Programación Funcional

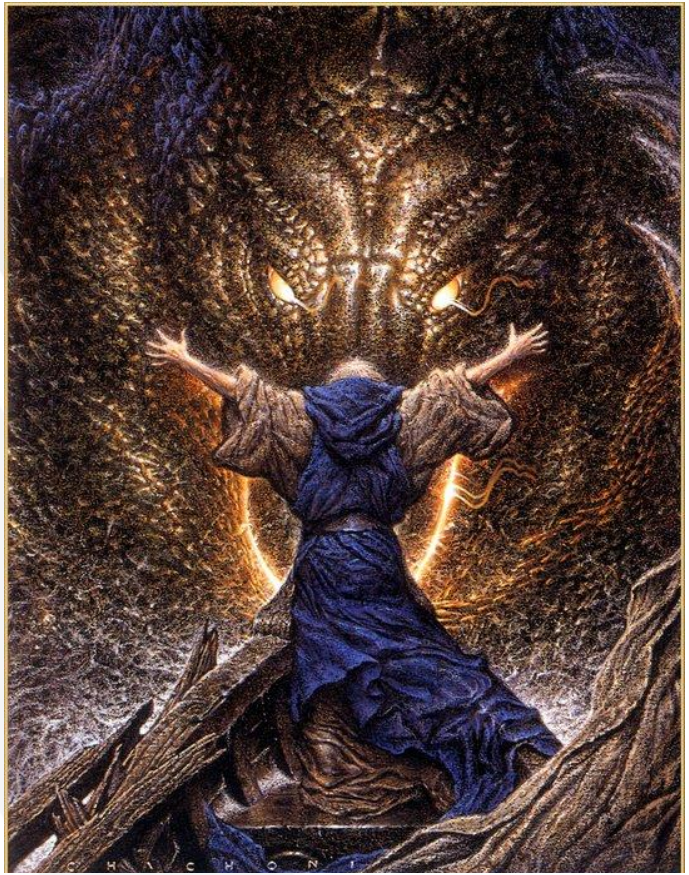
Clases teóricas

por Pablo E. “Fidel” Martínez López

4. Reducción

“Para transformar esta piedra en una gema tienes que ponerle otro nombre verdadero.”

Un mago de Terramar
Úrsula K. Le Guin



Computación por reducción

Computación por reducción

- ¿Cómo calcular el valor de una expresión?
  1. Repetir los pasos 2 y 3 hasta que no haya ninguna subexpresión que cumpla la condición dada por 2
  2. Encontrar una subexpresión que coincida con una instancia del lado izquierdo de una ecuación
  3. Reemplazarla por la correspondiente instancia del lado derecho
- Este proceso es llamado ***mecanismo de reducción***
  - O simplemente, **reducción**
  - Lo expresamos con $\longrightarrow$

Computación por reducción

- Algunas definiciones
  - ***Redex*** (por ***red****ucible* ***ex****pression*)
    Subexpresión que coincide con una instancia del lado izquierdo de una ecuación
  - ***Forma normal***
    Expresión que no contiene redexes
- La reducción reduce la distancia a la forma normal

Computación por reducción

- Mecanismo de reducción

```
Repetir hasta forma normal
    Localizar un redex
    Reemplazarlo
```

- Ya vimos ejemplos de reducciones en la clase 1
- ¿Qué propiedades tiene este mecanismo?

Propiedades de la reducción

- Propiedades
  - **Confluencia**

    ¿la forma normal es única?
  - **Normalización**

    ¿la forma normal siempre existe?
  - **Orden de reducción**

    ¿importa en qué orden se eligen los redexes?

Confluencia

Confluencia

- **Confluencia** - ¿la forma normal es única?
  - ¿Qué implicaría si no fuese así?
    - ¡Habría más de un significado!
    - Es importante que lo sea para el significado
  - La forma de las definiciones permitidas influyen sobre la confluencia
    - En Haskell hay confluencia
  - No elaboraremos más sobre este punto

Normalización

Normalización

- Considerar las siguientes definiciones

```
inf :: ...
inf = inf + 1

detect :: ...
detect 42 = True
```

- ¿Tienen tipo?
- ¿Cómo reducen?

Normalización

- ¿Cuál es el tipo de **`inf`**? ¿Y cómo reduce?

```
inf :: ...
inf = inf + 1
```

Normalización

- ¿Cuál es el tipo de **`inf`**? ¿Y cómo reduce?

```
inf :: Int -- el resultado de la suma entre dos Ints
inf = inf + 1
```

Normalización

- ¿Cuál es el tipo de **`inf`**? ¿Y cómo reduce?

```
inf :: Int -- el resultado de la suma entre dos Ints
inf = inf + 1
```

inf → **...**

Normalización

- ¿Cuál es el tipo de **`inf`**? ¿Y cómo reduce?

```
inf :: Int -- el resultado de la suma entre dos Ints
inf = inf + 1
```

`inf` → `inf+1` → ...

Normalización

- ¿Cuál es el tipo de **`inf`**? ¿Y cómo reduce?

```
inf :: Int -- el resultado de la suma entre dos Ints
inf = inf + 1
```

```
inf → inf+1 → (inf+1)+1 → ...
```

Normalización

- ¿Cuál es el tipo de **`inf`**? ¿Y cómo reduce?

```
inf :: Int -- el resultado de la suma entre dos Ints
inf = inf + 1
```

`inf` → `inf+1` → `(inf+1)+1` → ...

  - ¡El redex nunca desaparece! La reducción no termina...
  - ¿Es una ecuación orientada?

Normalización

- ¿Cuál es el tipo de **`detect`**? ¿Y cómo reduce?

```
detect :: ...
detect 42 = True
```

Normalización

- ¿Cuál es el tipo de **`detect`**? ¿Y cómo reduce?

```
detect ::      ->
detect 42 = True
```

Normalización

- ¿Cuál es el tipo de **`detect`**? ¿Y cómo reduce?

```
detect :: Int -> Bool
detect 42 = True
```

Normalización

- ¿Cuál es el tipo de **`detect`**? ¿Y cómo reduce?

```
detect :: Int -> Bool
detect 42 = True
```

`detect 42` → ...

Normalización

- ¿Cuál es el tipo de **`detect`**? ¿Y cómo reduce?

```
detect :: Int -> Bool
detect 42 = True
```

`detect 42` → `True`

Normalización

- ¿Cuál es el tipo de **`detect`**? ¿Y cómo reduce?

```
detect :: Int -> Bool
detect 42 = True
```

`detect 42` $\rightarrow$ `True`

`detect 21` $\not\rightarrow$ `-- ¡no hay ecuaciones!`

Normalización

- ¿Cuál es el tipo de **`detect`**? ¿Y cómo reduce?

```
detect :: Int -> Bool
detect 42 = True
```

`detect 42` $\rightarrow$ `True`

`detect 21` $\not\rightarrow$ `-- ¡no hay ecuaciones!`

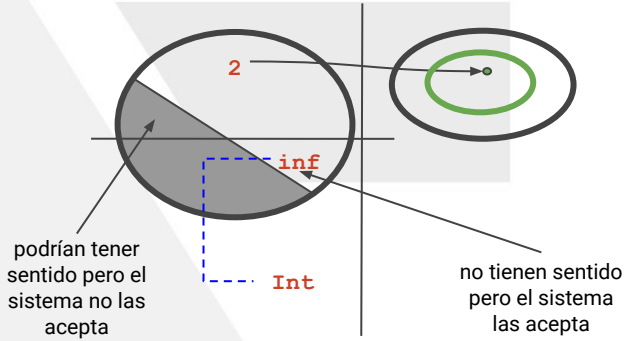
  - ¡El redex no se puede reemplazar! Y no es forma normal…
  - ¿Es un redex?

Normalización

- **Normalización -** ¿La forma normal siempre existe?
  - ¡No!
  - ¿Cuáles son las formas de no llegar a formal normal?
    - Nunca termina de reducir
    - No puede seguir pero no llegó a formal normal
  - Se llama *normalización* porque tiene que ver con la obtención de la forma *normal*
    - ¡No toda expresión tiene formal normal!

