

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

**LA FÓRMULA DE ITÔ EN LA RESOLUCIÓN DE PROCESOS DE
DIFUSIÓN CON APLICACIONES EN FÍSICA**

PROYECTO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MATEMÁTICO

JAIRO RAFAEL ROJAS BONILLA
jairinrojasb@gmail.com

Director: DR. LUIS ALCIDES HORNA
lhorna@uce.edu.ec

QUITO, AGOSTO 2016

DECLARACIÓN

Yo JAIRO RAFAEL ROJAS BONILLA, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normatividad institucional vigente.

Jairo Rafael Rojas Bonilla

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por JAIRO RAFAEL ROJAS BONILLA, bajo mi supervisión.

Dr. Luis Alcides Horna
Director del Proyecto

AGRADECIMIENTOS

A mis padres y hermanas quienes han sido mi apoyo incondicional.

DEDICATORIA

*A JEHOVÁ,
Proverbios 3:9.*

Índice general

Resumen	XI
Abstract	XII
1. El fenómeno físico	1
1.1. Movimiento Oscilatorio	1
1.1.1. Oscilador lineal	1
1.1.2. Oscilador de Duffing	2
1.1.3. Oscilador de van der Pol	3
1.2. El fenómeno físico	3
1.3. Oscilador Aleatorio	4
2. MOVIMIENTO BROWNIANO	6
2.1. Procesos Estocásticos	6
2.1.1. Definición y ejemplos	6
2.1.2. Tipos de Procesos Estocásticos	9
2.2. Martingalas	10
2.2.1. Filtración, proceso adaptado y tiempo de parada	10
2.2.2. Definición y propiedades	11
2.2.3. Desigualdades para martingalas	13
2.3. movimiento Browniano o Proceso de Wiener	16
2.3.1. Desarrollo histórico	16
2.3.2. Definición y propiedades de distribución	17
2.3.3. El movimiento Browniano como una martingala	22

2.3.4.	Continuidad y diferenciabilidad	25
2.3.5.	Procesos continuos obtenidos a través del movimiento Browniano	28
3.	Cálculo Estocástico	33
3.1.	Integración estocástica	33
3.1.1.	Preliminares	33
3.1.2.	Caso general	35
3.1.3.	Construcción de la integral de Itô	36
3.2.	Fórmula de Itô	38
3.2.1.	Caso unidimensional	39
3.2.2.	Caso d –dimensional	40
3.2.3.	Caso $d \times d'$ dimensional	42
3.2.4.	Representación de martingalas	42
3.3.	Ecuación diferencial estocástica	42
3.4.	Existencia y unicidad	42
3.5.	Procesos de difusión	43
3.6.	Métodos numéricos de resolución	43
4.	Fórmula de Itô en la resolución de un proceso de difusión	44
4.1.	Caso lineal	44
4.1.1.	Método directo	44
4.1.2.	Estado Aumentado	44
4.2.	Caso no lineal	44
4.2.1.	Momentos	44
4.2.2.	Función característica	44
4.2.3.	Ecuación de Fockker-Planck y de Kolmogorov	45
4.2.4.	Métodos numéricos	45
4.3.	Aplicaciones	45
4.3.1.	Aplicación 1	45
4.3.2.	Aplicación 2	45

4.3.3. Aplicación 3	45
Conclusiones	46
Recomendaciones	47
A. Conceptos y definiciones probabilísticos	48
A.1. Espacio probabilístico	48
A.2. Variable aleatoria	49
A.3. Probabilidad condicional e independencia	51
A.3.1. Independencia	51
A.4. Esperanza condicional	52
B. Tablas	53
C. Algoritmos	56

Índice de figuras

2.1. Niveles medios diarios del agua registrados durante el 2012.	7
2.2. Niveles medios diarios del agua registrados durante el 2013.	8
2.3. Mapeo de un proceso estocástico a tiempo continuo.	8
2.4. Un proceso estocástico a tiempo continuo 5 de sus trayectorias	9
2.5. Trayectoria de una martingala a partir de una caminata aleatoria con valor inicial $X_0 = 10$ y probabilidad $p = 0,5$ para $N = 100$ pasos. . .	14
2.6. Trayectoria de una supermartingala a partir de una caminata aleatoria con valor inicial $X_0 = 10$ y probabilidad $p = 0,3$ para $N = 100$ pasos. .	14
2.7. Trayectoria de una submartingala a partir de una caminata aleatoria con valor inicial $X_0 = 10$ y probabilidad $p = 0,8$ para $N = 100$ pasos. .	15
2.8. Una trayectoria de un movimiento Browniano unidimensional. . . .	19
2.9. 10 trayectorias de un movimiento Browniano unidimensional	19
2.10. Movimiento Browniano 2-dimensional.	20
2.11. Movimiento Browniano 3-dimensional.	21
2.12. Probabilidad de que el $\sup_t e^{B_t}$ con $t \in [0, 10]$ exceda a $x \in [2, 20]$ y su cota superior $\frac{E[X(\tau)^+]}{\ln x}$	25
2.13. Una trayectoria de un Puente Browniano, que inicia y termina en cero, es decir $X_0 = X_1 = 0$	29
2.14. Una trayectoria de movimiento Browniano con deriva con $\mu = 0,5$ y $\sigma = 5$	30
2.15. Una trayectoria de movimiento Browniano con deriva con $\mu = 5$ y $\sigma = 0,5$	31
2.16. Una trayectoria de un movimiento Browniano geométrico con $\alpha = 1$. .	32
C.1. Valor	56

C.2. Martingala	57
C.3. Movimiento Browniano	57
C.4. Para la submartingala $B(t)^2$	58
C.5. Puente Browniano	58
C.6. Ruido Blanco	59
C.7. Variación cuadrática	59
C.8. Variación acotada	60

Resumen

En el presente trabajo...

Abstract

In this paper...

Capítulo 1

El fenómeno físico

1.1. Movimiento Oscilatorio

Se considera una partícula de masa m invariante en el tiempo, que $x = x(t)$ representa el desplazamiento a lo largo del tiempo, si la velocidad y la aceleración se representan por $v = \dot{x}$ y $a = \dot{v} = \ddot{x}$ respectivamente, por la segunda ley de Newton se obtiene:

$$F = \frac{d}{dt}p = m\dot{v} = m\ddot{x}, \quad (1.1)$$

en donde $p = mv$ es la cantidad de movimiento lineal que describe la partícula. Para una cierta fuerza actuante y determinadas condiciones del medio en donde se encuentra la partícula, a partir de ecuación (1.1) puede encontrarse la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden de la forma:

$$\ddot{x} = -h(x, \dot{x}), \quad (1.2)$$

más condiciones iniciales adecuadas, donde h es un funcional de x y de \dot{x} que puede ser lineal o no lineal, este tipo de ecuaciones pueden ser utilizadas para modelar varios tipos de fenómenos, siendo el movimiento oscilatorio el que capta la atención de este trabajo. Se describen a continuación tres tipos de osciladores uno de ellos lineal y dos no lineales.

1.1.1. Oscilador lineal

Se considera la ley de Hooke para un cuerpo unido a otro por medio de un resorte y sumergido en un medio viscoso gracias a lo cual se obtienen dos expresiones

para las fuerzas F_1 y F_2 que actúan sobre este cuerpo, dadas por:

$$F_1 = -kx, \quad (1.3)$$

y

$$F_2 = -\gamma\dot{x}, \quad (1.4)$$

en donde k representa la constante de elasticidad o de recuperación y γ la constante de viscosidad o de amortiguamiento, entonces a partir de las ecuaciones (1.1) y (1.2) junto con (1.3) y (1.4) se obtiene la ecuación diferencial dada por:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2x = 0, \quad (1.5)$$

en la cual $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ y $2\alpha = \frac{\gamma}{m}$ que representan la frecuencia de oscilación y la tasa de disminución de la velocidad respectivamente. En este tipo de movimiento oscilatorio aparecen dependiendo de los coeficientes k , m y γ un sobre-amortiguamiento ($\gamma^2 - 4km > 0$), un sub-amortiguamiento ($\gamma^2 - 4km < 0$) y un amortiguamiento crítico ($\gamma^2 - 4km = 0$). Notese que en este caso $h(x, \dot{x}) = 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2x$.

1.1.2. Oscilador de Duffing

Se considera la ecuación diferencial de segundo orden:

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = F_0, \quad (1.6)$$

que modela un oscilador no lineal que puede ser forzado cuando el término de la derecha tiene la forma $F_0 = \gamma \cos(\omega t)$ y no forzado si $F_0 = 0$, en este oscilador puede decirse que la fuerza F es obtenida a través de un potencial¹ de la forma $V(x) = \frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{\beta}{4}x^4$. Cuando el oscilador es forzado se presenta un comportamiento caótico, para una explicación mas detallada el lector puede revisar [??]. En este caso se verifica que $h(x, \dot{x}) = \delta\dot{x} + \alpha x + \beta x^3$ con $F_0 = 0$.

¹Si las fuerzas que actúan sobre un cuerpo son conservativas se puede definir la energía potencial V , y gracias a la descomposición de Helmholtz si se conoce la energía potencial, entonces la fuerza se puede escribir a partir del gradiente (∇) del potencial por la relación:

$$F = -\nabla V$$

Además, un ejemplo de fuerzas conservativas lo son la gravitatoria y la elástica.

1.1.3. Oscilador de van der Pol

Se considera la ecuación diferencial de segundo orden:

$$\ddot{x} + \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = F_0, \quad (1.7)$$

la que modela a un oscilador amortiguado no lineal que puede ser forzado si $F_0 = \alpha \cos(\omega t)$ y no forzado si $F_0 = 0$, para el caso no forzado se presenta un único ciclo límite mientras que para el caso forzado se manifiesta un comportamiento caótico. Para una explicación mas detallada sobre este oscilador el lector puede remitirse a [??]. Para este oscilador se obtiene $h(x, \dot{x}) = \mu(1 - x^2)\dot{x} + x$ con el término $F_0 = 0$.

1.2. El fenómeno físico

Se presenta a continuación una descripción del fenómeno físico que da lugar al modelo matemático de difusión. Se considera el movimiento microscópico dentro de un sistema determinado por partículas suspendidas en un fluido viscoso, dentro del que se hacen las siguientes consideraciones (Ver [??] pag: 2-18):

1. Las moléculas del fluido se consideran más ligeras que las partículas suspendidas.²
2. Las moléculas del fluido colisionan con las partículas suspendidas y estas colisiones se mantienen a lo largo del tiempo.
3. El movimiento que describen las partículas suspendidas es continuo y errático que no cesa a lo largo del tiempo.
4. El movimiento se verá incrementado si la temperatura del fluido lo hace.

Para una partícula suspendida la variable $X(t)$ representará su desplazamiento a partir de su posición inicial x al instante t en una dirección. Si $\sigma(x, t)$ mide el efecto que ejerce la temperatura sobre un punto x al instante t , entonces el desplazamiento que resulta del bombardeo durante un intervalo de tiempo $[t, t + \Delta]$ está dado por:

$$\sigma(x, t)[B(t + \Delta) - B(t)]$$

²Como consecuencia al tener una menor masa las moléculas se mueven a mayor velocidad y al colisionar provocan la acción de una fuerza aleatoria sobre las partículas suspendidas.

en donde B representa una variable aleatoria³. Si la velocidad que presenta el fluido en el punto x al instante t esta gobernado por $\mu(x, t)$, entonces el desplazamiento resultante de la partícula por el movimiento del fluido es:

$$\mu(x, t)\Delta$$

Por tanto el desplazamiento total a partir de un punto x al instante t durante un intervalo de tiempo de tamaño Δ esta dado por:

$$X(t + \Delta) - x \approx \mu(x, t)\Delta + \sigma(x, t)[B(t + \Delta) - B(t)]. \quad (1.8)$$

Obteniendo a partir de un x dentro de un intervalo de tiempo suficientemente pequeño Δ el desplazamiento medio y el segundo momento del desplazamiento, dados por:

$$E[(X(t + \Delta) - X(t))|X(t) = x] \approx \mu(x, t) \cdot \Delta, \quad (1.9)$$

$$E[(X(t + \Delta) - X(t))^2|X(t) = x] \approx \sigma^2(x, t) \cdot \Delta, \quad (1.10)$$

respectivamente, siendo ambos proporcionales al tamaño Δ de dicho intervalo, con coeficientes $\mu(x, t)$ y $\sigma(x, t)$ respectivamente. Si se toma la relación asintótica cuando $\Delta \rightarrow 0$, las ecuaciones (1.9) y (1.10) caracterizan un proceso de difusión (ver [??] pag. 44). La correspondiente ecuación diferencial estocástica se la encuentra, vía medios heurísticos a partir de la relación (??) reemplazando Δ por dt , y $\Delta B = B(t + \Delta) - B(t)$ por $dB(t)$ y $X(t + \Delta) - X(t)$ por $dX(t)$, es decir:

$$dX(t) = \mu(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dB(t). \quad (1.11)$$

1.3. Oscilador Aleatorio

Se considera la ecuación (1.2) a la que se le introduce una perturbación aleatoria por medio de un ruido blanco⁴ obteniendo así una ecuación equivalente con pertur-

³Como se verá más adelante esta variable es el Movimiento Browniano que está directamente relacionado con el fenómeno físico de las difusiones.

⁴Como se verá más adelante el ruido blanco se lo define como la derivada del Movimiento Browniano $B(t)$, por medio de la relación:

$$\dot{W} = \frac{dB_t}{dt},$$

pero solo de manera formal ya que el movimiento Browniano no es diferenciable casi seguramente en casi todo punto

bación aleatoria dada por:

$$\ddot{X} + h(x, \dot{X}) = \sum_{i=1}^2 f_i(X, \dot{X}) \dot{W}_i(t), \quad (1.12)$$

la cual solamente es una representación formal que puede tomar un significado riguroso por medio de su representación como un sistema de primer orden de ecuaciones diferenciales estocásticas de Itô⁵, junto con el cambio de variable $X_1 = X$ y $X_2 = \dot{X}$:

$$\begin{aligned} dX_1 &= X_2 dt \\ dX_2 &= \left(-h(X_1, X_2) + \pi \sum_{j,k} K_{j,k} f_j(X_1, X_2) \frac{\partial f_k(X_1, X_2)}{\partial x_2} \right) dt + \sum_{i=0}^2 f_i(X, \dot{X}) W \dot{W}_i(t) \end{aligned} \quad (1.13)$$

o de manera equivalente por medio del sistema de difusión 2-dimensional en donde se considera solo un Movimiento Browniano unidimensional B_t ,

$$dX_1 = X_2 dt \quad (1.14)$$

$$dX_2 = A(X_1, X_2) dt + G(X_1, X_2) dB_i(t),$$

Donde:

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2) &= -h(X_1, X_2) + \pi \sum_{i=1}^2 K_{j,k} f_j(X_1, X_2) \frac{\partial f_k(X_1, X_2)}{\partial x_2}, \\ G(x_1, x_2) &= (2\pi)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j,k} K_{j,k} f_j(x_1, x_2) f_k(x_1, x_2) \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (1.15)$$

sistema que modela un oscilador aleatorio que de la misma manera en que se trató a uno determinístico se vera afectado por la forma en que el funcional h sea formulado.

⁵En este punto cabe recalcar que en determinados casos un representación por medio de ecuaciones diferenciales de Stratonovich es la adecuada representación, sin embargo el poder trabajar con ambos tipos de ecuaciones es posible debido al teorema de conversión de una ecuación diferencial estocástica de Stratonovich a otra ecuación diferencial estocástica de Itô (ver [??] pag. 147), además la diferenciación entre tipos de ecuaciones diferenciales estocásticas se la establece por su respectiva representación integral.

