MÓDULO 02 | ZEROS DE FUNÇÕES

Prof. Paulo F. C. Tilles

Departamento de Matemática

25 de Outubro de 2021

Zeros de Funções | Introdução

Sistemas não lineares

- Definição: sistema cuja alteração na saída não é proporcional à mudanças realizadas na entrada.
- Importância: maioria dos sistemas são inerentemente não lineares.
- Sistemas dinâmicos não lineares: caoticidade e imprevisibilidade

Sistemas de equações não lineares

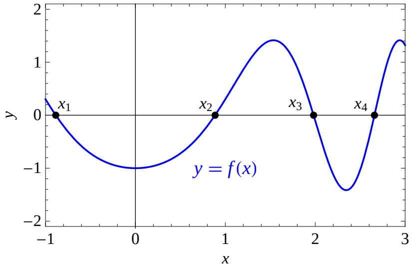
Conjunto de equações simultâneas cujas incógnitas aparecem como variáveis de um polinômio de grau maior do que 1 ou como argumento de funções não polinomiais.

- Solução não pode ser escrita como uma combinação linear das variáveis e/ou funções que aparecem no sistema

Zeros de Funções | Introdução

Soluções de equações unidimensionais

- Uma equação unidimensional pode ser definida em termos de uma função f de uma única variável, definida em um dado intervalo.
- Se x for definido como variável independente, então encontrar as soluções de uma equação unidimensional corresponde a determinar os valores de x que satisfazem $f(x) = 0$ no intervalo.



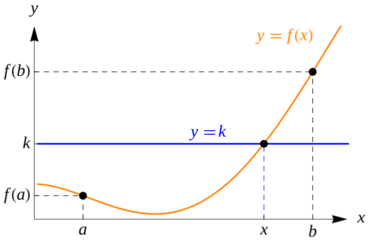
Zeros de Funções | Método da Bissecção

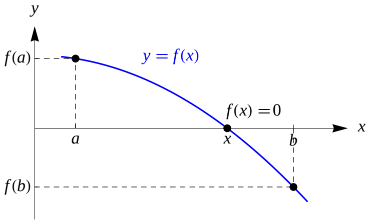
Teorema | Valor Intermediário

Se f for uma função contínua em um intervalo $[a, b]$ e k for um número real entre $f(a)$ e $f(b)$, inclusive, então existe no mínimo um ponto x no intervalo $[a, b]$ que satisfaz $f(x) = k$.

Corolário

Se a função f nos pontos a e b satisfizer a condição $f(a)f(b) < 0$, então existe pelo menos um ponto $x^* \in (a, b)$ tal que $f(x^*) = 0$.





Zeros de Funções | Método da Bissecção

Método da Bissecção

O método consiste em repetidamente seccionar um subintervalo de $[a, b]$ que contenha x ao meio (bisseccionar), e determinar a qual dos subintervalos resultantes o ponto x pertence.

Algoritmo da Bissecção

1. Determine um intervalo $[a, b]$ que contenha somente uma raíz da função f.
2. Defina as variáveis a_n e b_n, que representarão as extremidades esquerda e direita do intervalo que contém a raíz na n-ésima iteração. Assim $a_1 = a$ e $b_1 = b$.
3. Defina o ponto médio do intervalo na n-ésima iteração via

$$x_n = a_n + \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Assim $x_1 = (a_1 + b_1)/2$.

Zeros de Funções | Método da Bissecção

4. Se $f(x_n) = 0$, então $x^* = x_n$ (raíz determinada exatamente).
5. Se $f(x_n) \neq 0$, então $f(x_n)$ tem o mesmo sinal que ou $f(a_n)$ ou $f(b_n)$.

6.1 Se $f(x_n)$ e $f(a_n)$ têm o mesmo sinal, então $x \in (x_n, b_n)$, e a atualização do intervalo deve ser $a_{n+1} = x_n$ e $b_{n+1} = b_n$. Assim $a_2 = x_1$ e $b_2 = b_1$.

6.2 Se $f(x_n)$ e $f(b_n)$ têm o mesmo sinal, então $x \in (a_n, x_n)$, e a atualização do intervalo deve ser $a_{n+1} = a_n$ e $b_{n+1} = x_n$. Assim $a_2 = a_1$ e $b_2 = x_1$.

7. O algoritmo é repetido enquanto um critério de tolerância for satisfeito. No curso consideraremos o erro relativo como critério, ou seja, dado um $\varepsilon > 0$, o algoritmo é repetido enquando valer a desigualdade

$$\frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n|} > \varepsilon$$

Zeros de Funções | Método da Bissecção

8.1 Quando encerrado, o algoritmo fornece uma sequência $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ que satisfaz

$$\frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n|} > \varepsilon, \qquad n = 1, 2, \ldots, N-1$$
$$\frac{|x_N - x_{N-1}|}{|x_N|} < \varepsilon.$$

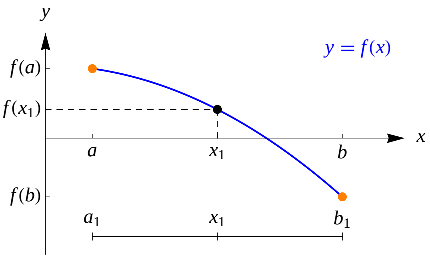
8.2 O valor aproximado obtido para a raíz é x_N, sendo que o critério do erro relativo implica em

$$\frac{|x - x_N|}{|x|} \sim \varepsilon,$$

ou seja, o erro percentual é da ordem de $100\varepsilon\%$.