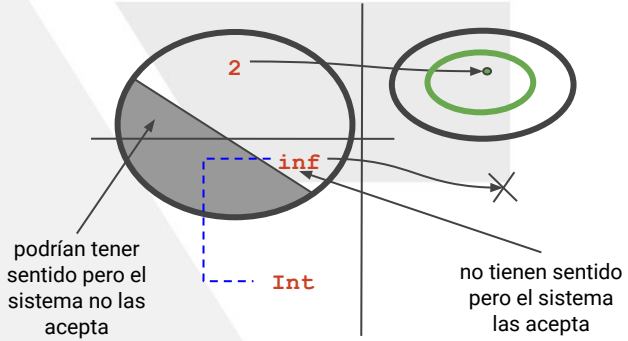
Normalización

- Consecuencias de la falta de formas normales
  - ¿Cuál es el valor de **`inf`**? ¿Existe?
    -



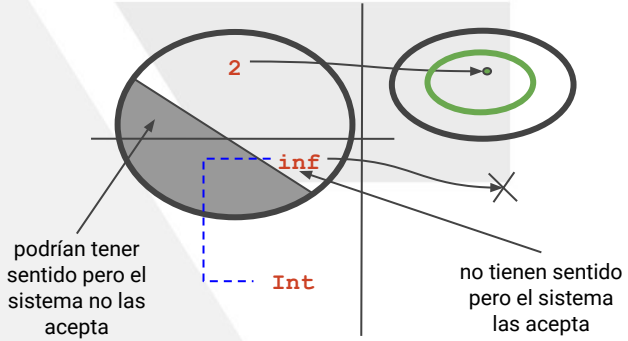
Normalización

- Consecuencias de la falta de formas normales
  - ¿Cuál es el valor de **`inf`**? ¿Existe?
    - Un número entero que sea igual a su sucesor



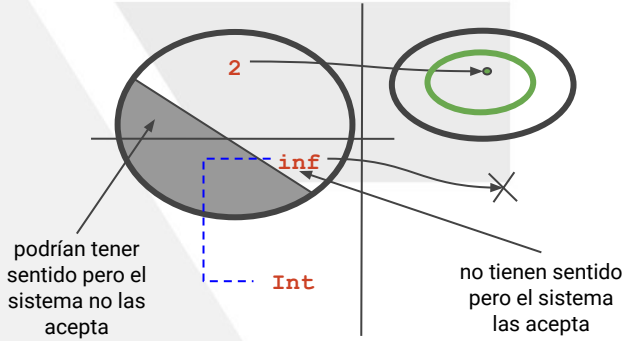
Normalización

- Consecuencias de la falta de formas normales
  - ¿Cuál es el valor de **`inf`**? ¿Existe?
    - Un número entero que sea igual a su sucesor
  - Pero **`inf`** tiene tipo…



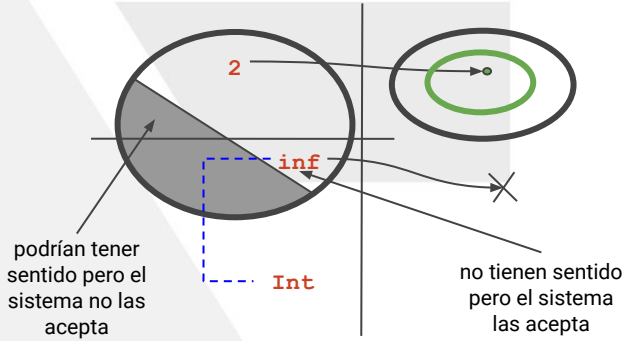
Normalización

- Consecuencias de la falta de formas normales
  - ¿Cuál es el valor de **`inf`**? ¿Existe?
    - Un número entero que sea igual a su sucesor
  - Pero **`inf`** tiene tipo…
  - Genera una discrepancia
  - ¿Cómo la arreglamos?



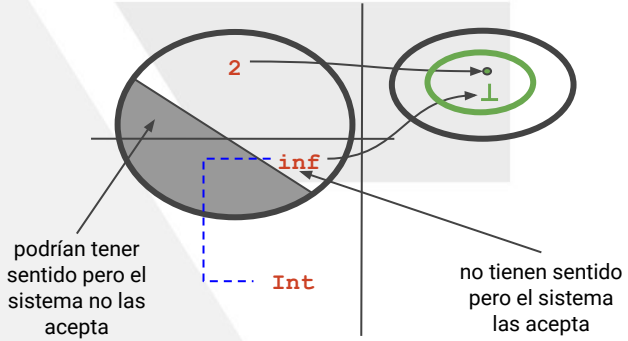
Normalización

- Consecuencias de la falta de formas normales
  - ¿Cuál es el valor de **`inf`**? ¿Existe?
    - Un número entero que sea igual a su sucesor
  - Pero **`inf`** tiene tipo…
  - Genera una discrepancia
  - ¿Cómo la arreglamos?
    - Precisamos un ***valor de error***



Normalización

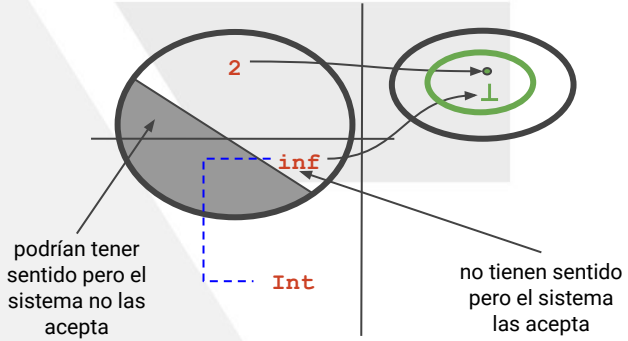
- Consecuencias de la falta de formas normales
  - **Valor de error:** BOTTOM (⊥)



Normalización

- Consecuencias de la falta de formas normales
  - **Valor de error:** BOTTOM (⊥)

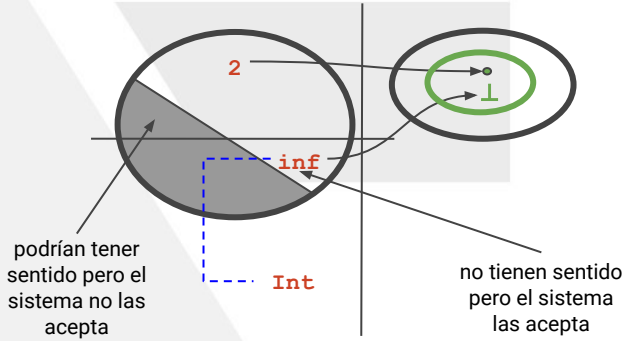
    Valor teórico que representa a un error de cómputo



Normalización

- Consecuencias de la falta de formas normales
  - **Valor de error:** BOTTOM ($\perp$)

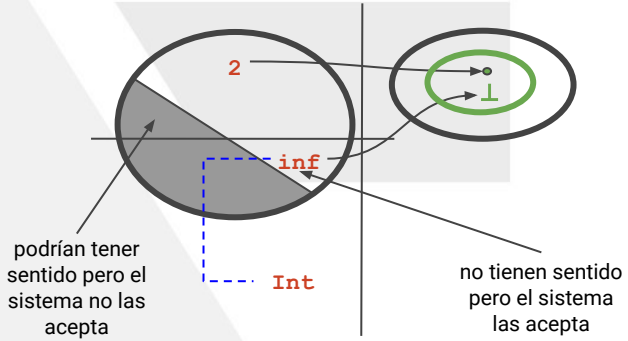
    Valor teórico que representa a un error de cómputo
    - La reducción no termina
    - La reducción no llega



Normalización

- Consecuencias de la falta de formas normales
  - **Valor de error:** BOTTOM (⊥)

    Valor teórico que representa a un error de cómputo
    - La reducción no termina
    - La reducción no llega
  - ¡NO SE PUEDE manejar ⊥ de manera operacional!



Normalización

- Bottom es un valor especial

Normalización

- Bottom es un valor especial
  - Usamos el símbolo $\perp$ para denotarlo

Normalización

- Bottom es un valor especial
  - Usamos el símbolo $\bot$ para denotarlo
    - Observar que es verde
    - No existe por sí mismo en el mundo de la expresiones

Normalización

- Bottom es un valor especial
  - Usamos el símbolo $\bot$ para denotarlo
    - Observar que es verde
    - No existe por sí mismo en el mundo de la expresiones
    - Es el valor de las expresiones que no terminan o no llegan a forma normal, un **valor de error**

Normalización

- Bottom es un valor especial
  - Usamos el símbolo ⊥ para denotarlo
    - Observar que es verde
    - No existe por sí mismo en el mundo de la expresiones
    - Es el valor de las expresiones que no terminan o no llegan a forma normal, un **valor de error**
    - No se puede observar operacionalmente si una expresión denota ⊥ (más de esto en un rato)

Normalización

- ¿Por qué se llama bottom?

