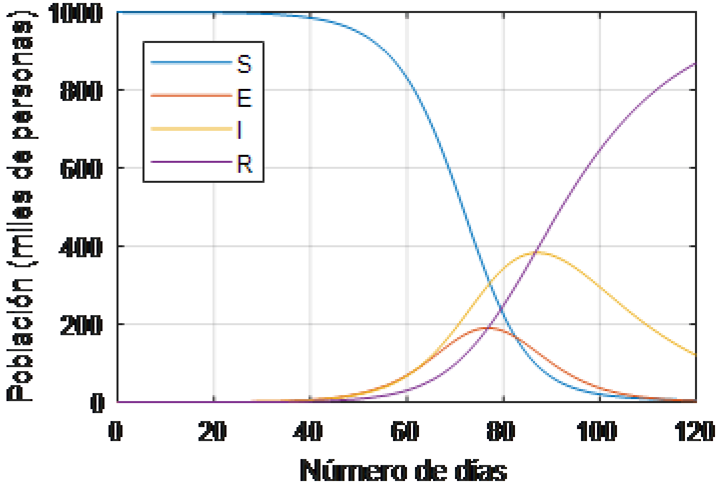

El método de Runge-Kutta4

Ecuaciones diferenciales ordinarias

- Se usan para modelar problemas de matemáticas, biología, química, física entre otros

- La descripción matemática de un sistema de fenómenos se llama **modelo matemático** y se construye con ciertos objetivos

- Con frecuencia es deseable describir en términos matemáticos el comportamiento de algunos sistemas o fenómenos de la vida real, sean físicos, sociológicos o hasta económicos

Modelos matemáticos

La formulación de un modelo matemático de un sistema se inicia con

- Identificación de las variables que ocasionan el cambio del sistema. Podremos elegir no incorporar todas estas variables en el modelo desde el comienzo.
- Se establece un conjunto de suposiciones razonables o hipótesis, acerca del sistema que estamos tratando de describir.

Ejemplo ecuación diferencias

$$\frac{dy}{dt} = 1 - e^{-t}$$

Aquí y=y(t)

$$\mathrm{y(t)} = \mathrm{t} + e^{-t} + C$$

Donde C es la constante de integración

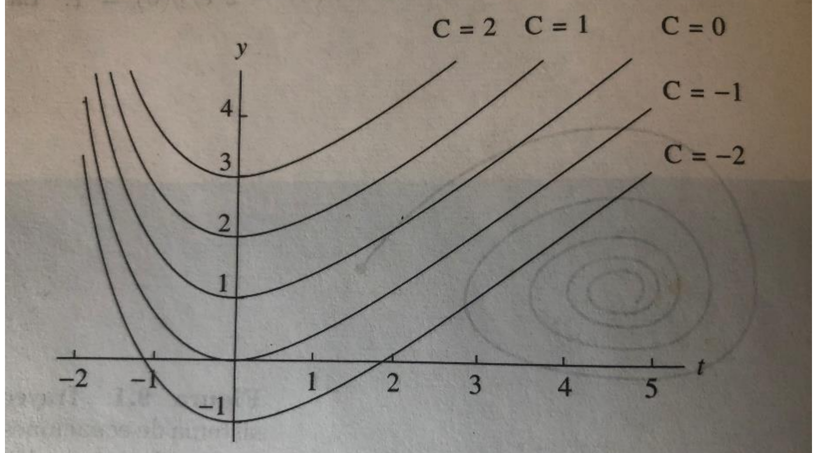

Figura 9.2 La familia de curvas $y(t) = t + e^{-t} + C$.

