# FORMA POSTFIXATĂ A UNEI EXPRESII

ȘI. Dr. Ing. Șerban Radu Departamentul de Calculatoare Facultatea de Automatică și Calculatoare



#### Introducere

- Scrierea postfixată (forma poloneză inversă) a fost realizată de matematicianul polonez Jan Lukasiewicz (1878 – 1956)
- Algoritmul de transformare a unei expresii matematice din forma infixată în forma postfixată a fost elaborat de informaticianul olandez Edsger Dijkstra (1930 – 2002)



#### Introducere

- Transformarea unei expresii aritmetice din forma infixată în forma postfixată necesită utilizarea unei stive
- După aceea, se evaluează expresia în forma postfixată
- Această operație este necesară la proiectarea compilatoarelor

#### M

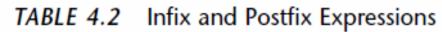
#### Notația infix

- Expresiile aritmetice sunt scrise în mod uzual cu operatorii (+, -, \* sau /) așezați între cei doi operanzi (numere sau simboluri care înlocuiesc numerele)
- Această notație se numește infixată, din cauză că operatorul apare între operanzi
- De exemplu: 2+2, 4/7, A+B, A/B



#### Notația postfix

- În notația postfix, operatorul urmează cei doi operanzi
- A+B devine AB+
- A/B devine AB/
- Orice expresie infixată, oricât de complexă, poate fi transcrisă în notație postfix



Infix	Postfix
A+B-C	AB+C-
A*B/C	AB*C/
A+B*C	ABC*+
A*B+C	AB*C+
A*(B+C)	ABC+*
A*B+C*D	AB*CD*+
(A+B)*(C-D)	AB+CD-*
((A+B)*C)-D	AB+C*D-
A+B*(C-D/(E+F))	ABCDEF+/-*+



### Notația prefixată

- Pe langă notațiile infixată și postfixată, mai există și notația prefixată, în care operatorii se scriu înaintea operanzilor
- +AB în loc de AB+
- Funcțional, această notație e similară cu cea postfixată



#### Evaluarea unei expresii infixate

- Se citește expresia de la stânga la dreapta
- Atunci când se citeşte suficient pentru a evalua doi operanzi şi un operator, se efectuează calculul şi se înlocuiesc cei doi operanzi şi operatorul dintre ei cu rezultatul gasit
- Procesul continuă, mergând de la stânga spre dreapta și evaluând acolo unde este posibil, până la sfârșitul expresiei

M

TABLE 4.3 Evaluating 3+4–5

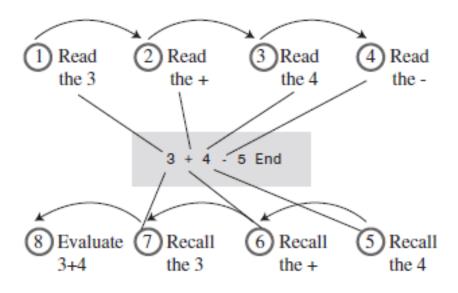
Item Read	Expression Parsed So Far	Comments
3	3	
+	3+	
4	3+4	
_	7	When you see the -, you can evaluate 3+4.
	7_	
5	7–5	
End	2	When you reach the end of the expression, you
		can evaluate 7–5.

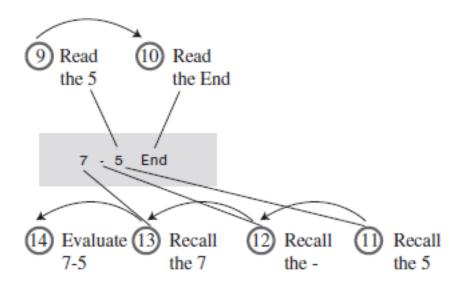


- Nu putem evalua 3+4 până când nu vedem care este operatorul care urmează imediat după 4
- Dacă este vorba de un operator \* sau /, trebuie să așteptăm înainte de a aplica efectul semnului + până când se evaluează \* sau /



- Operatorul care urmează după 4 este -, care are aceeași precedență cu +, deci atunci când îl întâlnim, știm că putem evalua 3+4, care este 7
- Rezultatul 7 va înlocui secvența 3+4
- Se va evalua apoi 7-5, atunci când ajungem la sfârșitul expresiei





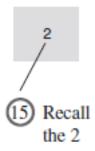


TABLE 4.4 Evaluating 3+4\*5

Item Read	Expression Parsed So Far	Comments
3	3	
+	3+	
4	3+4	
*	3+4*	You can't evaluate 3+4 because * is higher precedence than +.
5	3+4*5 3+20	When you see the 5, you can evaluate 4*5.
End	23	When you see the end of the expression, you can evaluate 3+20.



