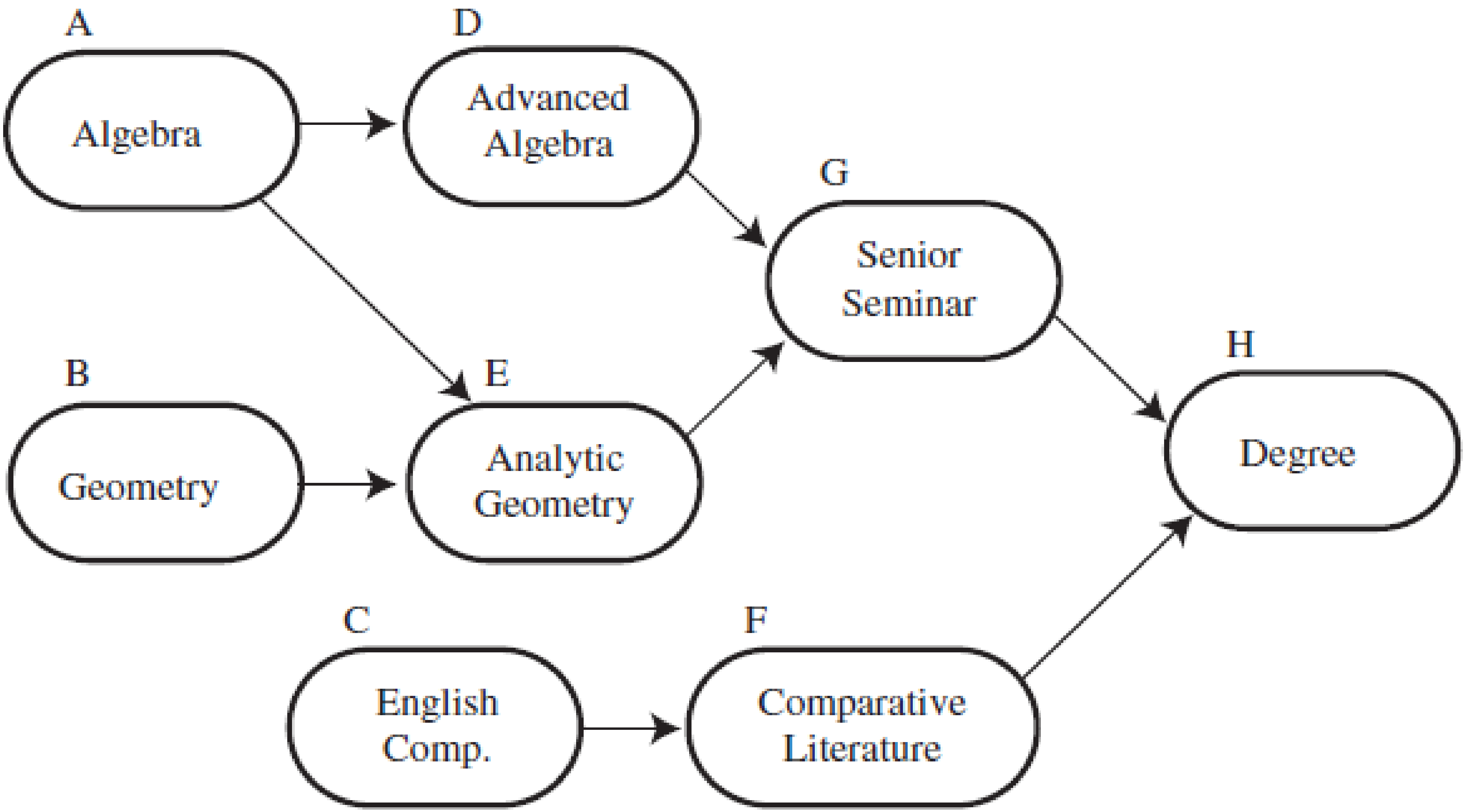
- Scopul sortării topologice este ordonarea elementelor într-o succesiune liniară, astfel încât fiecare element să fie precedat în această succesiune de elementele care îl condiţionează
- Elementele pot fi privite ca noduri într-un graf orientat, iar relaţiile de condiţionare ca arce în acest graf

Sortarea topologică

- Sortarea topologică a nodurilor unui graf orientat nu este posibilă dacă graful conţine cel puţin un ciclu
- Dacă nu există niciun element fără condiţionări, atunci sortarea nu poate începe
- Uneori este posibilă numai o sortare topologică parţială, pentru o parte din noduri

