Gheorghe ATANASIU **Doina TOFAN**

ANALIZĂ MATEMATICĂ

REPROGRAFIA UNIVERSITĂȚII "TRANSILVANIA" DIN BRAŞOV

2008

Materialul de față apare prin bunăvoința Dlui. Prof.univ.dr. Nicolae Tița şi a Dnei Conf.univ.dr. Doina Tofan care cu o deosebită amabilitate colegială mi-au pus la dispoziție notele lor de curs, predate de-a lungul multor generații studenților facultăților cu profil tehnic şi profil universitar.

Împreună cu Dna Conf. univ.dr. Doina Tofan am selectat cele mai utile capitole de Analiză Matematică pentru pregătirea studenților de la Facultatea de Inginerie Mecanică, specializarea Autovehicule Rutiere - Învățământ cu frecvență redusă.

Sincere mulțumiri,
Prof.univ.dr. Gheorghe ATANASIU

CUPRINS

PARTEA I
CALCUL DIFERENȚIAL

I. ŞIRURI ŞI SERII NUMERICE

1. Şiruri de numere reale

Fie (x_n) un şir de numere reale. $\mathbb{R}$ având o structură de spațiu liniar normat în raport cu norma $\|x\| = |x|$, şi prin urmare de spațiu metric în raport cu distanța $d(x,y)=|x-y|$, definițiile ce urmează sunt naturale, iar proprietățile evidente.

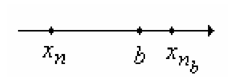
Definiție. *Şirul (x_n) este **mărginit** dacă $\exists\, a,b \in \mathbb{R}$ astfel încât* $a \le x_n \le b \quad ,\forall\; n \in \mathbb{N}$.

Exemple

1.) Şirul $x_n = 2+\dfrac{1}{n^2}$ este mărginit deoarece $2 \le x_n \le 3 \quad , \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

2.) Şirul $x_n = n$ este nemărginit (superior) deoarece $\forall b > 0 \;\; \exists n_b$ astfel încât

$$x_{n_b} > b\,.$$



Definiție. *Şirul (x_n) **converge către** x_0 $(x_n \to x_0)$ dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0(\varepsilon)$ astfel încât* $\forall n > n_0, |x_n - x_0| < \varepsilon$.

Un şir care nu este convergent se numeşte divergent.

Proprietăți 1.) Limita unui şir convergent este unică.

2.) Orice şir convergent este mărginit.

Operațiile cu şiruri convergente ca şi trecerea la limită în inegalități le presupunem cunoscute.

Definiție. *Fie (x_n) un şir de numere reale şi $(k_n)_n$ un şir strict crescător de numere naturale; atunci şirul $(x_{k_n})_n$ se numeşte **subşir** al şirului (x_n) şi notăm $(x_{k_n})_n \subset (x_n)$.*

Observații:

1. $k_n \ge n \;\; , \; \forall\, n$.

2. Orice subşir al unui şir convergent este convergent.

Teoremă (Cesaró, 1859-1906). *Orice şir mărginit conține un subşir convergent.*

Demonstrație. Dacă şirul (x_n) are un număr finit de valori, de exemplu

3, 1, 4, 4, 3, 1, 1, 3, 4, 1, ...,

atunci există un subşir constant al acestuia, care evident este convergent.

Să presupunem că (x_n) este un şir mărginit având o infinitate de valori. Fie $a,b \in \mathbb{R}$ astfel încât $a \le x_n \le b \quad ,\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Împărțim intervalul $[a,b]$ prin punctul $c=\dfrac{a+b}{2}$ şi notăm cu $[a_1, b_1]$ acel subinterval $[a, c]$ sau $[c, b]$ care conține o infinitate de termeni ai şirului.

Repetând, obținem un şir $\left([a_n, b_n]\right)_n$ de intervale având proprietățile:

(1) $a_n \le a_{n+1} < b_{n+1} \le b_n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(2) $[a_n, b_n]$ conține o infinitate de termeni ai lui (x_n).

(3) $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Conform lemei intervalelor închise incluse, $\bigcap\limits_1^\infty [a_n, b_n] \neq \varnothing$.

Proprietatea (3) face ca această intersecție să conțină un singur punct x_0 .

Într-adevăr, dacă am avea $a_n < x_0 < x_0' < b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ atunci din

$$0 < x_0' - x_0 < b_n - a_n = \frac{b-a}{2n} \to 0$$

ar rezulta $x_0' = x_0$. Deci $\bigcap\limits_1^\infty [a_n, b_n] = \{x_0\}$.

Vom arăta că există un subşir $(x_{k_n}) \subset (x_n)$ cu $x_{k_n} \to x_0$.

Fie vecinătatea $V_1 = (x_0 - 1, x_0 + 1)$. Cu proprietatea (3) există un interval din familia construită mai sus, $[a_{k_1}, b_{k_1}] \subset V_1$.

Proprietatea (2) ne permite să alegem un termen x_{k_1} al şirului (x_n) astfel încât

$$x_{k_1} \in [a_{k_1}, b_{k_1}] \subset V_1 .$$

Procedând analog, pentru fiecare vecinătate de forma $V_n = \left(x_0 - \dfrac{1}{n}, x_0 + \dfrac{1}{n}\right)$ vom putea alege $x_{k_n} \in V_n$.

Astfel am extras subşirul $(x_{k_n}) \subset (x_n)$ cu proprietatea $\left| x_{k_n} - x_0 \right| < \dfrac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ceea ce înseamnă că $x_{k_n} \to x_0$.

Teoremă. (Criteriul general al lui Cauchy). *Un şir (x_n) este convergent dacă şi numai dacă el este fundamental .*

Demonstrație. Este suficient să arătăm dacă (x_n) este şir fundamental, atunci el este convergent.

Vom arăta în prima etapă că un şir Cauchy este mărginit. Într-adevăr, fie $\varepsilon > 0$ oarecare şi $n_1(\varepsilon)$ astfel încât pentru $n, m > n_1$ să avem $\left| x_n - x_m \right| < \varepsilon$.

Dând lui m o valoare fixă şi anume $N=n_1+1$, din $\left|x_n-x_N\right|<\varepsilon$, rezultă că exceptând termenii $x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}$, toţi ceilalţi se află în intervalul $\left(x_N-\varepsilon, x_N+\varepsilon\right)$, deci şirul $\left(x_n\right)$ este mărginit.

În a doua etapă vom apela la teorema lui Cesaró. Fie $\left(x_{k_n}\right) \subset \left(x_n\right)$ cu $x_{k_n} \to x_0$.

Deoarece $k_n \geq n$ avem $\left|x_{k_n}-x_n\right|<\varepsilon$ dacă $n>n_1$. Pe de altă parte, pentru acelaşi $\varepsilon>0$ de la început, $\exists\, n_2(\varepsilon)$ astfel încât $\forall n>n_2$ să avem $\left|x_{k_n}-x_0\right|<\varepsilon$.

Luând $n_0(\varepsilon)=\max\left(n_1, n_2\right)$, rezultă că pentru $n>n_0$ are loc

$$\left|x_n-x_0\right|<\left|x_n-x_{k_n}\right|+\left|x_{k_n}-x_0\right|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon,$$

deci $x_n \to x_0$.

Exemple.

1.) Şirul $x_n=1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$ este convergent deoarece este fundamental. Într-adevăr,

$$\left|x_{n+p}-x_n\right|=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+p)^2}<$$

$$<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}=$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}<\varepsilon$$

îndată ce $n>n_0(\varepsilon)$ şi $\forall p \in \mathbb{N}$.

2.) $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ este divergent, deoarece nu este şir Cauchy. Pentru aceasta vom arăta că $\exists \varepsilon_1$, astfel încât $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists\, n_1>n$ şi $p_1>0$ cu $\left|x_{n_1+p_1}-x_{n_1}\right| \geq \varepsilon_1$.

Într-adevăr, luând $n_1=p_1=n$, avem $\left|x_{2n}-x_n\right|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}=\varepsilon_1$.

Consecinţă. Spaţiul $\mathbb{R}$ cu metrica $d(x,y)=|x-y|$ este un spaţiu metric complet.

Definiţie. *Şirul* $\left(x_n\right)$ *este* ***monoton*** *dacă este crescător* $\left(x_n\uparrow\right)$: $x_n \leq x_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ *sau descrescător* $\left(x_n\downarrow\right)$: $x_n \geq x_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Teoremă. *Orice şir monoton crescător şi mărginit este convergent.*

Demonstraţie. Fie $x_n\uparrow$ şi mărginit. Există atunci a şi $b \in \mathbb{R}$ cu $a \leq x_n < b$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Fie $L=\sup\limits_n x_n$; atunci $\forall \varepsilon>0, \exists\, n_\varepsilon$ astfel încât $L-\varepsilon<x_{n_\varepsilon}$. Dar pentru $\forall\, n>n_\varepsilon$, avem $x_{n_\varepsilon} \leq x_n$ şi prin urmare $L-\varepsilon<x_n \leq L<L+\varepsilon$, deci $x_n \to L$.

Analog se arată că dacă $x_n\downarrow$ şi mărginit, atunci $x_n \to \ell=\inf\limits_n x_n$.

Definiție. *Şirul* (x_n) *tinde către* ∞ $(x_n \to \infty)$, *dacă* $\forall b > 0$ $\exists n_b$ *astfel încât* $\forall n > n_b$ *să avem* $x_n > b$.

Teoremă. *Orice şir monoton crescător şi nemărginit tinde către* ∞.

Demonstrație. Şirul (x_n) fiind nemărginit (superior), $\forall b > 0$ $\exists n_b$ astfel încât $b < x_{n_b}$. Dar cum $x_n \uparrow$, pentru $\forall n > n_b$ avem $b < x_{n_b} < x_n$ deci $x_n \to \infty$.

Lema lui Stolz. *Fie* (x_n) *un şir oarecare,* (y_n) *un şir strict crescător şi divergent de numere pozitive. Dacă* $\lim \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \ell$, *atunci* $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \ell$.

Exemple.

1.) $u_n \to u \Rightarrow \dfrac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n} \to u$. Aceasta rezultă cu lema lui Stolz considerând şirurile $x_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ şi $y_n = n$, deoarece

$$\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim \frac{u_{n+1}}{n+1-n} = u$$

2.) $0 \le u_n$ şi $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to u \Rightarrow \sqrt[n]{u_n} \to u$. Apelând la rezultatul precedent, avem

$$\sqrt[n]{u_n} = e^{\frac{1}{n}\ln u_n} = e^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{u_1}{1}\cdot\frac{u_2}{u_1}\cdot\ldots\cdot\frac{u_n}{u_{n-1}}\right)} = e^{\frac{\ln u_1 + ln\frac{u_2}{u_1} + \ldots + \ln\frac{u_n}{u_{n-1}}}{n}} \to e^{\ln u} = u .$$

2. Şiruri în $\mathbb{R}^n$

Fie $(P_n)_n$ un şir de elemente din spațiul euclidian $\mathbb{R}^k$, unde $P_n = \left(x_1^n, x_2^n, \ldots, x_k^n\right)$ şi $P_0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0\right)$.

Propoziție. $P_n \to P_0 \Leftrightarrow x_i^n \to x_i^0 \quad \forall i = \overline{1,k}$.

Demonstrație. Prin definiție $P_n \to P_0 \Leftrightarrow d(P_n, P_0) \to 0$.

Dar din dubla inegalitate

$$\left| x_i^n - x_i^0 \right| \le d(P_n, P_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \left(x_i^n - x_i^0\right)^2} \le \sum_{i=1}^{k} \left| x_i^n - x_i^0 \right|$$

valabilă pentru $\forall\ i = \overline{1,k}$, reiese că $d(P_n, P_0) \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left| x_i^n - x_i^0 \right| \to 0,\ i = \overline{1,k}$.

Prin urmare convergența unui şir din $\mathbb{R}^n$ este echivalentă cu convergența pe componente.

Exemple.

1.) $lim\left(5 + \dfrac{1}{n}, \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n, \dfrac{n+1}{n^2+2}\right) = (5, e, 0)$ în $\mathbb{R}^3$.

2.) Şirul (P_n) unde $P_n=\left(\frac{1}{n},\frac{a}{n^2}\right)$ este un şir de puncte de pe parabola de ecuaţie $y=ax^2$, şir convergent către originea $O(0,0)\in\mathbb{R}^2$.

Propoziţie. (P_n) *şir fundamental* $\Rightarrow(P_n)$ *şir convergent.*

Demonstraţie $\forall\varepsilon>0$, $\exists n_0(\varepsilon)$ astfel încât pentru $n,m>n_0$ să avem $d(P_n,P_m)<\varepsilon$.

Din inegalităţile $\left|x_i^n-x_i^m\right|\le d(P_n,P_m)<\varepsilon$, $i=\overline{1,k}$, rezultă că pentru fiecare $i=\overline{1,k}$ şirul $(x_i^n)_n$ este fundamental, deci convergent. Fie $x_i^0=\lim\limits_n x_i^n$, $i=\overline{1,k}$ şi $P_0(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_k^0)$.

Cu propoziţia precedentă avem

$$\lim_n P_n=\begin{pmatrix}\lim x_1^n\\ \lim x_2^n\\ \\ \lim x_k^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1^0\\ x_2^0\\ \\ x_k^0\end{pmatrix}=P_0 .$$

Consecinţă. Spaţiul euclidian $\mathbb{R}^n$ este un spaţiu metric complet, mai precis un spaţiu Hilbert.

3. Convergenţa unei serii numerice

Fie $(u_n)_n$ un şir de numere reale. Expresia $\sum\limits_1^\infty u_n=u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ se numeşte **serie**.

Deocamdată ea nu are un sens, căci nu ştim să adunăm o infinitate de numere. Putem însă calcula sumele finite:

$$\begin{aligned}&s_1=u_1\\&s_2=u_1+u_2\\&\vdots\\&s_n=u_1+u_2+\ldots+u_n\\&\vdots\end{aligned}$$

Obţinem astfel şirul (s_n) al sumelor parţiale. Dacă acest şir este convergent şi $s_n\to s$, atunci spunem că seria $\sum\limits_1^\infty u_n$ este ***convergentă*** (conv.) şi are suma *s*.