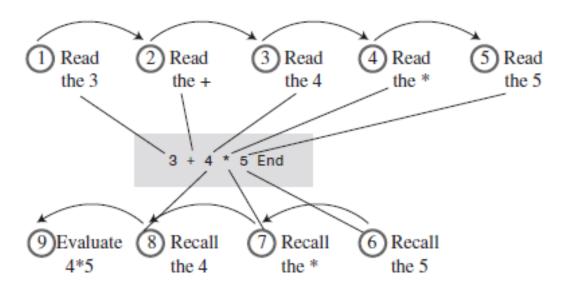
- Nu se poate însuma cu 3 decât atunci când cunoaștem rezultatul înmulţirii 4\*5, deoarece înmulţirea are o precedenţă mai mare decât adunarea
- Toate înmulțirile sau împărțirile trebuie efectuate înaintea oricăror adunări sau scăderi, ce excepția cazului în care parantezele schimbă această ordine

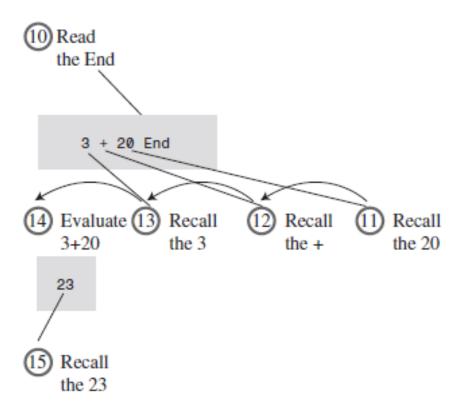


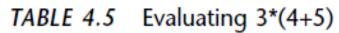
- Trebuie să ne asigurăm, atunci când ajungem la o combinație operandoperator-operand, cum este A+B, că operatorul aflat la dreapta lui B nu are precedența mai mare decât +
- Dacă operatorul respectiv are o precedență mai mare, nu putem încă să efectuăm adunarea



- După ce l-am citit pe 5, înmulţirea poate fi efectuată, din cauză că are prioritate maximă
- Nu contează dacă un alt operator \* sau / mai urmează după 5
- Nu putem efectua încă adunarea, până când nu știm ce se află la dreapta lui 5
- Când observăm că, după 5, expresia se termină, putem continua efectuând adunarea







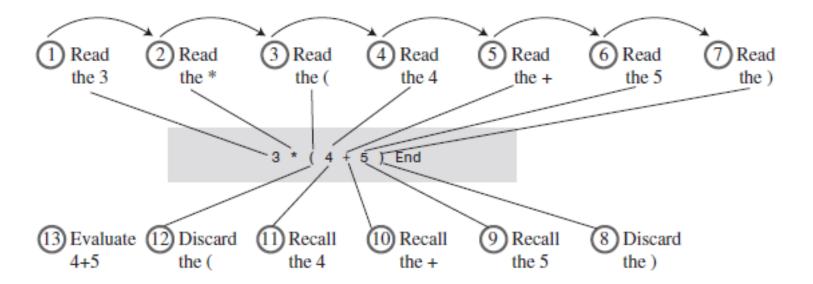
Item Read	Expression Parsed So Far	Comments
3	3	
*	3*	
(	3*(	
4	3*(4	You can't evaluate 3*4 because of the parenthesis.
+	3*(4+	
5	3*(4+5	You can't evaluate 4+5 yet.
)	3*(4+5)	When you see the ), you can evaluate 4+5.
	3*9	After you've evaluated 4+5, you can evaluate 3*9.
	27	
End		Nothing left to evaluate.