Capítulo 2

MOVIMIENTO BROWNIANO

2.1. Procesos Estocásticos

2.1.1. Definición y ejemplos

DEFINICIÓN 2.1 (Proceso Estocástico¹). Si X_t es una variable aleatoria a valores en \mathbb{R}^d sobre el espacio de probabilístico (Ω, \mathcal{F}, P) para cada $t \in I$, esto es, $X_t \in \mathcal{F}$ para cada $t \in I$, entonces X se dice un proceso estocástico. ([??], p. 104).

Es decir a un proceso estocástico se lo puede ver como la colección de variables aleatorias, notado por $\{X_t : t \in I\}$ en donde cada una de estas X_t es \mathcal{F}_t medible para cada $t \in I$, visto de esta forma cabe recalcar que si el conjunto de índices I es finito o numerable, a X se lo dice un proceso estocástico a tiempo discreto, y si I es no numerable se dirá que el proceso estocástico es a tiempo continuo, por ejemplo $I = [0, t]$, para $t \geq 0$.

Además como en Mircea (2002), se debe tomar en cuenta que si $d > 1$ a X también se lo conoce como vector estocástico, mientras que en el caso $d = 1$ se notará por X y se dirá que es un proceso estocástico unidimensional.

A continuación dos ejemplos de procesos estocásticos que presentan un comportamiento a tiempo discreto y otro a tiempo continuo.

EJEMPLO 1 (Proceso Estocástico a tiempo discreto). Se presenta un ejemplo en el cual se muestran los niveles medios diarios del agua registrados en la estación Bua

¹Se consideran $X : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ donde (Ω, \mathcal{F}, P) es un espacio probabilístico, definido por $(t, \omega) \mapsto X(t, \omega)$, y se utilizará la notación $X(t, \cdot)$ por $X(t)$ o por X_t que será utilizada indistintamente según convenga.

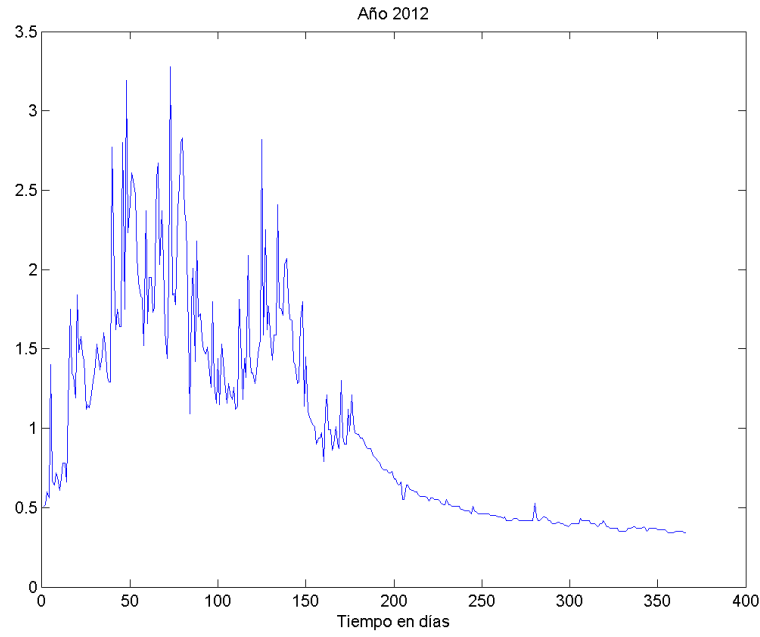


Figura 2.1: Niveles medios diarios del agua registrados durante el 2012.

AJ Quininde del Instituto Nacional de Meteorología e Hidrología durante dos años diferentes². Los niveles medios diarios del agua pueden ser interpretadas por medio de un proceso estocástico a tiempo discreto $\{X(n) : n = 1, \dots, 365\}$. En las figuras 2.1 y 2.2 se puede apreciar sus trayectorias.

EJEMPLO 2 (Proceso Estocástico a tiempo continuo). Sea considera la función $X : [0, 10] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $X(t, \omega) = \omega e^{\cos t}$ y sea el espacio probabilístico $([-1, 1], \mathcal{B}([-1, 1]), P)$, \mathcal{B} la σ -álgebra Boreliana generada por $[-1, 1]$ con P la medida de Lebesgue. En las figuras 2.3 y 2.4 se presentan su mapeo y 5 de sus trayectorias.

Se verifica que en efecto es un proceso estocástico, ya que se tiene la siguiente igualdad $X(t, \omega) = W(\omega)V(t)$ donde $W(\omega) = \omega$ y $V(t) = e^{\cos t}$ ambas funciones continuas y por tanto medibles.

²Se han tomado datos de los años 2012 y 2013 de las mediciones diarias obtenidas del río en el provincia de

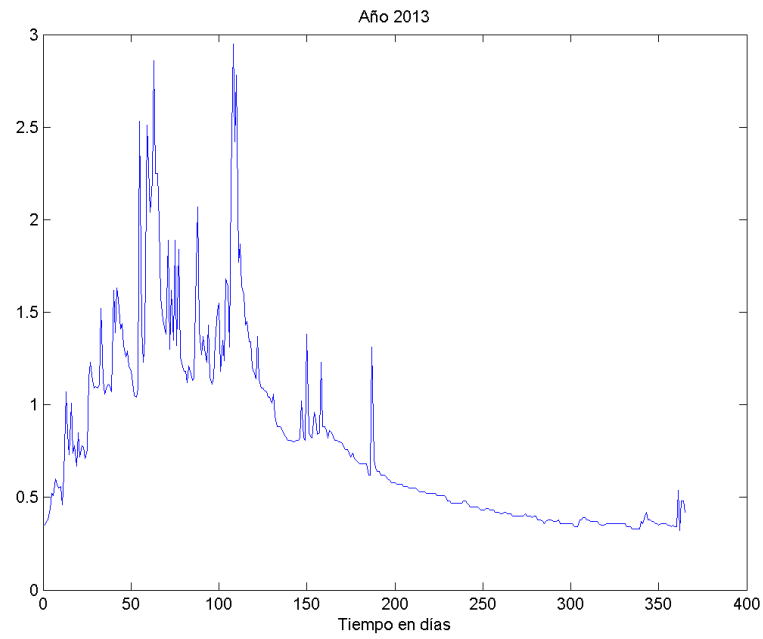


Figura 2.2: Niveles medios diarios del agua registrados durante el 2013.

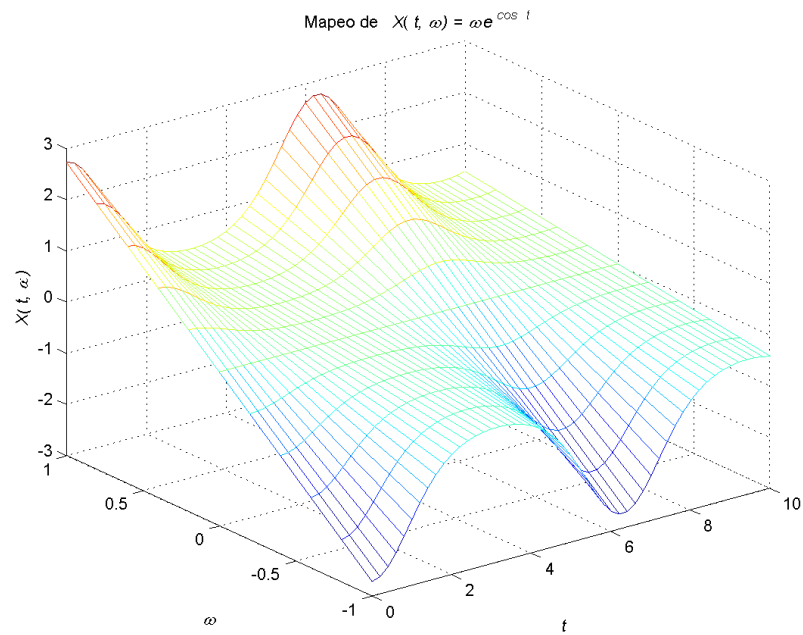


Figura 2.3: Mapeo de un proceso estocástico a tiempo continuo.

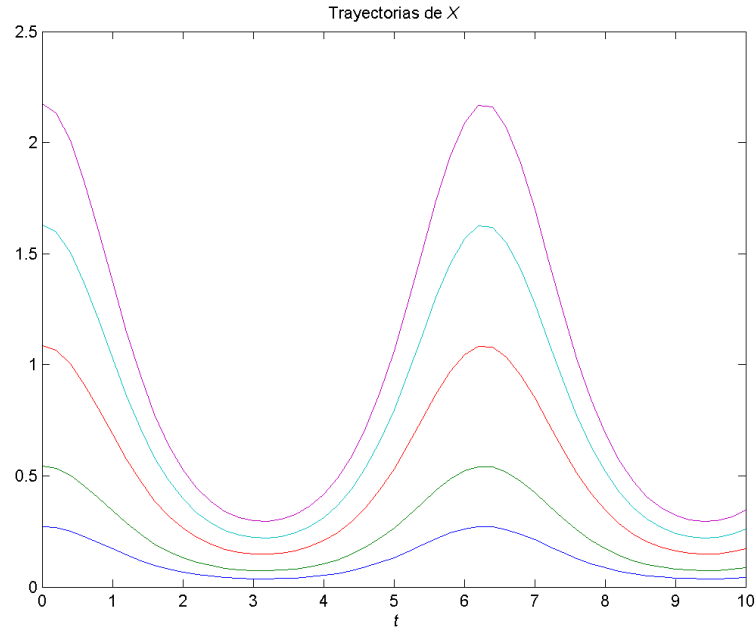


Figura 2.4: Un proceso estocástico a tiempo continuo 5 de sus trayectorias

2.1.2. Tipos de Procesos Estocásticos

DEFINICIÓN 2.2 (Proceso de Markov). *Un proceso estocástico X a valores en \mathbb{R}^d se dice de Markov si satisface lo siguiente:*

$$P[\mathbf{X}_t \in A \mid \mathcal{F}_s] = P[\mathbf{X}_t \in A \mid \mathbf{X}_s] \quad (2.1)$$

para todo $t, s \in I$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ un conjunto medible.

En un proceso de Markov para hacer futuras predicciones del fenómeno que el proceso X represente, no se necesita toda la información o historia que se ha obtenido hasta el instante s , sino solamente la información en el instante s . Este tipo de proceso es de gran importancia en el estudio de los procesos de difusión. Para un lector interesado en la conexión entre los procesos de Markov con los procesos de difusión se recomienda revisar los libros [??, ??, ??, ??].

DEFINICIÓN 2.3 (Proceso con Incrementos Independientes, Proceso con Incrementos Independientes Estacionarios). *Un proceso estocástico X a valores en \mathbb{R}^d se dice que tiene incrementos independientes si las variables aleatorias $\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_v$ y $\mathbf{X}_u - \mathbf{X}_s$, $s < u \leq v < t$, son independientes.*

Si X tiene incrementos independientes y la distribución de $\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_s$, $s \leq t$, dependen solo del tiempo de transición $t - s$ en lugar de los valores de los tiempos s y t ,

entonces X se dice que tiene incrementos independientes estacionarios. ([??] p. 122).

DEFINICIÓN 2.4 (Proceso Gaussiano). *Un proceso estocástico X se dice que es Gaussiano si todas las distribuciones finito dimensionales³ son Gaussianas. ([??] p. 124).*

2.2. Martingalas

2.2.1. Filtración, proceso adaptado y tiempo de parada

DEFINICIÓN 2.5 (Filtración y Espacio Filtrado). *Una colección de sub σ -álgebras $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ de \mathcal{F} tal que $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, $0 \leq s \leq t$, es llamada una filtración en (Ω, \mathcal{F}) . Un espacio probabilístico (Ω, \mathcal{F}, P) dotado de una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ se dice un espacio probabilístico filtrado y es notado por $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$. Un proceso estocástico X definido sobre (Ω, \mathcal{F}, P) es adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, o \mathcal{F}_t -adaptado, o simplemente adaptado si $X(t) \in \mathcal{F}_t$ para cada $t \geq 0$. ([??] p. 107).*

DEFINICIÓN 2.6 (Filtración Natural). *Sea $\{X_t, t \geq 0\}$ un proceso estocástico definido sobre el espacio probabilístico (Ω, \mathcal{F}, P) . La filtración natural*

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X(s), 0 \leq s \leq t) = \sigma\left(\bigcup_{0 \leq s \leq t} \sigma(X(s))\right) \quad (2.2)$$

de X es la más pequeña filtración con respecto a la cual X es adaptado. ([??] p. 107).

Una filtración puede entenderse como la información o historia que se ha generado o se ha obtenido del proceso estocástico, la que se va guardando en cada \mathcal{F}_t para cada instante $t \geq 0$, con esta información se debe poder establecer ciertas condiciones que el proceso verifica, siendo una de las más importantes el poder decir cuando el proceso alcanza un cierto valor, para entender esto último de una mejor manera se define más adelante el concepto de tiempo de parada, de la filtración natural se puede decir que un proceso siempre es adaptado a esta filtración, además al menos que se diga lo contrario en adelante se entenderá que se trabaja con una filtración natural.

PROPOSICIÓN 2.1. *Si X es adaptado a una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, entonces X es un proceso estocástico.*

Demostración. Por ser X adaptado se tiene que $X_t \in \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ para cada $t \in I$, gracias

³Ver el apéndice [A]

lo cual \mathbf{X} es un proceso estocástico. □

DEFINICIÓN 2.7 (Tiempo de Parada). Sea $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ un espacio probabilístico filtrado y $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ una variable aleatoria definida sobre este espacio. Si $\{\omega : T(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ para todo $t \geq 0$, entonces T se dice un \mathcal{F}_t -tiempo de parada o tiempo de parada. ([??] p. 114).

Se cita sin demostración una caracterización para determinar cuándo un proceso estocástico es un tiempo de parada, lo que será de gran utilidad en el desarrollo de este trabajo.⁴

LEMA 2.2. T es un \mathcal{F}_t -tiempo de parada si y solo si $\{\omega : T(\omega) = t\} \in \mathcal{F}_t$ para todo $t \geq 0$.

2.2.2. Definición y propiedades

DEFINICIÓN 2.8 (Martingala). Sea \mathbf{X} un proceso estocástico a valores en \mathbb{R}^d definido sobre el espacio probabilístico filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$, se dice que \mathbf{X} es una \mathcal{F}_t -martingala si verifica las siguientes condiciones:

$$E[|\mathbf{X}|] < \infty, \text{ para todo } t \geq 0. \quad (2.3)$$

$$\mathbf{X} \text{ es } \mathcal{F}_t \text{ adaptado.} \quad (2.4)$$

$$E[\mathbf{X}_t | \mathcal{F}_s] = \mathbf{X}_s, \text{ para todo } s, t \geq 0. \quad (2.5)$$

([??] p. 169).

De está forma como en Mircea (2002), si en la ecuación (2.5) se intercambia el símbolo $=$ por \leq o por \geq se dice que \mathbf{X} es una \mathcal{F}_t -supermartingala o \mathcal{F}_t -submartingala respectivamente. Y si $\mathbf{X} \in L_2$ entonces se dirá que es una \mathcal{F}_t -martingala cuadrado integrable, de manera similar para los casos de una supermartingala y para una submartingala. Una martingala puede ser vista como el modelo de un juego de apuestas, en donde a la variable aleatoria $E[\mathbf{X}_t | \mathcal{F}_s]$ se la considera como la ganancia media que se espera obtener en la apuesta t dadas las apuestas hechas hasta el instante s y a \mathbf{X}_s como la cantidad que el Jugador tiene al finalizar la apuesta s , siendo los casos de una supermartingala, una martingala y una submartingala la representación

⁴Para un lector interesado en la demostración la puede encontrar en el libro [??] pag. 114

de juego favorable, indiferente y desfavorable para un jugador respectivamente. Además como expresa Rincón (2012), este concepto es de gran utilidad en muchos fenómenos tanto físicos como financieros entre otros.