În caz contrar, seria $\sum\limits_1^\infty u_n$ este divergentă (div.) şi calculul sumei nu are sens.

Exemple.

1.) $\sum\limits_1^\infty q^n=1+q+q^2+\ldots+q^n+\ldots\quad q\in\mathbb{R}$ (seria geometrică de raţie *q*)

Pentru $q\neq 1$, $s_n = 1+q+q^2+\ldots+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} \to \begin{cases} \dfrac{1}{1-q}, & dacă \;\; |q|<1 \\ \infty & dacă \;\; q<1 \end{cases}$

Pentru $q\leq -1$, şirul (s_n) nu are limită. Pentru $q=1$, $s_n \to \infty$.

În concluzie seria geometrică $\sum\limits_0^\infty q^n$ este conv. $\Leftrightarrow |q|<1$.

2.) $\sum\limits_1^\infty \dfrac{1}{n} = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}+\ldots$ (seria armonică). Avem

$$s_n = 1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots+\frac{1}{n} >$$

$$> 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\ldots+\frac{1}{n} > 1+k(n)\cdot\frac{1}{2} \to \infty$$

unde $k(n)$ este un anumit număr natural.

Deducem de aici că $s_n \to \infty$ şi prin urmare seria armonică este div.

3.) $\sum\limits_1^\infty \dfrac{1}{n^\alpha} = 1+\dfrac{1}{2^\alpha}+\ldots+\dfrac{1}{n^\alpha}+\ldots \; cu \; \alpha>0$ (seria lui Riemann[*])

Dacă $\alpha>1$, atunci

$$0 < s_n = 1+\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\frac{1}{6^\alpha}+\frac{1}{7^\alpha}\right)+\ldots+\frac{1}{n^\alpha} <$$

$$< 1+\frac{2}{2^\alpha}+\frac{4}{4^\alpha}+\frac{8}{8^\alpha}+\ldots = 1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\frac{1}{2^{2(\alpha-1)}}+\frac{1}{2^{3(\alpha-1)}}+\ldots+ \frac{1}{1-\dfrac{1}{2^{\alpha-1}}} = M$$

Şirul (s_n) este crescător şi mărginit, deci convergent.

Dacă $\alpha<1$, atunci $s_n \geq 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n} \to \infty$

În concluzie, seria Riemann (seria armonică generalizată) $\sum\limits_1^\infty \dfrac{1}{n^\alpha} este \begin{cases} conv. \text{ dacă } \alpha>1 \\ div. \quad\quad \alpha\leq 1 \end{cases}$.

4.) $\sum\limits_1^\infty \dfrac{1}{n!} = 1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}+\ldots$ (seria numărului "e")

Fie $s_n = 1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}$. Trecând la limită după n în integralitatea

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) >$$

$$> 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

[*] G.F.B. Riemann (1826–1866), distins matematician german.

valabilă pentru $k < n$, obținem $e \geq s_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Pe de altă parte $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq s_n$ Trecând la limită în cele două inegalități, obținem $e = \lim s_n$, deci

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

Observație. Natura unei serii (faptul că este conv.sau div.) rămâne aceeaşi chiar dacă se modifică un număr finit de termeni ai ei.

De exemplu, seria $3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - 10 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \ldots$ provenită din seria geometrică cu rația $q = \frac{1}{2}$, tot conv. este. Evident că suma ei este alta.

De asemenea amplificarea termenilor unei serii cu o constantă nenulă nu afectează natura seriei.

O ***condiție necesară de convergență*** a seriei $\sum u_n$ este $u_n \to 0$.

Într-adevăr, dacă $s_n \to s$ atunci $u_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0$.

Dacă $u_n \not\to 0$, putem afirma cu certitudine că seria $\sum u_n$ este div. Astfel seria $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{n}{n+1} + \ldots$ este div. deoarece $u_n = \frac{n}{n+1} \to 1 \neq 0$.

Dacă însă $u_n \to 0$, nu rezultă că seria $\sum u_n$ este conv. Seria armonică $\sum \frac{1}{n}$ este div. deşi $\frac{1}{n} \to 0$.

Teoremă. (Criteriul general al lui Cauchy pentru serii)

Seria $\sum u_n$ *este convergentă* $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0(\varepsilon)$ *astfel încât* $\forall n > n_0$ *şi* $p \geq 1$, *să avem*

$$\left| u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} \right| < \varepsilon .$$

Demonstrația rezultă din aceea că şirul (s_n) este conv. $\Leftrightarrow (s_n)$ este şir Cauchy $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0(\varepsilon)$ aşa că $\forall n > n_0$ şi $p \geq 1$, $\left| s_{n+p} - s_n \right| < \varepsilon$

4. Serii cu termeni pozitivi

O serie $\sum u_n$ cu toți termenii strict pozitivi începând cu un anumit rang se spune că este o serie cu termeni pozitivi.

Pentru o astfel de serie şirul (s_n) al sumelor parțiale este crescător, deci tinde către ∞.

Prin urmare, o serie cu termenii pozitivi este convergentă dacă şi numai dacă şirul (s_n) este mărginit (***criteriul monotoniei***).

Criteriu de comparație. *Dacă* $0 < u_n \leq v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ *(eventual începând cu un anumit rang), atunci* 1°. $\sum v_n$ *conv.* $\Rightarrow \sum u_n$ *conv.*

2°. $\sum u_n\, div. \Rightarrow \sum v_n\ div.$

Demonstrație

1°. Fie $v=\sum_1^{\infty} v_n$. Din $s_n=\sum_1^n u_k \le \sum_1^n v_k \le v \quad \forall n\in\mathbb{N}$ rezultă că șirul (s_n) este mărginit, deci $\sum u_n$ conv.

2° rezultă prin reducere la absurd.

Consecință. *(Criteriu practic de convergență). Fie seriile $\sum u_n$, $\sum v_n$ cu termeni pozitivi și $\lim \frac{u_n}{v_n}=\lambda \quad (\lambda\ne 0,\infty)$. Atunci seriile $\sum u_n$ și $\sum v_n$ au aceeași natură.*

Demonstrație. Având loc dubla inegalitate $\lambda-1<\frac{u_n}{v_n}<\lambda+1$ începând cu un anumit rang, cum $v_n>0$, rezultă $(\lambda-1)v_n<u_n<(\lambda+1)v_n$

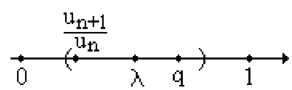
Afirmația rezultă acum cu criteriul precedent.

Exemplu. Seria $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ este divergentă având aceeași natură cu seria armonică $\sum \frac{1}{n}$, deoarece $\lim\frac{u_n}{v_n}=\lim\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\lim \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1$

Criteriul lui d'Alembert*[*] *(al raportului). *Fie $u_n\ge 0$ și $\lambda=\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}$.*

Atunci seria $\sum u_n$ este $\begin{cases}\text{conv. dacă } \lambda<1\\ \text{div. dacă } \lambda>1\end{cases}$.

Demonstrație. Fie $\underline{\lambda<1}$. Există $q<1$ și un rang N de la care începând $(n\ge N)$ $\frac{u_{n+1}}{u_n}\le q$.



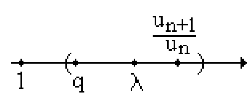
Pentru simplificare vom presupune că inegalitatea are loc $\forall n\in\mathbb{N}$. Din

$$u_{n+1}\le qu_n\le q^2u_{n-1}\le..\le q^n u_1,$$

și deoarece seria $\sum q^n$ este conv., aplicând criteriul de comparație rezultă că $\sum u_n$ este conv.

Fie $\underline{\lambda>1}$. Există $q>1$ și N astfel încât dacă $n\ge N$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\ge q>1.$$



[*] D'Alembert, Jean le Rond (1717–1783), filozof și matematician francez.

Presupunând ca şi înainte că $N = 1$, avem $u_{n+1} \geq q\, u_n \geq \ldots \geq q^n u_1$, dar seria $\sum q^n$ este div., deci şi $\sum u_n$ este div.

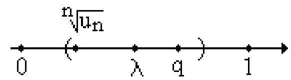
Exemplu. Seria $\sum \frac{3^n}{n!}$ este conv. deoarece

$$\lambda = \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \lim \frac{1}{n+1} = 0 < 1 .$$

Criteriul lui Cauchy *(al rădăcinii). Fie* $u_n \geq 0$ *şi* $\lambda = \lim \sqrt[n]{u_n}$ *. Atunci seria*

$$\sum u_n \, este \begin{cases} conv. & dacă \;\; \lambda < 1 \\ div. & dacă \;\; \lambda > 1 \end{cases}.$$

Demonstrație. Fie $\lambda < 1$ şi $q < 1$ astfel ca începând cu un anumit rang $\sqrt[n]{u_n} \leq q$ adică $u_n \leq q^n$.



Convergența seriei $\sum u_n$ rezultă cu criteriul de comparație

Cazul $\lambda < 1$ se tratează analog.

Exemplu. Seria $\sum \frac{2^n}{n}$ este div. deoarece $\lambda = \lim \sqrt[n]{u_n} = \lim \frac{2}{\sqrt[n]{n}} = 2 > 1$.

Observații

1.) Valoarea λ ce apare în enunțurile ultimelor două criterii este aceeaşi având în vedere că $\lim \sqrt[n]{u_n} = \lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$ alegerea criteriului fiind sugerată de forma lui u_n

2.) În cazul în care $\lambda = 1$, cele două criterii nu decid natura seriei. De aceea vom utiliza un alt criteriu, şi anume:

Criteriul lui Raabe şi Duhamel *(1801–1859). Fie* $u_n \geq 0$ *şi* $\lambda = \lim n\,(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1)$*. Atunci*

$$\sum u_n \; este \; \begin{cases} conv. & dacă \;\; \lambda > 1 \\ div. & dacă \;\; \lambda < 1 \end{cases}$$

Demonstrație. Fie $\underline{\lambda > 1}$. Există $q = 1 + \alpha, \alpha > 0$ şi N (care poate fi luat $= 1$) aşa ca pentru $n \geq N$ să avem $n\,(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1) > 1 + \alpha$

Din inegalitățile $n\,u_n - (n+1)\,u_{n+1} > u_{n+1}\,\alpha > 0$, rezultă că şirul $(n u_n) \downarrow$ şi cum $0 \leq n\,u_n \leq u_1$, există $\ell = \lim n\,u_n$. Pe de altă parte,

$$\sum_1^{\infty} \left[n u_n - (n+1) u_{n+1} \right] = 1 u_1 - 2u_2 + 2u_2 - 3u_3 + \ldots + n u_n - (n+1)\, u_{n+1} + \ldots = u_1 - \ell$$

Conform criteriului de comparație rezultă că $\sum u_n$ este conv.

Fie $\underline{\lambda < 1}$ şi $N\,(=1)$ astfel încât pentru $n \geq N$, $n\,(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1) < 1$.

Din $n\,u_n < (n+1)u_{n+1}$ rezultă că şirul $(nu_n)\uparrow$, deci $u_1 < n\,u_n$ adică $\frac{u_1}{n} < u_n$.

Dar seria $\sum \frac{1}{n}$ este div. deci $\sum u_n$ este div.

Exemplu. Fie seria $\sum \frac{n!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}$ *cu* $\alpha > 0$.

Avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{\alpha+n+1} \to 1$ şi criteriul raportului nu ne poate lămuri. Dar

$$\lambda = \lim n\,(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1) = \lim n\,(\frac{\alpha+n+1}{n+1} - 1) = \alpha\ .$$

Deci seria dată, $\sum u_n\ este \begin{cases} conv.\ dacă & \lambda > 1 \\ div. & \lambda < 1 \end{cases}$. Pentru $\alpha = 1$ se obține $\sum \frac{1}{n+1}$ care este div.

Dăm fără demonstrație

Criteriul logaritmic. *Dacă* $u_n > 0$ *şi* $\lambda = \lim \frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}$, *atunci seria*

$$\sum u_n \quad este \quad \begin{cases} conv. & dacă & \lambda > 1 \\ div. & dacă & \lambda < 1 \end{cases}.$$

Exemplu. Pentru seria $\sum e^{\frac{a\ln n + b}{c\ln n + d}}$ avem

$$\lambda = \lim \frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n} = \lim \frac{-\ln u_n}{\ln n} = -\lim \frac{1}{\ln n} \cdot \frac{a\ln n + b}{c\ln n + d} = -\lim \frac{a + \frac{b}{\ln n}}{c\ln n + d}.$$

Se deduce de aici că seria dată este conv. dacă $c = 0$ şi $-\frac{a}{d} > 1$.

5. Serii cu termeni oarecare

Definiție. *Se numeşte* ***serie alternată*** *o serie de forma*

$$\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots \qquad unde\ u_n \geq 0\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}\ .$$

Criteriul lui Leibniz*** ***.*** *Dacă* $u_n \downarrow 0$ $(u_n \downarrow$ şi $u_n \to 0)$, *atunci seria* $\sum (-1)^{n-1} u_n$ *este conv.*

Demonstrație. Să observăm că şirul $s_{2n-1} \downarrow$ deoarece

* G.W. Leibniz (1646–1716), matematician şi filozof german

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} - (u_{2n} - u_{2n+1}) \le s_{2n-1}.$$

Pe de altă parte el este mărginit:

$$u_1 \ge s_{2n+1} = (u_1 - u_2) + (u_3 \quad - u_4) + \ldots + (u_{2n-1} - u_{2n}) + u_{2n+1} \ge 0$$

Fie $s = \lim s_{2n+1}$. Din $s_{2n} = s_{2n+1} - u_{2n} \to s$, rezultă că seria $\sum (-1)^{n-1} u_n$ este conv.

Exemplu. Seria armonică alternată: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} + \ldots$ este conv.

Observație. Criteriul lui Leibniz este un caz particular al ***criteriului lui Abel:*** dacă $0 \le u_n \downarrow 0$ iar şirul sumelor parţiale ale seriei $\sum \alpha_n$ este mărginit, atunci seria $\sum \alpha_n u_n$ este convergentă. Într-adevăr, în cazul nostru $\alpha_n = (-1)^{n-1}$ şi $s_n \in \{0,1\}$.

Definiție. *O serie $\sum u_n$ este **absolut convergentă** dacă seria $\sum |u_n|$ este convergentă.*

Exemplu. Seria $1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} + \ldots$ este absolut convergentă deoarece seria modulelor ei este convergentă $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots = e - 1$.