Normalización

- ¿Por qué se llama bottom?
  - En inglés significa “el fondo”, “lo de más abajo”

Normalización

- ¿Por qué se llama bottom?
  - En inglés significa “el fondo”, “lo de más abajo”
  - Es el valor con menos significado,
    “el de más abajo” en la escala de significados

Normalización

- ¿Por qué se llama bottom?
  - En inglés significa “el fondo”, “lo de más abajo”
  - Es el valor con menos significado,
    “el de más abajo” en la escala de significados
  - En slang también se usa para otra cosa que puede servir en castellano…

Normalización

- ¿Por qué se llama bottom?
  - En inglés significa “el fondo”, “lo de más abajo”
  - Es el valor con menos significado,
    “el de más abajo” en la escala de significados
  - En slang también se usa para otra cosa que puede servir en castellano…
  - El BOOM de Gobstones es bottom
    - Pero esto fue meramente accidental

Normalización

- Hay expresiones que no terminan de todos los tipos

```
inf = inf+1
bb = not bb
bc = if False then 'a' else bc
```

Normalización

- Hay expresiones que no terminan de todos los tipos

```
inf = inf+1
bb = not bb
bc = if False then 'a' else bc
```

  - ¿A qué tipo pertenece, entonces, $\bot$?

Normalización

- Hay expresiones que no terminan de todos los tipos

```
inf = inf+1
bb = not bb
bc = if False then 'a' else bc
```

  - ¿A qué tipo pertenece, entonces, $\bot$?
    - TODOS los tipos contienen este valor

Normalización

- Hay expresiones que no terminan de todos los tipos

```
inf = inf+1
bb = not bb
bc = if False then 'a' else bc
```

  - ¿A qué tipo pertenece, entonces, ⊥?
    - TODOS los tipos contienen este valor
    - ¿Se puede definir una expresión polimórfica que dé ⊥?

Normalización

- ¿Se puede definir una expresión polimórfica que de $\perp$?

```
bottom :: ...
bottom = ...
```

Normalización

- ¿Se puede definir una expresión polimórfica que de $\perp$?

```
bottom :: a
bottom = bottom
```

  - Para no terminación, se puede

Normalización

- ¿Se puede definir una expresión polimórfica que de ⊥?

```
bottom :: a
bottom = bottom
```

  - Para no terminación, se puede
    - De hecho, ⊥ es el único valor con tipo `a`

Normalización

- ¿Se puede definir una expresión polimórfica que de ⊥?

```
bottom :: a
bottom = bottom
```

  - Para no terminación, se puede
    - De hecho, ⊥ es el único valor con tipo `a`
    - En Haskell se llama `undefined` en lugar de `bottom`

Normalización

- ¿Se puede definir una expresión polimórfica que de ⊥?

```
bottom :: a
bottom = bottom
```

  - Para no terminación, se puede
    - De hecho, ⊥ es el único valor con tipo `a`
    - En Haskell se llama `undefined` en lugar de `bottom`
  - ¿Y se puede definir una que no llegue a forma normal?
    - Debería no tener ecuaciones…

Normalización

- ¿Se puede definir una expresión polimórfica que de $\perp$?

```
error :: …
error = …
```

Normalización

- ¿Se puede definir una expresión polimórfica que de $\perp$?

```
error :: ...
error = ...
```

  - Que no llegue a forma normal, no se puede

Normalización

- ¿Se puede definir una expresión polimórfica que de $\bot$?

```
error :: String -> a
-- Predefinida en Haskell
```

  - Que no llegue a forma normal, no se puede
    - Debe ser parte del lenguaje

Normalización

- ¿Se puede definir una expresión polimórfica que de $\bot$?

```
error :: String -> a
-- Predefinida en Haskell
```

  - Que no llegue a forma normal, no se puede
    - Debe ser parte del lenguaje
  - ¿Para qué sirve el **`String`** del argumento?

Normalización

- Función de `error :: String -> a`
  ¿Para qué sirve el `String` del argumento?

Normalización

- Función de `error :: String -> a`

  ¿Para qué sirve el `String` del argumento?

  - El valor producido es el mismo, ⊥

```
error "Todo mal" = ⊥
error "Se pudrió la momia" = ⊥
```

Normalización

- Función de `error :: String -> a`

  ¿Para qué sirve el `String` del argumento?
  - El valor producido es el mismo, ⊥

    ```
    error "Todo mal" = ⊥
    error "Se pudrió la momia" = ⊥
    ```
  - ¡Pero cambia el comportamiento operacional!
    - El mensaje de error es diferente
    - Comprobarlo en el intérprete

Normalización

- ¿Qué quiere decir que no se puede observar operacionalmente si una expresión denota $\perp$?
  - El valor $\perp$ no es observable operacionalmente

Normalización

- ¿Qué quiere decir que no se puede observar operacionalmente si una expresión denota ⊥?
  - El valor ⊥ no es observable operacionalmente

```
hpDiscr :: a -> Int
hpDiscr x = if (x==bottom) then 1 else 0
```

Normalización

- ¿Qué quiere decir que no se puede observar operacionalmente si una expresión denota ⊥?
  - El valor ⊥ no es observable operacionalmente

```
hpDiscr :: a -> Int
hpDiscr x = if (x==bottom) then 1 else 0
```

  - ¿Cuánto vale `hpDiscr 2`?
  - ¿Y `hpDiscr bottom`?
  - ¿Y `hpDiscr (error "")`?

Normalización

- El valor $\bot$ no es observable operacionalmente

```
hpDiscr 2
```

$\rightarrow$

Normalización

- El valor $\perp$ no es observable operacionalmente

  `hpDiscr 2`

  $\rightarrow$

Normalización

- El valor ⊥ no es observable operacionalmente

```
hpDiscr 2
```

→ (def. de hpDiscr, con **x** = 2)

```
if (2==bottom) then 1 else 0
```

→

Normalización

- El valor ⊥ no es observable operacionalmente

```
hpDiscr 2
```

→ (def. de hpDiscr, con **x** = 2)

```
if (2==bottom) then 1 else 0
```

→

Normalización

- El valor ⊥ no es observable operacionalmente

```
hpDiscr 2
→                                   (def. de hpDiscr, con x = 2)
if (2==bottom) then 1 else 0
→                                   (def. de bottom)
if (2==bottom) then 1 else 0
→
```

Normalización

- El valor ⊥ no es observable operacionalmente

```
hpDiscr 2
→                                   (def. de hpDiscr, con x = 2)
if (2==bottom) then 1 else 0
→                                   (def. de bottom)
if (2==bottom) then 1 else 0
→ …
```

Normalización

- El valor ⊥ no es observable operacionalmente

```
hpDiscr 2
→                                  (def. de hpDiscr, con x = 2)
if (2==bottom) then 1 else 0
→                                  (def. de bottom)
if (2==bottom) then 1 else 0
→ …
```

  - ¡Nunca produce una forma normal!

    `hpDiscr 2 = ⊥`

Normalización

- El valor $\perp$ no es observable operacionalmente

```
hpDiscr bottom
```

$\rightarrow$

Normalización

- El valor ⊥ no es observable operacionalmente

```
hpDiscr bottom
```

→ (def. de hpDiscr, con **x** = **bottom**)

```
if (bottom==bottom) then 1 else 0
```

→

Normalización

- El valor ⊥ no es observable operacionalmente

```
hpDiscr bottom
→                                   (def. de hpDiscr, con x = bottom)
if (bottom==bottom) then 1 else 0
→                                   (def. de bottom)
if (bottom==bottom) then 1 else 0
→
```

Normalización

- El valor ⊥ no es observable operacionalmente

```
hpDiscr bottom
→                                   (def. de hpDiscr, con x = bottom)
if (bottom==bottom) then 1 else 0
→                                   (def. de bottom)
if (bottom==bottom) then 1 else 0
→ ...
```

Normalización

- El valor ⊥ no es observable operacionalmente

```
hpDiscr bottom
→                                  (def. de hpDiscr, con x = bottom)
if (bottom==bottom) then 1 else 0
→                                  (def. de bottom)
if (bottom==bottom) then 1 else 0
→ …
```

  - ¡Tampoco produce nunca una forma normal!