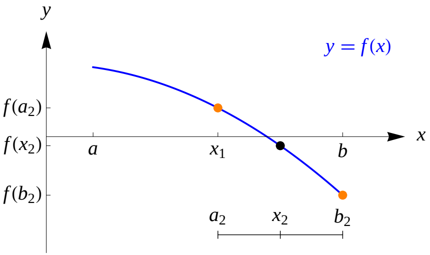
Zeros de Funções | Método da Bissecção

Exemplo qualitativo



Primeiro passo

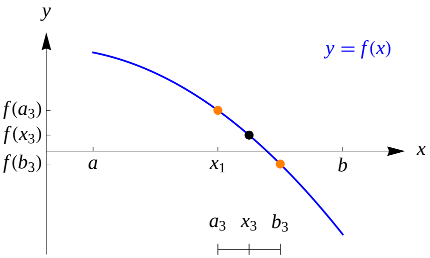
Definindo $a_1 = a$ e $b_1 = b$, a primeira estimativa para a raíz é o ponto médio determinado por $x_1 = (a_1 + b_1)/2$.



Segundo passo

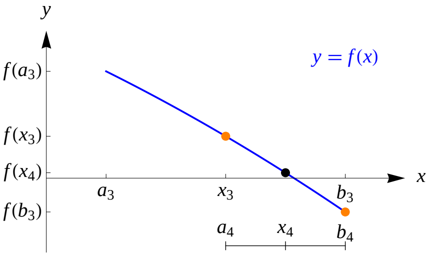
Como $f(x_1)$ e $f(a_1)$ têm o mesmo sinal, a atualização do intervalo é $a_2 = x_1$ e $b_2 = b_1$, e a nova estimativa para a raíz é $x_2 = (a_2 + b_2)/2$.

Zeros de Funções | Método da Bissecção



Terceiro passo

Como $f(x_2)$ e $f(b_2)$ têm o mesmo sinal, a atualização do intervalo é $a_3 = a_2$ e $b_3 = x_2$, e a nova estimativa para a raíz é $x_3 = (a_3 + b_3)/2$.



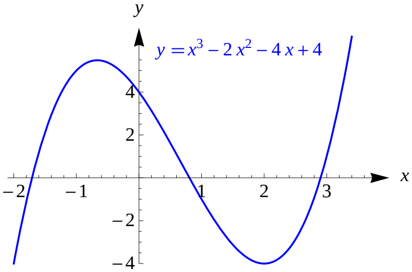
Quarto passo

Como $f(x_3)$ e $f(a_3)$ têm o mesmo sinal, a atualização do intervalo é $a_4 = x_3$ e $b_4 = b_3$, e a nova estimativa para a raíz é $x_4 = (a_4 + b_4)/2$.

Zeros de Funções | Método da Bissecção

Exemplo quantitativo

- A função $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 4$ possui três raízes no intervalo $[-2, 3]$.
- Uma das raízes pertence ao invervalo $[-2, -1]$, uma segunda raíz está no intervalo $[0, 1]$, e a última raíz encontra-se no intervalo $[2, 3]$.
- Implementação do método para determinação da segunda raíz com erro relativo menor do que 10^{-3}.



Zeros de Funções | Método da Bissecção

n	a_n	x_n	b_n	$f(x_n)$	ER_n
01	0.0	0.5	1.0	1.625	–
02	0.5	0.75	1.0	0.296875	0.3333
03	0.75	0.875	1.0	−0.361328	0.1428
04	0.75	0.8125	0.875	−0.033936	0.0769
05	0.75	0.78125	0.8125	0.131134	0.04
06	0.78125	0.79688	0.8125	0.048478	0.0196
07	0.79688	0.80469	0.8125	0.007246	0.0097
08	0.80469	0.80860	0.8125	−0.013378	0.0048
09	0.80469	0.80665	0.8086	−0.003094	0.0024
10	0.80469	0.80567	0.80665	0.002075	0.0012
11	0.80567	0.80616	0.80665	−0.000509	0.0006

- 4ª iteração: primeiro erro relativo menor que 10^{-1}.
- 7ª iteração: primeiro erro relativo menor que 10^{-2}.
- 11ª iteração: primeiro erro relativo menor que 10^{-3}.