Teoremă. *O serie absolut convergentă este convergentă.*

Demonstrație. Seria $\sum |u_n|$ fiind convergentă, conform criteriului general al lui Cauchy $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon)$ astfel încât $\forall n > n_0$ şi $p \ge 1$ să avem

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}| < \varepsilon.$$

Dar $|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| \le |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}| < \varepsilon$, deci $\sum u_n$ este conv.

Exemplu. Seria $\frac{\sin \alpha}{1^2} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n\alpha}{n^2} + \ldots$ cu $\alpha \in \mathbb{R}$ este o serie cu termeni oarecare. Seria modulelor ei $\sum \frac{|\sin n\alpha|}{n^2}$ este o serie cu termeni pozitivi care, comparată cu seria lui Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ rezultă conv. Seria dată fiind absolut conv. este conv. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Fie $\sum u_n, \sum v_n$ două serii.

Prin definiție ***seria sumă*** este $\sum (u_n + v_n)$ şi ***seria produs,*** seria

$$u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_1) + (u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1) + \ldots$$

Propoziție. *Dacă seriile $\sum u_n$ şi $\sum v_n$ sunt convergente având sumele u respectiv v, atunci $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ seria $\sum (\alpha u_n + \beta v_n)$ este convergentă şi are suma $\alpha u + \beta v$.*

Aceasta rezultă imediat din proprietățile şirurilor de sume parțiale

Exemplu. Seria $\sum \frac{2^n}{[7-(-1)^n]^n}=\frac{1}{4}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^5}+\frac{1}{3^6}+...$ este suma a două serii geometrice conv.: $\sum u_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^5}+...=\frac{1/4}{1-\frac{1}{4^2}}=\frac{4}{15}$ şi $\sum v_n=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^6}+...=\frac{1/9}{1-\frac{1}{9}}=\frac{4}{8}$, deci ea este convergentă şi are suma $\frac{11}{40}$.

Dăm fără demonstrație următoarea

Teoremă. *Dacă seriile* $\sum u_n$ și $\sum v_n$ *sunt absolut convergente având sumele u respectiv v, atunci seria produs este absolut convergentă şi are suma uv.*

Exerciții

1.) Pornind de la definiție să se arate că $\lim \frac{2^n+(-2)^n}{3^n}=0$

2.) Să se determine rangurile $n_0\ (\varepsilon)$ de la care începând toți termenii şirului $x_n=\frac{n^2+2}{3n^2+1}$ diferă de $\frac{1}{3}$ cu mai puțin de $\frac{1}{10},\frac{1}{100}$.

3.) Să se arate că pentru $|a|<1$ şi $k\in\mathbb{N}$ avem $\lim n^k a^n=0$.

4.) Să se arate că dacă $x_n\to 0$ şi (y_n) este un şir mărginit, atunci $x_n y_n\to 0$.

5.) Să se calculeze limitele şirurilor:

a.) $x_n=(0{,}39)^n\cdot n^2\sin n!+(-1)^n\frac{n}{5^n}+\frac{3^n+5^n}{3^{n+1}+5^{n+1}}$ *b.)* $x_n=\frac{2^2+4^2+\ldots+(2n)^2}{1^2+3^2+\ldots+(2n+1)^2}$

c.) $x_n=\frac{4\cdot 5^n+n+2^n}{2\cdot 5^n+n^2+4\cdot 3^n}$ *d.)* $x_n=\sqrt[3]{(n+1)^3+1}-\sqrt[3]{n^3+2n^2+1}$

e.) $x_n=\left(\sin\frac{1}{n}+\cos\frac{1}{n}\right)^n$ *f.)* $x_n=\left[\frac{\lambda n+\sqrt{4n^2+3n+1}}{\sqrt{n^2+3n+4}}\right]^{\frac{n}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}}$

g.) $x_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$ *h.)* $x_n=\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2^2}\ldots\cos\frac{\varphi}{2^n}$

6.) Să se determine λ şi μ cu condiția ca $\lim\left(\sqrt[3]{1-n^3}-\lambda n-\mu\right)=0$.

R: $\lambda=-1,\mu=0$

7.) Să se arate că următoarele şiruri sunt convergente şi să li se determine limita;

a.) $x_n=\frac{n^n}{(n!)^2}$ R: 0

b.) $x_n=\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{7}\cdot\frac{9}{10}\cdots\frac{5+2(n-1)}{4+3(n-1)}$ R: 0

$c.)\quad x_n = \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{\ldots}}}\quad a>0$ R : $\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$

8.) Să se calculeze limitele următoarelor şiruri:

$a.)\ x_n = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

$c.)\ x_n = \sqrt[n]{\dfrac{n!}{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}}$

$b.)\ x_n = \sqrt[n]{\dfrac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}}$

$d.)\ x_n = \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\ldots(}$

9.) Folosind lema lui Stolz să se calculeze

$a.)\ \lim\limits_{n} \dfrac{1+2^2\sqrt{2}+\ldots+n^2\sqrt[n]{n}}{n(n+1)(2n+1)}$ R: $\dfrac{1}{6}$

$b.)\ \lim\limits_{n}\left[\dfrac{1^p+3^p+\ldots+(2n-1)^p}{n^p}-\dfrac{2^p n}{p+1}\right],\quad p\in N$ R: 0

10.) Să se studieze natura următoarelor şiruri folosind criteriul general al lui Cauchy

$a.)\ x_n = 1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ R: div

$b.)\ x_n = \dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{6}+\dfrac{7}{10}+\ldots+\dfrac{1+3n}{2+4n}$ R: div

$c.)\ x_n = 1+\dfrac{1}{5^2+2}+\dfrac{1}{5^3+2}+\ldots+\dfrac{1}{5^n+2}$ R: conv

$d.)\ x_n = 1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)^2}$ R: conv

11.) Să se calculeze în $\mathbb{R}^3$ $\lim\limits_{n}\left(\sqrt[n]{n},(1-\dfrac{1}{n})^{2n},\dfrac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{n}\right)$.

12.) Să se calculeze:

$a.)\ \sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n^2-4}$ R: $\dfrac{25}{48}$

$g.)\ \sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}$

$b.)\ \sum\limits_{3}^{\infty}\dfrac{4n-3}{n(n-2)(n+3)}$

$h.)\ \sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{2^n+(-1)^{n+1}}{5^n}$

$c.)\ \sum\limits_{1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$ R: $1-\sqrt{2}$

$i.)\ \sum\dfrac{7\cdot 2^n-6^{n-1}+2\cdot 3^{n+1}}{12^n}$

$d.)\ \sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$ R: $\sqrt{2}-1$

$j.)\ \sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{n^2+n-3}{n!}$

$e.)\ \sum\limits_{2}^{\infty}\ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$ R: $-\ln 2$

$k.)\ \sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{n^3+n+1}{n!}$

$f.)\ \sum_{1}^{\infty} ln\left[1+\frac{2}{n(n+3)}\right]$ R: $\ln 3$ $l.)\ \sum_{1}^{\infty} arctg\frac{1}{n^2+n+1}$

13.) Ştiind că $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ să se calculeze $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2}$.

14.) Care din următoarele serii îndeplinesc condiția necesară de convergență?

$a.)\ \sum\frac{1}{\sqrt[n]{n}+1}$; $b.)\ \sum n^2\left(e^{\frac{1}{n}}-1-\frac{1}{n}\right)$; $c.)\ \sum(-1)^n\frac{ln\left(2+e^{3n}\right)}{ln\left(3+e^{2n}\right)}$; $d.)\ \sum ln\frac{n^2+2}{n^2+1}$.

15.) Folosind criterii de comparație să se studieze natura seriilor:

$a.)\ \sum_{1}^{\infty}\left(\sqrt{n+a}-\sqrt[4]{n^2+n+b}\right)$

$b.)\ \sum\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^p}$

$c.)\ \sum\frac{1}{n^p}sin\frac{\pi}{n}$

$d.)\ \sum\frac{1}{n\left(1+a+a^2+\ldots+a^n\right)}$ $a>0$

$e.)\ \sum\left(ch\frac{n+1}{n^2+1}-1\right)$

$f.)\ \sum ln\frac{n^2+2}{n^2+1}$

16.) Aplicând criteriul rădăcinii să se stabilească natura seriilor:

$a.)\ \sum\left(\frac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^3}-\frac{n}{4}\right)^n$ $c.)\ \sum\left(cos\frac{a}{n}\right)^{n^3}$

$b.)\ \sum\frac{(3n)^n}{\sqrt{\left(16n^2+5n+1\right)^{n+1}}}$ $d.)\ \sum\left(\frac{1}{e}+\sqrt[n]{\frac{n!}{n^{n+1}}}(2n+1)\sigma_n\right)^n$ unde $\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}$

17.) Aplicând criteriul raportului să se arate că următoarele serii sunt convergente:

$a.)\ \sum n!\left(\frac{a}{n}\right)^n$ $cu\ \ a<e$ $b.)\ \sum\frac{n^p\ ln\,n}{n!}$ $c.)\ \sum\frac{(n!)^2}{(2n)!\,8^n}$

$d.)\ \sum\frac{a^n}{n!},\ a>0$ (se deduce de aici că $\lim\frac{a^n}{n!}=0$ $pentru\ \ a>0$)

18.) Cu criteriul Raabe-Duhamel să se studieze natura seriilor:

$a.)\ \sum\frac{a(a+d)\ldots(a+(n-1)d)}{b(b+d)\ldots(b+(n-1)d)}$ $a,b,d>0$ $b.)\ \sum\frac{2\cdot7\cdot12\ldots[2+5(n-1)]}{3\cdot8\cdot13\ldots[3+5(n-1)]}$

$c.)\ \sum\left[\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots(2n)}\right]^p\cdot\frac{1}{n^q}$ $d.)\ \sum(2n+1)\left[\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+n+1)}\right]^2$

II. FUNCȚII CONTINUE

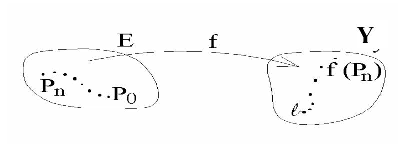
1. Limita unei funcții într-un punct

Fie spațiile euclidiene $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^m$ şi funcția $f : E \subset \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$.

Noțiunea de limită a funcției *f* într-un punct P_0 este legată de fapt de comportarea lui *f* într-o vecinătate a lui P_0, punctul P_0 putând să nu aparțină lui *E*. Totuşi este necesar să existe puncte din *E* oricât de apropiate de P_0.

După cum am văzut, dacă P_0 este punct de acumulare pentru *E*, atunci există cel puțin un şir (P_n) de puncte din *E* cu $P_n \neq P_0$, convergent către P_0. (propoziția 2.8.3 cap.II)

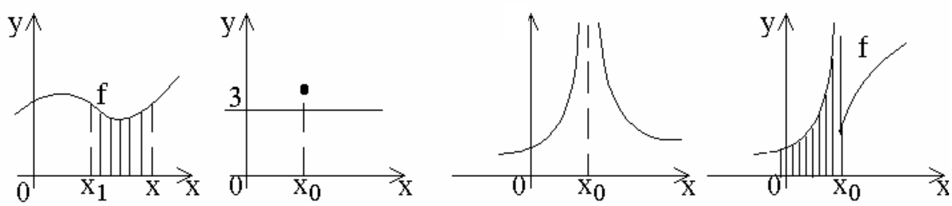
Definiția 1 („cu şiruri”) *Fie* $P_0 \in E'$.



Spunem că ℓ *este **limita funcției f în punctul*** P_0 *(şi scriem* $\ell = \lim\limits_{P \to P_0} f(P)$*), dacă oricare ar fi şirul* (P_n) *de puncte din E cu* $P_n \neq P_0$ *şi* $P_n \to P_0$*, şirul valorilor funcției* $f(P_n) \to \ell$.

Exemple

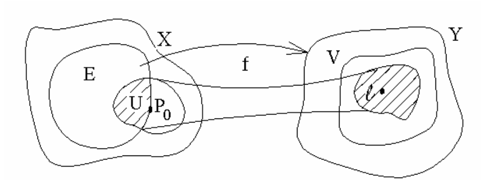
1.) $\mathcal{X} = \mathbb{R}, \mathcal{Y} = \mathbb{R}$



2.) Funcția $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ nu are limită în origine, deoarece dacă (P_n) este un şir de puncte de pe dreapta de ecuație $y = kx$, care converge către origine, de exemplu $P_n\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{k}{n}\right)$, atunci şirul de valori $f(P_n) = \dfrac{\frac{1}{n} \cdot \frac{k}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{k^2}{n^2}} = \dfrac{k}{1+k^2}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ tinde către un număr dependent de panta dreptei.

În schimb funcția *f* are limită în orice punct $P_0(x_0, y_0)$ diferit de origine. Într-adevăr, dacă (P_n) este un şir oarecare convergent către P_0, atunci cum $P_n(x_n, y_n) \to P_0(x_0, y_0)$ este echivalent cu $x_n \to x_0$ şi $y_n \to y_0$, avem $f(P_n) = f(x_n, y_n) = \dfrac{x_n\, y_n}{x_n^2 + y_n^2} \to f(x_0, y_0) = f(P_0)$, deci $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$ pentru $P_0 \neq 0$.

Teoremă . $\ell = \lim\limits_{P \to P_0} f(P) \Leftrightarrow$ *oricare ar fi vecinătatea V a lui* ℓ *, există o vecinătate U a lui* P_0 *astfel încât* $f(U \cap E \setminus \{P_0\}) \subset V$



Demonstrație $\underset{necesitate}{\Rightarrow}$. Fie $\ell = \lim\limits_{P \to P_0} f(P)$. Să presupunem prin absurd că $\exists$ o vecinătate V_1 a lui ℓ astfel încât oricare ar fi vecinătatea U a lui P_0, există cel puțin un punct din $U \cap E - \{P_0\}$ a cărui imagine prin f nu este în V_1. În particular, pentru orice sferă $S_{\frac{1}{n}}(P_0)$ există $P_n \in S_{\frac{1}{n}}(P_0) \cap E - \{P_0\}$ aşa ca $f(P_n) \notin V_1$.