    `hpDiscr bottom` = ⊥

Normalización

- El valor ⊥ no es observable operacionalmente

```
hpDiscr (error "")
```

→

Normalización

- El valor ⊥ no es observable operacionalmente

```
hpDiscr (error "")
```

→ (def. de hpDiscr, con **x** = `error ""`)

```
if (error ""==bottom) then 1 else 0
```

→

Normalización

- El valor ⊥ no es observable operacionalmente

```
hpDiscr (error "")
```

→ (def. de hpDiscr, con **x** = `error ""`)

```
if (error ""==bottom) then 1 else 0
```

↛ (def. de error)

Normalización

- El valor ⊥ no es observable operacionalmente

```
hpDiscr (error "")
```

→ (def. de hpDiscr, con **x** = `error ""`)

```
if (error ""==bottom) then 1 else 0
```

↛ (def. de error)

- ¡Nuevamente nunca produce una forma normal!

  `hpDiscr (error "")` = ⊥

Normalización

- El valor ⊥ no es observable operacionalmente

```
hpDiscr :: a -> Int
hpDiscr x = if (x==bottom) then 1 else 0
```

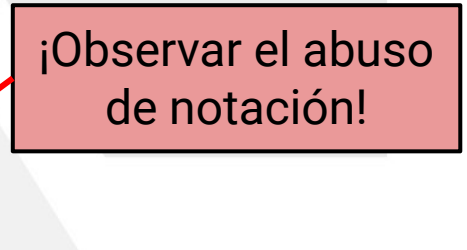
  - `hpDiscr 2` = ⊥
  - `hpDiscr bottom` = ⊥
  - `hpDiscr (error "")` = ⊥

Normalización

- El valor ⊥ no es observable operacionalmente

```
hpDiscr :: a -> Int
hpDiscr x = if (x==bottom) then 1 else 0
```

  - `hpDiscr 2` = ⊥
  - `hpDiscr bottom` = ⊥
  - `hpDiscr (error "")` = ⊥
  - Por lo tanto, `hpDiscr` = `\x -> ⊥`



Bottom y funciones

Bottom y funciones

- ¿Cuál es la relación entre $\bot$ y las funciones?

Bottom y funciones

- ¿Cuál es la relación entre $\bot$ y las funciones?
  - ¿Puede devolver $\bot$ al recibir algo totalmente definido?
  - ¿Puede devolver algo distinto de $\bot$ cuando recibe $\bot$?

Bottom y funciones

- ¿Cuál es la relación entre ⊥ y las funciones?
  - ¿Puede devolver ⊥ al recibir algo totalmente definido?
    - Valor ⊥ en los resultados
  - ¿Puede devolver algo distinto de ⊥ cuando recibe ⊥?
    - Valor ⊥ en los argumentos

Bottom y funciones

- ¿Cuál es la relación entre ⊥ y las funciones?
  - ¿Puede devolver ⊥ al recibir algo totalmente definido?
    - Valor ⊥ en los resultados
    - **Funciones parciales y totales**
  - ¿Puede devolver algo distinto de ⊥ cuando recibe ⊥?
    - Valor ⊥ en los argumentos
    - **Funciones estrictas y no estrictas**

Bottom y funciones

- ¿Cuál es la relación entre $\perp$ y las funciones?

Argumento \ Resultado	$\neq \perp$	$= \perp$
$\neq \perp$ (totalmente definido)	¿Siempre? Función total	¿Puede ser? Función parcial
$= \perp$	¿Puede ser? Función no estricta	¿Siempre? Función estricta

Funciones parciales y totales

- Considerar

```
succ :: Int -> Int
succ x = x+1
```

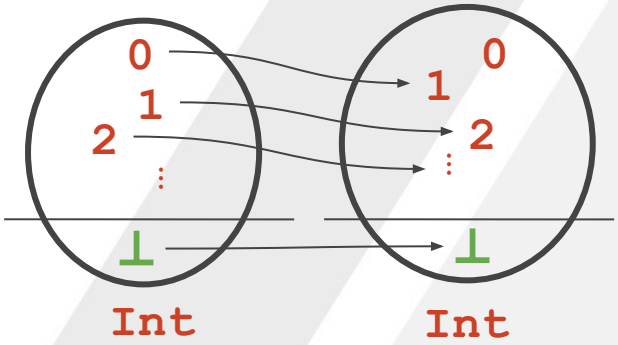
```
detect :: Int -> Bool
detect 42 = True
```

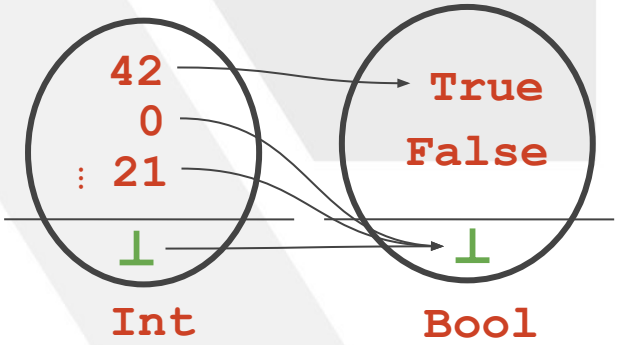
Funciones parciales y totales

- Considerar

```
succ :: Int -> Int
succ x = x+1
```

```
detect :: Int -> Bool
detect 42 = True
```





Funciones parciales y totales

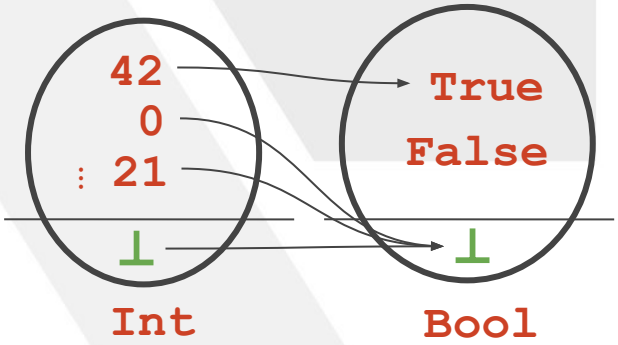
- Considerar

```
succ :: Int -> Int
succ x = x+1
```

```
detect :: Int -> Bool
detect 42 = True
```

  - Para todo **n** ≠ ⊥,

    succ n ≠ ⊥
  - **succ** es TOTAL



Funciones parciales y totales

- Considerar

```
succ :: Int -> Int
succ x = x+1
```

  - Para todo **n** ≠ ⊥,
    succ n ≠ ⊥
  - **succ** es TOTAL

```
detect :: Int -> Bool
detect 42 = True
```

  - Existen **n** ≠ ⊥,
    detect n = ⊥
  - **detect** es PARCIAL

Funciones parciales y totales

- Definiciones
  - **Función total**
    - *Nunca* da $\perp$ si recibe valores totalmente definidos
  - **Función parcial**
    - Da $\perp$ al recibir valores totalmente definidos
- En matemáticas no hay funciones parciales…
  - ¿Por qué? ¿Qué es diferente en este enfoque?

Funciones parciales y totales

- ¿Qué diferencia hay entre estas funciones?

```
                    detect 42 = True

detectE 42 = True          detectB 42 = True
detectE x = error ""       detectB x = bottom
```

  - `detect 42` = `detectE 42` = `detectB 42` = `True`
  - `detect e` = `detectE e` = `detectB e` = $\bot$, si `e` $\neq$ `42`
  - ¡Por lo tanto, `detect` = `detectE` = `detectB`!
    - ¿Pero cómo es su comportamiento operacional?

Funciones estrictas y no estrictas

- Considerar la siguiente función

```
const :: a -> b -> a
const x y = x
```

Funciones estrictas y no estrictas

- Considerar la siguiente función

```
const :: a -> b -> a
const x y = x
```

  - ¿Cuál es el valor de `const bottom 2`?

