Sistemas de ecuaciones lineales.

- Un sistema de **m** ecuaciones con **n** incógnitas se puede escribir, en general:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_m = b_m \end{cases}$$

Algoritmo de sustitución regresiva

- Resuelve un sistema de ecuaciones lineales a partir de un sistema triangular.

Definición: Una matriz A de NxN es triangular superior cuando sus elementos verifican $a_{ij} = 0 \; si \; i > j$.

$$\begin{array}{rrrr} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + & a_{1N-1}x_{N-1} + & a_{1N}x_N = b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + & a_{2N-1}x_{N-1} + & a_{2N}x_N = b_2 \\ a_{33}x_3 + \cdots + & a_{3N-1}x_{N-1} + & a_{3N}x_N = b_3 \\ & \vdots & \vdots \\ & a_{N-1N-1}x_{N-1} + & a_{N-1N}x_N = b_{N-1} \\ & & a_{NN}x_N = b_N. \end{array}$$

Teorema. (Sustitución regresiva). Supongamos que AX=B es un sistema triangular superior como dado anteriormente.

Si $a_{kk} \neq 0 \quad \text{for } k = 1, 2, \ldots, N,$ entonces existe única solución de este sistema:

$$x_N = \frac{b_N}{a_{NN}}.$$

$$x_{N-1} = \frac{b_{N-1} - a_{N-1N}x_N}{a_{N-1N-1}}.$$

$$x_{N-2} = \frac{b_{N-2} - a_{N-2N-1}x_{N-1} - a_{N-2N}x_N}{a_{N-2N-2}}.$$

En el caso general

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^{N} a_{kj}x_j}{a_{kk}} \quad \text{for } k = N-1,\ N-2,\ \ldots,\ 1.$$

Eliminación gaussiana y pivoteo

- Dos sistemas son equivalentes cuando tienen el mismo conjunto de soluciones.

- Para llevar un sistema tipo AX=B a un sistema tipo UX=Y (donde U es matriz triangular superior) utilizamos transformaciones lineales (elementales).
- Armamos Matriz Aumentada o extendida:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} & b_N \end{array}\right].$$

<u>Transformaciones elementales:</u>

- Intercambiar las posiciones de las filas (o columnas).

- Multiplicar una fila (o una columna) por una constante (que no sea cero).

- Multiplicar una fila (o una columna) por una constante (que no sea cero) y sumarla a otra fila (columna).

<u>Pivote:</u> El elemento a_{rr} de la matriz de los coeficientes A que se usa para eliminar $a_{kr}, k = r+1, r+2, ..., N$ se llama r-esimo elemento pivote.

<u>Eliminación gaussiana. Ejemplo.</u>

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 + 4x_4 &= 13 \\ 2x_1 + 0x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 28 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \ \ x_4 &= 20 \\ -3x_1 + \ \ x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= \ \ 6. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} \text{pivot} \rightarrow \\ m_{21} = 2 \\ m_{31} = 4 \\ m_{41} = -3 \end{array} \left[\begin{array}{rrrr|r} \underline{1} & 2 & 1 & 4 & 13 \\ 2 & 0 & 4 & 3 & 28 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & 20 \\ -3 & 1 & 3 & 2 & 6 \end{array}\right].$$

$$
\begin{array}{l}
\\
\text{pivot} \rightarrow \\
m_{32} = 1.5 \\
m_{42} = -1.75
\end{array}
\left[\begin{array}{rrrr|r}
1 & 2 & 1 & 4 & 13 \\
0 & \underline{-4} & 2 & -5 & 2 \\
0 & -6 & -2 & -15 & -32 \\
0 & 7 & 6 & 14 & 45
\end{array}\right].
$$

$$
\begin{array}{l}
\\
\\
\text{pivot} \rightarrow \\
m_{43} = -1.9
\end{array}
\left[\begin{array}{rrrr|r}
1 & 2 & 1 & 4 & 13 \\
0 & -4 & 2 & -5 & 2 \\
0 & 0 & \underline{-5} & -7.5 & -35 \\
0 & 0 & 9.5 & 5.25 & 48.5
\end{array}\right].
$$