Am obținut astfel un şir (P_n) de elemente din E cu $P_n \neq P_0, P_n \to P_0$ (căci $d(P_n, P_0) < \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$), pentru care $f(P_n) \not\to \ell$, ceea ce contrazice faptul că $\ell = \lim\limits_{P \to P_0} f(P)$.

$\underset{suficiențu}{\Leftarrow}$ Fie V o vecinătate oarecare a lui ℓ şi U, vecinătate a lui P_0 astfel încât $f(U \cap E) - \{P_0\} \subset V$. Dacă $P_n \to P_0, P_n \in E, P_n \neq P_0$, atunci $\exists n_0(U)$ astfel încât $P_n \in U$ îndată ce $n > n_0$. Din $f(P_n) \in f(U \cap E - \{P_0\}) \subset V$ pentru $n > n_0$, rezultă că $f(P_n) \to \ell$ în $\mathcal{Y}$, deci $\ell = \lim\limits_{P \to P_0} f(P)$.

Conform acestei teoreme, limita unei funcții într-un punct poate fi dată de

Definiția 2 („cu vecinătăți”). $\ell = \lim\limits_{P \to P_0} f(P)$, *dacă oricare ar fi vecinătatea V a lui* ℓ *, există o vecinătate U a lui* P_0 *astfel încât oricare ar fi* $P \in U \cap E$ *cu* $P \neq P_0$*, să avem* $f(P) \in V$.

Având în vedere că în spațiile metrice $\mathbb{R}^n$ şi $\mathbb{R}^m$ vecinătățile pot fi considerate sfere, putem lua $V = S_\varepsilon(\ell)$ resp. $V = S_\eta(P_0)$. Obținem astfel o definiție echivalentă cu celelalte două.

Definiția 3 („cu ε şi η”). *Spunem că* $\ell = \lim\limits_{P \to P_0} f(P)$, *dacă oricare ar fi* $\varepsilon > 0$, $\exists\, \eta(\varepsilon)$ *astfel încât* $\forall P \in E, P \neq P_0$ *cu* $d(P, P_0) < \eta$ *,să avem* $d(f(P), \ell) < \varepsilon$.

În particular, dacă:

1.) $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n, \mathcal{Y} = \mathbb{R}$, atunci prin definiție $\ell = \lim\limits_{P \to P_0} f(P)$, dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta(\varepsilon)$ astfel încât $d(P, P_0) < \eta$, $P \neq P_0 \Rightarrow | f(P) - f(P_0) | < \varepsilon$.

2.) $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2, \mathcal{Y} = \mathbb{R}$, atunci $\ell = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$, dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon)$ astfel încât $|x - x_0| < \eta,\ |y - y_0| < \eta \Rightarrow |f(x, y) - \ell| < \varepsilon$.

3.) $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathbb{R}$, atunci $\ell = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, dacă $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta(\varepsilon)$ astfel încât $|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Dacă $f_i\left(i = \overline{1, m}\right)$ sunt componentele scalare ale funcției vectoriale $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ și $\ell = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m) \in \mathbb{R}^m$, atunci are loc

Propoziția. $\ell = \lim\limits_{P \to P_0} f(P) \Leftrightarrow \ell_i = \lim\limits_{P \to P_0} f_i(P),\ i = \overline{1, m}$.

Într-adevăr, aceasta rezultă din aceea că dacă $P_n \to P_0$, atunci

$$f(P_n) = \begin{pmatrix} f_1(P_n) \\ \vdots \\ f_m(P_n) \end{pmatrix} \to \ell = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow f_i(P_n) \to \ell_i \quad i = \overline{1, m}.$$

Observație. Pentru o funcție reală $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ noțiunea de limită se poate extinde, ca și la funcțiile de o singură variabilă, la cazul când una din variabile sau chiar toate tind la infinit $(\pm \infty)$, sau când limita este infinită.

De exemplu, $l = \lim\limits_{P \to P_0} f(P) = \infty$, dacă $\forall b > 0 \exists\, \eta(b)$ așa ca $P \in E,\ P \neq P_0$ cu

$$d(P, P_0) < \eta \Rightarrow f(P) > b.$$

2. Continuitate

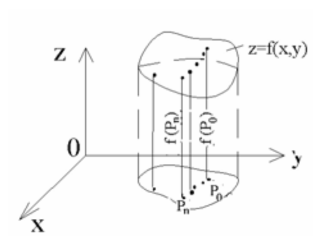
Fie $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^m$, $f : E \subset \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ și $P_0 \in E$.

Definiția 1 („ cu șiruri”). *Spunem că funcția f este* ***continuă în*** P_0*, dacă oricare ar fi șirul* (P_n) *de puncte din E cu* $P_n \to P_0$*, șirul valorilor* $f(P_n) \to f(P_0)$.

Exemplu

$\mathcal{X} = \mathbb{R}^2,\ \mathcal{Y} = \mathbb{R}$

f este continuă în P_0



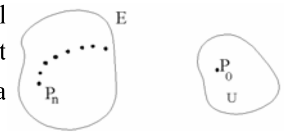
Observația 1. Dacă $P_0 \in E \cap E'$, atunci f cont. $P_0 \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$.

În acest caz, definiția 1 este echivalentă cu:

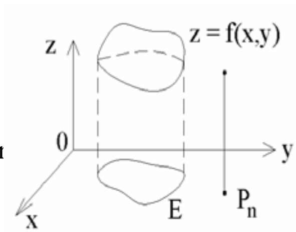
Definiția 2. (“cu vecinătăți”). *Funcția f este continuă în* P_0*, dacă oricare ar fi vecinătatea V a lui* $f(P_0)$ *există o vecinătate U a lui* P_0 *astfel încât* $f(U \cap E) \subset V$.

Definiția 3. (“cu ε și η”). *Funcția f este continuă în* P_0*, dacă* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta(\varepsilon)$ *astfel încât dacă* $P \in E$ *și* $d(P, P_0) < \eta$*, atunci* $d(f(P), f(P_0)) < \varepsilon$.

Observaţia 2. O funcţie este continuă în orice punct izolat al domeniului ei de definiţie. Într-adevăr, dacă P_0 este punct izolat $\left(P_0 \in E, P_0 \notin E'\right)$, atunci există o vecinătate U a lui P_0 aşa ca $U \cap E = \{P_0\}$.



Fie acum (P_n) un şir oarecare de puncte din E cu $P_n \to P_0$. Există atunci un rang $n_0(U)$ astfel încât $P_n \in U$ pentru $n > n_0$, adică $P_n = P_0$.



Rezultă de aici că $f(P_n) = f(P_0)$ îndată ce $n > n_0$, prin urmar $f(P_n) \to f(P_0)$ (ca şir constant) şi f cont P_0.

După cum se vede, graficul funcţiei $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este "întrerupt" în dreptul punctului P_0 deşi funcţia este continuă în acest punct izolat.

Propoziţia 1. *Funcţia f este continuă în* $P_0 \Leftrightarrow$ *componentele ei scalare fi* $\left(i = \overline{1,m}\right)$ *sunt continue în* P_0.

Într-adevăr, dacă $P_n \to P_0$, deoarece $f(P_n) = \begin{pmatrix} f_1(P_n) \\ \vdots \\ f_m(P_n) \end{pmatrix}$ şi $f(P_0) = \begin{pmatrix} f_1(P_0) \\ \vdots \\ f_m(P_0) \end{pmatrix}$, rezultă că

$f(P_n) \to f(P_0) \Leftrightarrow f_i(P_n) \to f_i(P_0) \quad i = \overline{1,m}.$

Propoziţia 2. *Fie* $f : E \subset \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $g : \mathcal{Y} \to Z = \mathbb{R}^P$. *Dacă f este continuă în* P_0 *şi g este continuă în* $f(P_0)$, *atunci funcţia* $g \circ f$ *este continuă în* P_0.

Aceasta rezultă din aceea că

$$P_n \to P_0 \overset{f.contP_0}{\Rightarrow} f(P_n) \to f(P_0) \overset{g.cont\, f(P_0)}{\Rightarrow} g(f(P_n)) \to g(f(P_0))$$
$$\Updownarrow$$
$$(g \circ f)(P_n) \to (g \circ f)(P_0).$$

Pentru funcţiile reale de mai multe variabile vom menţiona următoarele două proprietăţi cunoscute de la funcţiile de o singură variabilă.

Propoziţia 3. *Fie funcţia* $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *continuă în* $P_0 \in \overset{\circ}{E}$. *Dacă* $f(P_0) \neq 0$, *atunci există o vecinătate U a lui* P_0 *în care* $f(P)$ *are acelaşi semn cu* $f(P_0)$.

Demonstraţie. Din continuitatea lui *f în* P_0 rezultă că $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta(\varepsilon)$ astfel încât dacă $P \in E$ şi $d(P, P_0) < \eta$, atunci $f(P_0) - \varepsilon < f(P) < f(P_0) + \varepsilon$.

Dacă $f(P_0) > 0$, atunci putem alege ε aşa ca $0 < \varepsilon < f(P_0)$.

Astfel pentru $P \in S_\eta(P_0) \cap E = U$ avem $0 < f(P)$.

Dacă $f(P_0) < 0$, atunci vom lua $\varepsilon < -f(P_0)$ şi pentru $P \in U$ vom avea

$$f(P) < f(P_0) + \varepsilon < 0.$$

Propoziția 4. *Dacă funcțiile* $f, g : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *sunt continue în* P_0, *atunci funcțiile* $f + g, f \cdot g, \dfrac{f}{g}$ $(g(P_0) \neq 0)$ *sunt continue în* P_0.

Definiție. *Funcția* $f : E \subset \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *se spune că* ***este continuă pe E*** *dacă este continuă în orice punct* $P \in E$.

Observație. Pentru astfel de funcții are loc proprietatea că dacă o submulțime $A \subset E$ este conexă, atunci $f(A)$ este conexă.

3. Continuitate uniformă

Continuitatea uniformă este o proprietate a funcțiilor pe o mulțime.

Fie $X = R^n, Y = R^m$ și $f : E \subset X \to Y$.

Definiție. *Spunem că funcția f este* ***uniform continuă pe E****, dacă* $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \eta(\varepsilon)$ *astfel încât* $\forall P', P'' \in E$ *cu* $d(P', P'') < \eta$ *să avem* $d(f(P'), f(P'')) < \varepsilon$.

Observații

1.) Dacă *f* este uniform continuă pe *E*, atunci *f* este continuă pe *E*.

Într-adevăr, n-avem decât să punem în definiția de sus $P' = P$, $P'' = P_0$ unde P_0 este un punct oarecare din *E*, și obținem continuitatea lui *f* în P_0.

Reciproca nu este adevărată după cum se va vedea din exemplul 2.

2.) Se spune că funcția *f este* ***lipschitziană*** [*] ***pe E,*** dacă $\exists\ k > 0$ astfel încât

$$d(f(P'), f(P'')) \leq k\, d(P', P'') \qquad \forall P', P'' \in E.$$

O funcție lipschitziană pe *E* este uniform continuă pe *E* deoarece putem avea

$$d(f(P'), f(P'')) < \varepsilon \text{ îndată ce } d(P', P'') < \frac{\varepsilon}{k} = \eta.$$

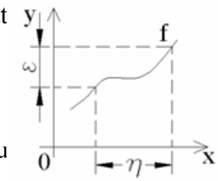
3.) O funcție nu este uniform continuă pe *E* dacă $\exists\ \varepsilon_1$ astfel încât $\forall\ \eta > 0$ să existe $P'_\eta, P''_\eta \in E$ cu $d(P'_\eta, P''_\eta) < \eta$ dar pentru care $d(P'_\eta, P''_\eta) \geq \varepsilon_1$.

În aplicații, luând $\eta = \dfrac{1}{n}$, pentru a arăta că *f* nu este uniform continuă pe *E*, este suficient a arăta că $\exists \varepsilon_1 > 0$ astfel încât $\forall\, n \in N$, $\exists\ P_n', P_n'' \in E$ cu $d(P'_n, P''_n) < \dfrac{1}{n}$ și așa ca $d(f(P'_n), f(P''_n)) \geq \varepsilon_1$.

4.) În cazul în care $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathbb{R}$, definiția continuității uniforme ia forma: funcția $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este uniform continuă pe *E*, dacă $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta(\varepsilon)$ astfel încât $\forall x', x'' \in E$ cu $|x' - x''| < \eta$ să avem $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

---

[*] R.O.S. Lipschitz (1832-1903), matematician german.



Geometric, imaginea oricărui subinterval de lungime mai mică decât η este inclusă într-un interval de lungime mai mică decât ε.

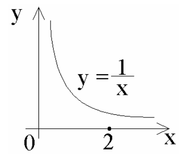
Exemple

1.) Funcția $f(x)=x^2$ este uniform continuă pe (0, 2) deoarece pentru $x', x'' \in (0,2)$,

$$\left|f(x')-f(x'')\right|=\left|(x')^2-(x'')^2\right|\le\left(|x'|+|x''|\right)|x'-x''|\le 4|x'-x''|<\varepsilon \text{ îndată ce } |x'-x''|<\frac{\varepsilon}{4}\eta.$$

2.) Funcția $f(x)=\dfrac{1}{x}$ nu este uniform continuă pe (0,2) deoarece $\exists \varepsilon_1=\dfrac{1}{2}$ astfel încât pentru $\forall n\in N$ există $x', x''\in(0,2)$, și anume $x'_n=\dfrac{1}{n}$, $x''_n=\dfrac{2}{n}$ așa ca $|x'_n-x''_n|<\dfrac{1}{n}$. Dar

$$|f(x'_n)-f(x''_n)|=\left|n-\frac{n}{2}\right|=\frac{n}{2}\ge\frac{1}{2}$$



3.) Funcția $f(x,y)=\left(-\dfrac{y}{x},\dfrac{x}{y}\right)$ este uniform continuă pe $(1,2)\times(2,3)\subset\mathbb{R}^2$, deoarece este lipschitziană cu $k=\dfrac{5}{4}\sqrt{97}$. Într-adevăr, dacă $P'(x',y')$, $P(x'',y'')\in(1,2)x(2,3)$, atunci cum $f(P')=\left(-\dfrac{y'}{x'},\dfrac{x'}{y'}\right)$ și $f(P'')=\left(-\dfrac{y''}{x''},\dfrac{x''}{y''}\right)$, avem

$$d(f(P'),f(P''))=\sqrt{\left(\frac{y''}{x''}-\frac{y'}{x'}\right)^2+\left(\frac{x''}{y''}-\frac{x'}{y'}\right)^2}=\frac{|y''x'-x''y'|}{|x'x''y'y''|}\sqrt{(y'y'')^2+(x'x'')^2}<$$

$$<\frac{\sqrt{97}}{4}|y''x'-y''x''+y''x''-y'x''|\le\frac{\sqrt{97}}{4}\left(|y''||x'-x''|-|x''||y''-y'|\right)\le$$

$$\le\frac{\sqrt{97}}{4}\left(2|x'-x''|+3|y'-z''|\right)\le\frac{5}{4}\sqrt{97}\ \ d(P',P'').$$

Observație. O funcție reală *f* de două variabile este lipschitziană pe *E* dacă $\exists k_1,k_2>0$ astfel încât $\forall\ (x',y')$ și $(x'',y'')\in E$ să avem

$$|f(x',y')-f(x'',y'')|\le k_1|x'-x''|+k_2|y'-y''|.$$

În general o funcție reală de *n* variabile este lipschitziană pe *E*, dacă $\exists\ k_i>0\ \ i=\overline{1,n}$ astfel încât $\left|f(x'_1,x'_2,\dots x'_n)-f(x''_1,x''_2,\dots x''_n)\right|\le\sum_{i=1}^{n}k_i|x'_i-x''_i|$.

