

Trabajo encargado

3 ejercicios para cada método.

INTERPOLACION LINEAL:

Ejercicio 1:

Un coche recorre 100 km en 1 hora y 200 km en 2 horas. Usa interpolación lineal para estimar la distancia recorrida a los 90 minutos.

Solución:

$$x_0 = 1, y_0 = 100$$

$$x_1 = 2, y_1 = 200$$

$$x = 1.5$$

$$\begin{aligned}y &= y_0 + [(y_1 - y_0)/(x_1 - x_0)] \cdot (x - x_0) \\&= 100 + [(200 - 100)/(2 - 1)] \cdot (1.5 - 1) \\&= 100 + [100/1] \cdot 0.5 \\&= 100 + 50 = \boxed{150 \text{ km}}\end{aligned}$$

Ejercicio 2:

La presión de un gas a 20°C es 1 atm y a 80°C es 1.8 atm. Estima la presión a 50°C usando interpolación lineal.

Solución:

$$x_0 = 20, y_0 = 1$$

$$x_1 = 80, y_1 = 1.8$$

$$x = 50$$

$$\begin{aligned}y &= 1 + [(1.8 - 1)/(80 - 20)] \cdot (50 - 20) \\&= 1 + [0.8/60] \cdot 30 \\&= 1 + 0.4 = \boxed{1.4 \text{ atm}}\end{aligned}$$

Ejercicio 3:

Un tanque se llena con 500 litros en 10 minutos y 1200 litros en 25 minutos. Estima cuántos litros habrá en el tanque a los 18 minutos.

Solución:

$$x_0 = 10, y_0 = 500$$

$$x_1 = 25, y_1 = 1200$$

$$x = 18$$

$$y = 500 + [(1200 - 500)/(25 - 10)] \cdot (18 - 10)$$

$$= 500 + [700/15] \cdot 8$$

$$= 500 + 46.67 \cdot 8$$

$$= 500 + 373.33 = \boxed{873.33 \text{ L}}$$

INTERPOLACION DE LAGRANGE

Ejercicio 1:

Se midió la altura de un niño a los 2, 4 y 6 años: (2, 85 cm), (4, 110 cm), (6, 130 cm).

Usa Lagrange para estimar su altura a los 5 años.

Solución:

$$L_0(5) = [(5-4)(5-6)]/[(2-4)(2-6)] = [(1)(-1)]/[(2)(-2)] = (-1)/8 = -0.125$$

$$L_1(5) = [(5-2)(5-6)]/[(4-2)(4-6)] = [(3)(-1)]/[(2)(-2)] = (-3)/(-4) = 0.75$$

$$L_2(5) = [(5-2)(5-4)]/[(6-2)(6-4)] = [(3)(1)]/[(4)(2)] = 3/8 = 0.375$$

$$P(5) = 85 \cdot (-0.125) + 110 \cdot 0.75 + 130 \cdot 0.375$$

$$= -10.625 + 82.5 + 48.75 = \boxed{120.625 \text{ cm}}$$

Ejercicio 2:

Un proyectil tiene alturas registradas: (1 s, 40 m), (2 s, 65 m), (3 s, 60 m). Estima la altura a los 2.5 s.

Solución:

$$L_0(2.5) = [(2.5-2)(2.5-3)]/[(1-2)(1-3)] = [(0.5)(-0.5)]/[(1)(-1)] = (-0.25)/2 = -0.125$$

$$L_1(2.5) = [(2.5-1)(2.5-3)]/[(2-1)(2-3)] = [(1.5)(-0.5)]/[(1)(-1)] = (-0.75)/(-1) = 0.75$$

$$L_2(2.5) = [(2.5-1)(2.5-2)]/[(3-1)(3-2)] = [(1.5)(0.5)]/[(2)(1)] = 0.75/2 = 0.375$$

$$P(2.5) = 40 \cdot (-0.125) + 65 \cdot 0.75 + 60 \cdot 0.375$$

$$= -5 + 48.75 + 22.5 = \boxed{66.25 \text{ m}}$$

Ejercicio 3:

La demanda de un producto en millones fue: (2020, 10), (2021, 15), (2022, 12). Estima la demanda en 2021.5.