Se presenta un ejemplo típico en cuanto al concepto de martingalas el cual tiene que ver con una caminata aleatoria la que se considera el equivalente discreto al Movimiento Browniano unidimensional con la adaptación a un juego de apuestas, para un lector interesado se recomienda revisar [??, ??].

EJEMPLO 3. Se considera un juego de apuestas en el que el 'Jugador' inicialmente tiene una cantidad de x unidades, el juego consiste en lo siguiente:

En cada apuesta el jugador debe apostar una unidad y se tiene dos posibilidades ganar o perder.

Es aquí en donde queda manifiesta la conexión del juego de apuestas con la caminata aleatoria⁵ en la cual se dice que dada una partícula en una posición inicial x esta puede moverse un espacio hacia su izquierda o derecha en cada instante de tiempo t . Para entender mejor este hecho sean Y_i *v.a.i.i.d.* que solamente pueden tomar dos valores $+1$ o -1 con probabilidad $P[Y_i = +1] = p$ y $P[Y_i = -1] = 1 - p$, para $0 < p < 1$. Se define la variable X_n por:

$$X_n = X_0 + Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \quad (2.6)$$

con $X_0 = x \in \mathbb{R}$, la cual se puede interpretar como la cantidad de unidades que tiene el 'Jugador' en la apuesta n . Notese que X_n es un proceso Markov, ya que la cantidad de unidades que se espera obtener al fin de la apuesta $n + 1$ depende únicamente de la cantidad de unidades que se tenga al finalizar la apuesta n . La probabilidad de transición está dada por:

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = k) = \begin{cases} p & \text{si } j = k + 1 \\ 1 - p & \text{si } j = k - 1 \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases}$$

para $k = 0, 1, \dots$

Se verifica en este caso que $E[X_n] = x + n(2p - 1)$ ya que $E[Y_1] = 2p - 1$ y además $Var(Y_1) = 1$. Se demostrará que bajo ciertas condiciones se tiene que X_n es una martingala, submartingala o supermartingala.

⁵Para un lector interesado en este tema puede remitirse a [??]. En este caso se ha tomado tanto el tamaño de los pasos como los intervalos de tiempo unitarios, los que no necesariamente son así.

A continuación, se demuestra que se verifican las condiciones (2.3) y (2.4) de la definición de martingala:

- $E[|X_n|] \leq |x| + \sum_{i=1}^n E[|Y_i|] = |x| + nE[|Y_1|] < \infty.$
- Por su definición X_n es \mathcal{F}_n -medible para la filtración natural ⁶ $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n).$

Ahora, para la tercera propiedad de la definición de martingala se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] &= E[X_{n+1} | X_n] \\
 &= E[X_n + Y_{n+1} | \mathcal{F}_n] \\
 &= X_n + E[Y_{n+1}] \\
 &= X_n + 2p - 1
 \end{aligned}$$

Esto gracias a que X_n es un proceso de Markov, la linealidad de la esperanza condicional y por la hipótesis sobre las Y_i . En lo anterior, si se toma $p = 1/2$ se obtiene una martingala ya que en este caso $2p - 1 = 0$ y además se verifica que $E[X_n] = E[X_0]$, gracias a la propiedad de esperanza condicional, de igual manera si se toma $p < 1/2$, se verifica que $2p - 1 < 0$ obteniendo una supermartingala con $E[X_n] \leq E[X_0]$, y cuando se toma $p > 1/2$, $2p - 1 > 0$ dando como resultado en este caso una submartingala donde $E[X_n] \geq E[X_0]$. En las figuras 2.5, 2.6 y 2.7 se simula una trayectoria de una martingala, una supermartingala y una submartingala respectivamente, acordes a los posibles escenarios a los que el 'Jugador' puede encontrar, en donde se ha asumido que se permite un préstamo cada vez que se necesite.

2.2.3. Desigualdades para martingalas

PROPOSICIÓN 2.3 (Desigualdad de Jensen). *Si X es una \mathcal{F}_t -martingala y $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es una función convexa tal que $E[|\varphi(X(t))|] < \infty, t \geq 0$, entonces*

$$E[\varphi(X(t)) | \mathcal{F}_s] \geq \varphi(X(s)), s \leq t \quad (2.7)$$

(Mircea, p. 176).

⁶Al ser el proceso X_n un proceso estocástico a tiempo discreto la filtración natural es $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ para cada $n \geq 0$, mientras que para uno a tiempo continuo la filtración natural será $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : 0 \leq s \leq t)$ para cada $t \geq 0$.

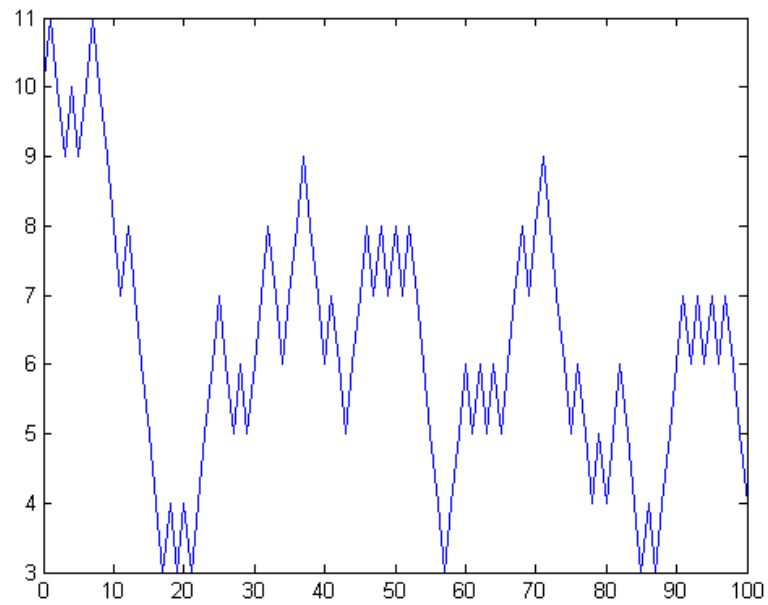


Figura 2.5: Trayectoria de una martingala a partir de una caminata aleatoria con valor inicial $X_0 = 10$ y probabilidad $p = 0,5$ para $N = 100$ pasos.

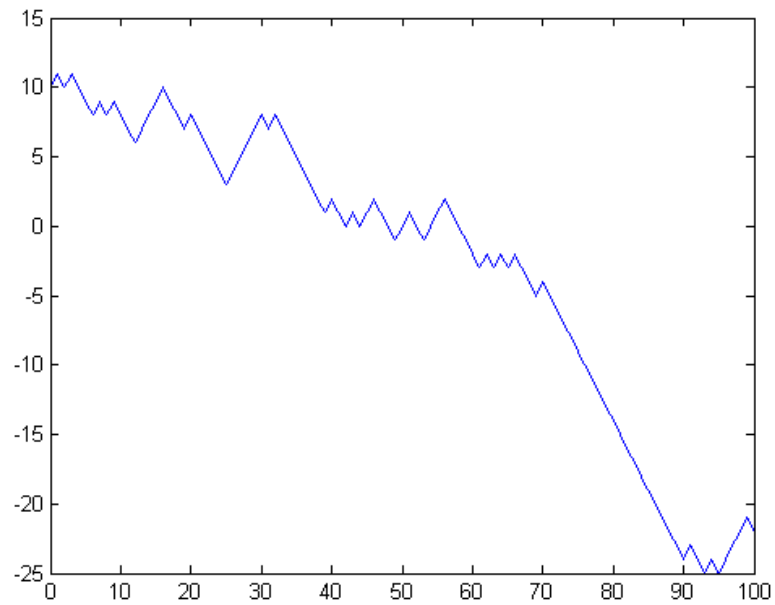


Figura 2.6: Trayectoria de una supermartingala a partir de una caminata aleatoria con valor inicial $X_0 = 10$ y probabilidad $p = 0,3$ para $N = 100$ pasos.

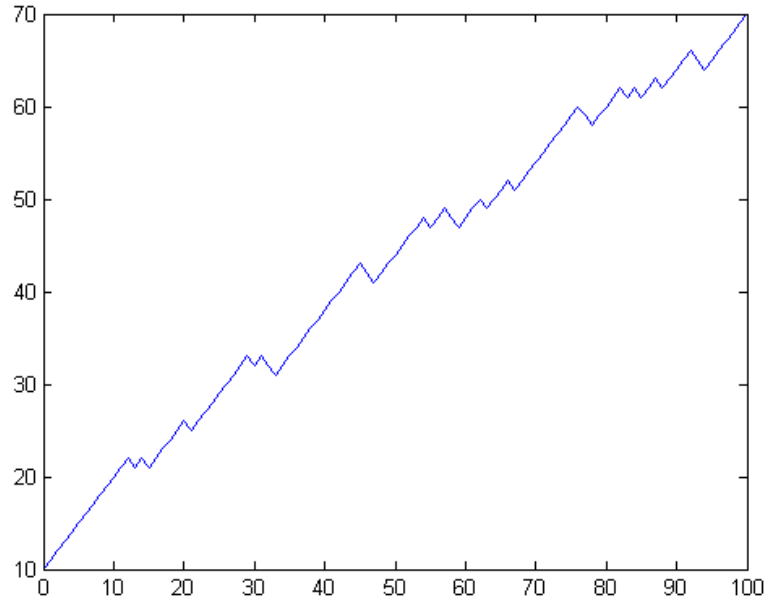


Figura 2.7: Trayectoria de una submartingala a partir de una caminata aleatoria con valor inicial $X_0 = 10$ y probabilidad $p = 0,8$ para $N = 100$ pasos.

PROPOSICIÓN 2.4 (Desigualdad maximal de Doob). Sea $\{X_t : t \geq 0\}$ una submartingala continua y $p > 1$. Entonces, para todo $t \geq 0$,

$$E\left[\left(\sup_{0 \leq s \leq t} |X(s)|\right)^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E[|X(t)|^p]. \quad (2.8)$$

(Möters & Peres, 57).

PROPOSICIÓN 2.5. Si X es una \mathcal{F}_t -submartingala continua a la derecha, $0 < \tau < \infty$, y $F \subset [0, \tau]$ un conjunto finito, entonces para cada $x > 0$ se tiene

$$P\left(\sup_{0 \leq t \leq \tau} \{X(t)\} \geq x\right) \geq E[X(\tau)^+] / x, \quad (2.9)$$

$$P\left(\inf_{0 \leq t \leq \tau} \{X(t)\} \leq -x\right) \geq (E[X(\tau)^+] - E[X(0)]) / x, \quad (2.10)$$

(Mircea, p. 177).

2.3. movimiento Browniano o Proceso de Wiener

2.3.1. Desarrollo histórico

En una investigación sobre la reproducción de plantas se reproducen el biólogo inglés Robert Brown (1828), reportó el movimiento de partículas de polen suspendidas en un fluido en donde dos partículas se mueven de una manera irregular e independiente a pesar de su cercanía, abriendo así la puerta a que muchas otras investigaciones se centraran en estudiar este extraño fenómeno, sin embargo, cabe recalcar que aunque Brown no fue el descubridor del movimiento, más bien el primero en reportarlo, es común al fenómeno físico como un movimiento Browniano. Durante los 80 años siguientes se dieron importantes avances entre los que destacan los de Gouy y Wiener, se pudo establecer que en estos movimientos irregulares se producen traslaciones y rotaciones, con la particularidad que no cesan a lo largo del tiempo y se ven afectados tanto del tamaño y distancia existente de las partículas y moléculas, como del coeficiente de viscosidad del fluido y de la temperatura a la que se encuentran sin importar la composición misma de las partículas que se han de suspender en el fluido. Logrando que sea en ese entonces aceptada la idea de que las constantes colisiones entre las partículas involucradas en el fenómeno son las causantes del movimiento.

En el año de 1905, el mismo en el cual Albert Einstein había descubierto la teoría especial de la relatividad y la invención del fotón, dentro de la búsqueda de hechos que garanticen la existencia de átomos de tamaño finito Einstein estudió el movimiento de partículas microscópicas suspendidas abiertas a ser observadas, basándose en la mecánica estadística y la teoría cinético molecular lo que según sus palabras se dieron de manera independiente a los avances realizados hasta ese entonces respecto al movimiento Browniano del cual no había escuchado hablar antes. A pesar de esto último los resultados de Einstein (ver [??]) lograron dar una representación física al movimiento Browniano relacionándolo con la ecuación de difusión por medio de su densidad de probabilidad de transición de una posición a otra, determinando además el coeficiente de difusión que sigue su comportamiento al tratar a las partículas suspendidas como moléculas de un gas.

Sin dejar de mencionar los trabajos de Smoluchowski y Langevin quienes llegaron a resultados similares a los obtenidos por Einstein respecto a la constante de difusión. En el año 1923 Norbert Wiener, matemático estadounidense, demostró la existencia y unicidad de un proceso estocástico que verificaba las condiciones físicas establecidas para un movimiento Browniano razón por la cual para remitirse al proceso

se utiliza el término proceso de Wiener, sin embargo, es común mencionar tanto al fenómeno físico como al proceso por movimiento Browniano. (Nelson, 2001).

2.3.2. Definición y propiedades de distribución

DEFINICIÓN 2.9 (movimiento Browniano o Proceso de Wiener). Sea $\{B_t : t \geq 0\}$ un proceso estocástico a valores en \mathbb{R} definido sobre el espacio probabilístico (Ω, \mathcal{F}, P) , se dice que es un movimiento Browniano o Proceso de Wiener unidimensional si satisface las siguientes condiciones:

1. $B_0 = 0$ c.s.
2. Sean $0 \leq s < t$, el incremento $B_{t+s} - B_s$ tiene distribución Gaussiana con media 0 y varianza $\sigma^2 t$, para alguna constante de varianza $\sigma > 0$.
3. Tiene incrementos independientes.
4. Tiene trayectorias continuas con probabilidad 1.

Es importante notar que si en la definición se toma $\sigma = 1$, entonces se dice que B_t es un movimiento Browniano Estándar. A partir de este punto al menos que se especifique lo contrario se considerará un movimiento Browniano Estándar, ya que a B_t se lo puede interpretar como la posición de una partícula al instante t en la definición del movimiento Browniano se puede tomar $B_0 = x \in \mathbb{R}$, en este caso se escribirá por $\{B_t^x : t \geq 0\}$ con $B_t^x = x + B_t$ al movimiento Browniano o Proceso de Wiener que inicia en x . Rincón (2012)

En la segunda condición se establece para la variable aleatoria correspondiente a un incremento del movimiento Browniano lo siguiente respecto a su distribución:

$$B_{t+s} - B_s \sim \mathcal{N}(0, t) \quad (2.11)$$

es decir el movimiento Browniano tiene incrementos independientes estacionarios. Adicionalmente si en la expresión (2.11) se toma $s = 0$, se obtiene que

$$B_t - B_0 = B_t \sim \mathcal{N}(0, t) \quad (2.12)$$

es decir, B_t es una variable Gaussiana y por tanto se verifica que su densidad de

transición⁷ para ir de una posición y a una posición x en un tiempo t está dada por:

$$f(t, x; y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} \quad (2.13)$$

Si en la ecuación (2.13) el movimiento inicia en la posición $y = 0$ para cada instante $t \geq 0$ se tiene la función de densidad de la variable Gaussiana:

$$p_t(x) = f(t, x; 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \quad (2.14)$$

Un hecho importante que resulta de la segunda condición es el siguiente: si Z una variable aleatoria con distribución $\mathcal{N}(0, 1)$, entonces al movimiento Browniano se lo puede describir por medio de la ecuación:

$$B_{t+h} - B_h = \sqrt{h}Z \quad (2.15)$$

para $t, h \geq 0$.

