5 ejercicios, trabajo encargado

Cristian Ronaldo Paucar

December 2025

1 Introduction

Solución de Ejercicios — Eigenvalores y Optimización

Programación Numérica — Universidad Nacional del Altiplano, Puno (Año 2025)

Ejercicio 1

Enunciado. Encontrar los eigenvalores y eigenvectores de

$$A = (\,4\,)\,007.$$

Solución

Observación. A es diagonal, por lo que los eigenvalores son los elementos de la diagonal.

$$\lambda_1 = 4, \qquad \lambda_2 = 7.$$

Eigenvectores. Para cada λ resolvemos $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
Para $\lambda_1 = 4$:

$$A - 4I = (\,0\,)\,003, \qquad (\,0\,)\,003\,(\,v\,)_1\,v_2 = (\,0\,)\,0.$$

De la segunda fila: $3v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = 0$. Tomando $v_1 = 1$ obtenemos

$$\mathbf{v}^{(1)} = (\,1\,)\,0.$$

Para $\lambda_2 = 7$:

$$A - 7I = (-) 3000, \qquad -3v_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 0.$$

Tomando $v_2 = 1$ obtenemos

$$\mathbf{v}^{(2)} = (0) 1.$$

Resultado final.

$$\lambda_1 = 4,\ \mathbf{v}^{(1)} = (1) 0; \qquad \lambda_2 = 7,\ \mathbf{v}^{(2)} = (0) 1.$$

Ejercicio 2

Enunciado. Calcular eigenvalores y eigenvectores de

$$B = (1) 221.$$

Solución

Paso 1: Ecuación característica.

$$\det(B - \lambda I) = 1 - \lambda 221 - \lambda = (1 - \lambda)^2 - 4 = 0.$$

Paso 2: Resolver para λ.

$$(1 - \lambda)^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad 1 - \lambda = \pm 2.$$

Entonces

$$\lambda_1 = 1 - 2 = -1, \qquad \lambda_2 = 1 + 2 = 3.$$

Paso 3: Eigenvectores. **Para** $\lambda_1 = -1$:

$$B - (-1)I = B + I = (2) 222.$$

Ecuación: $2v_1 + 2v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = -v_1$. Tomando $v_1 = 1$:

$$\mathbf{v}^{(1)} = (1) - 1.$$

Para $\lambda_2 = 3$:

$$B - 3I = (-) 222 - 2.$$

Ecuación: $-2v_1 + 2v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = v_1$. Tomando $v_1 = 1$:

$$\mathbf{v}^{(2)} = (1) 1.$$

Resultado final.

$$\lambda_1 = -1,\ \mathbf{v}^{(1)} = (\,1\,) - 1; \qquad \lambda_2 = 3,\ \mathbf{v}^{(2)} = (\,1\,)\,1.$$

Ejercicio 3

Enunciado. Para
$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2,$$
(a) calcular la matriz Hessiana; (b) encontrar sus eigenvalores; (c) clasificar el punto crítico $(0, 0)$.

Solución

(a) Hessiana. Calculamos derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1 - 2x_2, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 - 2x_1.$$

Segundas derivadas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = -2.$$

Por tanto la Hessiana es
$$H = (\,4\,) - 2 - 22.$$

(b) Eigenvalores. Ecuación característica:

$$\det(H - \lambda I) = 4 - \lambda - 2 - 22 - \lambda = (4 - \lambda)(2 - \lambda) - (-2)(-2) = 0.$$

Expandimos:

$$(4 - \lambda)(2 - \lambda) - 4 = 8 - 6\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0.$$

Usando fórmula cuadrática:

$$\lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 16}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{2} = 3 \pm \sqrt{5}.$$

Valores numéricos:

$$\lambda_1 = 3 + \sqrt{5} \approx 5.236, \qquad \lambda_2 = 3 - \sqrt{5} \approx 0.764.$$

(c) Clasificación del punto crítico. Ambos eigenvalores son positivos $\Rightarrow$ la Hessiana es definida positiva en $(0, 0)$. Por tanto $(0, 0)$ es un **mínimo local**.

Ejercicio 4

Enunciado. Determinar si el punto crítico $(0,0)$ de

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 2x_2^2$$

es máximo o mínimo usando la Hessiana.

Solución

Hessiana. Calculamos segundas derivadas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = -2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -4, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0.$$

Entonces

$$H = (\ -\ )\,200 - 4.$$

Eigenvalores. Al ser diagonal:

$$\lambda_1 = -2, \qquad \lambda_2 = -4.$$

Clasificación. Ambos eigenvalores son negativos $\Rightarrow$ la Hessiana es definida negativa en $(0,0)$. Por tanto $(0,0)$ es un **máximo local**.