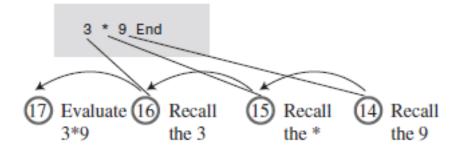


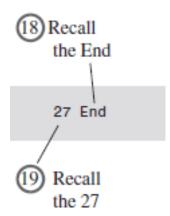
- Parantezele se utilizează pentru a modifica precedența obișnuită a operatorilor
- În expresia 3\*(4+5), fără paranteze, se efectuează mai întâi înmulțirea
- Cu paranteze, adunarea este cea care se va efectua prima



- Nu se poate evalua nimic până când nu se întâlnește paranteza închisă
- Se poate calcula 3\*4 imediat după ce îl întâlnim pe 4, dar parantezele au o precedență mai mare decât operatorii \* şi /
- Putem evalua tot ce este cuprins între paranteze, înainte de a putea utiliza rezultatul ca operand în alte calcule









- La evaluarea expresiilor aritmetice în notație infixată, ne deplasăm atât înainte cât și înapoi în cadrul expresiei
- Deplasările înainte (de la stânga la dreapta) au ca scop citirea operanzilor şi a operatorilor
- Când avem suficientă informație pentru a aplica un operator, ne deplasăm înapoi, amintindu-ne doi operanzi și un operator, pentru a efectua calculele aritmetice



- Uneori, trebuie să amânăm aplicarea unor operatori, dacă sunt urmați de operatori cu precedență mai mare sau de paranteze
- Atunci când apare această situație, trebuie mai întâi să aplicăm operatorul ulterior, de precedență mai mare
- După aceea, ne deplasăm înapoi (spre stânga) și aplicăm primul operator



# Conversia formei infixate în notație postfixată

- Ideea este nu de a evalua expresia în formă infixată, ci de a rearanja operatorii şi operanzii într-un format diferit: notația postfixată
- Expresia postfixată rezultată va fi evaluată ulterior
- Se citeşte forma infixată de la stânga spre dreapta, examinând fiecare caracter în parte



- Pe măsură ce ne deplasăm, vom copia operanzii şi operatorii în şirul de ieşire, care reprezintă chiar notația postfixată
- Artificiul constă în a şti când să copiem fiecare element în parte
- Când caracterul din şirul infixat este un operand, îl vom copia imediat în şirul postfixat



Ori de câte ori putem utiliza un operator pentru a valua o parte a expresiei infixate (dacă am fi efectuat evaluarea expresiei în loc de conversia la forma postfixată), vom copia operatorul în şirul post fixat



Character	Infix	Postfix	Comments
Read from	Expression	Expression	
Infix	Parsed So	Written So	
Expression	Far	Far	
A	Α	Α	
+	A+	Α	
В	A+B	AB	
_	A+B-	AB+	When you see the -, you can copy the +
			to the postfix string.
С	A+B-C	AB+C	
End	A+B-C	AB+C-	When you reach the end of the expression,
			you can copy the –.



TABLE 4.7 Translating A+B\*C to Postfix

Character	Infix	Postfix	Comments
Read from	Expression	Expression	
Infix	Parsed So	Written So	
Expression	Far	Far	
A	Α	Α	
+	A+	Α	
В	A+B	AB	
*	A+B*	AB	You can't copy the + because * is
			higher precedence than +.
C	A+B*C	ABC	When you see the C, you can copy the *.
	A+B*C	ABC*	
End	A+B*C	ABC*+	When you see the end of the
			expression, you can copy the +.



TABLE 4.8 Translating A\*(B+C) into Postfix

Character	Infix	Postfix	Comments
Read from	Expression	Expression	
Infix	Parsed so	Written So	
Expression	Far	Far	
A	Α	Α	
*	A*	Α	
(	A*(	Α	
В	A*(B	AB	You can't copy * because of the parenthesis.
+	A*(B+	AB	
C	A*(B+C	ABC	You can't copy the + yet.
)	A*(B+C)	ABC+	When you see the ), you can copy the +.
	A*(B+C)	ABC+*	After you've copied the +, you can copy the *.
End	A*(B+C)	ABC+*	Nothing left to copy.