En la figura 2.8 se puede apreciar una simulación de una trayectoria de un movimiento Browniano unidimensional en un intervalo de tiempo $[0, T]$, mientras que en la figura 2.9 se presenta la simulación de 10 trayectorias de un movimiento Browniano unidimensionales. A continuación se presenta un resultado más general respecto a un movimiento Browniano.

DEFINICIÓN 2.10 (movimiento Browniano d -dimensional). Sean $B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^d$ movimientos Brownianos unidimensionales independientes, se dice que $\mathbf{B}(t) = (B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^d)$ es un movimiento Browniano d -dimensional.

De manera similar al caso unidimensional se verifican:

1. $\mathbf{B}_0 = (0, 0, \dots, 0)$ c.s.
2. Tiene incrementos independientes.
3. Para $s, t \geq 0$, $\mathbf{B}_t - \mathbf{B}_s \sim \mathcal{N}(\vec{0}, \Sigma)$, donde $\vec{0} = (0, \dots, 0)$ y matriz de varianzas:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} t-s & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t-s & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t-s \end{pmatrix}$$

⁷Para una lectura más detallada se recomienda al lector ir al libro [??].

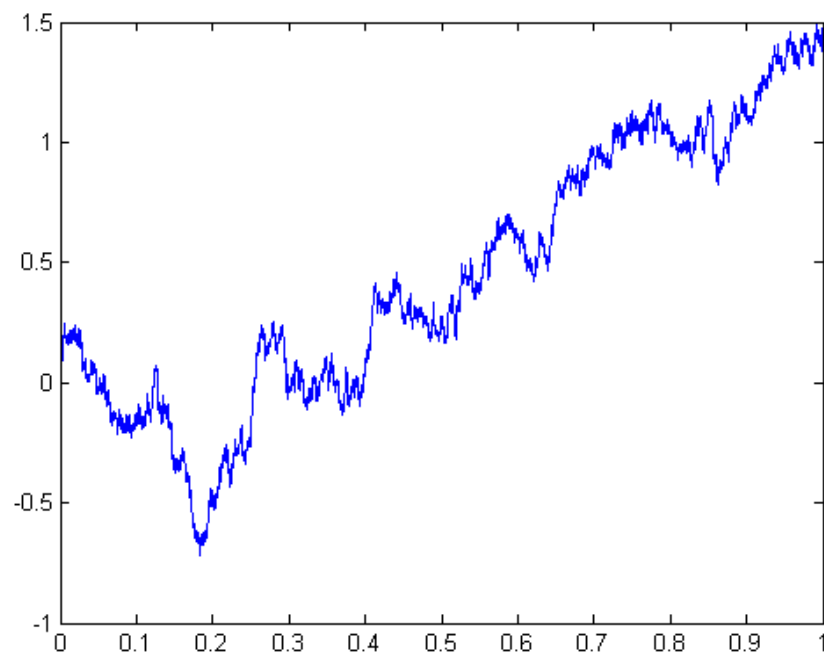


Figura 2.8: Una trayectoria de un movimiento Browniano unidimensional.

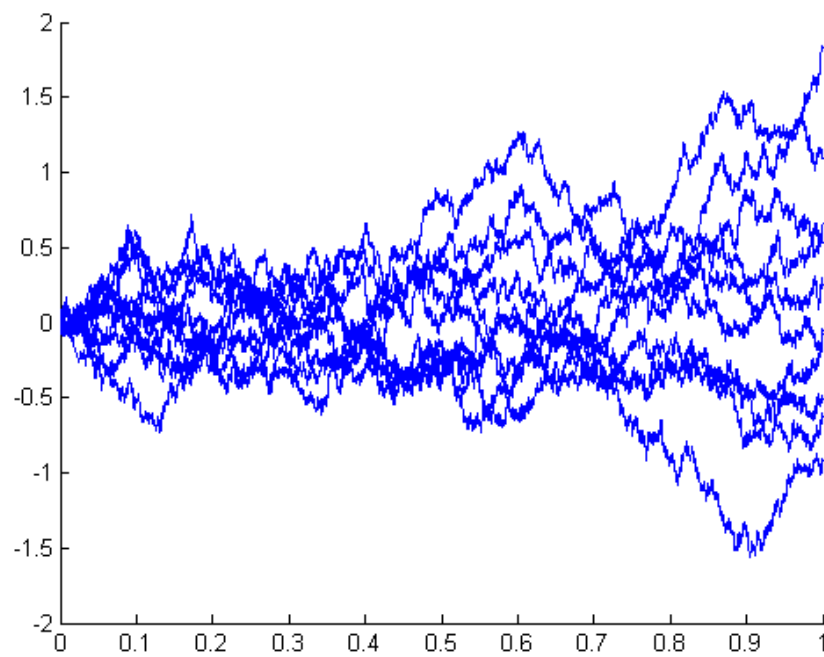


Figura 2.9: 10 trayectorias de un movimiento Browniano unidimensional

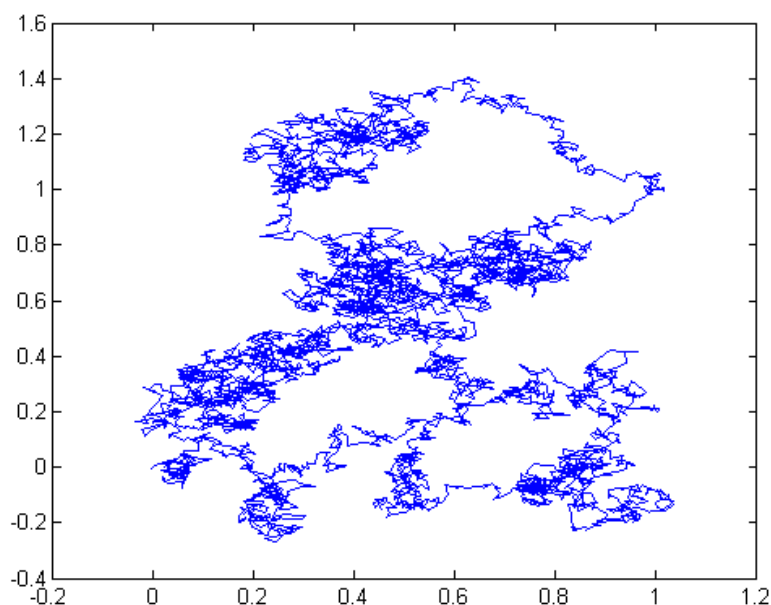


Figura 2.10: Movimiento Browniano 2-dimensional.

4. Tiene trayectorias continuas *c.s.*, es decir la función $t \mapsto \mathbf{B}_t$ es continua con probabilidad 1.

En la figura 2.10 se simula un movimiento Browniano 2-dimensiones conformado por dos movimientos Brownianos unidimensionales independientes, y de igual manera en la figura 2.11 se presenta una simulación de un movimiento Browniano 3-dimensional, en este caso con tres movimientos Brownianos unidimensionales independientes, todos ellos sobre el intervalo de tiempo $[0, 1]$.

PROPOSICIÓN 2.6. Sea B_t un movimiento Browniano, entonces, $cov(s, t) = s \wedge t$, para todo $s, t \geq 0$.

Demostración: Sean $s, t \in I$, por la definición del movimiento Browniano $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ y $B_s \sim \mathcal{N}(0, s)$. Se supone que $s > t$:

$$\begin{aligned}
 cov(s, t) &= E[B_s B_t] - E[B_s]E[B_t] \\
 &= E[(B_s - B_t + B_t)B_t] \\
 &= E[B_s - B_t]E[B_t] + E[(B_t)^2] \\
 &= Var(B_t) \\
 &= t
 \end{aligned}$$

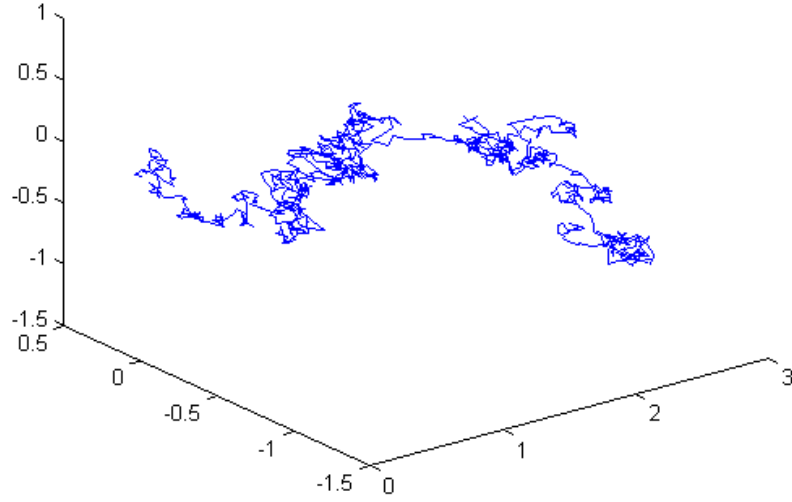


Figura 2.11: Movimiento Browniano 3-dimensional.

ya que $B_s - B_t$ y B_t son independientes con $E[B_s - B_t] = 0$. De manera análoga, si se supone que $t \geq s$, se obtiene $cov(s, t) = s$. Por tanto $cov(s, t) = s \wedge t$ y en el caso $s = t$ se verifica que $Var(B_t) = t$. \square

PROPOSICIÓN 2.7. *El movimiento Browniano es un proceso Gaussiano.*

Demostración: Sean $t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n$ para algún n y $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ valores reales, dado que las variables:

$$B_{t_0}, B_{t_1} - B_{t_0}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$$

son independientes con $B_{t_k} - B_{t_{k-1}} \sim \mathcal{N}(0, t_k - t_{k-1})$ para $k = 0, 1, \dots, n$, junto con el hecho de que la distribución de los vectores estocásticos $(B_{t_0}, B_{t_1}, \dots, B_{t_{n-1}}, B_{t_n})$ y $(B_{t_0}, B_{t_1} - B_{t_0}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ es idéntica.⁸ \square

PROPOSICIÓN 2.8. *El movimiento Browniano es un proceso de Markov.*

Demostración: Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ medible y $t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n$ para algún n y

⁸Esto gracias a que sus distribuciones finito dimensionales están relacionadas por:

$$f_{B_{t_0}, \dots, B_{t_n}}(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = f_{B_{t_0}}(x_0) f_{B_{t_1} - B_{t_0}}(x_0, x_1 - x_0) \cdots f_{B_{t_n} - B_{t_{n-1}}}(x_n, x_{n-1})$$

con las f_k funciones de distribución de una variable Gaussiana.

$x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, t_{n+1}$ valores reales,

$$\begin{aligned}
P[B_{t_{n+1}} \in A | B_{t_0} = x_0, B_{t_1} = x_1, \dots, B_{t_n} = x_n] &= \frac{f_{B_{t_0}, \dots, B_{t_n}, B_{t_{n+1}}}(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, A)}{f_{B_{t_0}, \dots, B_{t_n}}(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)} \\
&= f_{B_{t_{n+1}} - B_{t_n}}(A - x_n) \\
&= \frac{P[B_{t_{n+1}} \in A, B_{t_n} = x_n]}{P[B_{t_n} = x_n]} \\
&= P[B_{t_{n+1}} \in A | B_{t_n} = x_n]
\end{aligned}$$

□

2.3.3. El movimiento Browniano como una martingala

PROPOSICIÓN 2.9. *EL movimiento Browniano es una L_2 -martingala.*

Demostración: Se considera su filtración natural, es decir $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s : 0 \leq s \leq t)$, junto con las propiedades del movimiento Browniano y la desigualdad de Cauchy se verifican las condiciones (2.3) y (2.4), además:

$$\begin{aligned}
E[B_t | \mathcal{F}_s] &= E[B_t - B_s | \mathcal{F}_s] + E[B_s | \mathcal{F}_s] \\
&= E[B_t - B_s] + B_s \\
&= B_s
\end{aligned}$$

dado que $B_t - B_s$ es independiente de B_v para todo $v \leq s$, por las propiedades de la esperanza condicional, además, ya que $B_t \in L_2$ se sigue el resultado de ser una L_2 -martingala⁹. □

A continuación, el siguiente lema establece que ciertos procesos obtenidos a partir de un movimiento Browniano también son martingalas, y su utilidad se vera mas adelante en este trabajo.

LEMA 2.10. *Si B_t es un movimiento Browniano, entonces los procesos siguientes procesos son martingalas.*

- (a) $\{B_t^2 - t : t \geq 0\}$,
- (b) $\{U_t = \frac{1}{b} B_{b^2 t} : t \geq 0\}$ para un $b > 0$ y

⁹Ver apéndice [A]

(c) $\{V_t = B_{t+s} - B_s : t \geq 0\}$ con $s \geq 0$

Demostración: La condición (2.3) se cumple ya que B_t es un movimiento Browniano para los tres casos, además

(a) Respecto a la filtración natural del movimiento Browniano \mathcal{F}_t se cumple la condición (2.4), además:

$$\begin{aligned} E[B_t^2 - t | \mathcal{F}_s] &= E[(B_t - B_s + B_s)^2 - t | \mathcal{F}_s] \\ &= E[(B_t - B_s)^2] + 2B_s E[B_t - B_s] + B_s^2 - t \\ &= B_s^2 - s \\ &= W_s \end{aligned}$$

dado que $B_t - B_s$ es independiente de B_v para todo $v \leq s$.

(b) La filtración natural para U_t para cada $t \geq 0$ está dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_t &= \sigma\{U_s : 0 \leq s \leq t\} \\ &= \sigma\{B_{b^2 s} : 0 \leq s \leq t\} \\ &= \sigma\{B_s : 0 \leq s \leq b^2 t\} \\ &= \mathcal{F}_{b^2 t}. \end{aligned}$$

respecto a la cual se verifica la condición (2.4), y, además:

$$\begin{aligned} E[U_t | \mathcal{G}_s] &= E\left[\frac{1}{b} B_{b^2 t} | \mathcal{F}_{b^2 s}\right] \\ &= \frac{1}{b} B_{b^2 s} \\ &= U_s \end{aligned}$$

dado que B_t es una martingala y que si $s < t$ entonces $b^2 s < b^2 t$.

(c) De manera similar al caso (b), la filtración natural para el proceso V_t es $\mathcal{H}_t = \mathcal{F}_{t+s}$ para todo $t \geq 0$ y s dado, lo que verifica la condición (2.4) y la condición (2.5) $E[V_t | \mathcal{G}_r] = B_{r+s} - B_s = V_r$ ya que si un $r < t$ entonces $r + s < t + s$ junto con el hecho de que B_t es una martingala.

□

EJEMPLO 4. Si B_t es un movimiento Browniano, entonces, (1) e^{B_t} es una submartingala, (2) para cada $t \in [0, \tau]$ y cada $x > 1$:

$$1 - \Phi(\ln x / \sqrt{2t}) \leq \sqrt{\frac{\tau}{2\pi}} \frac{1}{\ln x}, \quad (2.16)$$

(3) y $E[\sup_{0 \leq t \leq \tau} (e^{B_t})^2] \leq 4e^{2\tau}$.

(1) Si se considera la función $\varphi(x) = e^x$, al ser convexa y dado que $E[|\varphi(B_t)|] = E[e^{B_t}] = M_{B_t}(1) = e^{t/2} < \infty$ gracias a la función generadora de momentos ¹⁰ de B_t , aplicando la proposición (2.3),

$$E[\varphi(B_t) | \mathcal{F}_s] = E[e^{B_t} | \mathcal{F}_s] \geq \varphi(B_s) = e^{B_s},$$

de lo cual se sigue que e^{B_t} es una submartingala, en donde \mathcal{F}_t es la filtración natural respecto al movimiento Browniano.

