Resolución de ecuaciones no lineales

- Solucionan ecuaciones no lineales tipo f(x)=0
- Normalmente cada método tiene sus requisitos
- Métodos son iterativos

Métodos iterativos para resolver f(x)=0

En general métodos iterativos consisten en

1. Obtener una aproximación inicial x_0
2. Refinar la aproximación inicial mediante una fórmula iterativa que genera nuevos valores x_1, x_2, …, que, idealmente, convergerán a la solución buscada x^*.
3. Establecer un criterio de parada o test de finalización, satisfecho el cual, se detiene el proceso de obtención de iterados.

   x_k se llama iterado k – esimo y el error de esta aproximación viene determinado por

   $\varepsilon_k = |x_k - x^*|$

Método de punto fijo

- Resuelve la ecuación g(x)=x

Concepto de iteración. Repetir un proceso hasta que se obtiene un resultado.

Idea del método: Partiendo de punto inicial aplicando la formula o función g(x) calcularemos los términos sucesivos:

$$\{x_k\}: \quad \begin{aligned} & x_0 \\ & x_1 = g(x_0) \\ & x_2 = g(x_1) \\ & \ldots\ldots \\ & x_k = g(x_{k-1}) \\ & x_{k+1} = g(x_k) \\ & \ldots\ldots \end{aligned}$$

Definición. Un punto fijo de una función g(x) es un numero real P tal que P = g (P).

Definición. La iteración $x_n = g(x_{n-1})$ para n = 0, 1,… se llama iteración de punto fijo.

Ejemplos:

1) La ecuación $\cos x - x = 0$ se puede transformar en $\cos x = x$.

2) La ecuación $\tan x - e^{-x} = 0$ se puede transformar en $x + \tan x - e^{-x} = x$.

Convergencia del método punto fijo.

Teorema de punto fijo. Supongamos que

(i) $g, g' \in C[a,b]$,

(ii) K es una constante positiva,

(iii) $x_0 \in (a,b)$

(iv) $g(x) \in [a,b]$ para todo $x \in [a,b]$.

Entonces hay un punto fijo P de g en [a,b].

- Si $|g'(x)| \le K < 1$ para todo $x \in [a,b]$, entonces P es el único punto fijo de g en [a,b] y la iteración $x_n = g(x_{n-1})$ converge a dicho punto fijo P. En este caso, se dice que P es un punto fijo atractivo.
- Si $|g'(x)| > 1$ y $x_0 \ne P$ entonces la iteración $x_n = g(x_{n-1})$ no converge a P. En este caso se dice que P es un punto fijo repulsivo y la iteración presenta divergencia local.

Ejemplos:

- En el ejemplo 1, $g(x) = \cos x$ claramente se cumple la condición de que $|g'(x)| < 1$ en el intervalo [0,1].

  Por lo tanto el método sí converge a la raíz.

- En el ejemplo 2, $g(x) = x + \tan x - e^{-x}$ en [0,1]. En este caso, $|g'(x)| = |1 + \sec^2 x + e^{-x}| > 1$. Por lo tanto, el método no converge a la raíz.

Interpretación grafica de la iteración de punto fijo:

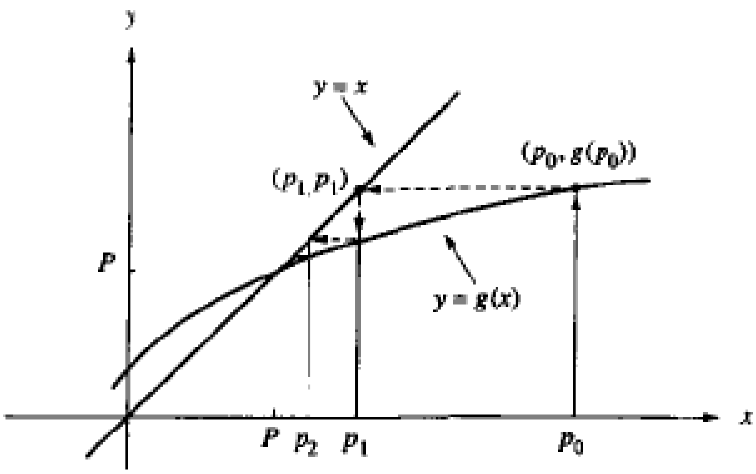


Figure 2.4 (a) Monotone convergence when $0 < g'(P) < 1$.