Zeros de Funções | Método da Bissecção

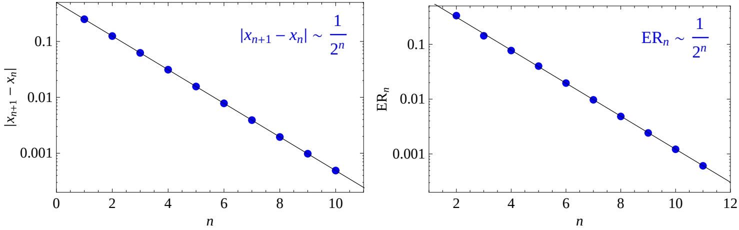
Convergência

Algoritmo de iteração de bissecção

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}, \qquad x_n = a_n + \frac{b_n - a_n}{2} = a_n + \frac{b-a}{2^n}$$

Comportamento assintótico: como $a_{n+1} \lesssim 2^{-n}$, para n grande temos $a_{n+1} \sim a_n$, portanto

$$|x_{n+1} - x_n| \sim \frac{1}{2^n} \qquad \rightarrow \qquad |x_n - x^*| \sim \frac{1}{2^n}$$



Zeros de Funções | Iteração de Ponto Fixo

Definição | Ponto Fixo

Um número x^* é um ponto fixo de uma função g se $g\left(x^*\right) = x^*$.

- Dado um problema de determinação de raízes $f\left(x\right) = 0$, existem infinitas possíveis funções g que apresentam um ponto fixo em x, como por exemplo

$$g\left(x\right) = x - a\, f\left(x\right), \quad a \in \mathbb{R}.$$

- Se uma função g tem um ponto fixo em x^*, então a função

$$f\left(x\right) = x - g\left(x\right)$$

possui uma raíz em x^*.

Iteração de Ponto Fixo

A solução de um problema de ponto fixo é obtida iterativamente: uma aproximação inicial x_0 escolhida 'arbitrariamente' gera a sequência de pontos $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ via

$$x_n = g\left(x_{n-1}\right).$$

Se a sequência convergir para um valor x^* e a função g for contínua, então x^* será o ponto fixo da função g:

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} g\left(x_{n-1}\right) = g\left(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}\right) = g\left(x^*\right)$$

- A passagem de um problema de raízes $f\left(x\right) = 0$ para um problema de ponto fixo $g\left(x\right) = x$ requer que a função g seja definida de modo a garantir a convergência da série $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Zeros de Funções | Iteração de Ponto Fixo

Teorema | Ponto Fixo

Seja $g \in C[a,b]$ uma função tal que $g(x) \in C[a,b]$ para todo $x \in C[a,b]$. Se g' existir em (a,b) e satisfizer a condição

$$|g'(x)| \leq k, \qquad \text{para todo } x \in (a,b),$$

onde $0 < k < 1$, então a sequência definida por

$$x_n = g(x_{n-1}), \qquad n \geq 1,$$

converge para o ponto fixo único $x^* \in [a,b]$ desde que o valor inicial satisfaça $x_0 \in [a,b]$.

- A função g tem que apresentar domínio e imagem contidas em alguma região ao redor do ponto fixo x^*, e a derivada g' tem que apresentar valor absoluto menor do que 1 em toda a região, ou seja, a função g tem que ser pouco inclinada.

Zeros de Funções | Iteração de Ponto Fixo

Exemplo quantitativo

Cálculo da raíz $x^* \in [0, 1]$ da função $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 4$.

- Análise de três candidatas a resolver o sistema via iteração de ponto fixo $x = g(x)$:

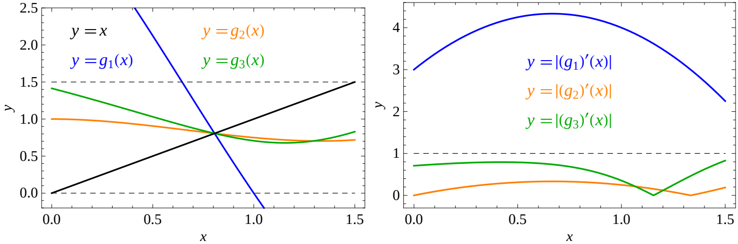
$$g_1(x) = 4 - 3x - 2x^2 + x^3$$

$$g_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3$$

$$g_3(x) = \sqrt{2(1 - x) + \frac{1}{2}x^3}$$

- Chute inicial idêntico ao método da bissecção: $x_0 = 0.5$

Zeros de Funções | Iteração de Ponto Fixo



Considerando as funções g_2 e g_3, o teorema do ponto fixo garante que a sequência $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge para o ponto fixo x^* se a condição inicial x_0 for selecionada dentro do intervalo $[0, 1.5]$: ambas as funções apresentam a imagem contida no intervalo, e o valor absoluto da derivada é menor que 1 no intervalo.

- A função g_1 não apresentar imagem contida no intervalo **não implica** que a série $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ não converge para x.
- A condição $|g_1'| > 1$ ao redor de x **implica** a não convergência da série $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ para x^*.