Exemplu – condiționarea cursurilor

- Frecventarea unor cursuri este condiționată de absolvirea anterioară a altora
- Alegerea unui anumit pachet de cursuri constituie o premisă pentru obținerea diplomei într-o anumită specialitate

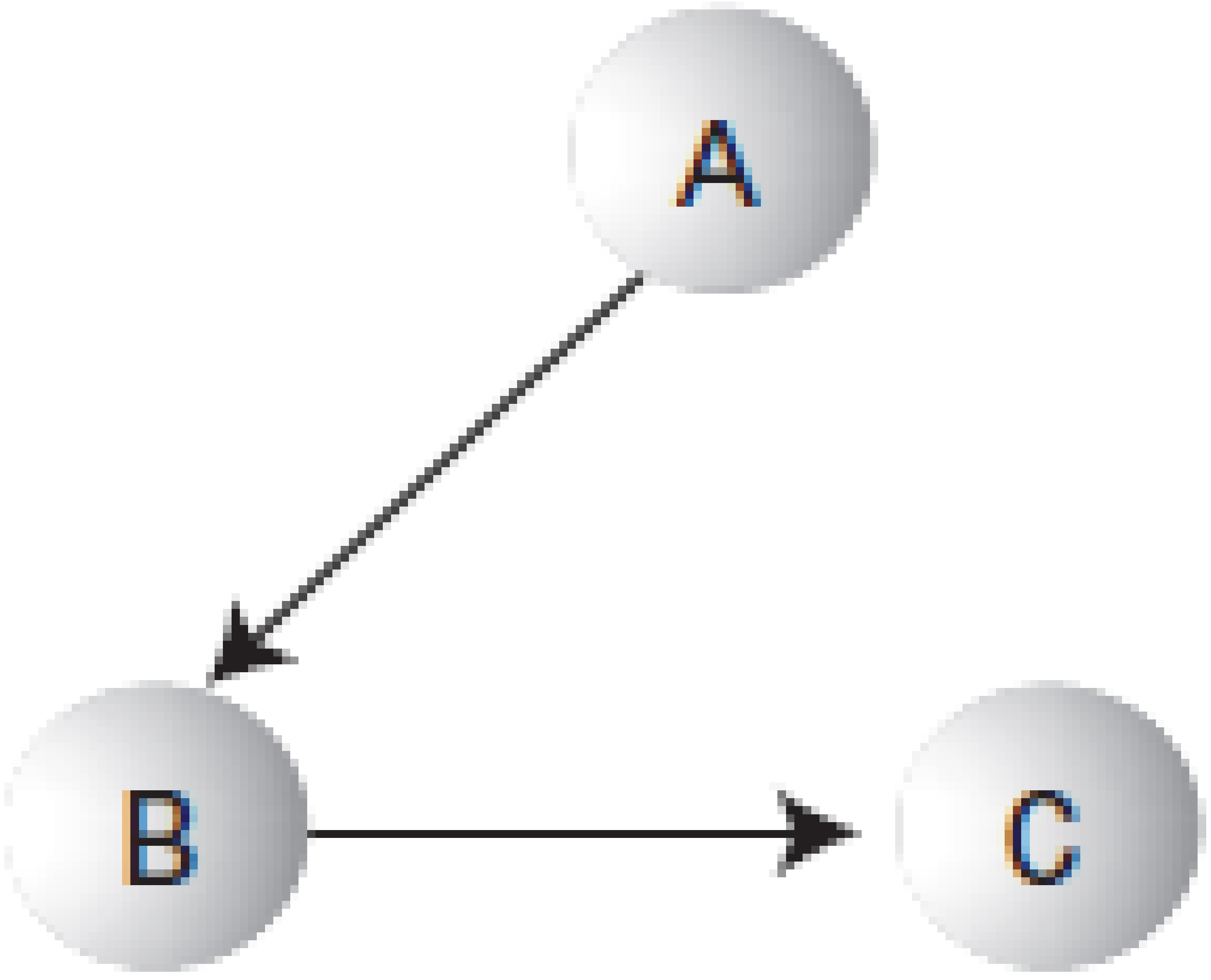

A
Algebra
D
Advanced Algebra
G
Senior Seminar
H
Degree
B
Geometry
E
Analytic Geometry
C
English Comp.
F
Comparative Literature