- La fel ca în procesul evaluării numerice, ne deplasăm atât înainte, cât și înapoi, prin expresia infixată, pentru a realiza conversia la notația postfixată
- Nu putem scrie un operator în şirul de ieşire (forma postfixată), dacă acesta este urmat de un operator cu precedență mai mare sau de o paranteză deschisă



Dacă întâlnim o astfel de situație, operatorul de precedență mai mare sau operatorul din paranteză trebuie copiat în forma postfixată, înaintea operatorului de prioritate mai scăzută



#### Salvarea operatorilor într-o stivă

- Ordinea operatorilor este inversată atunci când trecem de la forma infixată la cea prefixată
- Din cauză că primul operator nu poate fi copiat în şirul de ieşire până când al doilea operator nu a fost copiat, operatorii apar la ieşire în ordine inversă față de cum au fost citiți din şirul infixat



TABLE 4.9 Translating A+B\*(C-D) to Postfix

Character Infix		Postfix	Stack
Read from	Expression	Expression	Contents
Infix	Parsed So	Written So	
Expression	Far	Far	
Α	Α	Α	
+	A+	Α	+
В	A+B	AB	+
*	A+B*	AB	+*
(	A+B*(	AB	+*(
C	A+B*(C	ABC	+*(
_	A+B*(C-	ABC	+*(-
D	A+B*(C-D	ABCD	+*(-
)	A+B*(C-D)	ABCD-	+*(
	A+B*(C-D)	ABCD-	+*(
	A+B*(C-D)	ABCD-	+*
	A+B*(C-D)	ABCD_*	+
	A+B*(C-D)	ABCD-*+	

#### M

- În expresia infixată iniţială, ordinea operatorilor este + \* -, dar se inversează până la - \* +, în forma postfixată rezultată
- Aceasta se întâmplă din cauză că operatorul \* are o precedență mai mare decât +, iar -, fiind în paranteză, are precedență mai mare decât \*



- Inversarea ordinii ne sugerează că este o idee bună să utilizăm o stivă pentru a memora operatorii, în timp ce așteptăm să îi putem utiliza efectiv
- Extragerea unor elemente din stivă ne permite ca, într-un fel, să ne deplasăm înapoi (de la dreapta spre stânga) prin șirul de intrare



- Nu examinăm întregul şir de intrare, ci doar operatorii şi parantezele
- Aceștia au fost inserați în stivă atunci când s-a citit șirul de intrare, deci este simplu să ni-i amintim în ordine inversă, extregându-i efectiv din stivă
- Operanzii apar în aceeași ordine în cele două notații, deci ei pot fi scriși în șirul de ieșire imediat ce sunt întâlniți, nu este nevoie să-i memorăm într-o stivă



#### TABLE 4.10 Infix to Postfix Translation Rules

Item Read from Input (Infix)	Action
Operand	Write it to output (postfix)
Open parenthesis (	Push it on stack
Close parenthesis )	While stack not empty, repeat the following: Pop an item,
	If item is not (, write it to output
	Quit loop if item is (
Operator (opThis)	If stack empty,
	Push opThis
	Otherwise,
	While stack not empty, repeat:
	Pop an item,
	If item is (, push it, or
	If item is an operator (opTop), and
	<pre>If opTop &lt; opThis, push opTop, or</pre>
	<pre>If opTop &gt;= opThis, output opTop</pre>
	Quit loop if opTop < opThis or item is (
	Push opThis
No more items	While stack not empty,
	Pop item, output it.



- Simbolurile < şi >= se referă la relaţia de precedenţă, nu la comparaţia unor valori numerice
- Operatorul opThis este cel care tocmai a fost citit din şirul de intrare, în timp ce opTop este cel care se află în vârful stivei

TABLE 4.11 Translation Rules Applied to A+B-C

Character Read from	Infix Parsed So	Postfix Written So	Stack Contents	Rule
Infix	Far	Far		
Α	Α	Α		Write operand to output.
+	<b>A</b> +	Α	+	If stack empty, push opThis.
В	A+B	AB	+	Write operand to output.
_	A+B-	AB		Stack not empty, so pop item.
	A+B-	AB+		opThis is -, opTop is +,
				opTop>=opThis, so output
				opTop.
	A+B-	AB+	_	Then push opThis.
C	A+B-C	AB+C	_	Write operand to output.
End	A+B-C	AB+C-		Pop leftover item, output it.



TABLE 4.12 Translation Rules Applied to A+B\*C

Character Read From Infix	Infix Parsed So Far	Postfix Written So Far	Stack Contents	Rule
A	Α	Α		Write operand to postfix.
+	A+	Α	+	If stack empty, push opThis.
В	A+B	AB	+	Write operand to output.
*	A+B*	AB	+	Stack not empty, so pop opTop.
	A+B*	AB	+	opThis is *, opTop is +, opTop <opthis, push<br="" so="">opTop.</opthis,>
	A+B*	AB	+*	Then push opThis.
С	A+B*C	ABC	+*	Write operand to output.
End	A+B*C A+B*C	ABC* ABC*+	+	Pop leftover item, output it. Pop leftover item, output it.