Zeros de Funções | Iteração de Ponto Fixo

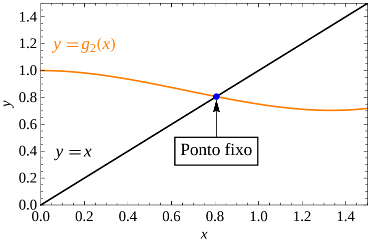
- Divergência da iteração de ponto fixo para a função g_1.

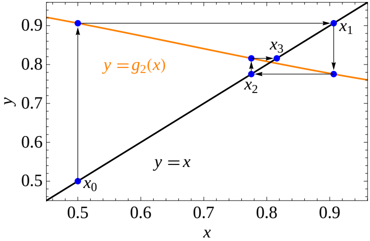
$g_1(x) = 4 - 3x - 2x^2 + x^3$			
n	x_n	$f(x_n)$	ER_n
0	0.5	1.625	–
1	2.125	−3.93555	0.764706
2	−1.81055	−1.24909	2.17368
3	−3.05964	−31.1266	0.408248
4	−34.1863	−42150.1	0.910501
5	−42184.3	-7.50714×10^{13}	0.99919
6	-7.50714×10^{13}	-4.2308×10^{41}	1

Zeros de Funções | Iteração de Ponto Fixo

- Convergência da iteração de ponto fixo para a função g_2.

$g_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3$			
n	x_n	$f(x_n)$	ER_n
0	0.5	1.625	–
1	0.90625	−0.523285	0.448276
2	0.775429	0.161963	0.168708
3	0.815919	−0.0519493	0.0496258
4	0.802932	0.0165218	0.0161749
5	0.807063	−0.0052702	0.0051179
6	0.805745	0.0016795	0.0016352
7	0.806165	−0.0005354	0.0005208

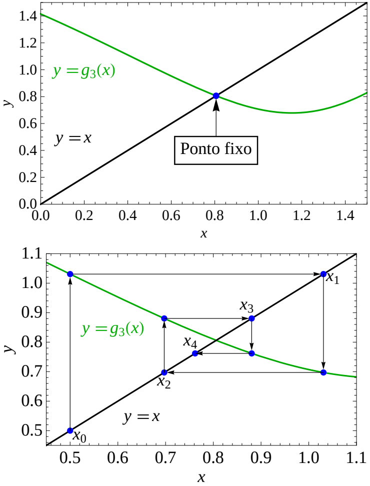




Zeros de Funções | Iteração de Ponto Fixo

- Convergência da iteração de ponto fixo para a função g_3.

$g_3(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x^3 - 2(x-1)}$			
n	x_n	$f(x_n)$	ER_n
0	0.5	1.625	–
1	1.03078	−1.15291	0.514929
2	0.697171	0.57808	0.478513
3	0.88039	−0.389357	0.208112
4	0.761846	0.233981	0.155602
5	0.835105	−0.152816	0.087724
6	0.788030	0.0952558	0.059737
7	0.817692	−0.061281	0.036275
8	0.798736	0.038675	0.023732
9	0.810751	−0.024716	0.014819
10	0.803093	0.0156718	0.009535
11	0.807957	−0.009987	0.006020
12	0.804861	0.0063445	0.003847
13	0.806829	−0.004039	0.002440
14	0.805577	0.0025675	0.001555
15	0.806373	−0.001634	0.000988



Zeros de Funções | Iteração de Ponto Fixo

Convergência

Algoritmo de iteração e a condição de ponto fixo

$$x_{n+1} = g(x_n) \qquad \rightarrow \qquad x^* = g(x^*)$$

Expansão ao redor do ponto fixo

$$x_{n+1} \approx g(x^*) + g'(x^*)(x_n - x^*) = x^* + g'(x^*)(x_n - x^*)$$

Ordem de convergência linear

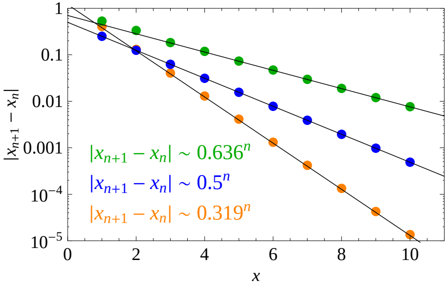
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|} = |g'(x^*)|$$

Comportamento assintótico

$$x_n \approx (x_0 - x^*)[g'(x^*)]^n + x^*$$
$$\downarrow$$
$$|x_{n+1} - x_n| \sim ER_n \sim |g'(x^*)|^n$$

Zeros de Funções | Iteração de Ponto Fixo

- Na comparação com o método da bissecção, a iteração de ponto fixo convergirá mais rapidamente se $|g'(x^*)| < 1/2$.