Grafuri orientate

- Relația de condiționare se poate reprezenta printr-un graf
- În graful utilizat, muchiile trebuie să aibă o **orientare**
- În acest caz, graful se numește **orientat**
- Într-un graf orientat, ne putem deplasa într-un singur sens, de-a lungul unei muchii

Observații

- Într-un program, diferența dintre un graf neorientat și unul orientat este că o muchie dintr-un graf orientat se reprezintă printr-un singur element în matricea de adiacență


A
B
C

	A	B	C
A	0	1	0
B	0	0	1
C	0	0	0

Observații

- Fiecare muchie este reprezentată printr-o singură valoare 1
- Linia din tabel indică vârful de pornire al muchiei, iar coloana îl indică pe cel de destinație
- Într-un graf orientat, fiecare celulă din matricea de adiacență va conține o valoare unică

Observații

- Dacă utilizăm listele de adiacență pentru reprezentarea grafului, vârful B va apărea în lista lui A, dar A nu va fi cuprins în lista lui B

Sortarea topologică

- Să alcătuim o listă a tuturor cursurilor necesare pentru obținerea unei diplome
- Se aranjează cursurile în ordinea în care acestea pot fi frecventate
- Obținerea diplomei reprezintă ultimul punct de pe listă, care poate arăta astfel:
- BAEDGCFH

Observații

- Aranjat în acest mod, graful este **sortat topologic**
- Toate cursurile care trebuie absolvite înaintea altui curs dat îl vor precede pe acesta în listă
- Există mai multe posibilități de a ordona cursurile, satisfăcând restricțiile de condiționare

Observații

- O altă sortare topologică este:
- CFBAEDGH
- Sortarea topologică poate modela și alte situații, cum ar fi planificarea unor activități
- Modelarea planificării unor activități cu ajutorul grafurilor se numește **analiză a drumului critic**

Soluții pentru sortarea topologică

- Determinarea unei soluţii de sortare topologică se poate face în câteva moduri:
- **1**) Începând cu elementele fără predecesori (necondiţionate) şi continuând cu elementele care depind de acestea

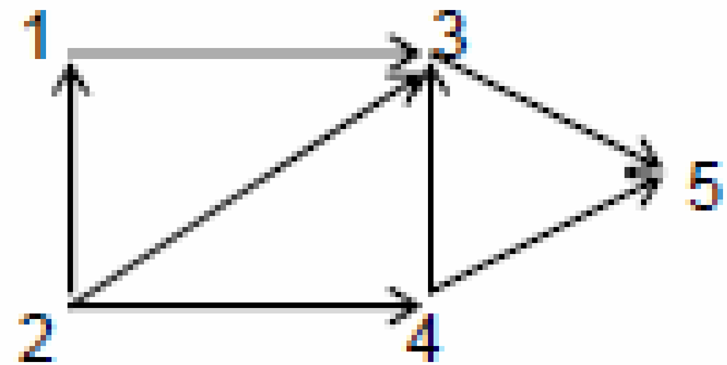
Soluții pentru sortarea topologică

- **2**) Începând cu elementele fără succesori (finale) şi mergând către predecesori, din aproape în aproape
- **3**) Algoritmul de explorare în adâncime a unui graf orientat, completat cu afişarea nodului din care începe explorarea, după ce s-au explorat toate celelalte noduri

Observaţii

- Aceste metode pot folosi diferite structuri de date pentru reprezentarea relaţiilor dintre elemente
- În cazul **1**) trebuie să putem găsi uşor predecesorii unui element
- În cazul **2**) trebuie să putem găsi uşor succesorii unui element