Método Runge-Kuta de orden 4 (RK4)

- No todos los problemas pueden resolverse explícitamente
- Preciso
- Estable
- Fácil de programar
- Idea: Sea [a,b] el intervalo donde halamos la solución de problema con valor inicial:

$$y' = f(t,y) \quad \text{con } y(a) = y_0$$

- Se construye un conjunto finito de puntos $\{(t_k, y_k)\}$ que son aproximaciones de la solucion: $y(t_k) \approx y_k$

Procedimiento:

- Intervalo [a, b]: M subintervalos

$t_k = a + kh \quad para\ k = 0, 1, 2$…M donde h=(b-a)/M

h se llama tamaño de paso

- A partir de punto inicial (t_0, y_0) se genera la sucesión de aproximaciones usando la formula recursiva:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h(f_1+2f_2+2f_3+f_4)}{6},$$ donde

$$f_1 = f(t_k, y_k)$$

$$f_2 = f(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f_1)$$

$$f_3 = f(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f_2)$$

$$f_4 = f(t_k + h, y_k + h f_3)$$

Ejemplo:

- $y' = \frac{t-y}{2} \quad en\ [0,3]\ con\ y(0) = 1$
- Comparar las soluciones obtenidas para h=1, 0.5, 0.25, y 0.125.
- Para h=0.25:
- $f_1 = f(t_0, y_0) = f(0,1)$ =(0-1)/2=-0.5 (k=0)
- $f_2 = f(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} f_1) = f(0.125{,}1 + 0{,}25(-0{,}5)/2) =$

  =f(0.125, 0.9375)=(0.125-0.9375)/2=-0.40625
- $f_3 = f(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} f_2)$=f(0.125, 0.94921875)=-0.4121094
- $f_4 = f(t_0 + h, y_0 + h f_3)$=f(0.25, 0.89697265)=-0.3234863

y_1=1+0.25(-0.5+2(-0.40625-0.4121094)-0,3234863)/6=0.8974915

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales.

Un problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = g(t,x,y) \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Solucion: x(t) e y(t):

x'(t)=f(t,x(t),y(t))

y'(t)=g(t,x(t),y(t)) con

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Ejemplo: problema y solucion

Problema:

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{x}+2\mathrm{y}$$

$$\frac{dy}{dt} = 3x + 2y$$

$x(0)=6 \quad y(0)=4$

Solucion: $x(t) = 4e^{4t} + 2e^{-t}$

$$y(t) = 6e^{4t} - 2e^{-t}$$

Resolucion numerica

Formulas de RK4 serian:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{h(f_1+2f_2+2f_3+f_4)}{6},$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h(g_1+2g_2+2g_3+g_4)}{6},$$

$$f_1 = f(t_k, x_k, y_k) \quad \text{y} \quad g_1 = g(t_k, x_k, y_k)$$

$$f_2 = f(t_k + \frac{h}{2},\ x_k + \frac{h}{2} f_1, y_k + \frac{h}{2} g_1)$$

$$g_2 = g(t_k + \frac{h}{2},\ x_k + \frac{h}{2} f_1, y_k + \frac{h}{2} g_1)$$

$$f_3 = f(t_k + \frac{h}{2},\ x_k + \frac{h}{2} f_2, y_k + \frac{h}{2} g_2)$$

$$g_3 = g(t_k + \frac{h}{2},\ x_k + \frac{h}{2} f_2, y_k + \frac{h}{2} g_2)$$

$$f_4 = f(t_k + h,\ x_k + h f_3, y_k + h g_3)$$

$$g_4 = g(t_k + h,\ x_k + h f_3, y_k + h g_3)$$

En SEIRD

(1) $\frac{dE}{dt}$: =f $(t, S_t, Ia_t, Is_t\ , E_t\ )$

(2):$\frac{dIa}{dt}$=$g(t\ , E_t\ , Ia_t)$

(3):$\frac{dIs}{dt}$=$n\ (t\ , E_t\ , Is_t)$

(4): $\frac{dR}{dt}$=$m\ (t, Is_t, Ia_t)$

(5): $\frac{dD}{dt}$=r (t, Is_t)

(6): $\frac{dN}{dt}$=d $(t, S_t, Ia_t, Is_t\ , E_t\ , R_t)$

(7):$\frac{dS}{dt}$: = $z\ (t, S_t, Ia_t, Is_t)$

Intervalo 0<=t<=366 (dias)

H=dt=0.02

Valores iniciales

$$S_0 = N = 9000000 \text{ (Bogota)}$$

$I_{S_0} = 1$ (población inicial de los sintomáticos)

$$I_{a_0} = 1$$
$$E_0 = 0$$
$$D_0 = 0$$
$$S_0 = N$$
$$R_0 = 0$$