Funcții lipschitziene în raport cu o parte din variabile apar în teoremele de existentă şi unicitate (Cauchy-Lipschitz) din teoria ecuațiilor diferențiale.

Exerciții

1.) Să se arate că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Să se calculeze apoi $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi-x}$. R: 0

2.) Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\pm\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ R: $\frac{1}{2}$; $-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\,\mathrm{tg}\,x}-\sqrt{1+x\sin x}}{x^4}$ R: $\frac{1}{4}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)}{\sin bx}$ R: $\frac{2a}{b}$

3.) Să se arate că $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$. Folosind acest rezultat să se calculeze

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(nx+\sqrt{1-n^2x^2}\right)}{\ln\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)}$$ R: n

4.) Să se arate că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-1}{x}=\alpha$. Folosind aceasta să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$. R: $\frac{3}{2}$

5.) Pentru ce valori $\alpha\in[0,2\pi]$ funcția $f(x)=\begin{cases}\sqrt{\sin^2\alpha-\dfrac{x}{e^{1-x}}\sin\alpha+\dfrac{x^2}{4}}, & x\in[0,1)\\ \dfrac{1}{2} & ,x=1\\ \dfrac{3}{2}\dfrac{\ln x}{x-1} & ,x\in(1,2]\end{cases}$ este continuă în $x=1$?

6.) Să se deseneze graficul funcției $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}$, $x\geq 0$.

7.) Pe baza definiției să se arate că $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\dfrac{x^2}{y}=\dfrac{1}{2}$.

R : Se arată că $\forall\ \varepsilon>0, \exists\ \eta(\varepsilon)$ astfel încât $|x-1|<\eta$ și $|y-2|<\eta$ să implice $\left|\dfrac{x^2}{y}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$.

Avem $\begin{matrix}|x-1|<\eta\Rightarrow|x|<1+\eta\\ |y-2|<\eta<1\Rightarrow 1<y<3\end{matrix}$ și îndată ce $\eta<\dfrac{-5+\sqrt{25+16\varepsilon}}{4}$

$$\left|\frac{x^2}{y}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{2x^2-2-y+2}{2y}\right|\leq\frac{2|x-1|(|x|+1)+|2-y|}{2|y|}<\frac{2\eta(1+\eta)+\eta}{2}<\varepsilon$$

8.) Să se calculeze: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)x^2y^2}$. R: ∞

9.) Să se arate că dacă $x\to\infty$ şi $y\to\infty$, funcţia $f(x,y)=\dfrac{1}{1+\left(x^2-y\right)}$ nu are limită.

R: Se poate alege un şir (P_n) de puncte de pe prima bisectoare şi un altul (P_n') de pe parabola de ecuaţie $y=x^2$

10.) Să se arate că funcţia $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ nu are limită în origine deşi limitele ei iterate sunt egale $\left(\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)\right)$.

11.) Să se găsească punctele de discontinuitate ale funcţiilor:

a.) $f(x)=\operatorname{tg}\dfrac{1}{x}$ R: $\{0\}\cup\left\{\dfrac{2}{(2k+1)\pi}\right\}_{k\in z}$ *b.)* $f(x,y)=\dfrac{xy+1}{xy-1}$

R: Punctele hiperbolei echilatere $xy=1$

12.) Să se studieze continuitatea funcţiilor:

a.) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}{x^2+y^2} & \text{dacă } x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x=y=0\end{cases}$ R :continuă pe $\boldsymbol{R}^2\setminus\{0,0\}$

b.) $f(x,y)=\begin{cases}(1+xy)^{\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}} & \text{dacă } x,y>0\\ 1 & x=y=0\end{cases}$ R: continuă pe domeniul de definiţie

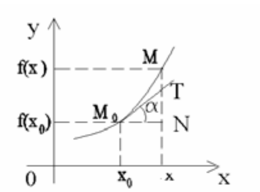
c.) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{dacă } x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x=y=0\end{cases}$ R : nu e continuă în $(0,0)$

III. DERIVATA UNEI FUNCȚII DE O SINGURĂ VARIABILĂ

1. Derivata

Fie funcția $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, I$ fiind un interval deschis (domeniu) din $\mathbb{R}$. Spunem că f este ***derivabilă în*** $x_0 \in I$, dacă există şi este finită limita $f'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Limita de sus se numeşte ***derivata funcției f în*** x_0 şi este un număr.



Din punct de vedere geometric $f'(x_0)$ reprezintă panta tangentei $M_0 T$ la curba de ecuație $y = f(x)$ în punctual $M_0\,(x_0\,, f(x_0))$, deci $f'(x_0) = tg\,\alpha$

Spunem că funcția *f* este derivabilă pe *I*, dacă *f* este derivabilă în orice punct $x \in I$. În acest caz aplicația $f' : I \to \mathbb{R}$ dată de $x \xrightarrow{f'} f'(x) \qquad \forall x \in I$ se numeşte ***derivata funcției f***.

Se defineşte ***derivata de ordinul n a funcției f*** prin formula $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)' \qquad n = 1,2,\ldots$ unde $f^{(0)} = f$, dacă funcția $f^{(n-1)}$ este la rândul ei derivabilă pe *I*.

Dacă *f* admite derivate până la ordinul *n* continue pe *I*, atunci spunem că *f **este de clasă*** $C^n(I)$ şi scriem $f \in C^n(I)$.

Dacă *f* şi *g* sunt de *n* ori derivabile pe *I*, atunci funcțiile $f + g$, $f \cdot g$ sunt de *n* ori derivabile pe *I* şi

$$(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)} \qquad \forall\, n \geq 1$$

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{0}^{n} C_n^k\, f^{(n-k)} g^{(k)} \quad \text{(formula lui Leibniz)}.$$

Exemplu. Să se calculeze $h^{(100)}$ dacă $h(x) = \left(x^3 + x + 1\right) ch\, x$.

Soluție. Notând $f(x) = chx$, $g(x) = x^3 + x + 1$, avem

$$f'(x) = shx \qquad\qquad g'(x) = 3x^2$$

$$f''(x) = chx \qquad\qquad g''(x) = 6x$$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} sh\,x & \text{pentru } n \text{ impar} \\ ch\,x & \text{pentru } n \text{ par} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} g'''(x) = 6 \\ g^{(n)}(x) = 0 \text{ pentru } n \geq 4. \end{array}$$

Aplicând formula lui Leibniz, avem

$$h^{(100)} = (f \cdot g)^{(100)} = C_{100}^0\, f^{(100)} g + C_{100}^1\, f^{(99)} g' + C_{100}^2\, f^{(98)} g'' + C_{100}^3\, f^{(97)} g''',$$

deci

$$h^{(100)}(x)=\left(x^3+x+1\right)chx+100\left(3x^2+1\right)shx+\frac{100\cdot 99}{1\cdot 2}\cdot 6x\,chx+\frac{100\cdot 99\cdot 98}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 6\,shx=$$

$$=\left(x^3+29701x+1\right)chx+\left(300x^2+970300\right)chx.$$

2. Diferențiala

Fie $f: I \to R$. Se ***numeşte diferenţă de ordinul I*** a funcției *f* variația

$$\Delta f = f(x+h)-f(x),$$

h numindu-se pas. Notația completă este $\Delta f(x,h)$.

Diferența de ordinul doi a lui *f* este diferența de ordinul întâi a funcției $g(x)=\Delta f(x,h)$, deci $\Delta^2 f=\Delta(\Delta f)=g(x+h)-g(x)=f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)$.

Prin inducție se defineşte diferența de ordinul *n* $\Delta^n f=\Delta\left(\Delta^{n-1} f\right)$

şi are loc formula $\Delta^n f=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k f\left[x+(n-k)h\right]$.

Fie funcția *f* derivabilă în $x_0 \in I$ şi $\Delta x = x - x_0 = h$. Din $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$

rezultă că există o funcție $\alpha(x\ \ ,h)$ astfel încât $\frac{\Delta f}{h}=f'(x_0)+\alpha(x_0,h)$

cu $\alpha(x_0,h)\to 0$ când $h\to 0$, sau o funcție $\omega(x_0,h)$ aşa ca $\Delta f=f'(x_0)h+\omega(x_0,h)$

şi $\frac{\omega(x_0,h)}{h}\to 0$ când $h\to 0$.

Deoarece $\lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{f'(x_0)h}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0)h+\omega(x_0,h)}{f'(x_0)h}=1+\frac{1}{f'(x_0)}\lim\frac{\omega(x_0,h)}{h}=1$,

pentru *h* suficient de mic are loc aproximarea

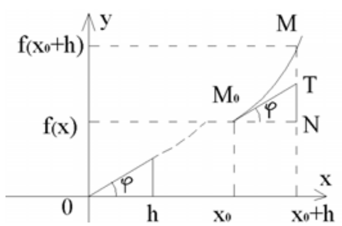
$$f(x_0+h)-f(x_0)\approx f'(x_0)h$$

care este foarte utilă în calculul creşterii funcției *f*. În loc să calculăm valorile lui *f* în x_0 şi x_0+h, este mai simplu de efectuat produsul $f'(x_0)h$ care este o funcție liniară de *h*.

Definiție. ***Diferențiala funcției f în*** x_0 *este funcția liniară (de h) definită pe* $\mathbb{R}$

$$h\to f'(x_0)h$$

notată cu $d\,f(x_0)$: $\mathrm{d}\,f(x_0)(h)=f'(x_0)h$.



Graficul funcției liniare $d\,f(x_0)$ este o dreaptă ce trece prin origine de pantă

$$tg\,\varphi=f'(x_0)$$

Din punct de vedere geometric

$MN=\Delta f$

$NT=NM_0\,tg\,\varphi=h\,f'(x_0)=d\,f(x_0)(h)$

Relația de aproximație

$$f(x_0+h)-f(x_0)\approx d\,f(x_0)(h)$$

exprimă faptul că segmentul *TM* poate fi făcut oricât de mic dacă se ia creşterea *h* suficient de mică.

Exemplu. Cu cât creşte aria unui cerc de rază 98,5 m dacă mărim raza cu 0,1 m?

Soluție. Aria cercului este $A=\pi r^2$. Avem $A'=2\pi r$, $r_0=98{,}5$, $h=r-r_0=0{,}1$, deci

$$\Delta A\approx d\,A=A'(r_0)h=2\pi r_0 h=2\pi\cdot 98{,}5\cdot 0{,}1\approx 61.{,}858\,m^2 .$$

Dacă funcția *f* este derivabilă pe *I*, atunci $d\,f(x)(h)=f'(x)h \quad \forall\ x\in I$.

În cazul aplicației identice $g(x)\equiv x$, avem $g'(x)=1$ şi

$$d\,g(x)(h)=d\,x(h)=h \quad \forall\, x\in I \quad \text{şi } \forall\, h\in R.$$

Astfel formula de sus se obişnuieşte a fi scrisă sub forma $d\,f(x)=f'(x)d\,x$ sau omițând a scrie variabilele în primul membru $d\,f=f'(x)d\,x$.

De aici rezultă notația lui Leibniz pentru derivata lui *f*, $f'(x)=\dfrac{d\,f}{d\,x}$.

Regulile de diferențiere decurg din cele de derivare şi sunt:

1.) $d(f+g)=d\,f+d\,g$

2.) $d(fg)=gdf+fdg$

3.) $d\left(\dfrac{f}{g}\right)=\dfrac{gdf-fdg}{g^2}$

4.) $d(g\circ f)=g'(f)df$

Ultima rezultă din aceea că

$$d(g\circ f)(x)=(g\circ f)'(x)dx=g'(f(x))f'(x)dx=g'(f)d\,f(x) \quad \forall\ x\in I .$$

Ea pune în evidență proprietatea diferențialei de invarianță a formei diferențialei şi anume faptul că regula de diferențiere a funcției compuse e aceeaşi ca şi când *f* ar fi variabilă independentă.

Diferențiale de ordin superior

Diferențiala de ordinul doi a funcției *f* în $x_0\in I$ se defineşte prin formula

$d^2 f(x_0)(h)=f'(x_0)h^2$ dacă *f* este de două ori derivabilă în x_0.

În mod analog, dacă *f* este de *n* ori derivabilă în x_0, atunci diferențiala de ordinul *n* a lui *f* în x_0 este $d^n f(x_0)(h)=f^{(n)}(x_0)h^n$ şi după cum se poate observa este un polinom de gradul *n* în *h*.

Dacă *f* este de *n* ori derivabilă pe *I*, atunci putem scrie $d^n f=f^{(n)}(x)d\,x^n$

unde $d\,x^n=(dx)^n=h^n$. Reiese de aici notația diferențială pentru derivata $f^{(n)}(x)=\dfrac{d^n f}{dx^n}$.