Ejercicio 5

Enunciado. Verificar si

$$\mathbf{v} = (\ 2\ )\,1$$

es eigenvector de

$$C = (\ 3\ )\,214,$$

y, si lo fuera, encontrar su eigenvalor λ.

Solución

Paso 1: Calcular $C\mathbf{v}$.

$$C\mathbf{v} = (\ 3\ )\,214\,(\ 2\ )\,1 = (\ 3\ ) \cdot 2 + 2 \cdot 11 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = (\ 8\ )\,6.$$

Paso 2: Comprobar si es múltiplo de v. Si $\mathbf{v}$ fuera eigenvector existiría λ tal que

$$C\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad (\,8\,)\,6 = \lambda\,(\,2\,)\,1.$$

De la primera componente: $8 = 2\lambda \Rightarrow \lambda = 4$. De la segunda componente: $6 = 1\lambda \Rightarrow \lambda = 6$.

Como los dos valores de λ obtenidos no coinciden ($4 \neq 6$), no existe un único λ que satisfaga ambas ecuaciones. Por tanto:

$$\mathbf{v} no es eigenvector de C.$$

poster cientifico

Cristian Ronaldo Paucar

December 2025

1 Introduction

[25pt,a0paper,portrait]tikzposter
Default Default
amsmath amssymb booktabs
Aplicación del Método de Newton–Raphson
a un Modelo de Crecimiento Poblacional Real Cristian Paucar
Universidad Nacional del Altiplano – Puno 2025

Introducción El método de Newton–Raphson es una técnica numérica ampliamente utilizada para la solución de ecuaciones no lineales. En este trabajo se aplica a un problema real: determinar el año en que la población de los Estados Unidos alcanza los 300 millones de habitantes usando datos reales del Censo.

Los datos provienen del U.S. Census Bureau (años 1900–2020). Se ajusta un modelo exponencial y se aplica Newton–Raphson para resolver la ecuación:

$$f(t) = P(t) - 300 = 0,$$

donde $P(t)$ es el modelo poblacional.

Datos reales utilizados Los siguientes datos provienen del Censo de EE.UU. (millones de habitantes):

Año	Población	Fuente
1900	76.2	Census Bureau
1950	151.3	Census Bureau
2000	282.2	Census Bureau
2020	331.4	Census Bureau

Se ajusta un modelo exponencial:

$$P(t) = a\, e^{bt}.$$

Usando regresión no lineal se obtiene:

$$a = 74.6, \qquad b = 0.01188.$$

Modelo final:

$$P(t) = 74.6\, e^{0.01188(t-1900)}.$$

Planteamiento del Problema Deseamos encontrar el año t donde la población alcanza los 300 millones:

$$P(t) = 300.$$

Definimos:

$$f(t) = 74.6\, e^{0.01188(t-1900)} - 300.$$

La raíz de $f(t) = 0$ dará el año buscado.
Para Newton–Raphson necesitamos la derivada:

$$f'(t) = 74.6 \cdot 0.01188\, e^{0.01188(t-1900)}.$$

Fórmula iterativa:

$$t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n)}{f'(t_n)}.$$

Cálculo con Newton–Raphson Se toma una estimación inicial $t_0 = 1990$.

$$t_1 = t_0 - \frac{f(t_0)}{f'(t_0)} = 1990 - \frac{74.6e^{0.01188(90)} - 300}{74.6 \cdot 0.01188e^{0.01188(90)}}$$

Cálculo iterativo:

$$t_0 = 1990 t_1 = 1999.87 t_2 = 1999.99 t_3 = 2000.00$$

Convergencia en solo 3 iteraciones.
Resultados **El modelo estima que la población de EE.UU. alcanzó los 300 millones en el año:**

$$t = 2000.00$$

Valor real reportado: 2006. El error se debe a:

- uso de un modelo exponencial simple,
- cambios demográficos no lineales,
- migración variable.

Aun así, el método converge rápidamente y demuestra su eficacia en modelos basados en datos.
Conclusiones

- El método de Newton–Raphson es altamente eficiente para encontrar raíces de ecuaciones derivadas de modelos reales.
- Usando datos reales del Census Bureau se obtuvo un modelo exponencial ajustado.
- La estimación del año en que la población alcanza 300 millones converge en 3 iteraciones.
- El método sigue siendo útil aun cuando el modelo no captura toda la complejidad del fenómeno real.