Solución:

$$x = 2021.5$$

$$L_0(2021.5) = [(2021.5-2021)(2021.5-2022)]/[(2020-2021)(2020-2022)]$$

$$= [(0.5)(-0.5)]/[-1(-2)] = (-0.25)/2 = -0.125$$

$$L_1(2021.5) = [(2021.5-2020)(2021.5-2022)]/[(2021-2020)(2021-2022)]$$

$$= [(1.5)(-0.5)]/[(1)(-1)] = (-0.75)/(-1) = 0.75$$

$$L_2(2021.5) = [(2021.5-2020)(2021.5-2021)]/[(2022-2020)(2022-2021)]$$

$$= [(1.5)(0.5)]/[(2)(1)] = 0.75/2 = 0.375$$

$$P(2021.5) = 10 \cdot (-0.125) + 15 \cdot 0.75 + 12 \cdot 0.375$$

$$= -1.25 + 11.25 + 4.5 = \boxed{14.5 \text{ millones}}$$

Diferencias Divididas de Newton

Ejercicio 1:

Dados los puntos (1, 1), (2, 4), (3, 9), construye la tabla de diferencias divididas y halla el polinomio interpolante.

Tabla de diferencias:

$$\begin{array}{c|ccc|} x_i & f[x_i] & f[x_i, x_{i+1}] & f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] \\ \hline 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|} & 2 & 4 & 5 & | \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|} & 3 & & & | \end{array}$$

$$f[x_0, x_1] = (4-1)/(2-1) = 3$$

$$f[x_1, x_2] = (9-4)/(3-2) = 5$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = (5-3)/(3-1) = 1$$

$$P(x) = 1 + 3(x-1) + 1(x-1)(x-2)$$

$$= 1 + 3x - 3 + (x^2 - 3x + 2)$$

$$= x^2$$

Ejercicio 2:

Para los datos $(0, 2), (1, 3), (2, 6)$, usa el método de Newton para estimar el valor en $x = 1.5$.

Tabla de diferencias:

$$\begin{array}{c|ccccc} x_i & | & f[x_i] & | & f[x_i, x_{i+1}] & | & f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] \\ \hline 0 & | & 2 & | & 1 & | & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & | & 3 & | & 3 & | \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} 2 & | & 6 & | & & | \end{array}$$

$$P(x) = 2 + 1(x-0) + 1(x-0)(x-1)$$

$$= 2 + x + (x^2 - x) = x^2 + 2$$

$$P(1.5) = (1.5)^2 + 2 = 2.25 + 2 = 4.25$$

Ejercicio 3:

Un cultivo crece según: (día 1, 2 cm), (día 3, 8 cm), (día 5, 18 cm). Estima la altura al día 4 con Newton.

Tabla de diferencias:

$$\begin{array}{c|ccccc} x_i & | & f[x_i] & | & f[x_i, x_{i+1}] & | & f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] \\ \hline 1 & | & 2 & | & 3 & | & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} 3 & | & 8 & | & 5 & | \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} 5 & | & 18 & | & & | \end{array}$$

$$f[x_0, x_1] = (8-2)/(3-1) = 6/2 = 3$$

$$f[x_1, x_2] = (18-8)/(5-3) = 10/2 = 5$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = (5-3)/(5-1) = 2/4 = 0.5$$

$$P(x) = 2 + 3(x-1) + 0.5(x-1)(x-3)$$

$$P(4) = 2 + 3(3) + 0.5(3)(1)$$

$$= 2 + 9 + 1.5 = \boxed{12.5 \text{ cm}}$$

Interpolación Cuadrática

Ejercicio 1:

Un móvil tiene velocidades: (1 s, 5 m/s), (2 s, 12 m/s), (3 s, 7 m/s). Encuentra la velocidad máxima aproximada con un polinomio cuadrático.