Observații

1.) La formulele ce definesc diferențialele de ordin superior se poate ajunge diferențiind succesiv diferențiala de ordinul întâi ca funcție de *x* .

Într-adevăr, deoarece h fiind independent de x, în procesul de diferențiere se comportă ca o constantă, avem

$$d\left(df\right)=d\left(f'\left(x\right)h\right)=d\left(f'(x)\right)h=f''\left(x\right)h^2=d^2 f \quad \text{etc.}$$

2.) În diverse probleme practice, diferențiala de ordinul n şi diferența de ordinul n se aproximează una pe alta.

În cazul unei funcții date tabelar se face aproximarea $f^{(n)}(x)\approx\dfrac{\Delta^n f}{\Delta x^n}$ (vezi exemplul de la Derivarea numerică.)

3. Formula lui Taylor

Fiind dat polinomul de gradul n, $P\left(x\right)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$, ne propunem să-l dezvoltăm după puterile lui $x-x_0$ unde x_0 este o valoare particulară a lui x.

Aceasta înseamnă să determinăm coeficienții A_i $i=\overline{0,n}$ astfel ca

$$P\ (x)=A_0+A_1\left(x-x_0\right)+A_2\left(x-x_0\right)^2+\cdots+A_n\left(x-x_0\right)^n .$$

Derivând succesiv avem:

$$P'(x)=A_1+2A_2\left(x-x_0\right)-3A_3\left(x-x_0\right)^2+\cdots+nA_n\left(x-x_0\right)^{n-1}$$

$$P''(x)=2A_2+3\cdot 2A_3\left(x-x_0\right)+4\cdot 3A_4\left(x-x_0\right)^2+\cdots+n\left(n-1\right)A_n\left(x-x_0\right)^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$P^{(n)}(x)=n\left(n-1\right)\left(n-2\right)\ldots 2\cdot 1A_n .$$

Făcând $x=x_0$, obținem $P\left(x_0\right)=A_0$, $P'\left(x_0\right)=A_1$, $P''\left(x_0\right)=2!\,A_2,\ldots,P^{(n)}\left(x_0\right)=n!\,A_n$

de unde $A_0=P\left(x_0\right)$, $A_1=\dfrac{1}{1!}P'\left(x_0\right)$, $A_2=\dfrac{1}{2!}P''\left(x_0\right),\ldots,A_n=\dfrac{1}{n!}P^{(n)}\left(x_0\right)$

şi $P(x)=P\left(x_0\right)+\dfrac{x-x_0}{1!}P'\left(x_0\right)+\dfrac{\left(x-x_0\right)^2}{2!}P''\left(x_0\right)+\cdots+\dfrac{\left(x-x_0\right)^n}{n!}P^{(n)}\left(x_0\right)$

numită formula lui Taylor* pentru polinoame.

Pentru o funcție oarecare f de n ori derivabilă pe un interval I se poate scrie polinomul

$$T_n(x)=f\left(x_0\right)+\frac{x-x_0}{1!}f'\left(x_0\right)+\cdots+\frac{\left(x-x_0\right)^n}{n!}f^n\left(x_0\right)$$

numit ***polinomul lui Taylor de grad n*** corespunzător funcției f în $x_0\in I$.

Este evident că în general $f\left(x\right)\neq T_n\left(x\right)$. Funcția $R_n\left(x\right)$ cu proprietatea

$$f\ (x)=T_n\ (x)+R_n\ (x)$$

se numeşte ***restul de ordinul*** n al polinomului lui Taylor

Se obține astfel formula

---

* B. Taylor (1685 – 1731), matematician englez.

$$f(x)=f(x_0)+\frac{x-x_0}{1!}f'(x_0)+\cdots+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+R_n(x)$$

numită ***formula lui Taylor***.

Observație. Funcțiile *f* și T_n au în x_0 un ***contact de ordinul n***, adică atât cele două funcții, cât şi derivatele lor până la ordinul *n* sunt egale în x_0. $T_n^{(k)}(x)=f_n^{(k)}(x_0)$ $\quad k=\overline{0,n}$

Teorema ce urmează dă restul R_n sub forma lui Lagrange*

Teorema (Taylor.) *Dacă f este de* $n+1$ *ori derivabilă pe intervalul I, atunci oricare ar fi punctele* $x, x_0 \in I$, *există* $c\in(x_0,x)$ *astfel încât*

$$f(x)=f(x_0)+\frac{x-x_0}{1!}f'(x_0)+\cdots+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c):$$

Demonstrație. Vom determina numărul *M* astfel încât restul să aibă forma

$$R_n(x)=(x-x_0)^{n+1}M.$$

Formula lui Taylor va deveni atunci

$$f(x)=f(x_0)+\frac{x-x_0}{1!}f'(x_0)+\cdots+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+(x-x_0)^{n+1}M.$$

Să considerăm pe *I* următoarea funcție derivabilă

$$\varphi(t)=f(t)+\frac{x-t}{1!}f'(t)+\cdots+\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t)+(x-t)^{n+1}M$$

şi să observăm că $\varphi(x)=f(x), \varphi(x_0)=f(x)$. Conform teoremei lui Rolle**

există $c\in(x_0,x)$ astfel încât $\varphi'(c)=0$. Dar $\varphi'(t)=\frac{(x-t)^n}{n!}f^{n+1}(t)-(n+1)(x-t)^n M$,

prin urmare $\frac{(x-c)^n}{n!}f^{(n+1)}(c)=(n+1)(x-c)^n M$ de unde $M=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$

şi $$R_n(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

Observații

1.) $\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}\to 0$ când $x\to x_0$ deoarece $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)^{n+1}M}{(x-x_0)^n}=0.$

De aceea făcând aproximarea $f(x)\approx T_n(x)$ pe intervalul considerat, eroarea comisă în acest caz este mai mică decât $\sup\limits_{x\in I}|R_n(x)|$.

2.) În cazul particular $x_0=0$, se obține ***formula lui MacLaurin****

---

*J.L. Lagrange (1736 – 1813), faimos matematician francez

** M. Rolle(1652 – 1719) matematician francez, a fost primul care şi-a demonstrat teorema dar numai pentru polinoame.

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c) \quad \text{cu } c\in(0,x).$$

3.) Făcând notația $h=x-x_0$, formula lui Taylor poate fi scrisă şi sub forma

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h}{1!}f'(x_0)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta h)$$

unde $0<\theta<1$,

sau simbolic, cu ajutorul diferențialelor

$$f(x)=f(x_0)+\frac{1}{1!}d\,f(x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}d^n f(x_0)+\frac{1}{(n+1)!}-d^{n+1}f(c) \text{ unde } c\in(x_0,x).$$

În particular, formula lui Mac Laurin ia forma

$$f(x)=f(0)+\frac{1}{1!}d\,f(0)+\cdots+\frac{1}{n!}d^n f(0)+\frac{1}{(n+1)!}+d^{n+1}f(c) \quad \text{cu} \quad c\in(0,x).$$

Exemple

1.) Fie $f(x)=\ln(1+x)$. Atunci

$$\begin{array}{l|l}
 & f(0)=0 \\
f'(x)=\dfrac{1}{1+x} & f'(0)=1 \\
f''(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2} & f''(0)=-1 \\
\vdots & \vdots \\
f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n} & f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)! \\
f^{(n+1)}(x)=(-1)^n\dfrac{n!}{(1+x)^{n+1}} & f^{(n+1)}(c)=(-1)^n\dfrac{n!}{(1+c)^{n+1}}
\end{array}$$

Cu formula lui Mac Laurin avem

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1!}-\frac{x^2}{2!}+\frac{2!}{3!}x^3-\frac{3!}{4!}x^4+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{n!}x^n+(-1)^n\frac{n!}{(n+1)!}\cdot\frac{x^{n+1}}{(1+c)^{n-1}}$$

adică

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{(1+c)^{n+1}} \text{ cu } c\in(0,x)$$

2.) $e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c$ cu $c\in(0,x)$

*** K.Mac Laurin (1698 – 1746), matematician scoțian.

3.) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!}M$ cu $|M| \le 1$.

4.) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!}M$ cu $|M| \le 1$.

4. Aplicații ale formulei lui Taylor

Calculul aproximativ

Exemple

1.) Să se calculeze cu aproximație $\sqrt[3]{30}$.

Soluție. Fie $f(x) = \sqrt[3]{x}$ şi $x_0 = 27 = 3^3$. Folosind formula lui Taylor

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + R_2(x) \text{ în care}$$

$f(x) = x^{1/3}$ $\qquad$ $f(x_0) = 3$

$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3}$ $\qquad$ $f'(x_0) = \frac{1}{3} \cdot 3^{-2}$

$f''(x) = -\frac{2}{3^2} x^{-5/3}$ $\qquad$ $f''(x_0) = -\frac{2}{3^2} \cdot 3^{-5}$

$f'''(x) = \frac{10}{3^3} x^{-8/3}$ $\qquad$ $f'''(c) = \frac{10}{3^3} c^{-8/3}$ $\qquad$ $27 < c < x$,

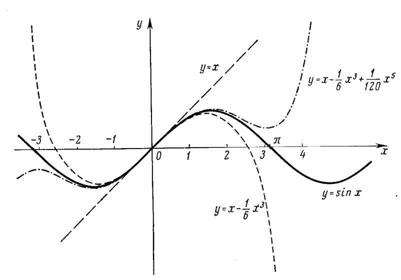
găsim pentru $x = 30$, $\sqrt[3]{30} \approx 3 + \frac{3}{1!} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{3^2}{2!}\left(-\frac{2}{3^2}\right) \cdot \frac{1}{3^5} = 3 + \frac{1}{9} - \frac{1}{3^5} \approx 3{,}1071$

cu eroarea $|R_2(x)| = \left| \frac{(x - x_0)^3}{3!} f'''(c) \right| = \left| \frac{3^3}{3!} \cdot \frac{10}{3^3} \cdot \frac{1}{c^{8/3}} \right| < \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{3^8} = \frac{5}{3^9} = 0{,}00025$.

2.) Cu ce eroare aproximează polinomul lui Taylor de gradul 3 funcția

$f(x) = \sin x$ *pe* $|x| < \frac{1}{2}$?

Soluție. Avem



$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + R_3(x)$ $\quad \sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$ cu eroarea

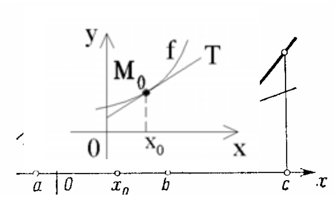
$$|R_3(x)| = \left| \frac{x^4}{4!} \sin c \right| < \frac{1}{2^4 \cdot 4!} = 0{,}0026$$

$$T_3(x)=x-\frac{x^3}{3!},\quad T_3{}'(x)=1-\frac{x^2}{2}$$

A se observa cât sunt de apropiate graficele celor două funcții pe intervalul $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.În particular $\sin\frac{\Pi}{7}\approx 0{,}446455$ cu eroarea mai mică decât 0,0026.

Convexitatea şi concavitatea unei funcții

O funcție *f* derivabilă pe *I* este ***convexă*** sau ***concavă*** pe *I* după cum tangenta în orice punct al graficului ei se află sub sau deasupra graficului.



Un punct în care funcția îşi schimbă concavitatea se numeşte ***punct de inflexiune.***

Deoarece ecuația tangentei M_0T este

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0),$$

poziția tangentei față de grafic este dată de semnul expresiei

$$E=f(x)-y=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)$$

într-o vecinătate a lui x_0 şi anume *f* este convexă dacă $E>0$ şi *f* este concavă dacă $E<0$. Dacă *f* este de $n+1$ ori derivabilă pe *I* şi

$$f''(x_0)=f'''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\ f^{(n)}(x_0)\neq 0,$$

atunci cu formula lui Taylor avem $E=\frac{(x-x_0)^n}{n!}\left[f^{(n)}(x_0)+\frac{x-x_0}{n+1}f^{(n+1)}(c)\right],$

de unde rezultă că atunci când

$$\begin{cases} n=par, \quad f \ \ este \begin{cases} convex\breve{a}\ \ dac\breve{a}\ \ f^{(n)}(x_0)>0 \\ concav\breve{a}\ \ dac\breve{a}\ \ f^{(n)}(x_0)<0 \end{cases} \\ n=impar,\ x_0\ este\ punct\ de\ inflexiune. \end{cases}$$

Condiții suficiente de extrem

Punctul x_0 este punct de maxim sau de minim pentru *f* după cum expresia $E=f(x)-f(x_0)$ este < 0 sau > 0 într-o vecinătate a lui x_0.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		∞
T_3'		$-$	0	$+$	0	$-$	
T_3	∞		$\frac{-2\sqrt{2}}{3}$		$\frac{2\sqrt{2}}{3}$		$-\infty$

Se ştie din teorema lui Fermat* că

*P. Fermat (1601 – 1665) matematician francez.

punctele de extrem ale lui *f* se găsesc printre rădăcinile derivatei.

Să presupunem că *f* este de n + 1 ori derivabilă pe *I* şi că

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\;\; f^{(n)}(x_0)=0,\;\; f^{(n)}(x_0)\neq 0.$$

Cu formula lui Taylor *E* are expresia de sus, expresie care menține semn constant numai pentru n par.

În acest caz

$$x_0 \; este \;\; punct \; de \begin{cases} maxim \;\; daca \;\; f^{(n)}(x_0)<0 \\ minim \;\; daca \;\; f^{(n)}(x_0)>0. \end{cases}$$

Exemplu. Fie $f(x)=x^3 e^x$. Avem

$$f'(x)=x^2(x+3)e^x\,,\;\; f''(x)=x\;\left(x^2+6x+6\right)e^x\,,\; f'''(x)=\left(x^3+9x^2+18x+6\right)e^x\,.$$

Rădăcinile ecuației $f'(0)\neq 0$, sunt $x=0,\; x=-3.$ Deoarece $f''(0)=0,\; f'''(0)\neq 0$, rezultă că $x=0$ este punct de inflexiune. Din $f'(3)=0,\;\; f''(3)>0$, rezultă că $x=-3$ este punct de minim Ecuația $f''(x)=0$ are şi rădăcinile $x_{1,2}=-3\pm\sqrt{3}$ pentru care $f'''(x_{1,2})\neq 0$, deci şi acestea sunt puncte de inflexiune.