(2) Notese que $\{\omega : e^{B_t} \geq x\} = \{\omega : B_t \geq \ln x\}$ para cada $x > 1$, entonces por la proposición (2.5):

$$P(\sup_{0 \leq t \leq \tau} \{e^{B_t}\} \geq x) = P(\sup_{0 \leq t \leq \tau} \{X(t)\} \geq \ln x) \geq E[X(\tau)^+] / x,$$

por la definición de movimiento Browniano $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$, entonces, para cada $t \in [0, \tau]$:

$$P(X(t) \geq \ln x) = 1 - P(X(t) < \ln x) = 1 - \Phi(\ln x / \sqrt{2t}),$$

en donde Φ es la función de distribución de la variable aleatoria normal estándar B_t , además,

$$E[X(\tau)^+] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \int_0^\infty ye^{-\frac{y^2}{2\tau}} dy,$$

si se utiliza el cambio de variable $u = e^{-\frac{y^2}{2\tau}}$, se obtiene el resultado:

$$E[X(\tau)^+] = \sqrt{\frac{\tau}{2\pi}},$$

entonces, gracias a estos cálculos, se obtiene que lo establecido por la ecuación (2.16).

(3) A partir de la proposición (2.4), para $p = 2$, gracias a la función generadora de momentos, de una manera similar a como se hizo en (1), $E[\sup_{0 \leq t \leq \tau} (e^{B_t})^2] \leq 4E[(e^{B_\tau})^2] = 4M_{B_\tau}(2) = 4e^{2\tau}$. Adicionalmente en la figura 2.12, puede observarse lo establecido en (2), con $x \in [2, 20]$ y $t \in [0, 10]$ en donde $\tau = 10$.

¹⁰Para el movimiento Browniano B_t , su función generadora de momentos es: $M_{B_t}(\lambda) = e^{\frac{\lambda^2 t}{2}}$.

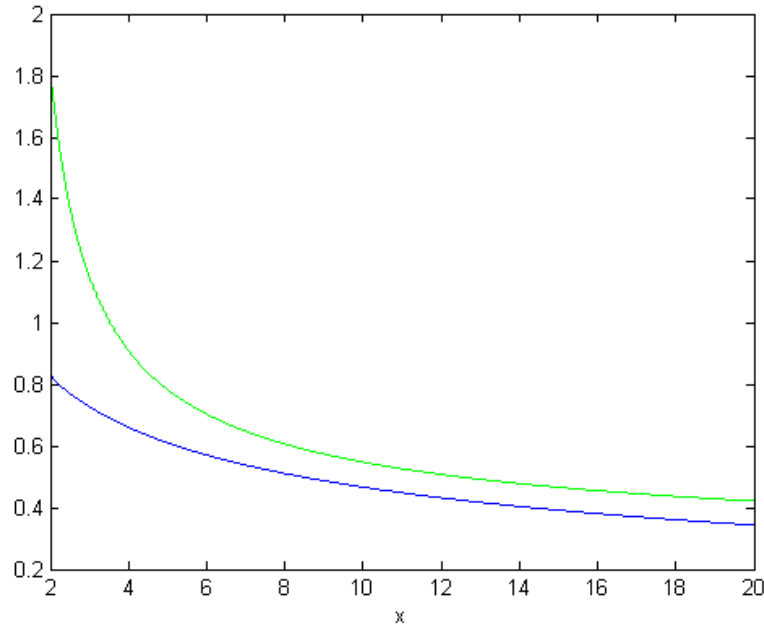


Figura 2.12: Probabilidad de que el $\sup_t e^{B_t}$ con $t \in [0, 10]$ exceda a $x \in [2, 20]$ y su cota superior $\frac{E[X(\tau)^+]}{\ln x}$.

2.3.4. Continuidad y diferenciabilidad

No es sencillo y puede ser demasiado complicado determinar la continuidad de un proceso estocástico debido a su naturaleza o al fenómeno que este puede representar, sumado a que se pueden citar diferentes condiciones bajo las cuales se establece cierto tipo de *continuidad* para un proceso (Mircea, 2002), sin embargo, el objetivo de esta sub sección se centrará en estudiar la continuidad de las trayectorias del movimiento Browniano para lo cual se revisarán un criterio (sin demostración) que permitirá establecer un el resultado sobre la continuidad casi segura de las trayectorias, su no diferenciabilidad y su comportamiento como una función de variación cuadrática y de variación acotada.

TEOREMA 2.11 (Criterio de Kolmogorov). Si $\{X_t : t \geq 0\}$ es un proceso estocástico a valores reales e $I \subset [0, \infty)$ un intervalo cerrado, y existen tres constantes $\alpha, \beta, \gamma > 0$ tales que:

$$E[|X_{t+h} - X_t|^\alpha] \leq \gamma h^{1+\beta}, \quad (2.17)$$

entonces $\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{s,t \in I, |s-t| < h} |X(s, \omega) - X(t, \omega)| = 0$ c.s., esto es, que casi toda trayectoria de X es uniformemente continua en I . (Mircea, p. 110).

PROPOSICIÓN 2.12. *Las trayectorias del movimiento Browniano son continuas con probabilidad 1.*

Demostración: Por la definición de movimiento Browniano, para $s, t \in I$ se observa que $B_{t+s} - B_s \sim \mathcal{N}(0, t)$, entonces de función generadora de momentos y de derivarla cuatro veces, se obtiene, $E[|B_{t+s} - B_s|^4] = (e^{t\lambda^2/2})|_{\lambda=0} = 3t^2$, entonces si se toman $\alpha = 4$, $\beta = 1$ y para un $\gamma \geq 3$, del teorema 2.11, se concluye que las trayectorias del movimiento Browniano son uniformemente continuas en I y por tanto continuas en I c.s.. \square

Una de las propiedades más relevantes respecto al movimiento Browniano es la no diferenciabilidad de sus trayectorias, ya que como se verá en el siguiente capítulo esto influirá en cuanto a la distinción entre integración determinista e integración estocástica.

TEOREMA 2.13 (Teorema de caracterización de Paul-Levy). *Un proceso estocástico $\{X_t : t \geq 0\}$ es un movimiento Browniano si y solo si*

1. *Tiene trayectorias continuas c.s.*
2. $X_0 = 0$ c.s.
3. *Los procesos $\{X_t : t \geq 0\}$ y $\{X_t^2 - t : t \geq 0\}$ son martingalas.*

([??] p. 9)

LEMA 2.14. *Si B_t es movimiento Browniano, entonces los procesos siguientes son movimientos Brownianos.*

- (a) $\{U_t = \frac{1}{b}B_{b^2t} : t \geq 0\}$ para un $b > 0$
- (b) $\{V_t = B_{t+s} - B_s : t \geq 0\}$ con $s \geq 0$

son movimientos Brownianos.

Demostración: Ya que las trayectorias del movimiento Browniano son continuas c.s. por su definición U_t y V_t también las tienen, además verifican que $U_0 = V_0 = 0$ y gracias a la proposición 2.10 tanto U_t y V_t son martingalas. Ahora:

(a)

$$\begin{aligned}
E[U_t^2 - t | \mathcal{G}_s] &= E\left[\frac{1}{b^2}(B_{b^2t} - B_{b^2s} + B_{b^2s})^2 - t | \mathcal{F}_{b^2s}\right] \\
&= \frac{1}{b^2}(E[(B_{b^2t} - B_{b^2s})^2 + B_{b^2s} | \mathcal{G}_s] - t) \\
&= \frac{1}{b^2}B_{b^2s}^2 - s \\
&= U_s.
\end{aligned}$$

(b) De manera similar $E[(B_{t+s} - B_s)^2 - t | \mathcal{H}_r] = (B_{r+s} - B_s)^2 - r$,

por lo anterior y gracias al Teorema de caracterización de Paul-Lévy se sigue el resultado. \square

PROPOSICIÓN 2.15. *Para todo $t \geq 0$, el movimiento Browniano c.s. no es diferenciable en t .*

Una demostración de este hecho se puede encontrar en el libro [??], en donde que $\{W_t = \frac{1}{b}B_{b^2t} : t \geq 0\}$ para un $b > 0$ y que $\{V_t = B_{t+s} - B_s : t \geq 0\}$ son movimientos Brownianos es fundamental, adicionalmente de una manera gráfica se puede remitirse a las figuras 2.8 y 2.9 en donde se puede ver que sus trayectorias presentan picos o vértices en casi todos sus puntos.

PROPOSICIÓN 2.16. *c.s. el movimiento Browniano no es diferenciable en ningún punto.*

PROPOSICIÓN 2.17. *Sea un $T > 0$, se considera a $p_n = (0 = t_0^{(n)} \leq t_1^{(n)} \leq \dots t_{m_n}^{(n)} = T)$ una sucesión de particiones del intervalo $[0, T]$, tal que:*

$$\Delta p_n = \sup_k |t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}| \rightarrow 0, \quad (2.18)$$

cuando $n \rightarrow \infty$, entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} (B(t_k^{(n)}) - B(t_{k-1}^{(n)}))^2 = T, \quad (2.19)$$

en el sentido medio cuadrático.

Demostración: Se considera la notación $\Delta_k B = B(t_k^{(n)}) - B(t_{k-1}^{(n)})$ y $\Delta_k t =$ Sea una \mathcal{P}_n una sucesión de particiones uniformes del intervalo $[0, T]$, si $\Delta B_k = B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$ y $\Delta_k = t_k - t_{k-1}$, y a los siguientes resultados: $E[(\Delta_k B)^4] = 3(\Delta_k t)^2$, $E[(\Delta_k B)^2(\Delta_j B)^2]$,

$E[(\Delta_k B)^2] = \Delta_k t$, entonces:

$$\begin{aligned}
E\left[\left|\sum_{k=1}^{m_n} (\Delta_k B)^2 - T\right|^2\right] &= E\left[\left(\sum_{k=1}^{m_n} (\Delta_k B)^2 - T\right)^2\right] \\
&= \sum_{k=1}^{m_n} E[(\Delta_k B)^4 - 2\Delta_k t(\Delta_k B)^2 + (\Delta_k t)^2] + \sum_{k \neq j}^{m_n} E[(\Delta_k B)^2(\Delta_j B)^2] \\
&= 3 \sum_{k=1}^{m_n} (\Delta_k t)^2 - 2 \sum_{k=1}^{m_n} (\Delta_k t)^2 + \sum_{k=1}^{m_n} (\Delta_k t)^2 \\
&= 2 \sum_{k=1}^{m_n} (\Delta_k t)^2 \leq 2 \max_n |\Delta_k t| \sum_{k=1}^{m_n} \Delta_k t \leq 2T \Delta p_n \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

cuando $\Delta p_n \rightarrow 0$, obteniendo el resultado en el sentido medio cuadrático. \square

Cabe recalcar que si se trabaja con una sucesión de particiones p_n tal que cada uno de sus elementos es un refinamiento, se obtiene un resultado similar en el sentido *c.s.*, una demostración de este hecho se lo puede encontrar en [], tomando esto en cuenta se obtiene el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 2.18. *El movimiento Browniano no es de variación acotada c.s..*

Demostración: Sea supondrá la variación total del movimiento Browniano v_B finita, entonces sea \mathcal{P}_n una sucesión de particiones de $[0, T]$ para algún $T \in \mathbb{R}$, con la notación de la demostración anterior:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m_n} (\Delta B_{t_k^{(n)}})^2 &\leq \max_n |\Delta B_{t_k^{(n)}}| \sum_{k=1}^{m_n} |\Delta B_{t_k^{(n)}}| \\
&\leq \max_n |\Delta B_{t_k^{(n)}}| v_B \rightarrow 0
\end{aligned}$$

esto gracias a que $\max_n |\Delta B_{t_k^{(n)}}| \rightarrow 0$, ya que las trayectorias del movimiento Browniano son uniformemente continuas. Lo que contradice que su variación cuadrática sea T , por tanto, el movimiento Browniano no es de variación acotada. \square

2.3.5. Procesos continuos obtenidos a través de movimiento Browniano

Se considera un movimiento Browniano $\{B_t : t \geq 0\}$ unidimensional, a continuación algunos procesos estocásticos a tiempo continuo obtenidos a través de este

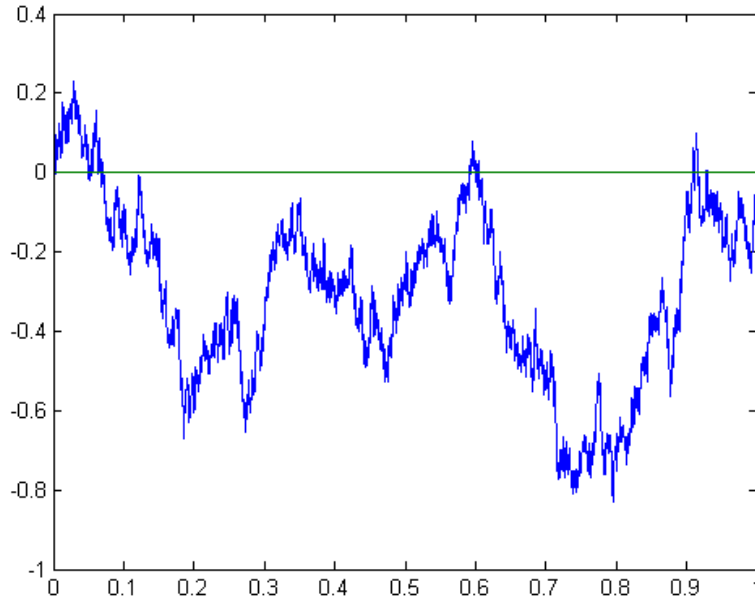


Figura 2.13: Una trayectoria de un Puente Browniano, que inicia y termina en cero, es decir $X_0 = X_1 = 0$.

proceso. **Puente Browniano.** Es un proceso X definido por la siguiente ecuación:

$$X_t = a + B_t - t(B_1 - b + a) \quad (2.20)$$

para $0 \leq t \leq 1$, en donde $X_0 = a$, $X_1 = b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y media:

$$E[X_t] = a + t(b - a) \quad (2.21)$$

y covarianza:

$$\text{cov}(s, t) = s \wedge t - st. \quad (2.22)$$

En la figura 2.13 se simula una trayectoria del Puente Browniano, en donde se ha tomado $a = b = 0$.

Movimiento Browniano con deriva. Es un proceso Y definido por la siguiente ecuación:

$$Y_t = \mu t + \sigma B_t \quad (2.23)$$

para $t \geq 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$, con media:

$$E[Y_t] = E[\mu t + \sigma B_t] = \mu t \quad (2.24)$$

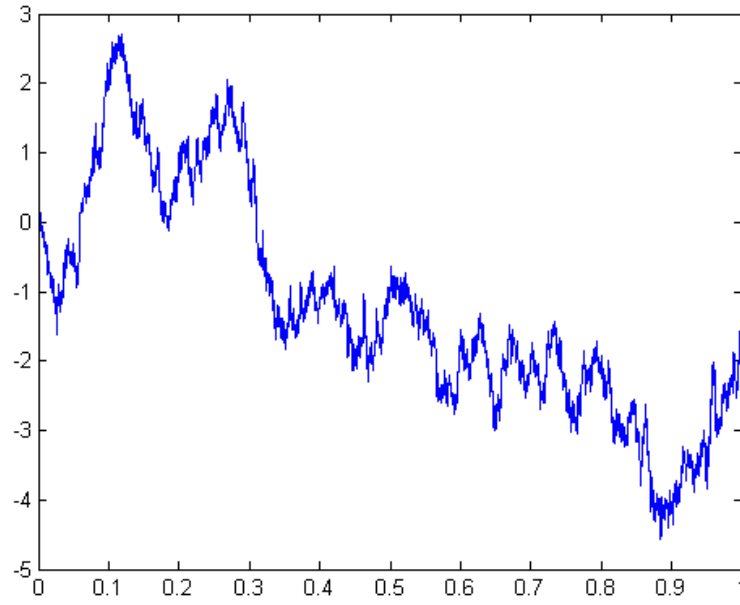


Figura 2.14: Una trayectoria de movimiento Browniano con deriva con $\mu = 0,5$ y $\sigma = 5$.

y covarianza:

$$\begin{aligned} cov(s, t) &= E[(Y_t - E[Y_t])(Y_s - E[Y_s])] \\ &= \sigma^2 E[B_t B_s] \\ &= \sigma^2 s \wedge t. \end{aligned}$$

En la figura 2.14 se simula un movimiento Browniano con deriva en donde se ha tomado $\mu = 0,5$ y $\sigma = 5$, mientras que en la figura 2.15 se presenta una simulación de un movimiento Browniano con deriva en donde se ha tomado $\mu = 5$ y $\sigma = 0,5$.

