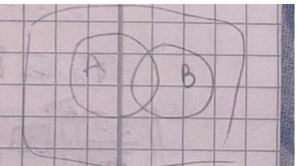


$\boxed{\text{Temă 1}}$

Legile lui De Morgan

i) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

„$\subseteq$" Fie $x \in (A \cup B)^c \Rightarrow x \notin (A \cup B) \Rightarrow \begin{cases} x \notin A \\ x \notin B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A^c \\ x \in B^c \end{cases} \Rightarrow x \in A^c \cap B^c$ ①

„$\supseteq$" Fie $y \in A^c \cap B^c \Rightarrow \begin{cases} y \in A^c \\ y \in B^c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \notin A \\ y \notin B \end{cases} \Rightarrow y \notin A \cup B \Rightarrow y \in (A \cup B)^c$ ②

1, 2 $\Rightarrow \boxed{(A \cup B)^c = A^c \cap B^c}$

ii) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

„$\subseteq$" Fie $x \in (A \cap B)^c \Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow x \in A^c$ sau $x \in B^c \Rightarrow x \in A^c \cup B^c$ ①

„$\supseteq$" Fie $y \in A^c \cup B^c \Rightarrow y \in A^c$ sau $y \in B^c \Rightarrow y \notin A$ sau $y \notin B \Rightarrow y \notin (A \cap B) \Rightarrow y \in (A \cap B)^c$ ②

1, 2 $\Rightarrow \boxed{(A \cap B)^c = A^c \cup B^c}$

iii) $\left(\bigcup_n A_n\right)^c = \bigcap_n A_n^c$ Pasul 1 de inducție pt i) $\Rightarrow (A_1 \cup A_2)^c = A_1^c \cap A_2^c$

Pas 2: Fie $A_1 \cup A_2 = M$ $(M \cup A_3)^c = M^c \cap A_3^c = (A_1 \cup A_2)^c \cap A_3^c = A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c$

Fie Pas n adev. $\left(\bigcup_n A_n\right)^c = \bigcap_n A_n^c$ $\Big\|$ $\left(\bigcup_n A_n \cup A_{n+1}\right)^c = \left(\bigcup_n A_n\right)^c \cap A_{n+1}^c = \bigcap_n A_n^c \cap A_{n+1}^c$

$= \bigcap A_{n+1}$ ✓

iv) $\left(\bigcap_n A_n\right)^c = \bigcup_n A_n^c$

Pas 1: ii) $(A_1 \cap A_2)^c = A_1^c \cup A_2^c$

Pas 2: $((A_1 \cap A_2) \cap A_3)^c = (A_1 \cap A_2)^c \cup A_3^c = A_1^c \cup A_2^c \cup A_3^c$

⋮

Pas k adevărat $\left(\bigcap_k A_k\right)^c = \bigcup_k A_k^c$

Pas k+1: $\left(\bigcap_k A_k \cap A_{k+1}\right)^c = \bigcup_k A_k^c \cup A_{k+1}^c = \bigcup_{k+1} A_{k+1}^c$ ✓

$\boxed{\text{Ex 2}}$ Pariem o sumă de s lei pe o aruncare cu banul. Dacă pică cap, primim $100 \cdot a\% \cdot$ sumă, iar dacă pică pajură, pierdem $100 \cdot b\% \cdot$ sumă, unde $\{a, b\} \in [0,1]$ astfel încât $a > b$.

Prin urmare, a juca o singură dată acest joc e avantajos pt noi. Pentru ce valori ale lui a și b jucarea de mai multe ori e dezavantajoasă pentru noi?

→ Ca să fie dezavantajos avem: după ce câștigăm o dată și pierdem o dată suma rezultată < suma inițială. (pt. că nu contează ordinea în care o facem)

câștig - pierd ⇒ $s_{final} = (s + \frac{a}{100} \cdot s \cdot 100) - b(s + \frac{a}{100} \cdot s \cdot 100) = (1-b)(s + as) = (1-b)(a+1)s$

pierd - câștig ⇒ $s_{final} = (s - \frac{b}{100} \cdot s \cdot 100) + a(s - \frac{b}{100} \cdot s \cdot 100) = (s - bs)(a+1) = (1-b)(a+1)s$

→ după două jocuri în care o dată câștigăm și o dată pierdem avem suma $s(1-b)(a+1)$

$s(1-b)(a+1) < s \quad |:s$

$(1-b)(a+1) < 1$

$a + 1 < \frac{1}{1-b}$

$a < \frac{1-1+b}{1-b} \Rightarrow \boxed{a < \frac{b}{1-b}}$

$b \geq \frac{1}{2} \Rightarrow a \in [b, 1)$

etc.