Ridicarea nedeterminărilor

Exemplu. Să se calculeze $\ell=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)-\sin 2x+2x^2}{x^3}$

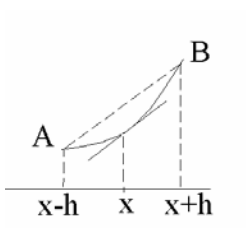
Soluție. Deoarece $\ln(1+2x)=2x-\dfrac{(2x)^2}{2}+\dfrac{(2x)^3}{3}+x^4M_1$, $\sin 2x=2x-\dfrac{(2x)^3}{3!}+x^4M_2$,

avem $\ell=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3+x^4(M_1-M_2)}{x^3}=4.$

Derivarea numerică

Fie funcția $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de clasă C^3 (dacă *f* este dată tabelar, atunci ea poate fi aproximată pe $[a,b]$ cu un polinom de interpolare).

Aplicând formula lui Taylor avem



$f'(x)\approx$ panta lui AB

$$f(x+h)-f(x)=\frac{h}{1!}f'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(\xi)$$

$$f(x-h)-f(x)=\frac{h}{1!}f'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)-\frac{h^3}{3!}f'''(\eta)$$

cu $\xi\in[x,x+h],\eta\in[x-h,x]$, de unde

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}-\frac{h^2}{12}\left[f'''(\xi)+f'''(\eta)\right]$$

$$f''(x)=\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}-\frac{h}{6}\left[f'''(\xi)+f'''(\eta)\right].$$

În ipoteza că $\left|f''(x)\right| \leq M$ pentru $x \in [a,b]$, erorile absolute ε_1 *şi* ε_2 care se fac în

aproximările
$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \frac{\Delta f}{h}$$
$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{2h} = \frac{\Delta^2 f}{h^2}$$

admit evaluările: $\varepsilon_1 \leq \frac{h^2}{12} \cdot 2M = \frac{Mh^2}{6}$, $\varepsilon_2 \leq \frac{Mh}{3}$.

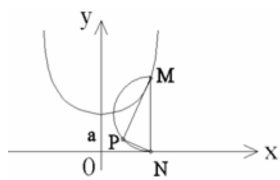
În acest fel se pot calcula derivatele unei funcţii date tabular în puncte echidistante.

Exemplu. Dacă mişcarea unui mobil este dată în primele două coloane ale tabelului alăturat, atunci având în vedere că pasul $h = \Delta t = 0{,}01$, viteza $v = \frac{d\,s}{d\,t}$ şi acceleraţia $a = \frac{d^2 s}{d\,t^2}$ pot fi şi ele determinate tabelar după cum se observă în ultimele două coloane.

T	s	$\Delta^2 s$	$\Delta^2 s$	$v \approx \frac{\Delta s}{\Delta t}$	$a \approx \frac{\Delta^2 s}{\Delta t^2}$
0,00	0				
		2		200	
0,01	2		2		20.000
		4		400	
0,02	6		3		30.000
		7		400	
0,03	13		3		30.000
		10		1000	
0,04	23		2		20.000
		12		1200	
0,05	35		3		30.000
		15		1500	
0,06	50		1		10.000
		16		1600	
0,07	66		1		10.000
		17		1700	
0,08	83				

Exerciţii

1.) Pentru a construi tangenta într-un punct M al lănţişorului $y = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{\alpha}$ se foloseşte următoarea metodă: Pe semicercul de diametru MN unde N este proiecţia lui M pe axa Ox se duce coarda $PN = a$. Să se demonstreze justeţea ei.



2.) Să se calculeze $f'(x)$ dacă

a.) $f(x) = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x}$, pentru $a > 0$

b.) $f(x) = \frac{(x+1)^3 \sqrt[4]{(x-2)^3}}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$ după ce în prealabil a fost logaritmat

3.) Să se arate că

a.) dacă $(a+bx)e^{\frac{y}{x}}=x$, atunci $x^3\dfrac{d^2y}{dx^2}=\left(x\dfrac{dy}{dx}-y\right)^2$;

b.) $\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)^{(n)}=4^{n-1}\cos\left(4x+\dfrac{n\pi}{2}\right)\ n\in N$

c.) $\dfrac{1}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right)=(-1)^n\dfrac{d^n}{dx^n}\left[x^{n-1}f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]$

4.) Să se calculeze

a.) $df(0)(h)$ dacă $f(x)=x(x-1)(x-2)\ldots(x-1000)$ R : $1000!\,h$

b.) d^3y dacă $y=x^3e^{-x}$

c.) $d^{100}y$ dacă $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$

d.) $d^nf(x)$ dacă $f(x)=\left(x^2+2x+2\right)e^{-x}$

5.) Folosind diferențiala să se calculeze cu aproximație

a.) variația funcției $y=\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$ când x variază de la $\dfrac{\pi}{3}$ la $\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{1}{100}$ R : $-0{,}0693$

b.) $\sqrt{\dfrac{(2{,}037)^2-3}{(2{,}037)^2+5}}$ R : $0{,}355$

6.) Folosind formula lui Taylor să se scrie funcția $f(x)=\left(x^2-3x+1\right)^3$ după puterile lui x.

7.) Să se scrie primii trei termeni ai dezvoltării funcției $f(x)=x^{80}-x^{40}+x^{20}$ după puterile lui $x-1$ şi să se calculeze cu aproximație $f(1{,}005)$.

8.) Să se calculeze eroarea în aproximările

a.) $\sqrt{1+x}\approx 1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2$ pentru $x=0{,}2$ R : inferioarã lui $\dfrac{1}{2\cdot 10^3}$

b.) $e\approx 2+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!}$ R : $<\dfrac{3}{5!}=\dfrac{1}{40}$

9.) Folosind formula lui Taylor

a.) să se determine *a* şi *b* astfel încât $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+(a+b\cos x)\sin x}{x^5}$ să fie finită.

b.) să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$

10.) Să se determine punctele de extrem ale funcției $f(x)=x^ne^x,\quad x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}$.

R : n par $\Rightarrow x=0$ punct de minim

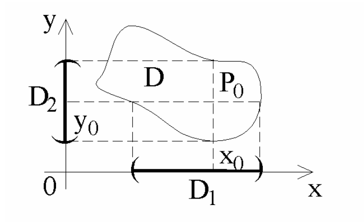
$x=-n$ punct de maxim

n impar $\Rightarrow x=-n$ punct de minim

IV. DERIVATELE PARȚIALE ALE UNEI FUNCȚII REALE DE MAI MULTE VARIABILE

1. Continuitate şi derivabilitate parțială

Fie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ D fiind o mulțime deschisă şi $P_0(x_0, y_0) \in D$



Fie

$$D_1 = \{x \mid (x, y_0) \in D\}$$

şi

$$D_2 = \{y \mid (x_0, y) \in D\}$$

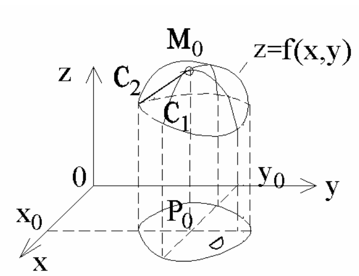
Funcțiile

$\varphi : D_1 \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = f(x, y_0)$

$\psi : D_2 \to R, \quad \psi(y) = f(x_0, y)$

sunt funcții de o singură variabilă.

Definiție. *Spunem că funcția f este* ***parțial continuă în raport cu variabila x*** *în* P_0 *dacă funcția* φ *este continuă în* x_0.



Funcția f este ***parțial continuă în raport cu y în*** P_0, *dacă funcția* ψ *este continuă în* y_0.

Din punct de vedere geometric, $y = y_0$ reprezintă un plan paralel cu planul *xOz.* Acesta taie suprafața de ecuație $z = f(x, y)$ după curba C_1. În planul $y = y_0$ ecuația curbei C_1 este $z = f(x, y_0) = \varphi(x)$. Deci continuitatea parțială a lui *f* în raport cu variabila *x* în P_0 înseamnă continuitatea curbei C_1 în $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Propoziție. *Dacă f este continuă în* P_0, *atunci f este continuă în raport cu toate variabilele sale în* P_0.

Demonstrație. Continuitatea lui *f* în P_0 înseamnă $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta(\varepsilon)$ astfel încât

$$\begin{matrix} |x - x_0| < \eta \\ |y - y_0| < \eta \end{matrix} \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

Făcând $y = y_0$, observăm că $|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$

$$\Updownarrow$$

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$$

deci continuitatea lui φ în x_0.

Analog, făcând $x = x_0$, obținem continuitatea lui ψ în y_0.

Reciproca nu este în general adevărată, după cum se va putea vedea din următorul

Exemplu. Funcția $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{dacă } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}$

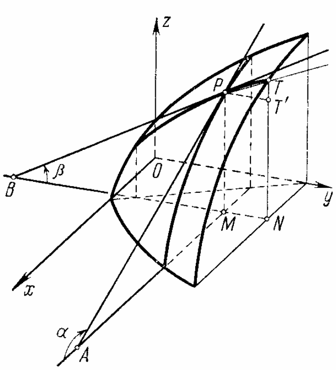
nu este continuă în origine, neavând limită în acest punct. Dar

$$\varphi(x) = f(x, 0) = \frac{x \cdot 0}{x^2 + 0} = 0 = f(0,0) = \varphi(0)$$

$$\psi(y) = f(0, y) = \frac{0 \cdot y}{0 + y^2} = 0 = f(0,0) = \psi(0).$$

Definiție. *Spunem că funcția f este* ***parțial derivabilă în raport cu variabila x în*** P_0 *, dacă funcția φ este derivabilă în* x_0.

Derivata parțială a lui *f* în raport cu *x* în P_0 este $\varphi'(x_0)$ şi se notează $f'_x(P_0)$ sau $\dfrac{\partial f}{\partial x}(P_0)$. Avem deci $\dfrac{\partial f}{\partial x}(P_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$.



În mod analog se defineşte derivata parțială a lui *f* în raport cu *y* în P_0, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(P_0)$.

Geometric, $f'_x(P_0) = \varphi'(x_0)$ reprezintă panta tangentei $M_0 T_1$ în $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ la curba C_1 din planul $y = y_0$. Deci $f'_x(P_0) = \operatorname{tg} \alpha$. Analog $f'_y(P_0) = \operatorname{tg} \beta$.

Definiție. *Funcția f este derivabilă parțial în raport cu variabila x pe domeniul D, dacă f este derivabilă în raport cu x în orice punct* $P \in D$.

În acest caz aplicația $f'_x : D \to R$ dată de

$$P \xrightarrow{f'_x} f'_x(P) \quad \forall\ P \in D$$

se numeşte ***derivata parțială a lui f în raport cu x.***

Analog se defineşte derivata parțială a lui *f* în raport cu *y*.

Funcțiile f'_x, f'_y sunt la rândul lor funcții de două variabile

Exemplu. Funcția $f(x, y) = x \sin xy$ are derivatele parțiale $f'_x = \sin xy + xy \cos xy$, $f'_y = x^2 \cos xy$.

Observație. Este evident că derivabilitatea parțială implică continuitatea parțială.

Următoarea teoremă dă condiții suficiente de continuitate globală.

Teoremă. *Dacă funcția* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *are derivate parțiale mărginite într-o vecinătate V a punctului* P_0*, atunci f este continuă în* P_0.

Demonstrație. Fie *M* real astfel încât

$$\left| f'_x(P) \right|, \left| f'_y(P) \right| \le M \qquad \forall\, P \in D.$$

Aplicând de două ori formula lui Lagrange, rezultă existența a două puncte $\xi \in (x_0, x), \eta \in (y_0, y)$ astfel încât

$$\left| f(P) - f(P_0) \right| = \left| f(x, y) - f(x_0, y_0) \right| \le \left| f(x, y) - f(x_0, y) \right| + \left| f(x_0, y) - f(x_0, y_0) \right| =$$
$$= \left| f'_x(\xi, y)(x - x_0) \right| + \left| f'_y(x_0, \eta)(y - y_0) \right| \le M\left(\left| x - x_0 \right| - \left| y - y_0 \right| \right)$$

Este evident că atunci când $P \to P_0$ $(x \to x_0, y \to y_0)$, $f(P) \to f(P_0)$ și deci *f* este continuă în P_0.

Consecință. *Dacă funcțiile* f'_x *și* f'_y *sunt mărginite pe D, atunci funcția f este continuă pe D.*

Observație. Definițiile ca și rezultatele din acest paragraf se extind cu ușurință pentru funcții cu mai mult de două variabile.

Derivate parțiale de ordin superior

Derivatele parțiale de ordinul doi ale funcției *f* se definesc astfel:

$$f''_{x^2} = \left(f'_x \right)'_x, \; f''_{xy} = \left(f'_x \right)'_y, \; f''_{yx} = \left(f'_y \right)'_x, \; f''_{y^2} = \left(f'_y \right)'_y$$

dacă ele există.

Se pot considera și derivate parțiale de ordin mai mare decât doi. De exemplu $f'''_{x^2 y} = \left(f''_{x^2} \right)'_y$ care se mai poate nota și $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$.

În general derivatele mixte f''_{xy} și f''_{yx} nu sunt egale.

Următoarea teoremă dă condiții suficiente ca ele să fie egale.

Teoremă. (H.A.Schwarz). *Dacă funcția f admite într-o vecinătate a punctului* P_0 *derivate mixte de ordinul doi continue în* P_0, *atunci* $f''_{xy}(P_0) = f''_{yx}(P_0)$.

Demonstrație. Fie expresia

$$E = f(x, y) - f(x, y_0) - f(x_0, y) + f(x_0, y_0)$$

și funcția auxiliară $\varphi(x) = f(x, y) - f(x, y_0)$.

Avem

$$E = \varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(\xi_1)(x - x_0) = \left[f'_x(\xi_1, y) - f'_x(\xi_1, y_0) \right](x - x_0) =$$
$$= f''_{xy}(\xi_1, \eta_1)(x - x_0)(y - y_0).$$

unde $\xi_1 \in (x_0, x)$, $\eta_1 \in (y_0, y)$.

Analog, considerăm funcția auxiliară $\psi(y) = f(x, y) - f(x_0, y)$.

