**Interpolación polinomial.**

Interpolar significa estimar el valor desconocido de una función en un punto, tomando una medida ponderada de sus valores conocidos en puntos cercanos al dado.

Problema: tenemos

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| x | X0 | X1 | X2 | … | XN |
| y | Y0 | Y1 | Y2 | … | YN |

y buscamos un polinomio P con el menor grado posible para el cual:

P(Xi) =Yi,     0<= i <= N

<u>Teorema.</u> Si X0, X1, …, XN son números reales distintos, entonces para valores arbitrarios Y0, Y1, …, YN existe único $P_N$ máximo de grado N, de manera que:

P(Xi) =Yi,     0<= i <= N.

## Interpolación de Lagrange

Interpolación lineal es…

Pendiente $m = (y_1 - y_0)/(x_1 - x_0)$ de la recta que pasa por 2 puntos

Ecuación de la recta $y = m(x - x_0) + y_0$,     de allá obtenemos

Polinomio de grado menor o igual a uno:

$$y = P(x) = y_0 + (y_1 - y_0)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Este polinomio si pasa por los puntos…verificamos eso

$$P(x_0) = y_0 + (y_1 - y_0)(0) = y_0,$$
$$P(x_1) = y_0 + (y_1 - y_0)(1) = y_1.$$

Otra forma ver obtener eso descubierta por Lagrange:

$$y = P_1(x) = y_0\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

$$L_{1,0}(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad \text{and} \quad L_{1,1}(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Como

$L_{1,0}(x_0) = 1, L_{1,0}(x_1) = 0, L_{1,1}(x_0) = 0,$ y $L_{1,1}(x_1) = 1$

Entonces este polinomio pasa por esos dos puntos:

$$P_1(x_0) = y_0 + y_1(0) = y_0 \quad \text{and} \quad P_1(x_1) = y_0(0) + y_1 = y_1.$$

Los L son polinomios coeficientes de Lagrange (o funciones cardinales) y el propio polinomio de grado uno seria:

$$P_1(x) = \sum_{k=0}^{1} y_k L_{1,k}(x).$$

Formula generalizada es:

$$P_N(x) = \sum_{k=0}^{N} y_k L_{N,k}(x),$$

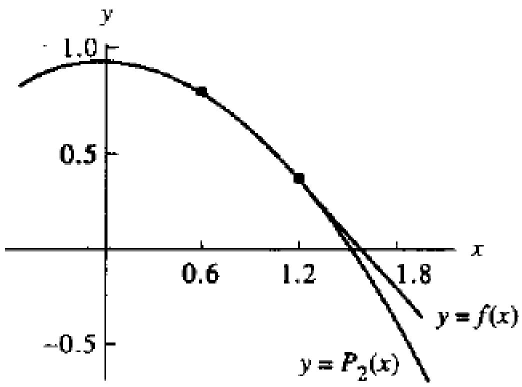
$$L_{N,k}(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_N)}{(x_k - x_0)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_N)}.$$

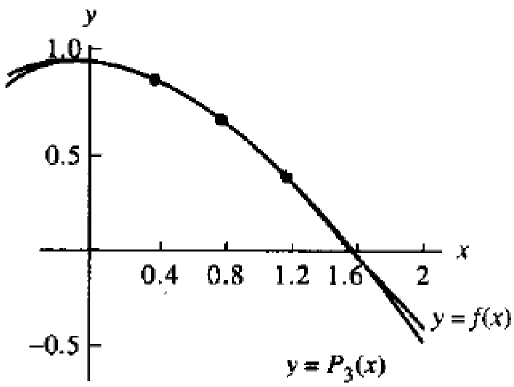
<u>Ejemplo 1</u>. Consideremos la grafica de y=f(x) =cos(x) en [0, 1.2]

Usar los tres nodos $x_0 = 0.0,\ x_1 = 0.6$, and $x_2 = 1.2$ para construir el polinomio interpolador cuadrático

<u>Solución:</u>

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= 1.0\frac{(x-0.6)(x-1.2)}{(0.0-0.6)(0.0-1.2)} + 0.825336\frac{(x-0.0)(x-1.2)}{(0.6-0.0)(0.6-1.2)} \\
&\quad + 0.362358\frac{(x-0.0)(x-0.6)}{(1.2-0.0)(1.2-0.6)} \\
&= 1.388889(x-0.6)(x-1.2) - 2.292599(x-0.0)(x-1.2) \\
&\quad + 0.503275(x-0.0)(x-0.6).
\end{aligned}$$



## Términos y cotas del error.

**Teorema. (Polinomio interpolador de Lagrange).** Supongamos que $f \in C^{N+1}[a,b]$ y que $x_0,\ldots x_N \in [a,b]$ son N+1 nodos de interpolación. Si $x \in [a,b]$, entonces,

$$f(x) = P_N(x) + E_N(x),$$

donde $P_N(x)$ es un polinomio que podemos usar para aproximar f(x):

$$f(x) \approx P_N(x) = \sum_{k=0}^{N} f(x_k) L_{N,k}(x).$$

Llamado polinomio interpolador de Lagrange de f para todos los nodos dados, y el término del error $E_N(x)$ se puede escribir como

$$E_N(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_N) f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!},$$

para algún valor c=c(x) del intervalo [a,b].

Teorema. (Cotas del error para la interpolación de Lagrange con nodos equispaciados).

Supongamos que f(x) esta definida en un intervalo [a,b], que contiene los nodos equispaciados $x_k = x_0 + hk$. Supongamos además que f(x) y sus derivadas, hasta la de orden 4, son continuas (por tanto, acotadas) en el subintervalo $[x_0, x_N]$; es decir,

$$|f^{(N+1)}(x)| \le M_{N+1} \quad \text{for } x_0 \le x \le x_N,$$

para N=1,2,3. Entonces los términos del error dados en teorema 1 correspondientes a los casos N=1,2 y 3 admiten cotas de su tamaño expresables de manera cómoda por

$$|E_1(x)| \le \frac{h^2 M_2}{8} \quad \text{valid for } x \in [x_0, x_1],$$

$$|E_2(x)| \le \frac{h^3 M_3}{9\sqrt{3}} \quad \text{valid for } x \in [x_0, x_2],$$

$$|E_3(x)| \le \frac{h^4 M_4}{24} \quad \text{valid for } x \in [x_0, x_3].$$

Ejercicios: 1. Escribir para la siguiente función f(x) el termino del error $E_3(x)$ del polinomio interpolador de Lagrange cúbico con nodos $x_0 = -1, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 3$ y $x_3$=4.

$$f(x) = x^5 - 5x^4$$

Después, calcular el error si utilizamos el polinomio cúbico para aproximar el valor de la función en el x=0.8

Ejemplo. Consideremos función f(x)=cos(x) en el intervalo [0.0; 1.2]. Usar formulas del teorema para determinar las cotas del error de los polinomios interpoladores de Lagrange de orden 1, 2 y 3.
Tablero.

Ejercicio clase. Consideremos la función f(x)=sen(x) en el intervalo [0,1]. Usando el ultimo teorema determinar el tamaño de paso correspondiente h para el cual el polinomio de interpolación de Lagrange cuadrático tiene una precisión de $10^{-6}$ (o sea, halle h tal que $|E_2(x)| < 5*10^{-7}$).