$$
\left[\begin{array}{rrrr|r}
1 & 2 & 1 & 4 & 13 \\
0 & -4 & 2 & -5 & 2 \\
0 & 0 & -5 & -7.5 & -35 \\
0 & 0 & 0 & -9 & -18
\end{array}\right].
$$

$$x_4 = 2, \qquad x_3 = 4, \qquad x_2 = -1, \qquad x_1 = 3.$$

<u>Ejercicio. Resuelve el sistema</u>:

$$
\begin{cases}
x - 2y - 3z = 1 \\
3x + y - 7z = 0 \\
x + 5y - z = 2
\end{cases}
$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & -2 & -3 & 1 \\
3 & 1 & -7 & 0 \\
1 & 5 & -1 & 2
\end{pmatrix}_{F2\ -3F1}
\qquad
\begin{pmatrix}
1 & -2 & -3 & 1 \\
0 & 7 & 2 & -3 \\
1 & 5 & -1 & 2
\end{pmatrix}_{F3\ -\ F1}
$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & -2 & -3 & 1 \\
0 & 7 & 2 & -3 \\
0 & 7 & 2 & 1
\end{pmatrix} F_3 - F_2
\qquad
\begin{pmatrix}
1 & -2 & -3 & 1 \\
0 & 7 & 2 & -3 \\
0 & 0 & 0 & 4
\end{pmatrix}
$$

, luego el sistema no tiene solución.

Teorema: Si A es una matriz invertible de orden NxN, entonces existe un sistema lineal UX=Y, equivalente al sistema AX=B, en el que U es una matriz triangular superior con elementos diagonales diferentes de ceros. Una vez construidos U e Y se usa el algoritmo de sustitución regresiva para resolver UX=Y y, así, calcular la solución X.

Demostración:

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1N}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2N}^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3N}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N1}^{(1)} & a_{N2}^{(1)} & a_{N3}^{(1)} & \cdots & a_{NN}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1\,N+1}^{(1)} \\ a_{2\,N+1}^{(1)} \\ a_{3\,N+1}^{(1)} \\ \vdots \\ a_{N\,N+1}^{(1)} \end{bmatrix} = B.$$

$$UX = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1N}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2N}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3N}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{NN}^{(N)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1\,N+1}^{(1)} \\ a_{2\,N+1}^{(2)} \\ a_{3\,N+1}^{(3)} \\ \vdots \\ a_{N\,N+1}^{(N)} \end{bmatrix} = Y.$$

Demostración y pasos a seguir.

Paso 1.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1N}^{(1)} & a_{1\,N+1}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2N}^{(1)} & a_{2\,N+1}^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3N}^{(1)} & a_{3\,N+1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{N1}^{(1)} & a_{N2}^{(1)} & a_{N3}^{(1)} & \cdots & a_{NN}^{(1)} & a_{N\,N+1}^{(1)} \end{array}\right].$$

Paso 2.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1N}^{(1)} & a_{1\,N+1}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2N}^{(2)} & a_{2\,N+1}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3N}^{(2)} & a_{3\,N+1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{N2}^{(2)} & a_{N3}^{(2)} & \cdots & a_{NN}^{(2)} & a_{N\,N+1}^{(2)} \end{array}\right].$$

for $r = 2 : N$
  $m_{r1} = a_{r1}^{(1)}/a_{11}^{(1)}$;
  $a_{r1}^{(2)} = 0$;
  for $c = 2 : N+1$
    $a_{rc}^{(2)} = a_{rc}^{(1)} - m_{r1} * a_{1c}^{(1)}$;
  end
end

Paso 3.

for $r = 3 : N$
  $m_{r2} = a_{r2}^{(2)}/a_{22}^{(2)}$;
  $a_{r2}^{(3)} = 0$;
  for $c = 3 : N+1$
    $a_{rc}^{(3)} = a_{rc}^{(2)} - m_{r2} * a_{2c}^{(2)}$;
  end
end

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1N}^{(1)} & a_{1\,N+1}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2N}^{(2)} & a_{2\,N+1}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3N}^{(3)} & a_{3\,N+1}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{N3}^{(3)} & \cdots & a_{NN}^{(3)} & a_{N\,N+1}^{(3)} \end{array}\right].$$