Movimiento Browniano Geométrico Es un proceso Z definido por la siguiente ecuación:

$$Z_t = e^{\mu t + \sigma B_t} \quad (2.25)$$

para $t \geq 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$, con media:

$$\begin{aligned} E[Z_t] &= E[e^{\mu t + \sigma B_t}] \\ &= e^{\mu t} E[e^{\sigma B_t}] \\ &= e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2}} \end{aligned}$$

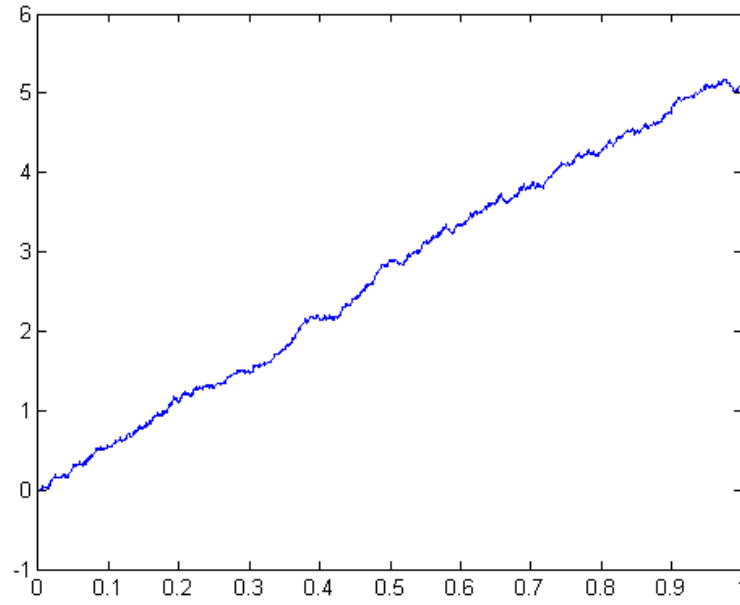


Figura 2.15: Una trayectoria de movimiento Browniano con deriva con $\mu = 5$ y $\sigma = 0,5$.

y covarianza:

$$\begin{aligned}
 cov(s, t) &= e^{\mu(t+s)} E[e^{\sigma(B_t+B_s)}] - e^{(\mu+\frac{\sigma^2}{2})(t+s)} \\
 &= e^{(\mu+\frac{\sigma^2}{2})(t+s)} (e^{-\frac{\sigma^2}{2}(t+s)} E[e^{\sigma(B_t-B_s)+2\sigma B_s}] - 1) \\
 &= e^{(\mu+\frac{\sigma^2}{2})(t+s)} (e^{-\frac{\sigma^2}{2}(t+s)} E[e^{\sigma(B_t-B_s)}] E[e^{2\sigma B_s}] - 1) \\
 &= e^{(\mu+\frac{\sigma^2}{2})(t+s)} (e^{-\frac{\sigma^2}{2}(t+s)} E[e^{\sigma(t-s)+2\sigma s}] - 1) \\
 &= e^{(\mu+\frac{\sigma^2}{2})(t+s)} (e^{2\sigma s} - 1).
 \end{aligned}$$

En la figura 2.16 se presenta una simulación de un movimiento Browniano geométrico con coeficiente $\alpha = 1$.

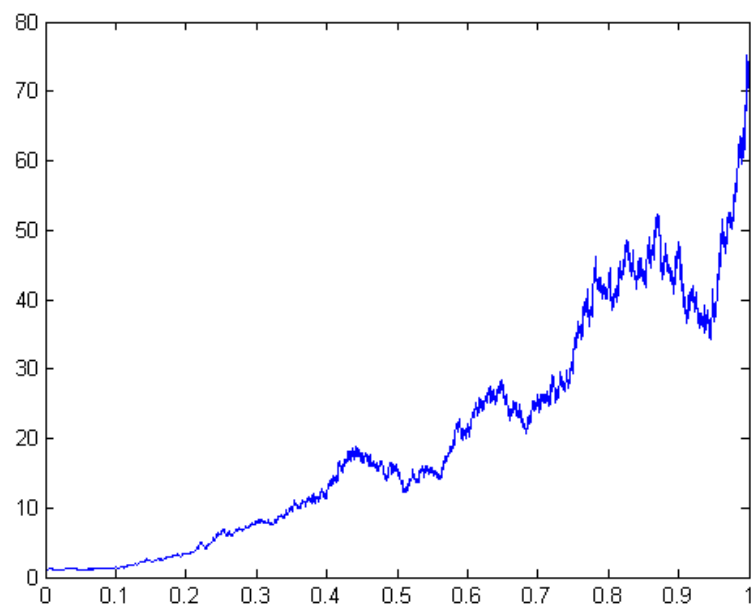


Figura 2.16: Una trayectoria de un movimiento Browniano geométrico con $\alpha = 1$.

Capítulo 3

Cálculo Estocástico

3.1. Integración estocástica

3.1.1. Preliminares

A diferencia de la integración en el cálculo clásico existen algunas consideraciones que deben ser tomadas en cuenta al momento de calcular integrales estocásticas, ya que ahora se trabajará con términos aleatorios tanto en el integrando como en el integrador, sumando la irregularidad que pueden presentar las trayectorias del integrador por citar un ejemplo. A continuación, se cita un ejemplo en el cual se trabaja con un Movimiento Browniano unidimensional tanto en el integrando como en el integrador.

EJEMPLO 5. Sea \mathcal{P}_n el conjunto de particiones del intervalo $[0, t]$, sea $\{p_n\}$ una sucesión de particiones de $0, t$, en donde $p_n = (0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_{m_n}^{(n)} = t)$, con puntos intermedios $t_k'^{(n)} \in [t_{k-1}^{(n)}, t_k^{(n)}]$ para $k = 1, 2, \dots, m_n$ dados por $t_k'^{(n)} = (1 - \theta)t_{k-1}^{(n)} + \theta t_k^{(n)}$, $\theta \in [0, 1]$, tal que $\triangle(p_n) \rightarrow 0$. Se define la sucesión aleatoria:

$$J_{B,n}(B) = \sum_{k=1}^{m_n} B(t_{k-1}') [B(t_k^{(n)}) - B(t_{k-1}^{(n)})]. \quad (3.1)$$

Si $\theta = 0$, $t_k'^{(n)} = t_{k-1}^{(n)}$, utilizando la igualdad:

$$a(b - a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) - \frac{1}{2}(b - a)^2,$$

tomando $a = B(t_{k-1}^{(n)})$ y $b = B(t_k^{(n)})$, se tiene:

$$\begin{aligned} J_{b,n}(B) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m_n} [B(t_k^{(n)})^2 - B(t_{k-1}^{(n)})^2] - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m_n} [B(t_k^{(n)}) - B(t_{k-1}^{(n)})]^2 \\ &\rightarrow \frac{1}{2} (B(t)^2 - t) \end{aligned}$$

c. s., cuando $n \rightarrow \infty$, ya que el primer término del lado derecho es una serie telescópica y el segundo término se da por la variación cuadrática del Movimiento Browniano.

Por el contrario si $\theta = \frac{1}{2}$, $t_k^{(n)} = \frac{1}{2}(t_{k-1}^{(n)} + t_k^{(n)})$, se presenta el esquema utilizado para demostrar el resultado *c. s.* para un $\theta \in [0, t]$ presentado en el libro [MG], se utiliza la notación:

$$\begin{aligned} \Delta B_k &= B(t_k^{(n)}) - B(t_{k-1}^{(n)}) \\ \Delta B'_k &= B(t_k^{(n)}) - B(t_{k-1}^{(n)}) \\ \Delta B''_k &= B(t_k^{(n)}) - B(t_k^{(n)}) \end{aligned}$$

de lo que se obtiene $B(t_k^{(n)}) = B(t_{k-1}^{(n)}) + \Delta B'_k$ y $\Delta B_k = \Delta B'_k + \Delta B''_k$, entonces:

$$\begin{aligned} J_{b,n}(B) &= \sum_{k=1}^{m_n} [B(t_{k-1}^{(n)}) + \Delta B'_k] \Delta B_k \\ &= \sum_{k=1}^{m_n} B(t_{k-1}^{(n)}) \Delta B'_k + \sum_{k=1}^{m_n} \Delta B'_k \Delta B_k \\ &\rightarrow \frac{1}{2} B(t)^2 \end{aligned}$$

en donde el primer término de la derecha de la segunda línea es la integral calculada anteriormente y el segundo término¹ en la misma línea es tal que $\sum_{k=1}^{m_n} \Delta B'_k \Delta B_k \rightarrow \frac{1}{2} t$.

Lo que conlleva a establecer una definición para la integral estocástica, en donde de manera similar se utiliza una sucesión de sumas en este caso aleatorias que convergen en un determinado sentido aleatorio. Como puede observarse en el ejemplo anterior se encuentran dos resultados diferentes para la misma sucesión de su-

¹Se recomienda revisar el libro [MG] página 210, en donde se da una demostración rigurosa de este resultado.

mas que a diferencia de las sumas que se trabajan en el cálculo clásico las cuales no dependen del punto intermedio $t_k^{(n)}$, siendo el resultado que se obtiene igual en cualquier caso. En la sección siguiente se presentará la integral estocástica para semimartingalas y se citará el caso particular que corresponde a la integral de Itô, que es de gran importancia en este trabajo, dejando al lector una construcción de esta última integral en el anexo referencia. Finalmente se presenta una definición concerniente a un tipo especial funciones reales.

DEFINICIÓN 3.1 (Proceso Càglàd y Càdlàg²). *Un proceso X se dice càdlàg si sus trayectorias son continuas a la derecha c. s. con límite a la izquierda. X se dice càglàd si sus trayectorias son continuas a la izquierda c. s. con límite a la derecha.*

PROPOSICIÓN 3.1. *El Movimiento Browniano es a la vez un proceso Càglàd y Càdlàg*

Demostración. Este resultado se obtiene debido a que sus trayectorias con continuas c. s.. □

3.1.2. Caso general

De manera general se puede definir una integral estocástica de un proceso estocástico que cumple ciertas condiciones respecto a una semimartingala, la misma que posee características similares a la integral determinista. Una construcción de este tipo de integral puede ser encontrada en el libro [MG] en la sección 4.4, en donde el trabajar con semimartingalas permite abordar de una manera mas amplia diversos fenómenos en donde dada su naturaleza, esta integral estocástica permite entender de mejor manera la ecuación diferencial estocástica la modela. Como ya se pudo ver mas arriba esta integral puede ser definida respecto al movimiento Browniano con la particularidad que su valor se vio afectada por la elección de puntos intermedios. En primer lugar se expondrá en las siguientes líneas la condición de ser semimartingala de un movimiento Browniano, para luego construir la integral de Itô, sin embargo es de importancia citar a la integral de Stratonovich que esta relacionada con la integral de Itô³ siendo una de ellas la segunda integral en el ejemplo 5, en donde de una manera un poco informal puede verse la relación entre la primera integral considerada en este ejemplo (una integral de Itô) y la integral de Stratonovich junto con el término t que será debido al proceso de variación cuadrática defini-

²[MG] pag. 113

³Se recomienda revisar los libros [MG,KB, OS].

do mas adelante. Se inicia con dos caracterizaciones para semimartingalas, siendo la segunda la que nos permite conectar a un movimiento Browniano con ser una semimartingala, del primera se puede decir que es fundamental en el estudio de representación de martingalas

TEOREMA 3.2 (Caracterización de semimartingalas). *Un proceso càdlàg X definido sobre un espacio de probabilístico filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$, adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ es una semimartingala si se lo puede representar como la suma de dos procesos: una martingala local M y un proceso de variación finita A , con $M(0) = A(0) = 0$, y ([??], p.211)*

$$X(t) = X(0) + M(t) + A(t). \quad (3.2)$$

TEOREMA 3.3. *Si un proceso X es una martingala local con trayectorias continuas, entonces X es una semimartingala.*

PROPOSICIÓN 3.4. *El movimiento Browniano es una semimartingala.*

Demostración. El Movimiento Browniano es una semimartingala ya que es una martingala y tiene trayectorias continuas c. s. \square

3.1.3. Construcción de la integral de Itô

DEFINICIÓN 3.2 (Espacio \mathcal{H}). *Sea $\mathcal{H} = \mathcal{H}[0, t]$ el conjunto de procesos estocásticos $X : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tales que:*

1. $(t, \omega) \rightarrow X(t, \omega)$ es $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ -medible, donde $\mathcal{B} = \mathcal{B}[0, t]$,
2. $X(t, \omega)$ es adaptado a la filtración \mathcal{F}_t ,
3. $E[\int_0^t X(s, \omega)^2 ds] < \infty$.

Observación: Se utilizará la notación $X(t) = X(t, \omega)$ para referirse a un proceso estocástico X , con el fin de facilitar la escritura.

Un proceso $H \in \mathcal{H}$ se dice simple, se se escribe como:

$$H(t) = \sum_i^i \xi_i(t) 1_{[t_i, t_{i+1})}(t) \quad (3.3)$$

en donde los coeficientes ξ_i son variables aleatorias tales que para cada $i = 0, 1, 2, \dots$, $E[\xi_i^2] < \infty$ y es \mathcal{F}_{t_i} -medible. Para un proceso simple H se define la integral de Itô,

por

$$\int_0^t H(s)dB(s) = \sum_i^i \xi_i(t)[B(t_{i+1}) - B(t_i)] \quad (3.4)$$

PROPOSICIÓN 3.5 (Isometría de Itô). *Si H es un proceso simple y acotado, se verifica la siguiente igualdad*

$$E[(\int_0^t H(s)dB(s))^2] = E[\int_0^t H(s)^2 ds]. \quad (3.5)$$

conocida como la isometría de Itô

A continuación se presenta la extensión de la integral definida en la parte superior a procesos muchos mas generales, siguiendo los siguientes pasos:

Paso 1. Sea $Z \in \mathcal{H}$ tal que $H(\cdot, \omega)$ es continua para cada ω , entonces existe una sucesión de procesos simples adaptados $\{H^n\}$ en \mathcal{H} tal que:

$$E[\int_0^t (Z(t) - H^n(t))^2 ds] \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

Paso 2. Sea $Y \in \mathcal{H}$ acotada, entonces existe una sucesión de procesos acotados $\{Y^n\}$ en \mathcal{H} tal que $Y^n(\cdot, \omega)$ es continua para cada ω y cada n , con

$$E[\int_0^t (Y(t) - Y^n(t))^2 ds] \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

Paso 3. Sea $X \in \mathcal{H}$, entonces existe una sucesión $\{X^n\}$ en \mathcal{H} tal que X^n es acotada para cada n , y

$$E[\int_0^t (X(t) - X^n(t))^2 ds] \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

TEOREMA 3.6 (Integral de Itô). *Sea $X \in \mathcal{H} = \mathcal{H}[0, t]$, la integral de Itô de X de 0 a t ,*

$$\int_0^t X(s)dB(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t H(s)^n dB(s), \quad (3.6)$$

en $L_2(P)$, donde $\{H^n\}$ en \mathcal{H} de procesos simples tal que:

$$E\left[\int_0^t (X(s) - H(s)^n)^2 ds\right] \rightarrow 0 \quad (3.7)$$

PROPOSICIÓN 3.7 (Propiedades de la integral de Itô). Sean $X, Y \in \mathcal{H}$, $0 \leq s \leq t$, y $c \in \mathbb{R}$:

1. $\int_0^t X(u)dB(u) = \int_0^s X(u)dB(u) + \int_s^t X(u)dB(u)$,
2. $\int_0^t (cX(u) + Y(u))dB(u) = c \int_0^t X(u)dB(u) + \int_0^t Y(u)dB(u)$,
3. $E\left[\int_0^t X(u)dB(u)\right] = 0$,
4. $\int_0^t X(u)dB(u)$ es \mathcal{F}_t -medible.