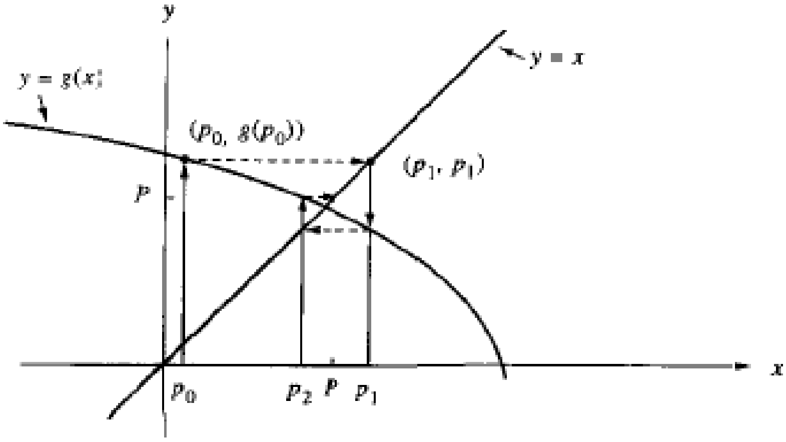


Figure 2.4 (b) Oscillating convergence when $-1 < g'(P) < 0$.

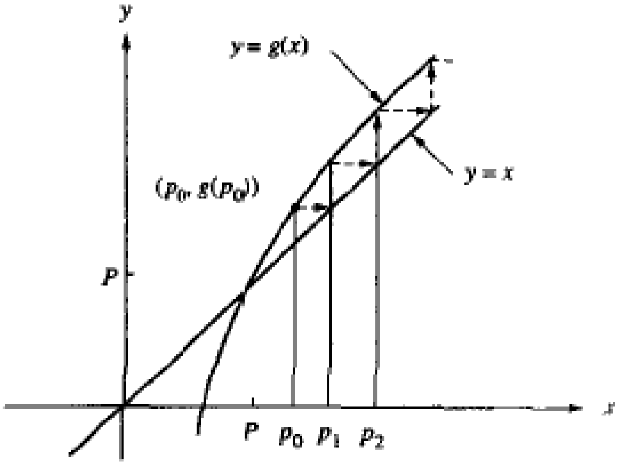


Figure 2.5 (a) Monotone divergence when $1 < g'(P)$.

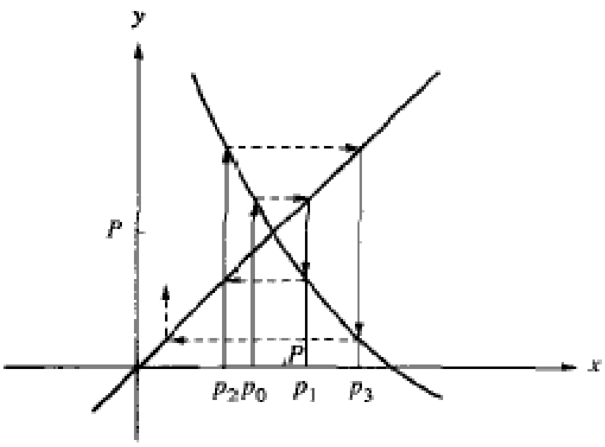


Figure 2.5 (b) Divergent oscillation when $g'(P) < -1$.

Ejemplo (verificar):

1. Para la función $g(x) = 1/2(10 - x^3)^{1/2}$

$|g'(2)| \approx 2.12$ no hay convergencia a punto fijo.

2. Empezando con x=1.5 y cambiando (disminuyendo) intervalo a [1,1.5]. Aquí g siga decreciente y además $|g'(1.5)| \approx 0.66$, entonces hay convergencia.

Ejercicio. Hallar la raíz de la ecuación x = 2cosx partiendo desde x = 1 por el método de punto fijo, estudiar el valor de la derivada.

Ejercicio: Usar el método de iteración del punto fijo para aproximar la raíz de $f(x) = x^2 - 5x - e^x$, comenzando con $x_0 = 0$. Hacer 5 iteraciones.

Ejercicio: Averiguar si hay convergencia a punto fijo para la función $g(x) = (10/(4+x))^{1/2}$ en el intervalo [1,2]

Formula adicional: el error de la iteración n-esima esta acotado por

$$|x_n - x^*| \leq \frac{K^n}{1-K}|x_1 - x_2| \quad \text{para } n>=2$$

Método de bisección.

- Se usa para resolver ecuaciones no lineales f(x)=0

Teorema. Una función f(x) monótona y continua tiene el único cero en el intervalo [a,b] si y solo si ella tiene signos diferentes en los extremos de este intervalo.

- Ventaja es que siempre converge si partimos de intervalo que contiene la raíz.