TABLE 4.13 Translation Rules Applied to A\*(B+C)

Character Read From	Infix Parsed	Postfix Written	Stack Contents	Rule
Infix	So Far	So Far		
A	Α	Α		Write operand to postfix.
*	A*	Α	*	If stack empty, push opThis.
(	A*(	Α	*(	Push ( on stack.
В	A*(B	AB	*(	Write operand to postfix.
+	A*(B+	AB	*	Stack not empty, so pop item
	A*(B+	AB	*(	It's (, so push it.
	A*(B+	AB	*(+	Then push opThis.
C	A*(B+C	ABC	*(+	Write operand to postfix.
)	A*(B+C)	ABC+	*(	Pop item, write to output.
	A*(B+C)	ABC+	*	Quit popping if (.
End	A*(B+C)	ABC+*		Pop leftover item, output it.

- Se utilizează o stivă, în care sunt stocați temporar operatorii expresiei
- Fiecare operator are atribuită o prioritate

(	1
)	2
+ -	3
* /	4

- 1. Se iniţializează stiva şi structura de stocare a expresiei în forma postfixată, care este o coadă
- 2. Atât timp cât nu s-a ajuns la sfârşitul expresiei în forma infixată:
  - 2.1. Se citeşte urmatorul element (operand/operator) din expresia infixată

- □ 2.2. Dacă elementul este operand, acesta se adaugă în coadă
- □ 2.3. Dacă elementul este operatorul (, atunci acesta se introduce în stivă
- 2.4. Dacă elementul este operatorul), atunci se transferă operatorii din stivă în coadă, până la întâlnirea operatorului (în stivă; operatorul (se extrage din stivă, fără a fi transferat în coadă

- □ 2.5. Altfel, nu este unul din operatorii ( sau ):
  - 2.5.1. Atât timp cât prioritatea operatorului din vârful stivei este mai mare decât prioritatea operatorului curent, se trece operatorul din vârful stivei în coadă
  - 2.5.2. Se introduce operatorul curent în stivă
- 3. Se trec toţi operatorii rămaşi pe stivă în forma postfixată



```
#include <stdio.h>
#include <string.h>
#include <stdlib.h>
#include <conio.h>
struct NodStiva{
     char opr;
     NodStiva* next;
```



```
struct NodCoada{
    int opd;    //valoarea numerica a operandului
    char opr;    //simbolul asociat caracterului
    NodCoada* next;
};
```