Zeros de Funções | Método de Newton

Introdução

Suponha uma função $f \in C^2[a,b]$ e considere uma expansão em série de Taylor ao redor de algum ponto $x_0 \in [a,b]$,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''[\xi(x)]}{2}(x - x_0)^2,$$

onde $\xi(x)$ encontra-se entre x e x_0, e $f'(x_0) \neq 0$. Se $f(x^*) = 0$ para um ponto $x^* \in [a,b]$, então

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x^* - x_0) + \frac{f''[\xi(x^*)]}{2}(x^* - x_0)^2.$$

Assumindo que a distância $|x^* - x_0|$ seja suficientemente pequena para desprezarmos termos de ordem superior a 1, então podemos aproximar

$$x^* \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Método de Newton

- Dado o caráter aproximativo da equação, é possível que o termo $x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$ não forneça uma 'boa' aproximação para a raíz x^*, mas é extremamente provável que seja uma aproximação melhor do que o valor inicial x_0.
- Se para cada valor de entrada obtém-se um valor de saída mais próximo da raíz do que o inicial, então a equação recursiva

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n \geq 0,$$

  gera uma sequência $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ tal que $x_n \longrightarrow x^*$ conforme $n \longrightarrow \infty$.
- A convergência só é garantida se o chute inicial x_0 for suficientemente próximo da raíz x^*.

Zeros de Funções | Método de Newton

Interpretação geométrica

- Dada uma aproximação x_n, primeiro se determina a equação da reta tangente à função f no ponto x_n:

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

- A nova aproximação x_{n+1} é então estimada como sendo a raíz desta equação, ou seja,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

- O método iterativo só funciona se $f'(x_n) \neq 0$ a cada iteração.

Zeros de Funções | Método de Newton

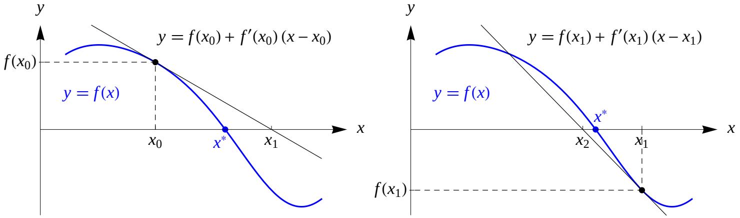
Exemplo qualitativo

Primeiro passo

Dado um chute inicial x_0, calcula-se o valor da função $f(x_0)$ e da derivada $f'(x_0)$ para determinar a equação da reta tangente à curva em x_0. A primeira estimativa será a raíz dessa reta: $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$.

Segundo passo

Calcula-se os valores de $f(x_1)$ e da derivada $f'(x_1)$ para determinar a equação da reta tangente à curva em x_1. A segunda estimativa será a raíz da reta: $x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1)$.



Zeros de Funções | Método de Newton

Exemplo quantitativo

Cálculo da raíz $x^* \in [0, 1]$ da função $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 4$, com chute inicial $x_0 = 0.5$.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	ER_n
0	0.5	1.625	-5.25	–
1	0.80952380952381	-0.0182486	-5.27211	0.382353
2	0.80606246799795	5.0932×10^{-6}	-5.27504	0.00429414
3	0.80606343352530	3.90021×10^{-13}	-5.27504	1.19783×10^{-6}
4	0.80606343352537	-1.11022×10^{-16}	-5.27504	9.17308×10^{-14}

- Apesar de ser necessário o cálculo de $f(x_n)$ e de $f'(x_n)$ a cada iteração, o método de Newton apresenta uma velocidade de convergência muito superior aos métodos anteriores.
- Explicação: método de Newton apresenta ordem de convergência quadrática

Zeros de Funções | Método de Newton

Convergência

Expansão em torno da raíz x^*

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \approx \frac{f(x^*) + f'(x^*)(x_n - x^*) + \frac{f''(x^*)}{2}(x_n - x^*)^2}{f'(x^*) + f''(x^*)(x_n - x^*)}$$
$$= (x_n - x^*)\frac{1 + \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}(x_n - x^*)}{1 + \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}(x_n - x^*)}$$
$$\approx x_n - x^* - \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}(x_n - x^*)^2$$

Algoritmo de iteração em torno da raíz x^*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \Longrightarrow \quad x_{n+1} - x^* \approx \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}(x_n - x^*)^2$$

Zeros de Funções | Método de Newton

Ordem de convergência quadrática

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^2} = \left|\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}\right|$$

Comportamento assintótico

$$|x_{n+1} - x_n| \sim \left|\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} x_0\right|^{2^n}$$

Comentários

- Teorema garante convergência do método de Newton se a estimativa inicial estiver suficientemente perto da raíz, mas não determina a distância mínima necessária para convergência.
- Aplicação prática: dado um x_0, o método converge rapidamente para a raíz ou torna-se claro após poucas iterações que a convergência é improvável.

Zeros de Funções | Método da Secante

Introdução

Uma forma de se introduzir o método da secante consiste em obtê-la como uma aproximação do método de Newton, onde o cálculo da derivada $f'(x_n)$ é aproximado pelo cálculo do valor da função em dois pontos próximos de x_n.