Link para leer descripción del método:
http://noosfera.indivia.net/metodos/biseccion.html

Formas de "parar las iteraciones": (criterios de parada tradicionales)

1. Por la función: $|f(x)|<eps$

2. Error absoluto:
   $|x_n-x^*|<eps2$
   Donde x^* es la raíz (no la conocemos!!!)
   Por eso en vez de esa fórmula se usa:
   $|x_n-x_{n-1}|<eps2$

3. Error relativo
   $|x_n-x_{n-1}/x_n|<eps3$

Ejemplo (completar líneas):
Resolver la ecuación no lineal: $h(x)=xsen(x)-1, \quad [0,2]$

K	a_k	Punto medio c_k	b_k	F(a)	$f(c_k)$	F(b)
0	0	1	2	-1	-0.158529	0.8186
1	1	1.5	2	-0.158529	0.496242	0.8186

Ejercicios:

1. Encontrar la raíz de la ecuación $x^3+4x^2-10=0$ en [1,2].
Respuesta: 1.36511

2. Sea $f(x)=(x+2)(x+1)x(x-1)^3(x-2)$. ¿A cual cero de f converge el método de bisecciones los siguientes intervalos?
a) [-3, 2.5]
b) [-2.5, 3]

3. Dibujar la grafica de g(x), la recta y = x y el punto fijo dado P en un mismo sistema de coordenadas. Usando el valor inicial dado p_0 calcular

p_1, p_2. Basándose en su dibujo determinar geométricamente si la iteración de punto fijo correspondiente converge. Verificar eso analíticamente basándose en el teorema de punto fijo.

$g(x) = (6+x)^{1/2}, \quad P = 3 \ y \ p_0 = 7$

Tarea Casa:

1. Para la siguiente función halle un intervalo [a,b] de manera que f(a) y f(b) tengan distinto signo.

$f(x) = \cos(x) + 1 - x$

2. Dibujar la grafica de g(x), la recta y=x y el punto fijo dado P en un mismo sistema de coordenadas. Usando el valor inicial dado p_0 calcular p_1, p_2. Basándose en su dibujo determinar geométricamente si la iteración de punto fijo correspondiente converge. Verificar eso analíticamente basándose en el teorema de punto fijo.

$g(x) = x^2/3, \quad P = 3 \ y \ p_0 = 3.5$

Solución

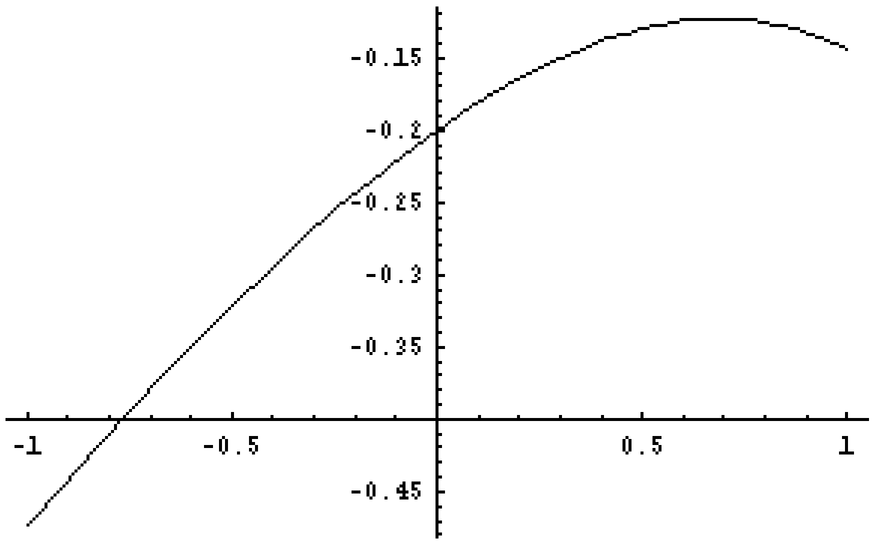
Si despejamos la x del término lineal, vemos que la ecuación equivale a

$$\frac{x^2 - e^x}{5} = x$$

de donde,

$$g(x) = \frac{x^2 - e^x}{5}$$

En este caso, tenemos que $g'(x) = \frac{2x - e^x}{5}$. Un vistazo a la gráfica,



nos convence que $|g'(x)| < 1$, para $x \in [-1,1]$, lo que es suficiente para deducir que el método sí converge a la raíz buscada.

Aplicando la fórmula iterativa, tenemos:

$$x_1 = g(x_0) = -0.2$$

Aplicando nuevamente la fórmula iterativa, tenemos:

$$x_2 = g(x_1) = -0.1557461506$$

Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

Aprox. a la raíz
0

-0.2
-0.1557461506
-0.1663039075
-0.163826372
-0.164410064

De donde vemos que la aproximación buscada es:

$$x_5 = -0.164410064$$