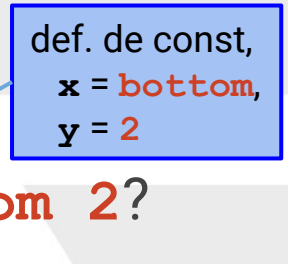
Funciones estrictas y no estrictas

- Considerar la siguiente función

```
const :: a -> b -> a
const x y = x
```

- ¿Cuál es el valor de `const bottom 2`?

`const bottom 2` → `bottom` → …

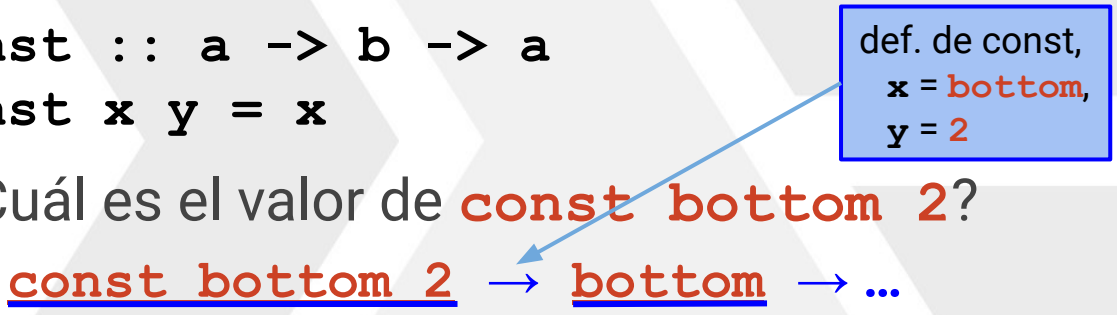


Funciones estrictas y no estrictas

- Considerar la siguiente función

```
const :: a -> b -> a
const x y = x
```

- ¿Cuál es el valor de `const bottom 2`?

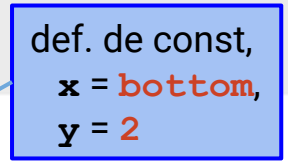


- Entonces, `const bottom 2` = ⊥

Funciones estrictas y no estrictas

- Considerar la siguiente función

```
const :: a -> b -> a
const x y = x
```



  - ¿Cuál es el valor de `const bottom 2`?

    `const bottom 2` → `bottom` → …

  - Entonces, `const bottom 2` = ⊥

  - El valor de **`x`** es necesario para el resultado
    - La función **`const`** es *estricta* en su 1er argumento

Funciones estrictas y no estrictas

- Considerar la siguiente función

```
const :: a -> b -> a
const x y = x
```

  - ¿Y el valor de `const 2 bottom`?

Funciones estrictas y no estrictas

- Considerar la siguiente función

```
const :: a -> b -> a
const x y = x
```

  - ¿Y el valor de `const 2 bottom`?

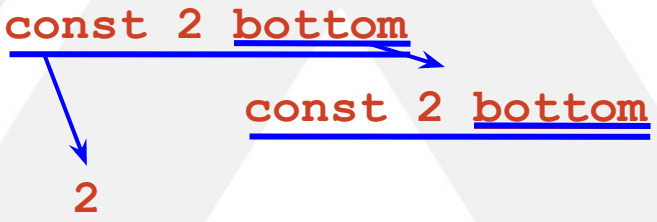
`const 2 bottom`

Funciones estrictas y no estrictas

- Considerar la siguiente función

```
const :: a -> b -> a
const x y = x
```

  - ¿Y el valor de `const 2 bottom`?

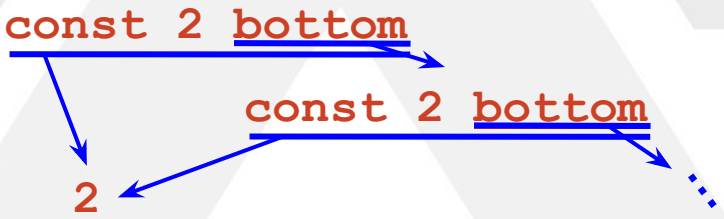


Funciones estrictas y no estrictas

- Considerar la siguiente función

```
const :: a -> b -> a
const x y = x
```

  - ¿Y el valor de `const 2 bottom`?

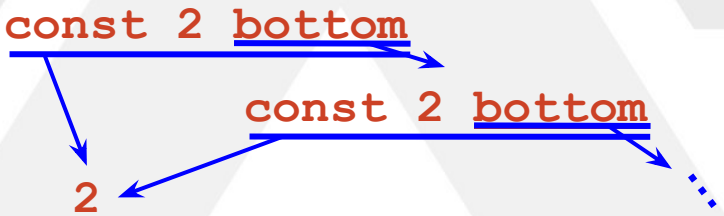


Funciones estrictas y no estrictas

- Considerar la siguiente función

```
const :: a -> b -> a
const x y = x
```

  - ¿Y el valor de `const 2 bottom`?
    - ¿`const 2 bottom` = 2? ¿`const 2 bottom` = ⊥?



Funciones estrictas y no estrictas

- Considerar la siguiente función

```
const :: a -> b -> a
const x y = x
```

  - ¿Y el valor de `const 2 bottom`?
    - ¿`const 2 bottom` = 2? ¿`const 2 bottom` = ⊥?
    - ¿El valor de `y` es necesario para el resultado?

Funciones estrictas y no estrictas

- Considerar la siguiente función

```
const :: a -> b -> a
const x y = x
```

  - ¿Y el valor de `const 2 bottom`?
    - ¿`const 2 bottom` = 2? ¿`const 2 bottom` = ⊥?
    - ¿El valor de `y` es necesario para el resultado?
      - ¡Hay dos posibles elecciones!

Funciones estrictas y no estrictas

- Considerar la siguiente función

```
const :: a -> b -> a
const x y = x
```

  - ¿Y el valor de `const 2 bottom`?
    - ¿`const 2 bottom` = 2? ¿`const 2 bottom` = ⊥?
    - ¿El valor de **`y`** es necesario para el resultado?
      - ¡Hay dos posibles elecciones!
      - ¡¡Existen DOS funciones **`const`**,
        una *estricta* y una *no estricta*!! ¿De qué depende?

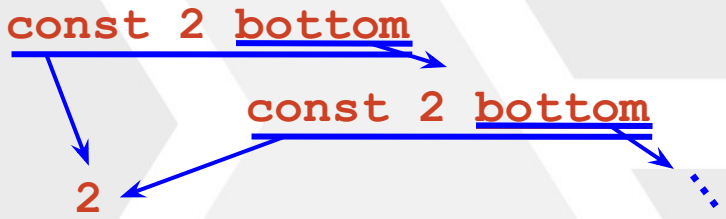
Funciones estrictas y no estrictas

- Definiciones
  - **Función no estricta**
    - Puede dar algo $\neq \perp$ si recibe $\perp$
  - **Función estricta**
    - Da $\perp$ al recibir $\perp$
- Las funciones que no precisan su argumento tienen DOS versiones: una estricta y otra no estricta

Órdenes de reducción

Órdenes de reducción

- No da igual reducir cualquier redex



- ¿Cuál redex elegir si hay más de uno?
  - ¡Sin decidir cuál redex elegir en caso de haber más de uno, el resultado puede variar!
    - Da un resultado definido, o da ⊥

Órdenes de reducción

- Órden de reducción
  - Algoritmo para elegir qué redex reducir
- Órdenes más comunes
  - Si están al mismo nivel, elige el de más a la izquierda
  - Si están uno dentro de otro, hay dos extremos
    - **Orden APLICATIVO**
    - **Orden NORMAL**

Órdenes de reducción

- **Orden de reducción APLICATIVO**
  - Se elige el redex más interno de todos

```
doble (doble (doble 2))
```

Órdenes de reducción

- **Orden de reducción APLICATIVO**
  - Se elige el redex más interno de todos

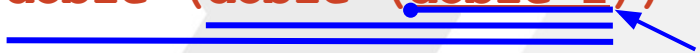
```
doble (doble (doble 2))
```

→

Órdenes de reducción

- **Orden de reducción APLICATIVO**
  - Se elige el redex más interno de todos

```
doble (doble (doble 2))
```