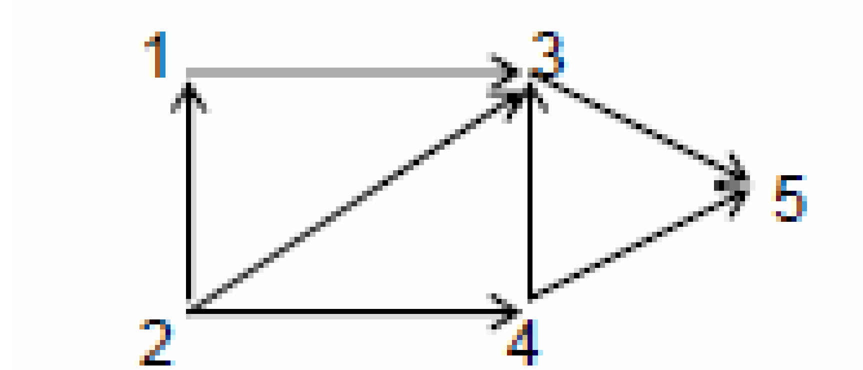
Exemplu



- **a** = {1, 2, 3, 4, 5}
- Există relaţii de condiţionare de forma:
- a[i] << a[j], exprimate astfel:
- a[i] condiţionează pe a[j], sau
- a[j] este condiţionat de a[i]
- a[i] este un predecesor al lui a[j]
- a[j] este un succesor al lui a[i]
- Un element poate avea oricâţi succesori şi predecesori

Exemplu

- Mulţimea **a**, supusă unor relaţii de condiţionare, poate fi vazută ca un graf orientat, având ca noduri elementele a[i]
- Un arc de la a[i] la a[j] arată că a[i] condiţionează pe a[j]
- 2 << 1   1 << 3   2 << 3   2 << 4   4 << 3   3 << 5   4 << 5
- Două soluţii posibile:
  - 2, 1, 4, 3, 5
  - 2, 4, 1, 3, 5



1) Sortare topologică cu liste de predecesori

```
repetă
  caută un nod nemarcat şi fără predecesori
  dacă s-a găsit atunci
    afişează nod şi marchează nod
    şterge nod marcat din graf
până când nu mai sunt noduri fără predecesori
dacă rămân noduri nemarcate atunci
    nu este posibilă sortarea topologică
```

Se afişează: 2, 1, 4, 3, 5

Funcţia de sortare topologică

```
//funcţia determină numărul de condiţionări ale nodului v
int nrcond (Graf g, int v ) {
  int j, cond = 0;            // cond = număr de condiţionări
  for (j = 1; j <= g.n; j++)
    if (arc(g, j, v))
        cond++;
  return cond;
}
```

Funcţia de sortare topologică

```
// funcţia de sortare topologică şi afişarea rezultatului
void topsort (Graf g) {
  int i, j, n = g.n, ns, găsit, sortat[50] = {0};
  ns = 0;                // noduri sortate şi afişate
  do {
    găsit = 0;
     // caută un nod nesortat, fără condiţionări
    for (i = 1; i <= n && ! găsit; i++)
```

Funcţia de sortare topologică

```
 if ( ! sortat[i] && nrcond(g, i) == 0) {  // i fără condiţionări
          găsit = 1;
          sortat[i] = 1;  ns++;  // noduri sortate
          printf("%d ", i);      // afişează nod găsit
          delNod(g, i);          // elimină nodul i din graf
    }
 } while (găsit);
 if (ns != n)  printf("\n Sortare topologică imposibilă !");
}
```

2) Sortare topologică cu liste de succesori

```
repetă
    caută un nod fără succesori
    pune nod găsit în stivă şi marchează ca sortat
    elimină nod marcat din graf
până când nu mai există noduri fără succesori
dacă nu mai sunt noduri nemarcate atunci
   repetă
      scoate nod din stivă şi afişează nod
   până când stiva e goală
```

La extragerea din stivă se afişează: 2, 4, 1, 3, 5

3) Sortare topologică folosind explorarea în adâncime

- Algoritmul de sortare topologică, derivat din explorarea DFS, se bazează pe faptul că explorarea în adâncime vizitează toţi succesorii unui nod
- Explorarea DFS va fi repetată, până când se vizitează toate nodurile din graf