Paso p+1.

for $r = p+1 : N$
  $m_{rp} = a_{rp}^{(p)}/a_{pp}^{(p)}$;
  $a_{rp}^{(p+1)} = 0$;

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1N}^{(1)} & a_{1\,N+1}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2N}^{(2)} & a_{2\,N+1}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3N}^{(3)} & a_{3\,N+1}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{NN}^{(N)} & a_{N\,N+1}^{(N)} \end{array}\right].$$

  for $c = p+1 : N+1$
    $a_{rc}^{(p+1)} = a_{rc}^{(p)} - m_{rp} * a_{pc}^{(p)}$;
  end
end

Teorema. Todo sistema de m ecuaciones con n incógnitas, puede reducirse a un sistema equivalente del tipo:

$$c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1'$$

$$c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2'$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$c_{kk}x_k + \cdots + c_{kn}x_n = d_k'$$

$$0 = d_{k+1}'$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$0 = d_m'$$

Consecuencias:

1) *Si alguno de los* **d'_{k+1}, ...,d'_m, es distinto de 0** *el sistema es* **inconsistente.**

2) *Si todos los* **d'_{k+1}, ...,d'_m** son **0** es **consistente**, y a su vez se pueden presentar dos casos:

- Si **k = n** el sistema queda reducido a uno *equivalente* con el mismo *número de ecuaciones que de incógnitas.* Luego la solución es única.
- Si **k<n,** es decir, hay más incógnitas que ecuaciones, entonces, *el sistema tiene infinitas soluciones*;

Ejercicios: 1. Hallar la parábola y=A+Bx+Cx*x que pasa por los puntos (1,4), (2,7) y (3,14).

Método de la dispersión para Sistemas tridiagonales

- Es un caso particular del método de Gauss
- Se aplica cuando matriz A es tridiagonal

Un sistema Ax = b se llama tridiagonal si la matriz A es tridiagonal, o sea,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

- Estos sistemas se presentan en algunos problemas particulares, por ejemplo, al resolver, mediante diferencias finitas, una ecuación diferencial lineal de segundo orden con condiciones de frontera.
- Obviamente este sistema se puede resolver mediante el método de Gauss.

- Dadas las características especiales es mucho más eficiente sacar provecho de ellas.

Ver el siguiente procedimiento de método y completarlo en el cuaderno.

Vamos a resolver entonces el sistema:

$$\begin{array}{llr}
b_1 x_1 + c_1 x_2 & & = d_1 \\
a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 & & = d_2 \\
\qquad a_3 x_2 + b_3 x_3 + c_3 x_4 & & = d_3 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\
 & & a_n x_{n-1} + b_n x_n = d_n
\end{array}$$

Sean $a_1 = 0, \quad c_n = 0$.

La solución del sistema buscamos como

$$x_i = P_i x_{i+1} + Q_i \qquad i = 1,2,\dots, n$$

Tenemos que definir las formulas de los coeficientes P y Q.

Desde la primera ecuación:

$$x_1 = \underline{\qquad} x_2 + \underline{\qquad} = P_1 x_2 + Q_1$$

Entonces

$P_1 =$ y $Q_1 =$

Desde la segunda ecuación obtenemos

$$x_2 = \underline{\qquad\qquad} x_3 + \underline{\qquad\qquad} = P_2 x_3 + Q_2$$

Entonces $P_2 =$ y $Q_2 =$

Continuando el proceso obtenemos

$$x_i = \frac{-c_i}{\qquad} x_{i+1} + \frac{d_i - a_i Q_{i-1}}{\qquad}$$

Entonces

$P_i =$ y $Q_i =$

Como $c_n = 0$ $P_n =$ y $Q_n =$

Después de obtener todos esos coeficientes P y Q se hace sustitución progresiva hallando los valores $x_n ,...., x_1$.

Ejercicio: resolver el sistema triangular aplicando el método:

8x-2y=6

-x+6y-2z=3

2y+10z-4k=8

-z+6k=5

Respuestas: x=1 y=1 z=1 k=1