- Definição de derivada em um ponto x_{n-1}:

$$f'(x_{n-1}) = \lim_{z \longrightarrow x_{n-1}} \frac{f(z) - f(x_{n-1})}{z - x_{n-1}}$$

- Se um dado ponto x_{n-2} for suficientemente próximo de x_{n-1}, então podemos escrever

$$f'(x_{n-1}) \approx \frac{f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})}{x_{n-2} - x_{n-1}}$$

- Substituição dessa aproximação na equação recursiva de Newton resulta no método da secante.

Zeros de Funções | Método da Secante

Método da Secante

Dadas duas aproximações iniciais x_0 e x_1, as próximas estimativas da raíz são obtidas a partir da equação recursiva

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}(x_{n-1} - x_{n-2}), \qquad n \geq 2.$$

Interpretação geométrica

Dadas duas aproximações subsequentes x_{n-2} e x_{n-1}, primeiro se determina a equação da reta que cruza os pontos $(x_{n-2}, f(x_{n-2}))$ e $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$:

$$y = f(x_{n-1}) + \frac{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}{x_{n-1} - x_{n-2}}(x - x_{n-1}).$$

Zeros de Funções | Método da Secante

A nova estimativa x_n é então determinada como sendo a raíz da equação da reta:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{\alpha_{n-1,n-2}}, \qquad \alpha_{n-1,n-2} = \frac{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}{x_{n-1} - x_{n-2}}.$$

Exemplo qualitativo

Primeiro passo

Dadas as duas estimativas iniciais x_0 e x_1, calcula-se $f(x_0)$ e $f(x_1)$ para se determinar a equação da reta que passa por $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$. A segunda estimativa será a raíz dessa reta:

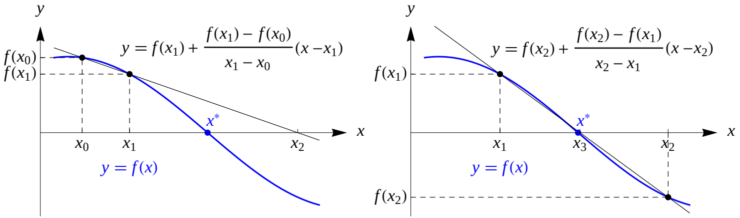
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{\alpha_{1,0}}, \qquad \alpha_{1,0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Zeros de Funções | Método da Secante

Segundo passo

Calcula-se o valor de $f(x_2)$ para determinar a equação da reta que passa por $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$. A terceira estimativa será a raíz da reta:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{\alpha_{2,1}}, \qquad \alpha_{2,1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$



Zeros de Funções | Método da Secante

Exemplo quantitativo

Cálculo da raíz $x^* \in [0, 1]$ da função $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 4$, com estimativas iniciais $x_0 = 0.5$ e $x_1 = 0.75$.

n	x_n	$f(x_n)$	ER_n
0	0.5	1.625	–
1	0.4	2.144	0.25
2	0.813102119460501	−0.0371083	0.508057
3	0.806073808499493	−0.0000547283	0.00871919
4	0.806063427635126	3.10713×10^{-8}	0.0000128785
5	0.806063433525374	-2.52021×10^{-14}	7.30743×10^{-9}
6	0.806063433525369	-1.11022×10^{-16}	5.92256×10^{-15}

- O método da secante tende a ser um pouco mais lento que o método de Newton, mas ainda é bem mais rápido do que o método de ponto fixo.

Zeros de Funções | Método da Falsa Posição

Introdução

Os métodos introduzidos até agora apresentam diferentes características com respeito à convergência em direção à raíz que precisam ser avaliadas previamente e influenciam na escolha do método mais apropriado para a solução de um problema específico.

Bissecção: possui a menor taxa de convergência entre todos os métodos, mas garante a convergência para a raíz.

Ponto Fixo: tem o potencial de exibir uma taxa de convergência mais rápida que a bissecção e ainda garantir a convergência, mas não existe método para determinar a equação de recorrência que apresente essas propriedades (não unívoca).

Newton: apresenta a mais rápida taxa de convergência, necessitando somente o cálculo dos valores da função e da derivada, mas não garante convergência para a raíz.

Zeros de Funções | Método da Falsa Posição

Secante: apresenta uma taxa de convergência mais lenta que o método de Newton por aproximar a derivada da função pela inclinação da reta que passa por dois pontos próximos, mas continua não garantindo a convergência para a raíz.

Método da Falsa Posição

Combinação de diferentes características dos métodos anteriores de forma a garantir a maior taxa de convergência possível junto com a garantia de convergência para a raíz.

1. Determinação de um intervalo $[a, b]$ que contenha somente uma raíz da função f e satisfaça a condição $f(a)f(b) < 0$.
2. Determinação da equação da reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ e da nova estimativa x como sendo o zero da equação da reta.
3. Redefinição do intervalo de forma a garantir que a raíz continue contida nele.