$50 \geq \frac{30}{70} \cdot 100$

$50 > 42$

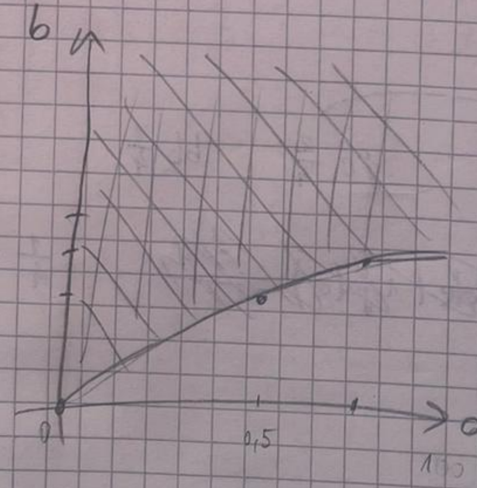
$b/(1-b) = 0,5$

$b = 0,5 - 0,5b$

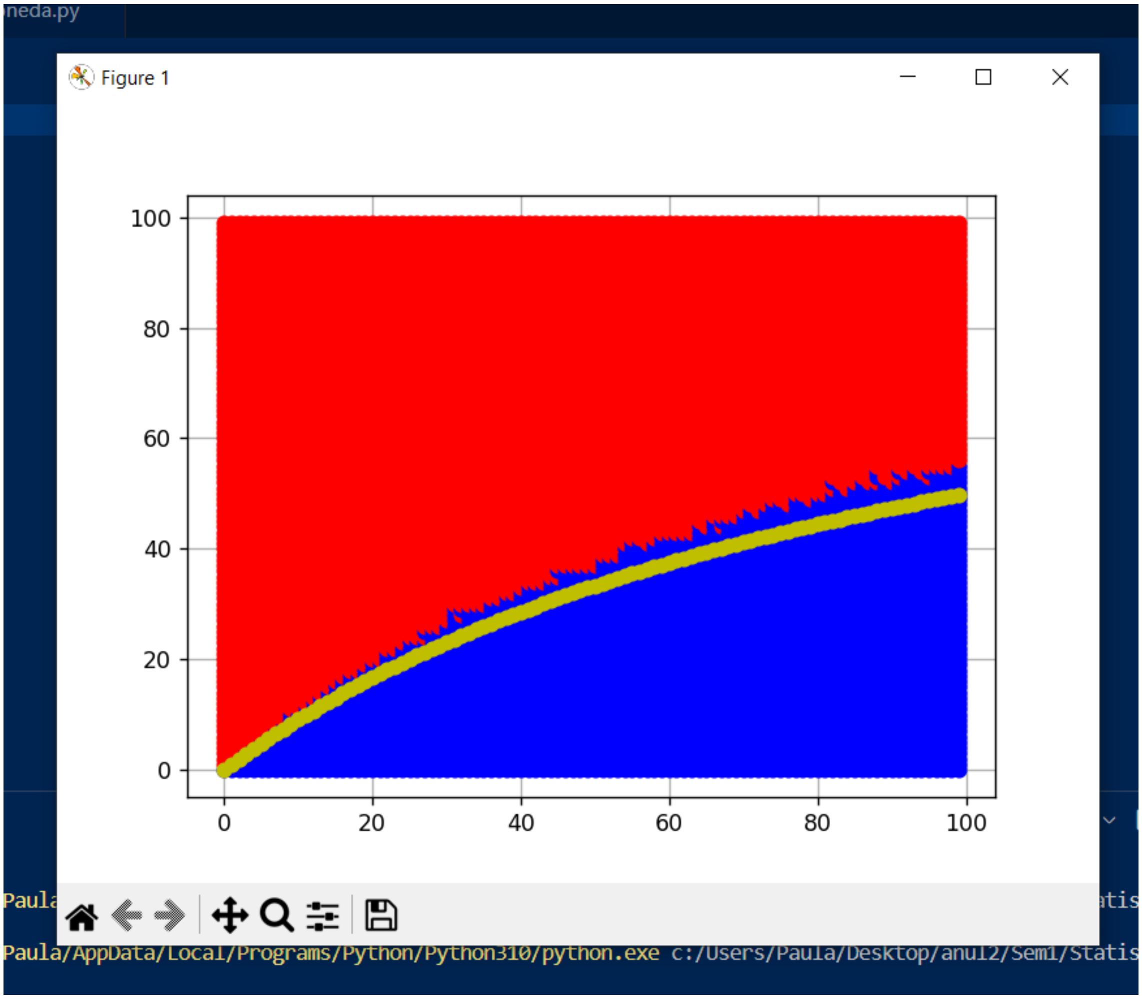
$1,5b = 0,5 \Rightarrow b = 0,3$

$b/1-b = 0,75$

$1,75b = 0,75 \Rightarrow b = 0,42$



Am facut de asemenea o simulare in python (foarte rudimentara de altfel) in care am simulat 100 de jocuri a cate 1000 de aruncari fiecare, pentru fiecare pereche de procente a (OX) si b (OY). Cu rosu este marcat daca media jocurilor a fost dezavantajoasa, iar cu albastru daca a fost profitabila. Cu galben avem ecuatia rezultata din rezolvarea de mai sus: $a<b/(b-1)$;



Pariul lui Chevalier de Mere

Ce este mai probabil? Să dăm cel puțin un 6 în 4 aruncări de zar sau cel puțin o dublă de 6 în 24 de aruncări a două zaruri?

$\mathbb{P}_1 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4$

doar 6 $\to \left(\frac{1}{6}\right)^4$

niciun 6 $\to \left(\frac{5}{6}\right)^4$

$\mathbb{P}_2 = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$

$\mathbb{P}_1 \boxed{>} \mathbb{P}_2$

$\left[\left(\frac{35}{36}\right)^6\right]^4 \boxed{>} \left(\frac{5}{6}\right)^4$

$\left(\frac{35}{36}\right)^6 \boxed{>} \left(\frac{30}{36}\right)^6$

$\Rightarrow$ E mai probabil să dau un 6 din 4 aruncări