/\*Cele doua campuri int si char se exclud reciproc prin initializarea cu valoarea zero a campului care nu trebuie considerat in cadrul operatiei de extragere din coada sau afisare a cozii\*/

```
NodStiva* push(NodStiva* vf,char c){
      NodStiva* nou=new NodStiva;
      nou->opr=c;
      nou->next=vf;
      return nou;
NodStiva* pop(NodStiva* vf,char *c){
      if(vf){}
            *c=vf->opr;
            NodStiva* t=vf;
            vf=vf->next;
            free(t);
            return vf;
      return vf; }
```

```
NodCoada* put(NodCoada* c,int v,char o){
     NodCoada* nou=new NodCoada;
     nou->opd=v;
     nou->opr=o;
     nou->next=NULL;
     if(!c)
           return nou;
     else{
           NodCoada* t=c;
           while(t->next)
                t=t->next;
           t->next=nou;
           return c;
```

```
int prioritate(char c){
      switch(c){
             case '(':
                    return 1;
             case ')':
                    return 2;
             case '+':
             case '-':
                    return 3;
             case '*':
             case '/':
                    return 4;
             default:
                    return 5;
```



```
int main(){
     NodStiva* stack=NULL;
     NodCoada* queue=NULL;
     char ExprInfix[100], SubExpr[100], o;
     int vb, vb op=0;
     printf("Introduceti expresia matematica in
                             forma infixata: ");
     scanf("%s", ExprInfix);
```

```
M
```

```
/*algoritmul de transformare infixata -> postfixata
cu operanzi intregi fara semn*/
      int i=0;
      //extragere expresie operand/operator
      while(ExprInfix[i]!='\0'){
            int k=0;
            if(ExprInfix[i]>47 && ExprInfix[i]<58){
//codurile ascii ale cifrelor de la 0 la 9 sunt de la 48 la 57
            while(ExprInfix[i]>47 && ExprInfix[i]<58){
                         SubExpr[k]=ExprInfix[i];
                         k++; i++;
                  SubExpr[k]='\0';
                  vb=1; }
```



```
else{
      SubExpr[k]=ExprInfix[i];
      SubExpr[k+1]='\0';
      j++;
      vb=0;
if(vb){
      0=0;
      queue=put(queue,atoi(SubExpr),o);
/*Valorile operanzilor se obtin prin aplicarea
functiei standard de conversie ASCII-to-int,
respectiv atoi*/
```



```
else{
      if(SubExpr[0]=='('){
                       stack=push(stack,SubExpr[0]);
      else{
            if(SubExpr[0]==')'){
                       stack=pop(stack,&o);
                       while(o!='('){
                             queue=put(queue,0,o);
                             stack=pop(stack,&o);
```



```
else{
      if(prioritate(SubExpr[0])<5){
      if(stack){
while(stack &&
prioritate(stack>opr)>prioritate(SubExpr[0])){
                       stack=pop(stack,&o);
                       queue=put(queue,0,o);
      stack=push(stack,SubExpr[0]);
```

```
else{
    printf("Operator incorect introdus!");
```

```
vb_op=1;
}
}
}
```

/\*Daca in cadrul sirului de caractere introdus de la tastatura se identifica un operator sau simbol care nu se afla in lista precizata in functia prioritate, atunci variabila booleana **vb\_op** este setata pe valoarea **1**. Expresia matematica in scriere postfixata este afisata doar pentru **vb\_op=0**\*/



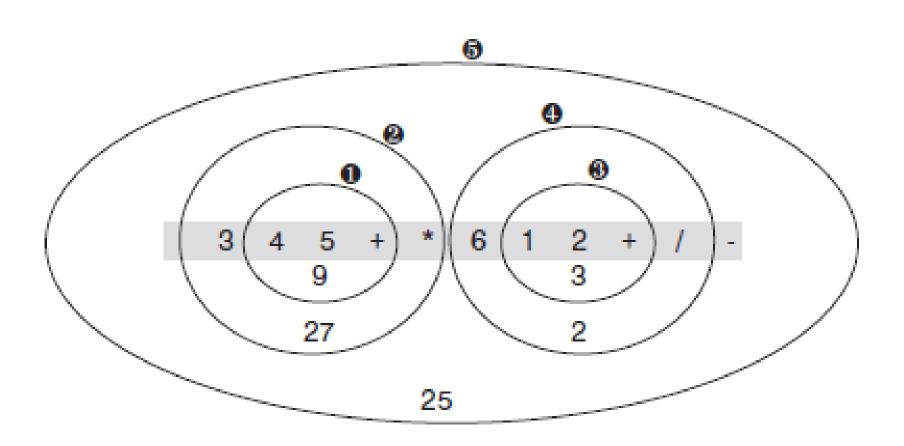
```
while(stack){
            stack=pop(stack,&o);
            queue=put(queue,0,o);
      //afisarea expresiei in scriere postfixata
      NodCoada* t;
      if(!vb op){
            t=queue;
            while(t){
                  if(t->opd) printf("%d ", t->opd);
                  else printf("%c", t->opr);
                  t=t->next;
```







### Evaluarea expresiilor postfixate





### Evaluarea expresiilor postfixate

- Se începe cu primul operator din stânga şi se încercuieşte, împreună cu cei mai apropiați doi operanzi aflați la stânga sa
- Se aplică operatorul asupra celor doi operanzi, efectuând calculul propriu-zis, şi se scrie rezultatul în interiorul cercului



#### Evaluarea expresiilor postfixate

- Ne deplasăm spre dreapta, la operatorul imediat următor şi încercuim operatorul, cercul anterior desenat şi operandul aflat la stânga acestuia
- Se aplică operatorul între rezultatul încercuit anterior şi noul operand, iar noul rezultat obţinut se scrie în cercul nou desenat
- Procesul continuă până când se aplică toți operatorii