Zeros de Funções | Método da Falsa Posição

Algoritmo da Falsa Posição

1. Determine um intervalo $[a, b]$ que contenha somente uma raíz da função f e satisfaça a condição $f(a) f(b) < 0$.
2. Defina as variáveis a_n e b_n, que representarão as extremidades esquerda e direita do intervalo que contém a raíz na n-ésima iteração.
3. Determine a equação da reta que passa pelos pontos $(a_n, f(a_n))$ e $(b_n, f(b_n))$:

$$y = f(a_n) + \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}(x - a_n)$$

4. Determine a raíz da equação da reta:

$$x_n = a_n - \frac{b_n - a_n}{f(b_n) - f(a_n)} f(a_n)$$

5.1 Se $f(x_n) = 0$, então $x^* = x_n$ (raíz determinada exatamente).

5.2 Se $f(x_n) \neq 0$, então $f(x_n)$ tem o mesmo sinal que ou $f(a_n)$ ou $f(b_n)$.

6.1 Se $f(x_n)$ e $f(a_n)$ têm o mesmo sinal, então $x \in (x_n, b_n)$, e a atualização do intervalo deve ser $a_{n+1} = x_n$ e $b_{n+1} = b_n$.

6.2 Se $f(x_n)$ e $f(b_n)$ têm o mesmo sinal, então $x \in (a_n, x_n)$, e a atualização do intervalo deve ser $a_{n+1} = a_n$ e $b_{n+1} = x_n$.

7. O algoritmo é repetido enquanto um critério de tolerância for satisfeito.

Zeros de Funções | Método da Falsa Posição

Exemplo quantitativo

Cálculo da raíz $x^* \in [0, 1]$ da função $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 4$, com intervalo inicial $[a, b] = [0, 1]$.

n	a_n	x_n	b_n	$f(x_n)$	ER_n
1	0.0	0.8	1.0	0.032	–
2	0.8	0.806201550	1.0	−0.000728564	0.00769231
3	0.8	0.806063499	0.806201550	-3.45097×10^{-7}	0.000171266
4	0.8	0.806063434	0.806063499	-1.63403×10^{-10}	8.11223×10^{-8}

Zeros de Polinômios | Introdução

Definição | Polinômio

Um polinômio de grau N sempre pode ser escrito na forma

$$P_N(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_N x^N,$$

onde a_i são os coeficientes do polinômio, e $a_N \neq 0$.

TFA | Teorema Fundamental da Álgebra

Se $P_N(x)$ for um polinômio de grau $N \geq 1$, então a equação $P_N(x) = 0$ tem pelo menos uma raíz.

TFA | Corolário 1

Se $P_N(x)$ for um polinômio de grau $N \geq 1$, então existem constantes únicas $\{x_i\}_{i=1}^{K}$, e inteiros positivos $\{m_i\}_{i=1}^{K}$, tal que

$$P_N(x) = a_N (x - x_1)^{m_1} (x - x_2)^{m_2} \ldots (x - x_k)^{m_K}, \quad \sum_{i=1}^{K} m_i = N.$$

Zeros de Polinômios | Introdução

TFA | Corolário 2

Suponha que $P(x)$ e $Q(x)$ sejam dois polinômios de grau menor ou igual à N. Se existir um conjunto de números distintos $\{x_i\}_{i=1}^{K}$, com $K > N$, tal que $P(x_i) = Q(x_i)$ para $i = 1, 2, \ldots, K$, então $P(x) = Q(x)$ para todos os valores de x.

Resumo

- Todo polinômio $P_N(x)$ tem no mínimo uma e no máximo N raízes, mas nada garante que elas sejam reais.
- Todo polinômio pode ser fatorado em termos das raízes.
- Se dois polinômios de grau N fornecerem o mesmo valor para pelo menos $N + 1$ pontos, então eles serão iguais.

Zeros de Polinômios | Método de Horner

Introdução

Considere o problema de determinação da(s) raíz(es) de um dado um polinômio de grau N

$$P_N(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_N x^N,$$

via método de Newton, i.e., solução da equação de recorrência

$$x_{n+1} = x_n - \frac{P_N(x_n)}{P_N'(x_n)}, \qquad n \geq 0.$$

O método de Horner consiste em otimizar o cálculo de $P_N(x_n)$ e $P_N'(x_n)$ para se obter o máximo grau de eficiência na determinação da(s) raíz(es).