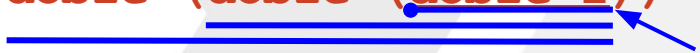
→ (def. de doble, con **x**=**2**)

```
doble (doble (2+2))
```

Órdenes de reducción

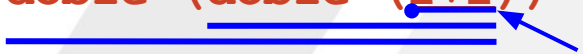
- **Orden de reducción APLICATIVO**
  - Se elige el redex más interno de todos

```
doble (doble (doble 2))
```



→ (def. de doble, con **x**=**2**)

```
doble (doble (2+2))
```



→

Órdenes de reducción

- **Orden de reducción APLICATIVO**
  - Se elige el redex más interno de todos

```
doble (doble (doble 2))
```

→ (def. de doble, con **x**=**2**)

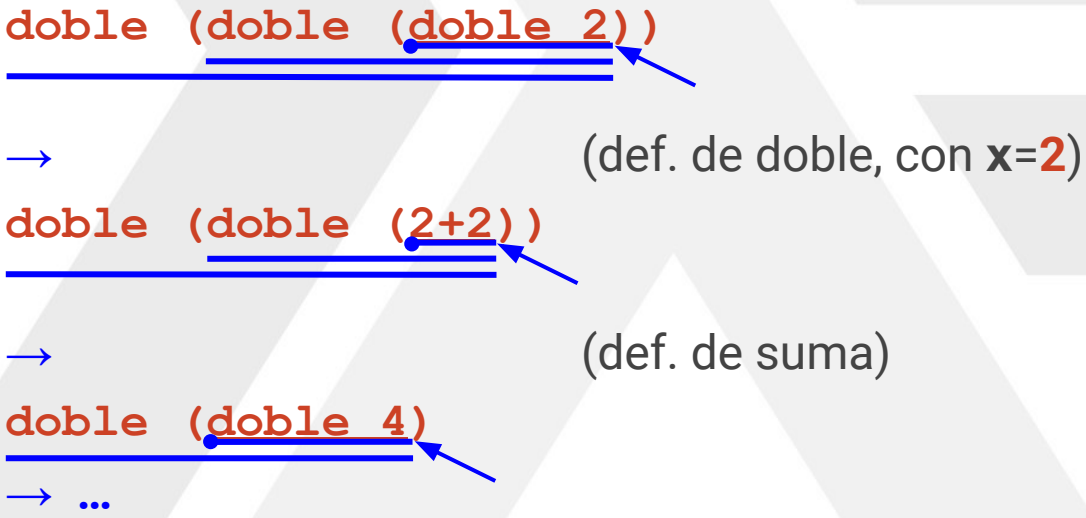
```
doble (doble (2+2))
```

→ (def. de suma)

```
doble (doble 4)
```

Órdenes de reducción

- **Orden de reducción APLICATIVO**
  - Se elige el redex más interno de todos



Órdenes de reducción

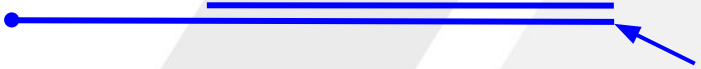
- **Orden de reducción NORMAL**
  - Se elige el redex más externo de todos (a la izquierda)

```
doble (doble (doble 2))
```

Órdenes de reducción

- **Orden de reducción NORMAL**
  - Se elige el redex más externo de todos (a la izquierda)

```
doble (doble (doble 2))
```

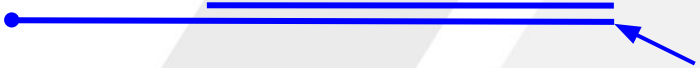


→

Órdenes de reducción

- **Orden de reducción NORMAL**
  - Se elige el redex más externo de todos (a la izquierda)

```
doble (doble (doble 2))
```



→ (def. de doble, con **x**=**(doble (doble 2))**)

```
doble (doble 2) + doble (doble 2)
```

Órdenes de reducción

- **Orden de reducción NORMAL**
  - Se elige el redex más externo de todos (a la izquierda)

```
doble (doble (doble 2))
```

→ (def. de doble, con **x**=**(doble (doble 2))**)

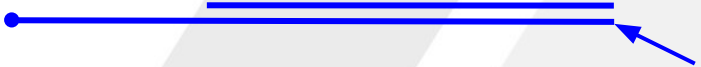
```
doble (doble 2) + doble (doble 2)
```

→

Órdenes de reducción

- **Orden de reducción NORMAL**
  - Se elige el redex más externo de todos (a la izquierda)

```
doble (doble (doble 2))
```



→ (def. de doble, con **x**=**(doble (doble 2))**)

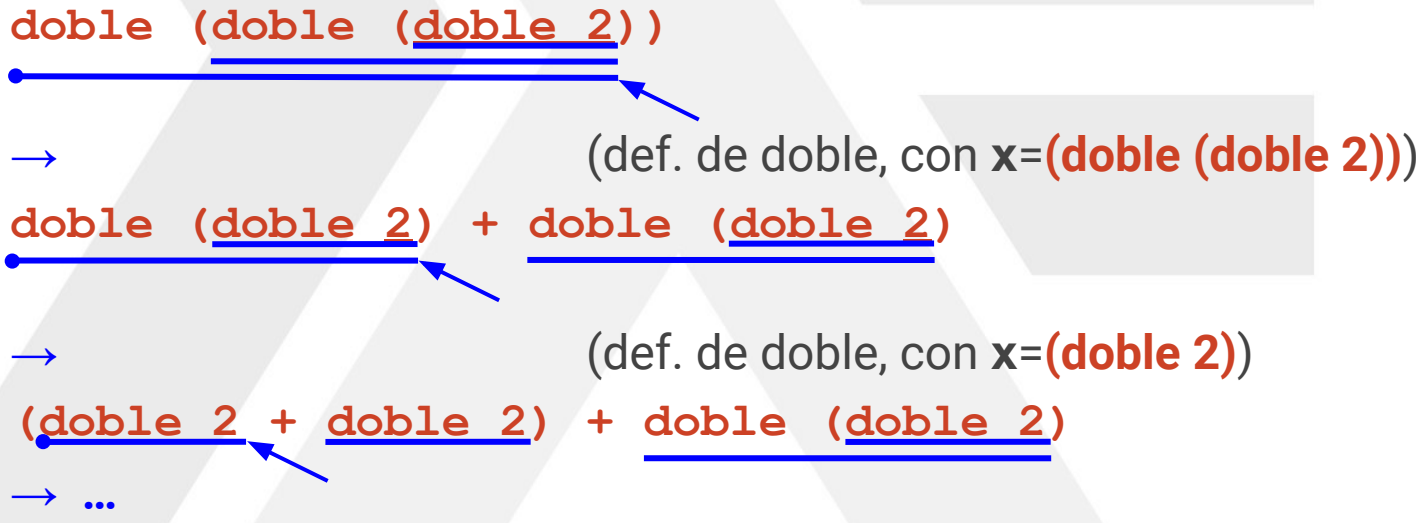
```
doble (doble 2) + doble (doble 2)
```

→ (def. de doble, con **x**=**(doble 2)**)

```
(doble 2 + doble 2) + doble (doble 2)
```

Órdenes de reducción

- **Orden de reducción NORMAL**
  - Se elige el redex más externo de todos (a la izquierda)



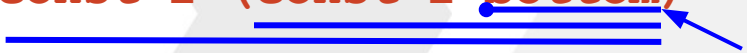
Órdenes de reducción

- Órdenes de reducción más comunes
  - *Si están al mismo nivel, elige el de más a la **izquierda***
  - Si están uno dentro de otro, hay dos extremos
    - **Orden APLICATIVO**
      - Elige el redex más interno (a la izquierda)
    - **Orden NORMAL**
      - Elige el redex más externo (a la izquierda)

Órdenes de reducción

- **Orden de reducción APLICATIVO**
  - Se elige el redex más interno de todos (a la izquierda)

```
const 2 (const 2 bottom)
```



→ (def. de bottom)

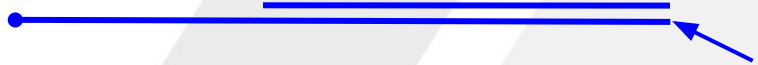
```
const 2 (const 2 bottom)
```

→ …

Órdenes de reducción

- **Orden de reducción NORMAL**
  - Se elige el redex más externo de todos (a la izquierda)

```
const 2 (const 2 bottom)
```



→ (def. de const, con **x** = 2,
y = const 2 bottom)

2

Órdenes de reducción

- Órdenes de reducción y bottom
  - Al reducir `(const 2 bottom)` con orden aplicativo da ⊥
  - Al reducir `(const 2 bottom)` con orden normal da `2`

Órdenes de reducción

- Órdenes de reducción y bottom
  - Al reducir `(const 2 bottom)` con orden aplicativo da ⊥
  - Al reducir `(const 2 bottom)` con orden normal da `2`
  - ¿Cuál orden encuentra la forma normal si existe?