## Reguli de evaluare a expresiilor postfixate

- De fiecare dată când întâlnim un operator, îl aplicăm asupra ultimilor doi operanzi întâlniți
- Aceasta ne sugerează ideea de a memora operanzii într-o stivă



# Reguli de evaluare a expresiilor postfixate

- Este o situație inversă celei din algoritmul de conversie din forma infixată în cea postfixată, în care operatorii erau cei memorați în stivă
- La sfârșit, extragem ultimul element din stivă pentru a găsi valoarea expresiei

TABLE 4.14 Evaluating a Postfix Expression

Item Read from Postfix	Action
Expression	
Operand	Push it onto the stack.
Operator	Pop the top two operands from the stack and apply the operator to them. Push the result.

### re.

### Algoritmul de evaluare a unei expresii postfixate

- 1. Se iniţializează stiva
- 2. Atât timp cât nu s-a ajuns la sfârșitul expresiei postfixate, stocată într-o coadă
  - □ 2.1. Se extrage următorul element din expresia postfixată
  - □ 2.2. Dacă elementul extras este valoare, atunci acesta se pune pe stivă

### Algoritmul de evaluare a unei expresii postfixate

- 2.3. Altfel, dacă elementul este operator, atunci:
  - 2.3.1. Se extrage din vârful stivei elementul y
  - 2.3.2. Se extrage din vârful stivei elementul x
  - 2.3.3. Se efectuează operația x operator y
  - 2.3.4. Se pune rezultatul pe stivă
- 3. Ultima valoare extrasă de pe stivă reprezintă rezultatul evaluarii expresiei



```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <conio.h>
struct NodStiva{
      int val;
      NodStiva* next;
struct NodCoada{
      int val;
      char op;
      NodCoada* next;
```

```
NodStiva* push(NodStiva* vf,int v){
      NodStiva* nou=new NodStiva;
      nou->val=v;
      nou->next=vf;
      return nou;
NodStiva* pop(NodStiva* vf,int *v){
      if(vf){}
            *v=vf->val;
            NodStiva* t=vf;
            vf=vf->next;
            free(t);
            return vf;
      return vf; }
```

```
NodCoada* put(NodCoada* c,int v,char o){
     NodCoada* nou=new NodCoada;
     nou->val=v;
     nou->op=o;
     nou->next=NULL;
     if(!c)
           return nou;
     else{
           NodCoada* t=c;
           while(t->next)
                t=t->next;
           t->next=nou;
           return c;
```



```
NodCoada* get(NodCoada* c,int *v, char* o){
     if(c){
           *v=c->val;
           *o=c->op;
            NodCoada* t=c;
           c=c->next;
           free(t);
            return c;
      return c;
```



```
int main(){
      NodStiva* stack=NULL;
      NodCoada* queue=NULL;
      int opd;
     char opr, opt='d';
     //initializarea scrierii postfixate
     while(opt=='d'){
            int i;
            printf("Operand/Operator?(1/0) ");
            scanf("%d", &i);
```

```
if(i==1)
            printf("Valoarea operandului: ");
            scanf("%d", &opd);
            opr=0;
            queue=put(queue,opd,opr);
else
            if(i==0){
                  printf("Simbol operator:('+'/'-'/'*'/') ");
                  opr = getche();
                  printf("\n");
                  opd=0;
                  queue=put(queue,opd,opr);
```

```
×
```

```
else
    printf("Eroare la introducere!\n");
    printf("Continuati?(d/n) ");
    opt = getche();
    printf("\n");
}
```



```
//algoritmul de evaluare a expresiei
while(queue){
     queue=get(queue,&opd,&opr);
     if(!opr){
           stack=push(stack,opd);
     else{
           int opd1,opd2, rez;
           stack=pop(stack,&opd2);
           stack=pop(stack,&opd1);
```

### re.

```
switch(opr){
            case '+':
                  rez=opd1+opd2;
                  break;
            case '-':
                  rez=opd1-opd2;
                  break;
            case '*':
                  rez=opd1*opd2;
                  break;
            case '/':
                  rez=opd1/opd2;
                  break;
            default:
                  printf("Operator gresit!\n"); }
```

```
×
```

```
stack=push(stack,rez);
stack=pop(stack,&opd);
printf("Rezultatul evaluarii expresiei aritmetice
                              este: %d", opd);
getch();
```