TEOREMA 3.8 (Representación continua de la integral de Itô). Sea $X \in \mathcal{H}[0, t]$, existe un proceso estocástico J_t continua en t definido sobre (Ω, \mathcal{F}, P) de la integral de Itô, para $0 \leq t \leq T$, tal que:

$$P\left[J_t = \int_0^t X(u)dB(u)\right] = 1 \quad (3.8)$$

3.2. Fórmula de Itô

Se consideran dos procesos X, Y semimartingalas tales que⁴ $X(0-) = Y(0-) = 0$.

DEFINICIÓN 3.3 (Proceso de Covariación cuadrática). El proceso de covariación cuadrática de X e Y , notado por $[X, Y]$, está definido por:

$$[X, Y](t) = X(t)Y(t) - \int_0^t X(s-)dY(s) - \int_0^t Y(s-)dX(s). \quad (3.9)$$

DEFINICIÓN 3.4 (Proceso de Variación cuadrática). El proceso de variación cuadrática de X , notado por $[X, X]$ o por $[X]$, está definido por:

$$[X, X](t) = X(t)^2 - 2 \int_0^t X(s-)dX(s). \quad (3.10)$$

PROPOSICIÓN 3.9 (Identidad de polarización). Para X, Y se define por:

$$[X, Y] = \frac{1}{2}([X + Y, X + Y] - [X, X] - [Y, Y]). \quad (3.11)$$

⁴Se define $X(s-) = \lim_{u \uparrow s} X(u)$.

EJEMPLO 6. Si se considera un movimiento Browniano unidimensional B y $Y(t) = t$, se verifica que $[B, B](t) = t$, $[B, Y](t) = [Y, B](t) = [Y, Y] = 0$. Y más aún para constantes a y b , $[aY + bB, aY + bB](t) = b^2t$.

Demostración. En efecto para un $t \geq 0$ y de la definición del proceso de variación cuadrática:

$$[B, B](t) = B(t)^2 - 2 \int_0^t B(s)dB(s) = t,$$

$$[Y, Y](t) = Y(t)^2 - 2 \int_0^t Y(s)dY(s) = t^2 - 2 \int_0^t sds = 0,$$

mientras que a partir del proceso de covariación cuadrática

$$\begin{aligned} [B, Y](t) &= B(t)Y(t) - \int_0^t B(s)dY(s) - \int_0^t Y(s)dB(s) \\ &= tB(t) - \int_0^t B(s)ds - \int_0^t sdB(s) = 0, \end{aligned}$$

esto último se justificara mas adelante, además nótese que $[Y, B](t) = 0$. Gracias a lo obtenido anteriormente se verifica que $[bB, bB](t) = b^2t$ y $[aY, aY](t) = 0$, lo que junto a la identidad de polarización implica que $[aY + bB, aY + bB](t) = b^2t$ para constantes a y b . \square

3.2.1. Caso unidimensional

TEOREMA 3.10 (Fórmula de Itô). Si X es una semimartingala continua y $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$, entonces:

1. $g(X)$ es una semimartingala continua,
2. la forma diferencial e integral de la fórmula de Itô son:

$$dg(X(t)) = g'(X(t))dX(t) + \frac{1}{2}g''(X(t))d[X, X](t),$$

y

$$g(X(t)) - g(X(0)) = \int_0^t g'(X(s))dX(s) + \frac{1}{2} \int_0^t g''(X(s))d[X, X](s).$$

EJEMPLO 7. Gracias a la aplicación de la fórmula de Itô es posible obtener el resultado mostrado en el ejemplo 5 para la integral $\int BdB$.

Demostración. Se considera un movimiento Browniano B y la función g dada por $g(x) = x^2$, nótese que $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ con $g'(x) = 2x$ y $g''(x) = 2$. Entonces gracias a la fórmula de Itô en su forma integral se obtiene:

$$\begin{aligned} g(B(t)) - g(B(0)) &= B^2(t) \\ &= \int_0^t g'(B(s))dB(s) + \frac{1}{2} \int_0^t g''(B(s))d[B, B](s) \\ &= 2 \int_0^t B(s)dB(s) + \int_0^t ds, \end{aligned}$$

es decir:

$$2 \int_0^t B(s)dB(s) = \frac{1}{2}(B^2(t) - t). \quad (3.12)$$

□

Observación: Si se toma en cambio la función g dada por $g(x) = x^n$, para un $n \geq 0$, se obtiene un resultado mas general:

$$B^n(t) = n \int_0^t B^{n-1}(s)dB(s) + \frac{n(n-1)}{2} \int_0^t B^{n-2}(s)ds. \quad (3.13)$$

Además a partir de la forma diferencial de Itô puede encontrarse una ecuación diferencial (la cual se tratará mas adelante) tal que una semimartingala X sea su solución, en el ejemplo 6 la ecuación $dX(t) = 2B(t)dB(t) + dt$, tiene como solución a $X(t) = B(t)$, nótese que el caso determinista equivalente $d(x^2) = 2xdx$, lo que pone de manifiesto que el caso del cálculo estocástico se siguen reglas diferentes.

3.2.2. Caso d -dimensional

TEOREMA 3.11 (Fórmula de Itô multi-dimensional). *Si las coordenadas de \mathbf{X} son semimartingalas continuas y $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ tiene derivada parcial de segundo orden continua, entonces:*

1. $g(\mathbf{X})$ es una semimartingala continua,
2. la fórmula diferencial e integral de la fórmula de Itô son:

$$dg(\mathbf{X}(t)) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{X}(t))dX_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{X}(t))d[X_i, X_j](t),$$

y

$$g(\mathbf{X}(t)) - g(\mathbf{X}(0)) = \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{X}(s))dX_i(s)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{X}(s)) d[X_i, X_j](s).$$

EJEMPLO 8. Para dos semimartingalas X, Y se verifica la fórmula:

$$d(X(t)Y(t)) = X(t)dY(t) + Y(t)dX(t) + d[X, Y](t), \quad (3.14)$$

que puede entenderse como el equivalente de la diferencial del producto de dos funciones en el caso determinista.

Demostración. Sea $\mathbf{X} = (X, Y)$ un vector de semimartingalas, y sea la función g definida por $g(x, y) = xy$, en donde: $\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = y$, $\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = x$, $\frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial y \partial x} = 1$ y $\frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial y^2} = 0$, funciones continuas, entonces por la forma de Itô en su forma diferencial:

$$dg(\mathbf{X}(t)) = \frac{\partial g}{\partial x}(\mathbf{X}(t))dX(t) + \frac{\partial g}{\partial y}(\mathbf{X}(t))dY(t) + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(\mathbf{X}(t))d[X, Y](t),$$

de donde se sigue el resultado. □

Observación: Si en el ejemplo anterior se toma $X(t) = B(t)$ y $Y(t) = t$, gracias al ejemplo 6 (revisar), se obtiene:

$$d(tB(t)) = tdB(t) + B(t)dt, \quad (3.15)$$

de lo cual, integrando,

$$tB(t) = \int_0^t s dB(s) + \int_0^t B(s) ds, \quad (3.16)$$

lo que verifica el resultado del ejemplo 7.

EJEMPLO 9. Es posible encontrar una ecuación diferencial cuya solución sea $X(t) = B_1(t)\sin(B_2(t))$, con B_1, B_2 movimientos Brownianos unidimensionales independientes.

Demostración. Se considera el vector $\mathbf{Z} = (B_1, B_2)$ y la función g definida por $g(x, y) = x\sin(y)$. En este caso se tiene⁵: $\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = \sin(y)$, $\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = x\cos(y)$ y $\frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial y^2} = -x\sin(y)$. Gracias a la fórmula de Itô en su forma diferencial, se obtiene que $X(t) =$

⁵Solo se han calculado las derivadas cuyos términos en la fórmula de Itô no es nulo, ya sea por que se anulan o porque su proceso de covariación cuadrática es cero.

$B_1(t)\sin(B_2(t))$ satisface la ecuación diferencial:

$$dX(t) = -\frac{1}{2}X(t)dt + \sin B_2(t)dB_1(t) + B_1(t)\cos B_2(t)dB_2(t). \quad (3.17)$$

□

3.2.3. Caso $d \times d'$ dimensional

Aquí

3.2.4. Representación de martingalas

Aquí

3.3. Ecuación diferencial estocástica

Se busca resolver una ecuación de la forma:

$$dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dB(t). \quad (3.18)$$

3.4. Existencia y unicidad

TEOREMA 3.12 (Solución). *La ecuación anterior tiene solución única.*

EJEMPLO 10. La ecuación diferencial estocástica:

$$dX(t) = (\beta - \alpha X(t))dt + c dB(t), \quad (3.19)$$

tiene solución única.

La existencia y unicidad de la solución de la ecuación (3.19) se obtendrá a partir del teorema 3.12, para luego proceder a resolver esta ecuación haciendo uso de la fórmula de Itô, teorema A partir de la ecuación (3.19) para un $T \leq 0$, se definen μ , σ : $[0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por: $\mu(t, x) = \beta - \alpha x$ y $\sigma(t, x) = c$, entonces para $x, y \in \mathbb{R}$ y $0 < t \leq T$,

$$|\mu(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq K(1 + |x|), \quad (3.20)$$

donde $K = (|\beta| \wedge |\alpha|) \wedge |c|$, y:

$$|\mu(t, x) - \mu(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| = |\alpha||y - x|. \quad (3.21)$$

Gracias a las ecuaciones (3.20) y (3.21) y por el teorema 3.12 tiene solución única.

Para encontrar su solución, considere $Y(t) = e^{\alpha t}X(t)$, en donde $X(t)$ es la solución de . Sean $\mathbf{X} = (X, Z)$ donde $Z(t) = t$ y g la función definida por $g(x, t) = e^{\alpha t}x$, en donde: $\frac{\partial g(x, t)}{\partial x} = e^{\alpha t}$, $\frac{\partial g(x, t)}{\partial t} = \alpha e^{\alpha t}x$, $\frac{\partial^2 g(x, t)}{\partial x^2} = 0$, entonces gracias al ejemplo

$$dY(t) = e^{\alpha t}dX(t) + \alpha Y(t)dt.$$

o equivalentemente:

$$e^{\alpha t}dX(t) = dY(t) - \alpha Y(t)dt. \quad (3.22)$$

Multiplicando por $e^{\alpha t}$:

$$e^{\alpha t}dX(t) = e^{\alpha t}(\beta - \alpha X(t))dt + ce^{\alpha t}dB(t),$$

$$e^{\alpha t}dX(t) = \beta e^{\alpha t}dt - \alpha Y(t)dt + ce^{\alpha t}dB(t), \quad (3.23)$$

de las ecuaciones (3.22) y (3.23), se tiene:

$$dY(t) = \beta e^{\alpha t}dt + ce^{\alpha t}dB(t).$$

Integrando sobre $[0, T]$,

$$Y(T) - Y(0) = \beta \int_0^T e^{\alpha t}dt + c \int_0^T e^{\alpha t}dB(t),$$

o equivalentemente,

$$X(T) = e^{-\alpha T}(X(0) + \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha T} - 1) + c \int_0^T e^{\alpha t}dB(t)). \quad (3.24)$$

3.5. Procesos de difusión

Aquí

3.6. Métodos numéricos de resolución

Aquí

Capítulo 4

Fórmula de Itô en la resolución de un proceso de difusión

4.1. Caso lineal

4.1.1. Método directo

Aquí

4.1.2. Estado Aumentado

Aquí

4.2. Caso no lineal

4.2.1. Momentos

Aquí

4.2.2. Función característica

Aquí

4.2.3. Ecuación de Fockker-Planck y de Kolmogorov

Aquí

4.2.4. Métodos numéricos

Aquí

4.3. Aplicaciones

4.3.1. Aplicación 1

Aquí

4.3.2. Aplicación 2

Aquí

4.3.3. Aplicación 3

Aquí

Conclusiones

Aquí

Recomendaciones

Aquí

Apéndice A

Conceptos y definiciones probabilísticos

A.1. Espacio probabilístico

Sea el conjunto $\Omega \neq \emptyset$, y sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ una colección de subconjuntos de Ω .

DEFINICIÓN A.1 (σ -álgebra). A \mathcal{F} se le dice una σ -álgebra sobre Ω , si verifica:

- (i) $\emptyset \in \mathcal{F}$,
- (ii) Si $A \in \mathcal{F}$, entonces $A^c \in \mathcal{F}$, donde $A^c = \Omega \setminus A$ el complemento de A en Ω ,
- (iii) Si la sucesión $\{A_n\}_{n \in I}$ de subconjuntos de Ω pertenece a \mathcal{F} , entonces $\bigcup_{n \in I} A_n \in \mathcal{F}$.

A la dupla (Ω, \mathcal{F}) se le dice un espacio medible.

DEFINICIÓN A.2 (σ -álgebra generada). Sea \mathcal{H} una colección de subconjuntos de Ω , la σ -álgebra generada por \mathcal{H} es la mas pequeña σ -álgebra que contiene a \mathcal{H} , es decir:

$$\sigma(\mathcal{H}) = \bigcap \{ \mathcal{G} : \mathcal{H} \subseteq \mathcal{G} \},$$

en donde \mathcal{G} es una σ -álgebra sobre Ω .

DEFINICIÓN A.3 (σ -álgebra Boreliana). Sea \mathcal{H} la colección de subconjuntos abiertos de un espacio topológico¹ Ω , entonces $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{H})$ se dice la σ -álgebra Boreliana sobre Ω y a $B \in \mathcal{B}$ se le dice un conjunto boreliano o de Borel.

¹ X se dice un espacio topológico si ...

DEFINICIÓN A.4 (Función de probabilidad). Sea \mathcal{F} una σ -álgebra sobre Ω , a:

$$\begin{aligned} P : \mathcal{F} &\longrightarrow [0, 1] \\ A &\mapsto P(A) \end{aligned}$$

se le dice *función de probabilidad*, si verifica lo siguiente:

- (i) $P(\Omega) = 1$,
- (ii) Si A_1, A_2, \dots están en \mathcal{F} y son tales que $A_n \cap A_m = \emptyset$, para $m \neq n$, entonces $P(\bigcup_n A_n) = \sum_n P(A_n)$,
- (iii) para todo $A \in \mathcal{F}$, $P(A) \geq 0$.

A (Ω, \mathcal{F}, P) , se le conoce como espacio probabilístico, un espacio probabilístico se dice completo si \mathcal{F} contiene todos los subconjuntos de Ω con medida nula. De la condición (iii) al subconjunto A se le dice un evento. Si $P(A) = 1$, A se dice que ocurre casi seguramente c.s.

A.2. Variable aleatoria

DEFINICIÓN A.5 (Función medible). Sea \mathcal{F} una σ -álgebra sobre Ω , la función $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ se dice \mathcal{F} medible si

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = \{X \in B\} \in \mathcal{F},$$

para todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es la σ -álgebra Boreliana sobre \mathbb{R} , y si se trabaja con el espacio probabilístico (Ω, \mathcal{F}, P) a X se le conoce como una variable aleatoria v. a..