Órdenes de reducción

- Órdenes de reducción y bottom
  - Al reducir `(const 2 bottom)` con orden aplicativo da ⊥
  - Al reducir `(const 2 bottom)` con orden normal da `2`
  - ¿Cuál orden encuentra la forma normal si existe?
    - El orden *normal* (de ahí su nombre)

Órdenes de reducción

- Órdenes de reducción y bottom
  - Al reducir `(const 2 bottom)` con orden aplicativo da ⊥
  - Al reducir `(const 2 bottom)` con orden normal da `2`
  - ¿Cuál orden encuentra la forma normal si existe?
    - El orden *normal* (de ahí su nombre)
  - ¿Y por qué el nombre de *aplicativo* para el otro?

Órdenes de reducción

- Órdenes de reducción y bottom
  - Al reducir `(const 2 bottom)` con orden aplicativo da ⊥
  - Al reducir `(const 2 bottom)` con orden normal da `2`
  - ¿Cuál orden encuentra la forma normal si existe?
    - El orden *normal* (de ahí su nombre)
  - ¿Y por qué el nombre de *aplicativo* para el otro?
    - Porque reduce el parámetro antes de *aplicar* la función

Órdenes de reducción

- Órdenes de reducción y funciones no-estrictas
  - ¿Se observa la relación entre el orden de reducción y el hecho de que una función sea estricta o no?

Órdenes de reducción

- Órdenes de reducción y funciones no-estrictas
  - ¿Se observa la relación entre el orden de reducción y el hecho de que una función sea estricta o no?
    - Usar *orden aplicativo* para reducir implica que todas las funciones son *estrictas*

Órdenes de reducción

- Órdenes de reducción y funciones no-estrictas
  - ¿Se observa la relación entre el orden de reducción y el hecho de que una función sea estricta o no?
    - Usar *orden aplicativo* para reducir implica que todas las funciones son *estrictas*
    - Usar *orden normal* para reducir implicar que existen funciones *no estrictas*
      - Las que no precisan su argumento

Órdenes de reducción

- En un lenguaje con efectos laterales
  ES NECESARIO usar orden aplicativo. ¿Por qué?

Órdenes de reducción

- En un lenguaje con efectos laterales
  ES NECESARIO usar orden aplicativo. ¿Por qué?
  - Con orden normal no se puede predecir el orden exacto en que se ejecutarán los redexes
  - Por lo tanto no es posible saber los efectos laterales que se ejecutarán

Órdenes de reducción

- En un lenguaje con efectos laterales
  ES NECESARIO usar orden aplicativo. ¿Por qué?

```
int const(int x, y) { return(x); }
int printSucc(int x)
  { printf("Sumé 1"); return (x+1); }
```

  - ¿Qué imprimiría `const (2, printSucc(3))`?

Órdenes de reducción

- En un lenguaje con efectos laterales
  ES NECESARIO usar orden aplicativo. ¿Por qué?

```
int const(int x, y) { return(x); }
int printSucc(int x)
  { printf("Sumé 1"); return (x+1); }
```

  - ¿Qué imprimiría `const (2, printSucc(3))`?
    - Con orden aplicativo, `"Sumé 1"`
    - Con orden normal, nada

Órdenes de reducción

- En un lenguaje con efectos laterales
  ES NECESARIO usar orden aplicativo. ¿Por qué?

```
int const(int x, y) { return(x); }
int infinito() { return (infinito()+1); }
```

  - ¿Qué da `const(2, infinito())`?

Órdenes de reducción

- En un lenguaje con efectos laterales
  ES NECESARIO usar orden aplicativo. ¿Por qué?

```
int const(int x, y) { return(x); }
int infinito() { return (infinito()+1); }
```

  - ¿Qué da `const(2, infinito())`?
  - En C *todas las funciones son estrictas*
    - ¡Si una parte falla, TODO falla, aunque no se use!

Órdenes de reducción

- En un lenguaje *puro* SE PUEDE ELEGIR qué orden usar
  - Es una decisión de diseño
    tener funciones estrictas y no estrictas en el lenguaje
  - Distintos lenguajes puros eligen diferente
    - Haskell elige orden normal
    - Clean elige orden aplicativo

R. John M. Hughes

R. John M. Hughes
(15 de julio 1958 – ...) es un científico de la computación, profesor de la Universidad de Tecnología de Chalmers, Gotemburgo, Suecia, y cofundador y CEO de QuviQ AB, empresa que ofrece una versión comercial de QuickCheck, de la que es también uno de los autores.
En 1984 recibió su doctorado de la Universidad de Oxford con la tesis *"The design and implementation of Programming Languages"*. Miembro del grupo de Programación Funcional en Chalmers, es uno de los miembros del comité que desarrolló el lenguaje Haskell. Dirigió numerosos doctorados de personalidades de PF, y de algún otro que no tanto.

Simon L. Peyton Jones

Simon L. Peyton Jones
(18 de enero 1958 – ...) es un científico de la computación británico, que investiga la implementación y aplicaciones de lenguajes funcionales, en particular lenguajes no estrictos. En 1980 se graduó en la Universidad de Cambridge (Trinity College) y enseñó en el University College de Londres y en la Universidad de Glasgow en Inglaterra. Desde 1998 trabaja para el grupo de investigación de Microsoft Research en Cambdrige, Inglaterra. Es uno de los miembros del comité que desarrolló el lenguaje Haskell, y uno de sus principales desarrolladores, siendo el diseñador principal del Glasgow Haskell Compiler (GHC) y autor de numerosísmos trabajos en el área.

Evaluación lazy

- ¿Cuántas reducciones implica cada orden?

```
quin x = x+x+x+x+x
```

  - Supongamos que `(fib 22)` precisa ~1 millón de reducciones en cualquiera de los órdenes
  - ¿Cuántas reducciones precisa `quin (fib 22)`?
  - ¿Y `const 2 (fib 22)`?
  - ¡Depende del orden!

Evaluación lazy

- ¿Cuántas reducciones implica cada orden?

```
quin x = x+x+x+x+x
```

Orden aplicativo

```
quin (fib 22)
```

→ …

Evaluación lazy

- ¿Cuántas reducciones implica cada orden?

```
quin x = x+x+x+x+x
```

Orden aplicativo

```
quin (fib 22)
```

→ …

Evaluación lazy

- ¿Cuántas reducciones implica cada orden?

```
quin x = x+x+x+x+x
```

Orden aplicativo

```
quin (fib 22)
→ … →                    ~1 millón
quin 42
→                        1
42+42+42+42+42
→ … →                    4
42
```

42 es la respuesta a la vida, el universo y todo lo demás

~1 millón

Evaluación lazy

- ¿Cuántas reducciones implica cada orden?

```
quin x = x+x+x+x+x
```

Orden normal

```
quin (fib 22)
```

→

Evaluación lazy

- ¿Cuántas reducciones implica cada orden?

```
quin x = x+x+x+x+x
```

Orden normal

```
quin (fib 22)
```

→

Evaluación lazy

- ¿Cuántas reducciones implica cada orden?

```
quin x = x+x+x+x+x
```

Orden normal

```
quin (fib 22)
```

→ 1

```
fib 22+fib 22+fib 22+fib 22+fib 22
```

→ … → ~1 millón

```
42+fib 22+fib 22+fib 22+fib 22
```

→ … → ~4 millones

```
42+42+42+42+42 → … → 42
```

42 es la respuesta a la vida, el universo y todo lo demás

~5 millones

Evaluación lazy

- ¿Cuántas reducciones implica cada orden?
  - ¿Cuántas reducciones precisa `quin (fib 22)`?
  - ¿Y `const 2 (fib 22)`?