3) Sortare topologică folosind explorarea în adâncime

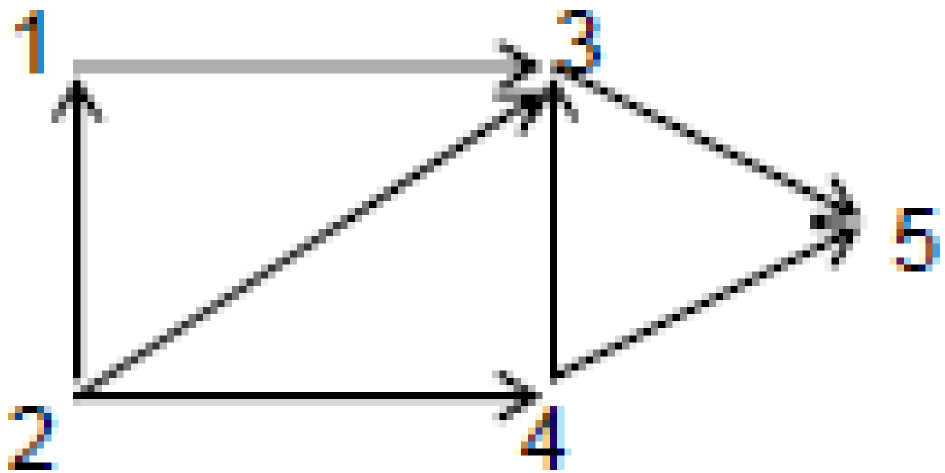
- Funcţia **ts** este derivată din funcţia **dfs**, în care s-a înlocuit afişarea cu punerea într-o stivă a nodului cu care s-a început explorarea, după ce s-au memorat în stivă succesorii săi
- În final se scoate de pe stivă şi se afişează tot ce a pus pe stivă funcţia **ts**
- Programul următor realizează sortarea topologică, ca o variantă de explorare în adâncime a unui graf **g**, şi foloseşte o stivă **s** pentru memorarea nodurilor

```
Stack s;                // stiva se foloseşte în două funcţii
// sortare topologică pornind dintr-un nod v
void ts (Graf g, int v) {
  văzut[v] = 1;
  for (int w = 1; w <= g.n; w++)
    if (arc(g, v, w) && ! văzut[w])
      ts(g, w);
  push(s, v);
}
```

```
// sortare topologică a grafului g
int main () {
  int i, j, n; Graf g;
  readG(g); n = g.n;
  for (j = 1; j <= n; j++)
    văzut[j] = 0;
  initSt(s);
  for (i = 1; i <= n; i++)
    if (văzut[i] == 0)
       ts(g, i);
  while( ! emptySt(s)) {     // scoate din stivă şi afişează
     pop(s, i);
     printf("%d ", i);
  }
}
```

Exemplu

- Secvenţa de apeluri şi evoluţia stivei pentru graful:
- 2-1, 1-3, 2-3, 2-4, 4-3, 3-5, 4-5