DEFINICIÓN A.6 (Función indicadora). Sea $A \subseteq \Omega$, a $1_A : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ definida por:

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$$

DEFINICIÓN A.7 (σ -álgebra generada por una v. a.). Sea $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una v. a. definida sobre un espacio probabilístico (Ω, \mathcal{F}, P) , la σ -álgebra generada por la v. a. X , es $\sigma(X)$ definida por:

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

Está es la mas pequeña σ -álgebra en la cual X es medible, mas aún si se considera un la colección de v. a. $\{X_1, X_2, \dots\} = \{X_i : i \in I\}$, se tiene $\sigma((X_1, X_2, \dots)) = \{X_i^{-1}(B) : \text{para todo } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), i \in I\}$.

DEFINICIÓN A.8 (Función de distribución). Sea $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una v. a. \mathcal{F} -medible. X induce una medida de probabilidad P_X sobre \mathbb{R}^n , dada por:

$$P_X(B) = P(\omega \in \Omega : X(\omega) \in B)$$

se dice a P_X la distribución de X . Además la función de distribución la función $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ se la definida por:

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

Si existe una función boreliana $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$P(X \in B) = \int_B f(X)dx,$$

entonces se dice que X tiene distribución absolutamente continua y que f es la función de distribución de X .

DEFINICIÓN A.9 (Distribución conjunta). La distribución conjunta de las v. a. X_1, X_2, \dots, X_n es una medida de probabilidad P_{X_1, X_2, \dots, X_n} sobre \mathbb{R}^n tal que:

$$P_{X_1, X_2, \dots, X_n}(B) = P((X_1, X_2, \dots, X_n) \in B),$$

para todo $B \in \mathbb{R}^n$, si existe una función $f_{X_1, X_2, \dots, X_n} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$P_{X_1, X_2, \dots, X_n}(B) = \int f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)dx_1 \dots dx_n,$$

para todo $B \in \mathbb{R}^n$, entonces f_{X_1, X_2, \dots, X_n} se dice la densidad conjunta de X_1, X_2, \dots, X_n .

Para una v. a. el conocer sus momentos permite tener una mejor interpretación de la misma, siendo los principales su media y su varianza, para lo cual se definen los espacios L^p por:

$$L^p = \{X : \int_{\Omega} |X|^p dP\},$$

para $0 < p$, estos espacios son espacios vectoriales dotados de la norma $|X|_p = (\int_{\Omega} |X|^p dP)^{1/p}$, para un lector interesado puede encontrar una descripción de sus principales propiedades en el libro [??] sección 2.6.

Para una v. a. $X \in L^1$ se define la esperanza de X por:

$$E(X) = \int_{\Omega} X dp.$$

Mientras que para una v. a. $X \in L^2$ se define la media por:

$$Var(X) = \int_{\Omega} (X - E(X))^2 dp.$$

En los casos anteriores a X se le dice integrable y cuadrado integrable respectivamente.

A.3. Probabilidad condicional e independencia

DEFINICIÓN A.10 (Probabilidad condicional). Sean $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $P(B) \neq 0$ la probabilidad condicional de A dado B esta definido por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

DEFINICIÓN A.11. Sean X, Y v. a., la distribución conjunta de X dado $Y = y$ esta definida por:

$$P(X \leq x | Y = y) = \frac{P(X \leq x, Y = y)}{P(Y = y)},$$

cuando $P(Y = y) > 0$.

Además si X, Y , tienen distribución conjunta $f_{X,Y}$, tanto X e Y tienen función de densidad f_X y f_Y respectivamente, donde: $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) dy$ y $f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) dx$. La distribución condicional de X dada $Y = y$ esta definido por medio de la densidad condicional:

$$f_{X|Y}(x, y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)},$$

cuando $f_Y(y) > 0$.

A.3.1. Independencia

DEFINICIÓN A.12. Sean $A, B \in \mathcal{F}$ se dicen independientes si:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

De igual manera si $A_i \in \mathcal{F}$ para $i = 1, 2, \dots, n$, se dicen independientes si:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots A_{i_k}) = \prod_j P(A_{i_j})$$

DEFINICIÓN A.13. Sean X, Y , dos v. a., se dicen independientes si para todos $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

DEFINICIÓN A.14. Sean $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n$ σ -álgebras contenidas en \mathcal{F} son individuales si para los eventos A_1, \dots, A_n ,

$$P(A_1 \in \mathcal{G}_1, \dots, A_n \in \mathcal{G}_n) = \prod_j P(A_j) \in \mathcal{G}_j.$$

Más aún una v. a. X y \mathcal{H} una σ -álgebra X son independientes si $\sigma(X)$ y \mathcal{H} son independientes.

A.4. Esperanza condicional

DEFINICIÓN A.15.

Apéndice B

Tablas

Día	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
1	0,51	1,45	1,95	1,49	1,36	1,05	0,92	0,58	0,51	0,42	0,43	0,38
2	0,52	1,37	1,95	1,47	1,47	1,02	0,89	0,57	0,48	0,42	0,42	0,38
3	0,6	1,46	1,73	1,51	1,56	1,01	0,87	0,57	0,47	0,42	0,42	0,37
4	0,56	1,6	1,76	1,4	2,82	0,9	0,87	0,57	0,46	0,42	0,42	0,37
5	1,4	1,52	2,58	1,26	1,59	0,94	0,87	0,57	0,46	0,42	0,42	0,37
6	0,67	1,32	2,67	1,8	2,25	0,94	0,83	0,56	0,46	0,53	0,42	0,37
7	0,64	1,29	2,03	1,28	1,62	0,97	0,82	0,54	0,46	0,44	0,4	0,38
8	0,72	1,29	2,37	1,16	1,77	0,79	0,81	0,56	0,46	0,42	0,4	0,37
9	0,69	2,77	2,04	1,44	1,53	1,11	0,79	0,56	0,46	0,42	0,4	0,35
10	0,61	1,95	1,61	1,15	1,43	1,21	0,78	0,55	0,46	0,43	0,39	0,37
11	0,69	1,62	1,44	1,53	1,59	0,99	0,75	0,55	0,45	0,44	0,38	0,37
12	0,78	1,75	1,95	1,42	1,59	0,99	0,74	0,55	0,45	0,44	0,4	0,37
13	0,78	1,64	3,28	1,29	2,41	0,86	0,74	0,54	0,45	0,43	0,4	0,37
14	0,66	1,64	1,84	1,16	1,76	0,9	0,74	0,53	0,45	0,42	0,42	0,37
15	1,14	2,8	1,85	1,28	1,75	1,01	0,72	0,52	0,44	0,42	0,4	0,36
16	1,75	1,75	1,78	1,22	1,71	0,91	0,72	0,52	0,44	0,4	0,38	0,36
17	1,35	3,19	2,38	1,18	2,03	0,87	0,73	0,55	0,44	0,4	0,38	0,36
18	1,33	2,23	2,53	1,26	2,07	1,3	0,68	0,52	0,43	0,4	0,37	0,36
19	1,19	2,42	2,8	1,12	1,82	0,95	0,68	0,52	0,44	0,41	0,37	0,36
20	1,84	2,61	2,83	1,14	1,69	0,9	0,65	0,51	0,42	0,41	0,37	0,35
21	1,48	2,56	2,36	1,81	1,68	0,9	0,64	0,51	0,42	0,4	0,37	0,34
22	1,58	2,47	2,29	1,57	1,42	1,12	0,66	0,51	0,42	0,4	0,37	0,34
23	1,47	2,08	1,86	1,18	1,4	0,98	0,55	0,51	0,42	0,39	0,35	0,34
24	1,43	1,92	1,09	1,44	1,28	1,21	0,55	0,51	0,43	0,39	0,35	0,34
25	1,12	1,83	1,78	1,32	1,29	1,04	0,64	0,49	0,43	0,38	0,35	0,35
26	1,15	1,82	2,01	2,09	1,68	0,97	0,64	0,49	0,43	0,39	0,35	0,35
27	1,13	1,52	1,42	1,48	1,8	0,96	0,62	0,48	0,42	0,4	0,35	0,35
28	1,22	2,37	2,18	1,35	1,14	0,96	0,61	0,48	0,42	0,4	0,37	0,35
29	1,3	1,66	1,7	1,35	1,45	0,94	0,61	0,48	0,42	0,4	0,37	0,35
30	1,35		1,72	1,28	1,11	0,94	0,6	0,48	0,42	0,4	0,37	0,34
31	1,53		1,57		1,07		0,6	0,46		0,4		0,34

Tabla B.1: Datos 2012.

Día	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
1	0,35	1,11	2,28	1,37	1,14	0,83	0,68	0,54	0,45	0,41	0,38	0,33
2	0,37	1,52	2,04	1,3	1,37	0,82	0,68	0,53	0,45	0,4	0,38	0,33
3	0,38	1,13	2,21	1,23	1,14	0,96	0,68	0,53	0,45	0,4	0,39	0,33
4	0,44	1,06	2,86	1,43	1,09	0,92	0,62	0,53	0,45	0,4	0,39	0,33
5	0,52	1,09	2,25	1,15	1,09	0,84	0,62	0,53	0,44	0,39	0,38	0,33
6	0,51	1,11	2,25	1,11	1,08	0,85	1,31	0,52	0,43	0,4	0,38	0,37
7	0,6	1,1	1,98	1,15	1,07	1,23	0,7	0,52	0,43	0,4	0,37	0,36
8	0,57	1,07	1,58	1,34	1,04	0,88	0,66	0,52	0,43	0,38	0,37	0,4
9	0,55	1,62	1,46	1,51	1,04	0,88	0,64	0,52	0,44	0,38	0,37	0,42
10	0,56	1,39	1,42	1,55	1,01	0,86	0,64	0,52	0,44	0,38	0,37	0,38
11	0,46	1,63	1,38	1,18	1,06	0,82	0,62	0,52	0,43	0,37	0,37	0,38
12	0,62	1,57	1,89	1,35	0,94	0,86	0,62	0,51	0,43	0,36	0,36	0,37
13	1,07	1,41	1,3	1,24	0,88	0,85	0,62	0,51	0,43	0,37	0,35	0,37
14	0,84	1,44	1,62	1,68	0,88	0,83	0,61	0,51	0,42	0,38	0,35	0,36
15	0,73	1,32	1,35	1,64	0,88	0,81	0,6	0,51	0,42	0,38	0,35	0,36
16	1,01	1,26	1,89	1,31	0,86	0,81	0,59	0,51	0,42	0,38	0,36	0,35
17	0,74	1,29	1,32	2,21	0,84	0,8	0,58	0,5	0,41	0,37	0,36	0,36
18	0,78	1,21	1,84	2,95	0,83	0,8	0,58	0,48	0,41	0,37	0,36	0,36
19	0,67	1,18	1,26	2,42	0,81	0,79	0,58	0,48	0,42	0,37	0,36	0,36
20	0,85	1,12	1,22	2,78	0,81	0,77	0,57	0,47	0,42	0,38	0,36	0,36
21	0,72	1,05	1,18	1,77	0,81	0,76	0,57	0,47	0,41	0,36	0,36	0,35
22	0,78	1,04	1,18	1,87	0,8	0,76	0,57	0,47	0,41	0,36	0,36	0,35
23	0,77	1,09	1,12	1,64	0,8	0,74	0,57	0,47	0,41	0,36	0,36	0,34
24	0,71	2,53	1,21	1,6	0,81	0,72	0,56	0,47	0,4	0,36	0,36	0,35
25	0,76	1,41	1,17	1,43	0,81	0,74	0,56	0,47	0,4	0,36	0,36	0,34
26	1,15	1,23	1,13	1,45	0,82	0,71	0,56	0,47	0,4	0,36	0,36	0,34
27	1,23	1,36	1,15	1,34	1,02	0,7	0,55	0,48	0,4	0,36	0,36	0,54
28	1,13	2,51	1,74	1,34	0,82	0,69	0,55	0,48	0,4	0,36	0,34	0,32
29	1,09		2,07	1,2	0,81	0,68	0,55	0,47	0,4	0,34	0,34	0,48
30	1,1		1,4	1,17	1,38	0,68	0,55	0,46	0,4	0,34	0,34	0,48
31	1,09		1,27		0,85		0,55	0,45		0,34		0,42

Tabla B.2: Datos 2013.

Apéndice C

Algoritmos

```
function [Z]=vaz(a,b,p)
    % a: tamaño mínimo del intervalo
    % b: tamaño máximo del intervalo
    % p: probabilidad
    num_ale=unifrnd(a,b); %crea el número aleatorio uniforme en [a,b]
    if num_ale <= p
        Z=1;
    else
        Z=-1;
    end
end
end
```

Figura C.1: Valor

```

function [t,X] =cam_ale(N,X_0,p)
    % N:    tamaño de pasos o apuestas
    %X_0:   valor inicial del juego de probabilidad
    X=[];   % almacena la caminata
    t=[];   % almacena los tiempos de la caminata
    Y=[];   % almacena los números aleatorios generados
    a=0; b=1; % para trabajar en el intervalo [0, 1]
    X(1)=X_0; %la caminata inicia en X_0
    t(1)=0; % tiempo inicial
    for i=1:N
        Y(i)=vaz(a,b,p);
        X(i+1)=X(i) + Y(i);
        t(i+1)=i;
    end
end
end

```

Figura C.2: Martingala

```

%Simulación de una trayectoria del Movimiento Browniano
function [t,B] = Sim_MB1(T,N)
    delta_t=T/N; gamma=sqrt(delta_t);
    B=[]; t=[];
    t=[0:delta_t:T];
    B(1)=0;
    for i=1:N
        B(i+1)=B(i)+gamma*randn;
    end
end
end

```

Figura C.3: Movimiento Browniano

```

a=1; b=100; tao=10; paso=100;
h=(b-a)/paso;
x=a:h:b;
n=length(x);
for j=1:tao
    A1=[]; B1=[];
    for i=1:n
        A1(i)=1-erf(sqrt(x(i)/(2*j)));
        B1(i)=sqrt(tao/(2*pi*x(i)));
    end
    hold on
    plot(x,A1,'b',x,B1,'r')
    title('B(t)^2')
    hold off
end

```

Figura C.4: Para la submartingala $B(t)^2$

```

function [t,X] = Sim_MB2(N,a,b)
    B=[]; X=[]; t=[];
    [t,B]=Sim_MB1(1,N);
    for i=1:N+1
        X(i)=a+B(i)-t(i)*(B(N+1)-b+a);
    end
end

```

Figura C.5: Puente Browniano

```

function [t,D] = Sim_MB6(T,N)
    B=[]; t=[]; D=[];
    [t,B]=Sim_MB1(T,N);
    N1=length(t);
    D(1)=0;
    for i=1:N1-1
        D(i+1)=(B(i+1)-B(i))/(t(i+1)-t(i));
    end
end

```

Figura C.6: Ruido Blanco

```

function [t,Y] = Varcuadr(T,N)
    t=[]; Y=[]; B=[];
    [t,B] = Sim_MB1(T,N);
    Y(1)=(B(2)-B(1))^2;
    for j=1:length(B)-1
        a=0;
        for k=1:j
            a=a+(B(k+1)-B(k))^2;
        end
        Y(j+1)=a;
    end
end

```

Figura C.7: Variación cuadrática

```

function [t,Y] = Varacot(T,N)
    t=[]; Y=[]; B=[];
    [t,B] = Sim_MB1(T,N);
    Y(1)=abs(B(2)-B(1));
    for j=1:length(B)-1
        a=0;
        for k=1:j
            a=a+abs(B(k+1)-B(k));
        end
        Y(j+1)=a;
    end
end

```

Figura C.8: Variación acotada