Evaluación lazy

- ¿Cuántas reducciones implica cada orden?
  - ¿Cuántas reducciones precisa `quin (fib 22)`?
    - Con orden aplicativo:
    - Con orden normal:
  - ¿Y `const 2 (fib 22)`?
    - Con orden aplicativo:
    - Con orden normal:

Evaluación lazy

- ¿Cuántas reducciones implica cada orden?
  - ¿Cuántas reducciones precisa `quin (fib 22)`?
    - Con orden aplicativo: ~1 millón de reducciones
    - Con orden normal: ~5 millones de reducciones
  - ¿Y `const 2 (fib 22)`?
    - Con orden aplicativo: ~1 millón de reducciones
    - Con orden normal: 1 (una, solamente UNA)

Evaluación lazy

- ¿Cuántas reducciones implica cada orden?
  - ¿Cuántas reducciones precisa `quin (fib 22)`?
    - Con orden aplicativo: ~1 millón de reducciones
    - Con orden normal: ~5 millones de reducciones
  - ¿Y `const 2 (fib 22)`?
    - Con orden aplicativo: ~1 millón de reducciones
    - Con orden normal: 1 (una, solamente UNA)
  - ¿Cuál orden es mejor?

Evaluación lazy

- ¿Cuál orden es mejor?
  - Ambos a veces llevan menos y a veces más
  - El orden normal permite tener más terminación

Evaluación lazy

- ¿Cuál orden es mejor?
  - Ambos a veces llevan menos y a veces más
  - El orden normal permite tener más terminación
  - ¿Podremos implementar el orden normal para que sea en el peor caso tan eficiente como el aplicativo?

Evaluación lazy

- ¿Cuál orden es mejor?
  - Ambos a veces llevan menos y a veces más
  - El orden normal permite tener más terminación
  - ¿Podremos implementar el orden normal para que sea en el peor caso tan eficiente como el aplicativo?
    - Orden de *reducción perezoso* (***lazy evaluation***)

Evaluación lazy

- Orden de *reducción perezoso* (***lazy evaluation***)
  - Orden normal, pero…

Evaluación lazy

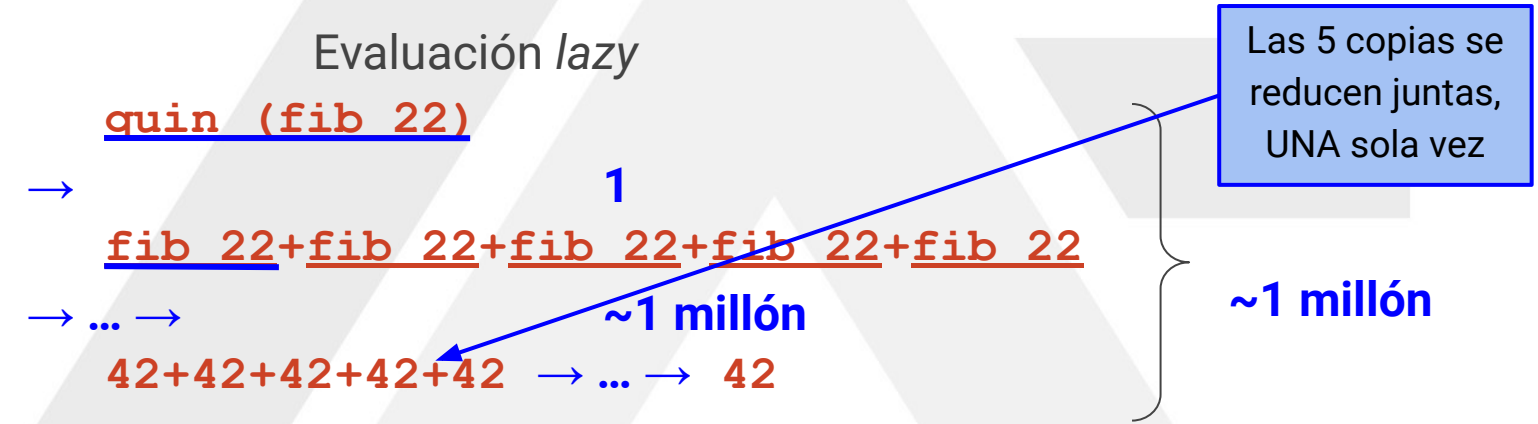
- Orden de *reducción perezoso* (***lazy evaluation***)
  - Orden normal, pero…
  - Se recuerda que las copias de un argumento son idénticas, y se reducen a lo sumo UNA vez
  - Un argumento no necesariamente se reduce por completo
    - Solamente las partes que se precisan son evaluadas

Evaluación lazy

- Orden de *reducción perezoso* (***lazy evaluation***)
  - Las copias de un argumento se reducen a lo sumo UNA vez

Evaluación lazy

- Orden de *reducción perezoso* (***lazy evaluation***)
  - Las copias de un argumento se reducen a lo sumo UNA vez



Evaluación lazy

- Orden de *reducción perezoso* (***lazy evaluation***)
  - Un argumento no necesariamente se reduce por completo

Evaluación lazy

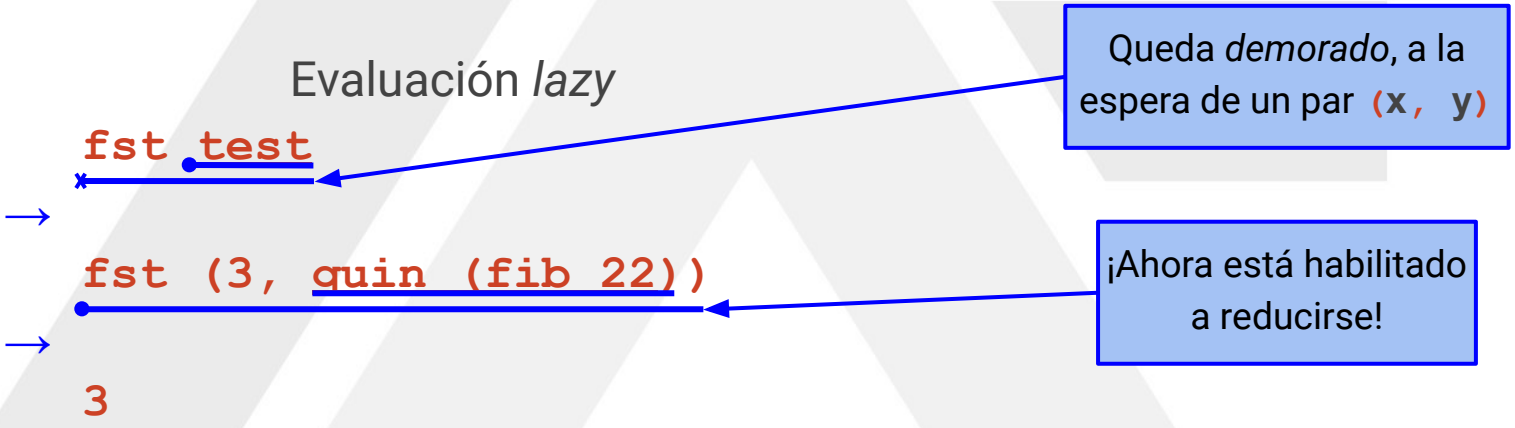
- Orden de *reducción perezoso* (***lazy evaluation***)
  - Un argumento no necesariamente se reduce por completo

```
test = (3, quin (fib 22))
```

Evaluación lazy

- Orden de *reducción perezoso* (***lazy evaluation***)
  - Un argumento no necesariamente se reduce por completo

```
test = (3, quin (fib 22))
```



Evaluación lazy

- Ventajas de la *evaluación lazy*
  - Usualmente mayor eficiencia
  - Mejores condiciones de terminación
  - No hay necesidad de estructuras intermedias al componer funciones
  - Se pueden manipular estructuras y cómputos infinitos
- Desventajas de la *evaluación lazy*
  - Es MUY difícil calcular el costo de ejecución (pues depende del contexto en que se usa…)

Resumen

Resumen

- Miramos de más cerca el mecanismo de reducción
- Vimos propiedades
  - Confluencia, SÍ
  - Normalización, NO. Bottom, $\bot$
    - Funciones parciales y totales
    - Funciones estrictas y no estrictas
  - Órdenes de reducción
    - Aplicativo y normal
    - *Evaluación lazy*