Zeros de Polinômios | Método de Horner

Método de Horner

No cálculo de $P_N(x_n)$, i.e., o valor do polinômio P_N em um ponto inicial x_0 qualquer, o polinômio é reescrito na forma

$$P_N(x) = (x - x_0)\,Q_{N-1}(x) + b_0,$$

onde

$$Q_{N-1}(x) = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + \cdots + b_N x^{N-1}.$$

Ao substituir a expressão de Q_{N-1} em P_N e expandir os termos em série de potências de x é possível indentificar a relação entre os coeficientes a_i e b_i:

$$\begin{aligned} P_N(x) &= (x - x_0)\left(b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + \cdots + b_N x^{N-1}\right) + b_0 \\ &= \overbrace{b_0 - b_1 x_0}^{a_0} + \overbrace{(b_1 - b_2 x_0)}^{a_1}x + \overbrace{(b_2 - b_3 x_0)}^{a_2}x^2 + \dots \\ &\quad \cdots + \underbrace{(b_{N-1} - b_N x_0)}_{a_{N-1}}x^{N-1} + \underbrace{b_N}_{a_N}\,x^N. \end{aligned}$$

Zeros de Polinômios | Método de Horner

Ou seja, a igualdade entre as duas expressões é garantida pelas relações entre os coeficientes

$$b_N = a_N,$$
$$b_k = a_k + b_{k+1} x_0, \qquad k = N-1, N-2, \ldots, 1, 0,$$

sendo o valor da função no ponto x_0 determinado por $P_N(x_0) = b_0$.

Para o cálculo de $P'_N(x_0)$ primeiro determinamos a derivada do polinômio $P_N(x)$

$$P'_N(x) = Q_{N-1}(x) + (x - x_0) Q'_{N-1}(x),$$

ou seja, $P'_N(x_0) = Q_{N-1}(x_0)$.

Assim podemos escrever o polinômio $Q_{N-1}(x)$ na forma

$$Q_{N-1}(x) = (x - x_0) R_{N-2}(x) + c_1$$
$$R_{N-2}(x) = c_2 + c_3 x + c_4 x^2 + \cdots + c_N x^{N-2}$$

Zeros de Polinômios | Método de Horner

Ao substituir a expressão de R_{N-2} em Q_{N-1} e expandir os termos em série de potências de x é possível indentificar a relação entre os coeficientes b_i e c_i,

$$Q_{N-1}(x) = (x - x_0)\left(c_2 + c_3 x + c_4 x^2 + \cdots + c_N x^{N-2}\right) + c_1$$

$$= \overbrace{c_1 - c_2 x_0}^{b_1} + \overbrace{(c_2 - c_3 x_0)}^{b_2} x + \overbrace{(c_3 - c_4 x_0)}^{b_3} x^2 + \ldots$$

$$\cdots + \underbrace{(c_{N-1} - c_N x_0)}_{b_{N-1}} x^{N-2} + \underbrace{c_N}_{b_N} x^{N-1},$$

ou seja,

$$c_N = b_N,$$

$$c_k = b_k + c_{k+1} x_0, \qquad k = N-1, N-2, \ldots, 2, 1,$$

e o valor da derivada da função no ponto x_0 determinado por $P'_N(x_0) = c_1$. Como resultado, a nova estimativa da raíz é dada por $x_1 = x_0 - \dfrac{b_0}{c_1}$.

Zeros de Polinômios | Método de Horner

Algoritmo | Método de Horner

Considere a equação recursiva do método de Newton,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{P_N(x_n)}{P'_N(x_n)}, \qquad P_N(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_N x^N.$$

1. Determine os coeficientes da n-ésima iteração $P_N(x_n) = b_{0,n}$ e $P'_N(x_n) = c_{1,n}$ na seguinte sequência:

1.1 $\quad b_{N,n} = a_N,$

1.2 $\quad b_{k,n} = a_k + b_{k+1,n} x_n, \qquad k = N-1, N-2, \ldots, 1, 0,$

1.3 $\quad c_{N,n} = a_N,$

1.4 $\quad c_{k,n} = b_{k,n} + c_{k+1,n} x_n, \qquad k = N-1, N-2, \ldots, 2, 1.$

2. A nova estimativa da raíz é determinada via

$$x_{n+1} = x_n - \frac{b_{0,n}}{c_{1,n}}.$$

Zeros de Polinômios | Método de Horner

Exemplo quantitativo

Cálculo da raíz $x^* \in [0, 1]$ da função $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 4$, com chute inicial $x_0 = 0.5$.

Coeficientes $b_{i,n}$ da função $P_N(x_n)$				
n	$b_{3,n}$	$b_{2,n}$	$b_{1,n}$	$b_{0,n}$
0	1.0	-1.5	-4.75	1.625
1	1.0	-1.190476	-4.9637188	-0.0182486
2	1.0	-1.193938	-4.9623882	5.0932×10^{-6}
3	1.0	-1.193937	-4.9623886	3.8991×10^{-13}

Coeficientes $c_{i,n}$ da função $P'_N(x_n)$			
n	$c_{3,n}$	$c_{2,n}$	$c_{1,n}$
0	1.0	-1.0	-5.25
1	1.0	-0.380952	-5.2721088
2	1.0	-0.387875	-5.2750398
3	1.0	-0.387873	-5.2750390

Estimativas		
n	x_n	ER_n
0	0.5	-
1	0.809524	0.382353
2	0.806062	0.00429414
3	0.806063	1.19783×10^{-6}