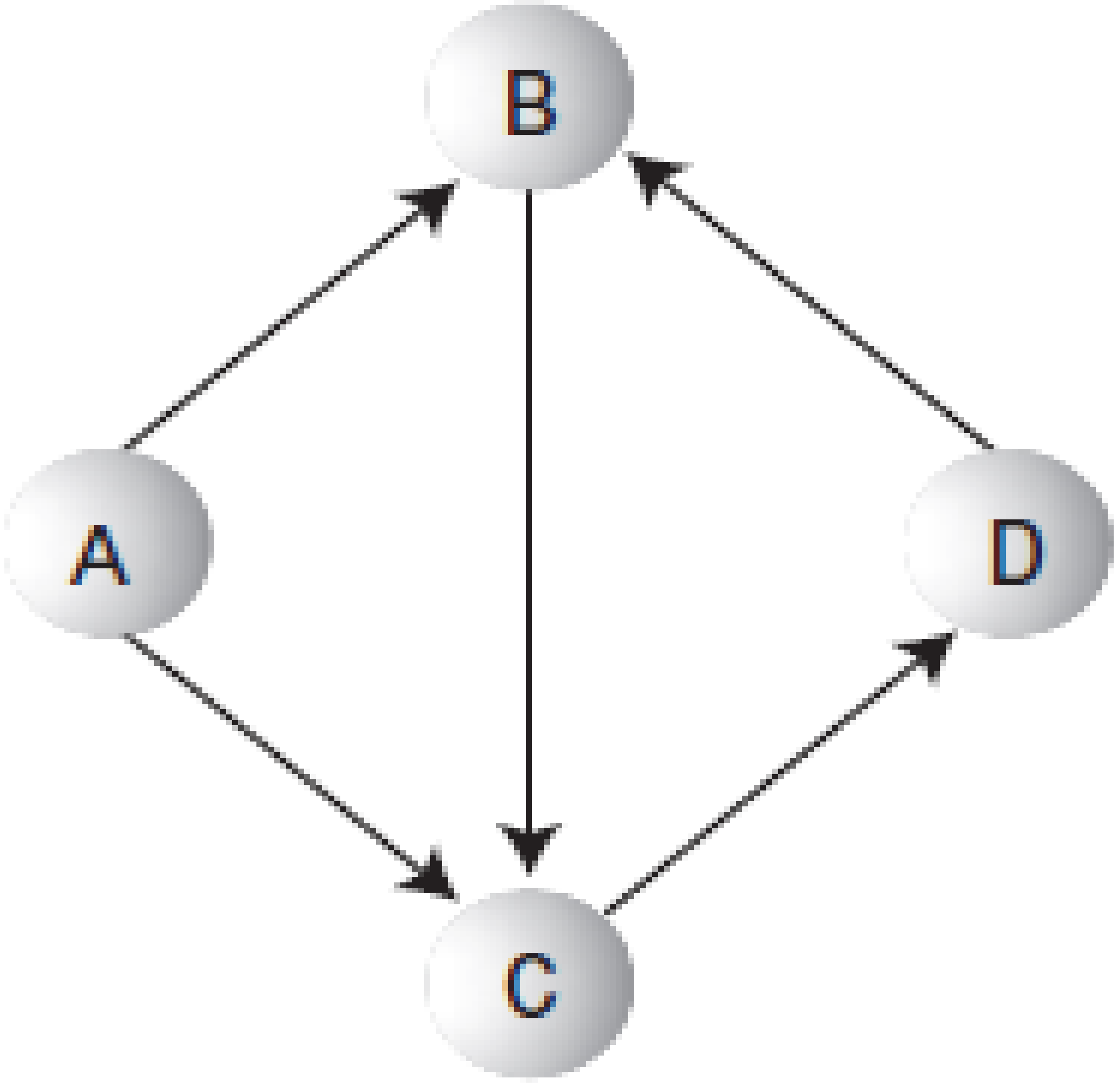
Apel	Stiva	Din
ts(1)		main()
ts(3)		ts(1)
ts(5)		ts(3)
push(5)	5	ts(5)
push(3)	5, 3	ts(3)
push(1)	5, 3, 1	ts(1)
ts(2)		main()
ts(4)		ts(2)
push(4)	5, 3, 1, 4	ts(4)
push(2)	5, 3, 1, 4, 2	ts(2)

Observații

- Algoritmul de sortare topologică funcționează atât pentru grafuri conexe, cât și pentru grafuri neconexe
- Cazul grafurilor neconexe modelează situația în care avem de realizat două scopuri, care nu sunt legate unul de celălalt, cum ar fi obținerea simultană a unei diplome și a permisului de conducere

Cicluri și arbori

- Un caz pe care algoritmul de sortare topologică nu îl poate trata este acela al grafurilor **ciclice**
- Drumul B-C-D-B reprezintă un ciclu
- A-B-C-A nu este un ciclu, deoarece orientarea nu ne permite deplasarea de la C la A


B
A
D
C

Observații

- Un graf fără cicluri se numește **arbore**
- Într-un graf, un vârf dintr-un arbore poate fi conectat cu oricâte vârfuri fii, atât timp cât nu se creează cicluri
- Sortarea topologică se poate efectua într-un graf fără cicluri
- Un astfel de graf se numește **graf orientat aciclic**

Concluzii

- Grafurile sunt alcătuite din vârfuri conectate prin muchii
- Grafurile pot modela aspecte din lumea reală, printre care traseele aeriene, circuitele electrice sau planificarea activităților

Concluzii

- Un arbore minim de acoperire conține numărul minim de muchii necesare pentru a conecta toate vârfurile din graf
- Determinarea unui arbore minim de acoperire al unui graf neorientat se efectuează modificând algoritmul de parcurgere în adâncime

Concluzii

- Într-un graf orientat, muchiile au o orientare, indicată prin săgeți
- Algoritmul de sortare topologică generează o listă de vârfuri aranjate astfel încât, dacă vârful A precede vârful B în listă, există un drum în graf de la A la B

Concluzii

- Sortarea topologică se poate efectua numai asupra grafurilor orientate aciclice
- Sortarea topologică se utilizează pentru planificarea unor activități, care conțin activități condiționate de alte activități

Concluzii

- Algoritmul lui Warshall stabilește dacă există o cale formată din una sau mai multe muchii, pornind din orice vârf către oricare alt vârf