Sistema:

$$a + b + c = 5$$

$$4a + 2b + c = 12$$

$$9a + 3b + c = 7$$

Resolviendo:

$$(2)-(1): 3a + b = 7$$

$$(3)-(2): 5a + b = -5$$

$$\text{Restando: } 2a = -12 \Rightarrow a = -6$$

$$3(-6) + b = 7 \Rightarrow -18 + b = 7 \Rightarrow b = 25$$

$$-6 + 25 + c = 5 \Rightarrow c = -14$$

$$P(x) = -6x^2 + 25x - 14$$

$$\text{Derivada: } P'(x) = -12x + 25 = 0 \Rightarrow x = 25/12 \approx \boxed{2.08 \text{ s}}$$

$$\text{Velocidad máxima: } P(2.08) \approx -6(4.33) + 25(2.08) - 14 \approx \boxed{13.02 \text{ m/s}}$$

Ejercicio 2:

El costo de producción para 10, 20 y 30 unidades es 100, 150 y 200 euros. Ajusta un modelo cuadrático y estima el costo para 25 unidades.

Sistema:

$$100a + 10b + c = 100$$

$$400a + 20b + c = 150$$

$$900a + 30b + c = 200$$

Resolviendo:

$$(2)-(1): 300a + 10b = 50$$

$$(3)-(2): 500a + 10b = 50$$

$$\text{Restando: } 200a = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$300(0) + 10b = 50 \Rightarrow b = 5$$

$$100(0) + 10(5) + c = 100 \Rightarrow c = 50$$

$$P(x) = 5x + 50$$

$$\text{Para } x = 25: P(25) = 5(25) + 50 = 175 \text{ euros}$$

Ejercicio 3:

La temperatura en un día fue: (8 h, 15°C), (12 h, 22°C), (16 h, 18°C). Estima la temperatura a las 14 h usando interpolación cuadrática.

Sistema:

$$64a + 8b + c = 15$$

$$144a + 12b + c = 22$$

$$256a + 16b + c = 18$$

Resolviendo:

$$(2)-(1): 80a + 4b = 7$$

$$(3)-(2): 112a + 4b = -4$$

$$\text{Restando: } 32a = -11 \Rightarrow a = -0.34375$$

$$80(-0.34375) + 4b = 7 \Rightarrow -27.5 + 4b = 7 \Rightarrow 4b = 34.5 \Rightarrow b = 8.625$$

$$64(-0.34375) + 8(8.625) + c = 15 \Rightarrow -22 + 69 + c = 15 \Rightarrow c = -32$$

$$P(x) = -0.34375x^2 + 8.625x - 32$$

$$P(14) = -0.34375(196) + 8.625(14) - 32$$

$$= -67.375 + 120.75 - 32 = 21.375^\circ\text{C}$$

Splines Cúbicos

Ejercicio 1:

Se midió la posición de un robot en tiempos: (0 s, 0 m), (2 s, 4 m), (4 s, 6 m). Encuentra el spline cúbico natural y estima la posición a los 3 s.

Para spline natural: $S''(x_0) = S''(x_2) = 0$

$$S_0(x) = a_0 + b_0(x-0) + c_0(x-0)^2 + d_0(x-0)^3 \text{ en } [0,2]$$

$$S_1(x) = a_1 + b_1(x-2) + c_1(x-2)^2 + d_1(x-2)^3 \text{ en } [2,4]$$

Resolviendo el sistema:

$$S_0(0)=0 \Rightarrow a_0=0$$

$$S_0(2)=4 \Rightarrow 2b_0 + 4c_0 + 8d_0 = 4$$

$$S_1(2)=4 \Rightarrow a_1=4$$

$$S_1(4)=6 \Rightarrow 2b_1 + 4c_1 + 8d_1 = 2$$

$$S_0'(2)=S_1'(2) \Rightarrow b_0 + 4c_0 + 12d_0 = b_1$$

$$S_0''(2)=S_1''(2) \Rightarrow 2c_0 + 12d_0 = 2c_1$$

$$S_0''(0)=0 \Rightarrow c_0=0$$

$$S_1''(4)=0 \Rightarrow 2c_1 + 12d_1=0$$

$$\text{Resolviendo: } S_1(x) = 4 + 1.5(x-2) + 0.375(x-2)^2 - 0.0625(x-2)^3$$

$$S_1(3) = 4 + 1.5(1) + 0.375(1) - 0.0625(1) = 5.8125 \text{ m}$$

Ejercicio 2:

La altura del agua en una presa fue: (8 h, 10 m), (12 h, 12 m), (16 h, 9 m). Usa splines cúbicos para modelar la altura a las 14 h.

$$S_1(x) \text{ en } [12, 16]: S_1(x) = a_1 + b_1(x-12) + c_1(x-12)^2 + d_1(x-12)^3$$

Condiciones:

$$S_1(12) = 12 \Rightarrow a_1 = 12$$

$$S_1(16) = 9 \Rightarrow 4b_1 + 16c_1 + 64d_1 = -3$$

$$S_1''(16) = 0 \Rightarrow 2c_1 + 12d_1 = 0$$

Resolviendo sistema simplificado:

$$S_1(x) = 12 + 0.75(x-12) - 0.1875(x-12)^2 + 0.03125(x-12)^3$$

$$S_1(14) = 12 + 0.75(2) - 0.1875(4) + 0.03125(8)$$

$$= 12 + 1.5 - 0.75 + 0.25 = 13 \text{ m}$$

Ejercicio 3:

Un sensor registra temperaturas: (0 min, 20°C), (5 min, 25°C), (10 min, 22°C). Aplica splines cúbicos para estimar la temperatura a los 7 min.

$$S_1(x) \text{ en } [5, 10]: S_1(x) = a_1 + b_1(x-5) + c_1(x-5)^2 + d_1(x-5)^3$$

Condiciones:

$$S_1(5) = 25 \Rightarrow a_1 = 25$$

$$S_1(10) = 22 \Rightarrow 5b_1 + 25c_1 + 125d_1 = -3$$

$$S_1''(10) = 0 \Rightarrow 2c_1 + 12d_1 = 0$$

Resolviendo sistema simplificado:

$$S_1(x) = 25 + 0.4(x-5) - 0.12(x-5)^2 + 0.02(x-5)^3$$

$$S_1(7) = 25 + 0.4(2) - 0.12(4) + 0.02(8)$$

$$= 25 + 0.8 - 0.48 + 0.16 = 25.48^\circ\text{C}$$

Error de Interpolación

Ejercicio 1:

Si $f(x) = \ln(x+1)$ y se usan nodos $x = 1, 2, 3$, acota el error al aproximar $f(1.5)$ con un polinomio de grado 2.

$$f(x) = \ln(x+1)$$

$$f'''(x) = 2/(x+1)^3$$

$$M_3 = \max|f'''(\xi)| \text{ en } [1,3] = \max|2/(\xi+1)^3| = 2/(1+1)^3 = 0.25$$

$$\text{Producto: } |(1.5-1)(1.5-2)(1.5-3)| = |0.5 \cdot (-0.5) \cdot (-1.5)| = 0.375$$

$$\text{Error} \leq (0.25/3!) \cdot 0.375 = (0.25/6) \cdot 0.375 \approx 0.0156$$

Ejercicio 2:

Para $f(x) = e^x$ en $[0, 2]$ con nodos 0, 1, 2, estima el error máximo al interpolar en $x = 0.5$.

$$f'''(x) = e^x$$

$$M_3 = \max|e^x| \text{ en } [0,2] = e^2 \approx 7.389$$

$$\text{Producto: } |(0.5-0)(0.5-1)(0.5-2)| = |0.5 \cdot (-0.5) \cdot (-1.5)| = 0.375$$

$$\text{Error} \leq (7.389/6) \cdot 0.375 \approx 0.462$$

Ejercicio 3:

Si $f(x) = \sin x$ en $[0, \pi]$ con nodos 0, $\pi/2$, π , acota el error al interpolar en $x = \pi/4$

$$f'''(x) = -\cos x$$

$$M_3 = \max|-\cos \xi| \text{ en } [0,\pi] = 1$$

$$\text{Producto: } |(\pi/4-0)(\pi/4-\pi/2)(\pi/4-\pi)|$$

$$= |(0.785)(-0.785)(-2.356)| \approx 1.455$$

$$\text{Error} \leq (1/6) \cdot 1.455 \approx 0.2425$$