Avem

$$E = \psi(y) - \psi(y_0) = \psi'(\eta_2)(y - y_0) = \left[f'_y(x, \eta_2) - f'_y(x_0, \eta_2) \right](y - y_0) =$$
$$= f''_{yx}(\xi_2, \eta_2)(x - x_0)(y - y_0)$$

unde $\xi_2 \in (x_0, x)$, $\eta_2 \in (y_0, y)$.

Rezultă $f''_{xy}(\xi_1, \eta_1) = f''_{yx}(\xi_2, \eta_2)$, de unde prin trecere la limită când $P \to P_0$ şi ținând seama de continuitatea derivatelor mixte în P_0 obținem $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.

Consecință. *Dacă f admite derivate mixte continue pe D, atunci ele sunt egale.*

Derivarea funcțiilor compuse

Teoremă. *Fie* $f(u,v): D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *cu derivate parțiale continue şi funcțiile* $u = u(x)$, $v = v(x)$ *definite pe* $[a, b] \to \mathbb{R}$ *derivabile.*

Atunci funcția compusă $F(x) = f(u(x), v(x))$ *este derivabilă şi*

$$F'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} u'(x) + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot v'(x).$$

Demonstrație. Fie $x_0 \in [a, b]$ oarecare, $u(x_0) = u_0$, $v(x_0) = v_0$. Avem

$$\frac{F(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(u, v) - f(u_0, v)}{x - x_0} + \frac{f(u_0, v) - f(u_0, v_0)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{f(u, v) - f(u_0, v)}{u - u_0} \cdot \frac{u - u_0}{x - x_0} + \frac{f(u_0, v) - f(u_0, v_0)}{v - v_0} \cdot \frac{v - v_0}{x - x_0}.$$

Trecând la limită, când $x \to x_0$ avem $u \to u_0$, $v \to v_0$.

Ținând seama şi de continuitatea derivatelor parțiale rezultă

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \cdot u'(x_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \cdot v'(x_0).$$

Exemplu (Identitatea lui Euler*). O funcție $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se spune că este ***omogenă de grad m*** $(m \in R)$ dacă

(1) $f(t x_1, t x_2, \ldots, t x_n) = t^m f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $\forall\, 0 \neq t \in R$.

În ipoteza că *f* admite derivate parțiale de ordinul întâi continue, este valabilă identitatea $x_1 f_{x_1} + x_2 f'_{x_2} + x_n f'_{x_n} = mf$.

Într-adevăr, notând cu $u_i = t\, x_i$ $\quad i = \overline{1, n}$ şi derivând în raport cu t relația (1) avem

$$f'_{u_1} \cdot x_1 + f'_{u_2} \cdot x_2 + \ldots + f'_{u_n} \cdot x_n = m\, t^{m-1} f$$

Identitatea lui Euler rezultă acum făcând $t = 1$; în acest caz $u_i = x_i$.

Consecință. *Dacă* $f = f(u, v), u = u(x, y), v = v(x, y),$ *atunci derivatele parțiale ale funcției compuse* $F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ *sunt date de formulele*

(2) $$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Observații

---

* Leonhard Euler (1707 – 1783), elvețian de origine, mare matematician fizician şi mecanician. Membrul al Academiei de Ştiințe din Petersburg.

1) Pentru calculul derivatelor parțiale de ordinul doi ale lui *F* va trebui să avem în vedere că $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{a f}{a v}(u(x,y), v(x,y))$. Aşa de exemplu.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

2.) Formulele (2) se pot generaliza pentru funcții cu mai mult de două variabile.

2. Diferențiabilitate

Fie $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D mulțime deschisă.

Definiție. *Funcția f este **diferențiabilă în punctul** $P_0 \in D$, dacă există o aplicație liniară $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{\|h\| \to 0} \frac{|f(P_0+h)-f(P_0)-L(h)|}{\|h\|}=0$ unde $h=(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ este aşa ca $P_0+h=(x_1^0+h_1, \ldots, x_n^0+h_n) \in D$.*

L (h) se numeşte ***diferențiala*** lui *f* ***în*** P_0 şi se notează $df(P_0)$.

L fiind o aplicație liniară de *h* are forma

$$L(h)=D_1 h_1+D_2 h_2+\ldots+D_n h_n=(D_1 D_2, \ldots, D_n)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}.$$

Definind derivata funcției f în P_0 prin $f'(P_0)=(D_1, D_2, \ldots, D_n)$, diferențiala funcției *f* în P_0 se scrie $d\, f(P_0)=f'(P_0)h$.

Teorema 1. Dacă f este diferențiabilă în h, atunci f este parțial derivabilă în P_0 în raport cu toate variabilele sale şi $D_i=\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) \quad i=\overline{1,n}$.

Demonstrație. Fie *f* diferențiabilă în P_0. În cazul particular când $h=(0,0,\ldots,h_i,0,\ldots,0)$ avem $\|h\|=|h_i|$ *şi* $L(h)=D_i h_i$.

Din $\lim\limits_{h_i \to 0}\left|\frac{f(x_i^0, \ldots, x_i^0+h_i, \ldots, x_n^0)-f(x_i^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_n^0)-D_i h_i}{h_i}\right|=0$ rezultă

$\lim\limits_{h_i \to 0}\frac{f(x_i^0, \ldots, x_i^0+h_i, \ldots, x_n)-f(x_i^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_n^0)}{h_i}=D_i \qquad i=\overline{1,n}$, adică $\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0)=D_i$.

Observația 1. În cazul funcțiilor de o singură variabilă diferențiabilitatea şi derivabilitatea sunt noțiuni echivalente.

Într-adevăr, dacă *f* este derivabilă în x_0, atunci

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h}{h} \to 0$$

când $h \to 0$ (vezi §2 cap.V), deci *f* este diferențiabilă în x_0 şi $d\,f(x_0) = f'(x_0)h$.

Teorema 1 arată că diferențiabilitatea în x_0 implică derivabilitatea în x_0 şi că $D_1 = f'(x_0)$, de unde $df(x_0) = f'(x_0)h$.

Observația 2. Reciproca teoremei 1 nu este adevărată, adică nu orice funcție care admite derivate parțiale este diferențiabilă.

Exemplu. Fie $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}$. Avem

$$f_x'(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0,\ f_y'(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0.$$

Pe de altă parte funcția $\dfrac{f(h_1,h_2)-f(0,0)}{\| h \|} = \dfrac{h_1h_2}{h_1^2+h_2^2}$ nu are limită când $(h_1,h_2) \to (0,0)$, după cum am văzut în §1, deci *f* nu este diferențiabilă în origine.

Următoarea teoremă dă condiții suficiente ca o funcție să fie diferențiabilă.

Teorema 2. *Dacă funcția f admite derivate parțiale în raport cu toate variabilele într-o vecinătate a punctului P_0, continue în P_0, atunci f este diferențiabilă în P_0.*

Demonstrație. Aplicând de *n* ori formula lui Lagrange şi ținând cont de continuitatea derivatelor parțiale f'_{x_i} $(i=\overline{1,n})$ în P_0, rezultă existența funcțiilor $\alpha_i(P_0,h)$ $(i=\overline{1,n})$ cu proprietatea că $\lim\limits_{\|h\|\to 0} \alpha_i(P_0,h) = 0$ şi astfel ca

$$\begin{aligned}
f(P_0+h)-f(P_0) &= f\left(x_1^0+h_1, x_2^0+h_2, \ldots, x_n^0+h_n\right) - f\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right) = \\
&= f\left(x_1^0+h_1, x_2^0+h_2, \ldots, x_n^0+h_n\right) - f\left(x_1^0, x_2^0+h_2, \ldots, x_n^0+h_n\right) + \\
&+ f\left(x_1^0+x_2^0+h_2, \ldots, x_n^0+h_n\right) - f\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0+h_n\right) + \\
&\ldots\ldots\ldots \\
&+ f\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0+h_n\right) - f\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right) =
\end{aligned}$$

$$= f'_{x_1}\left(\xi_1, x_2^0+h_2, \ldots, x_n^0+h_n\right)\cdot h_1 + f'_{x_2}\left(x_1^0, \xi_2, x_3^0+h_3, \ldots, x_n^0+h_n\right)\cdot h_2 + \ldots$$

$$+ f'_{x_n}\left(x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0, \xi_n\right)\cdot h_n =$$

$$= \left[f'_{x_1}(P_0)+\alpha_1(P_0,h)\right]h_1 + \left[f'_{x_2}(P_0)+\alpha_2(P_0,h)\right]h_2 + \ldots + \left[f'_{x_n}(P_0)+\alpha_n(P_0,h)\right]h_n =$$

$$= L(h) + \alpha_1h_1 + \alpha_2h_2 + \ldots + \alpha_nh_n,$$

de unde

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{f(P_0+h)-f(P_0)-L(h)}{\|h\|} = \lim_{\|h\|\to 0} \frac{|\alpha_1h_1+\cdots+\alpha_nh_n|}{\|h\|} \leq$$

$$\leq \lim_{\|h\|\to 0} \left(|\alpha|_1 + \cdots + |\alpha_n|\right) = 0$$

deci f este diferențiabilă în P_0.

Consecință. *Dacă f admite derivate parțiale continue pe D, atunci f este diferențiabilă pe D, adică diferențiabilă în* $\forall\, P \in D$.

În acest caz

$$d\,f(P)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(P)h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(P)h_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(P)h_n \qquad \forall\, P\in D.$$

În particular, dacă $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=x_i \quad i=\overline{1,n}$, atunci cum $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}=0$ pentru $j\neq i$

și $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}=1$, *rezultă* $d\,x_i=h_i$.

Astfel $\quad d\,f(P)=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(P)\,d\,x_1+\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(P)\,d\,x_2+\cdots+\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(P)\,d\,x_n$.

Aplicația df dată de $\quad P\xrightarrow{d\,f} d\,f(P) \qquad \forall\, P\in D$

este ***diferențiala funcției f*** $\quad d\,f=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}d\,x_1+\dfrac{\partial f}{\partial x_2}d\,x_2+\cdots+\dfrac{\partial f}{\partial x_n}d\,x_n$

iar ***derivata funcției diferențiale f*** este $\quad f'=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1},\dfrac{\partial f}{\partial x_2},\cdots,\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right)$.

Diferențiala lui f se mai poate pune sub forma

$d\,f=\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}dx+\dfrac{\partial}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\dfrac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)f$ în care operatorul

$$d=\frac{\partial}{\partial x_1}d\,x_1+\frac{\partial}{\partial x_2}d\,x_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}d\,x_n$$

care duce f în $d\,f$ se numește operator diferențial.

Exemplu. Fie $f(x,y,z)=x^3y^2e^z$ *și* $P_0(-1,2,0)$. Atunci

$$d\,f(P)=3x^3y^2e^z\;dx+2x^3y\,e^z dy+x^3y^2e^z\;dz$$

iar $d\,f(P_0)=12dx-4\,dy-4\,dz$ sau $d\,f(P_0)(h_1,h_2,h_3)=12\,h_1-4h_2-4h_3$.

Proprietăți ale funcțiilor diferențiabile:

1.) Dacă funcțiile f și g au derivate parțiale de ordinul întâi continue pe D atunci funcțiile $f+g,\; f\cdot g,\dfrac{f}{g}\quad (g\neq 0)$ sunt diferențiabile pe D și

$$d\,(f+g)=d\,f+d\,g$$
$$d\,(f\cdot g)=gdf+fdg$$
$$d\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{gdf-fdg}{g^2}$$

Diferențiabilitatea rezultă cu teorema precedentă iar formulele reies din calcul direct. De exemplu $d\left(f\cdot g\right)=\sum_1^n\left(fg\right)'_{x_i}=\sum_1^n\left(gf'_{x_i}+fg'_{x_i}\right)dx_i=g\sum_1^n f'_{x_i}dx_i+f\sum_1^n g'_{x_i}dx_i=gdf+fdg$.

2.) Dacă f este diferențiabilă, atunci f = const $\Rightarrow df=0$ pe D. Este clar că f = const $\Rightarrow df=0$. Reciproc , dacă

$$df\left(P\right)=\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(P\right)h_1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\left(P\right)h_n=0 \quad \forall\ P\in D,$$

atunci pentru $h=\left(0,0,\ldots,h_i,0,\ldots,0\right)$ cu $h_i\neq 0$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ rezultă $\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(P\right)h_i=0$

$\forall\ P\in D$, de unde $\frac{\partial f}{\partial x_i}=0$ pe D. Acesta înseamnă că f nu depinde de x_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ şi deci f = const.

3.) Dacă f este diferențiabilă, atunci f este continuă.

Într-adevăr, fie $P_0\in D$. Din

$f\left(P\right)-f\left(P_0\right)=L\left(h\right)+\omega\left(P_0\ ,h\right)$ cu $\frac{\omega\left(P_0\ ,h\right)}{\|h\|}\xrightarrow[\|h\|\to 0]{}0$ rezultă că atunci când $P\to P_0\ ,h\to 0$ şi cum L este funcție liniară de h, $L\left(h\right)=\sum D_ih_i\to 0$ şi deci $f\left(P\right)\to f\left(P_0\right)$

4.) Variația funcției $\Delta f=f\left(P\right)-f\left(P_0\right)\approx d\ f\left(P_0\right)$ deoarece $\omega\left(P_0\ ,h\right)\to 0$ când $h\to 0$.

Aplicație. Înălțimea unui con este $h=30\,cm$, raza bazei $r=1\,cm$. Să se studieze variația volumului conului dacă mărim h cu 3 *mm* şi micşorăm r cu 1 *mm*.

Soluție. Avem $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$, $dh=0,3\,cm$, $dr=-0,1\,cm$ şi

$$\Delta V\approx dV=\frac{\partial V}{\partial h}dh+\frac{\partial V}{\partial r}dr=\pi\frac{r^3}{3}dh+\frac{2\pi}{3}rh\,dr=\frac{\pi}{3}r\left(r\,dh+2h\,dr\right)=$$

$$=\frac{\pi}{3}\cdot 10\left(10\cdot 0,3-2\cdot 30\cdot 0,1\right)=-10\,\pi\,cm^3.$$

Volumul scade cu $10\,\pi\,cm^3$, fapt greu de bănuit de la început.

Diferențiale de ordin superior.

O funcție $f:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ care admite derivate parțiale de ordinul p continue pe D se spune că este ***de clasă*** $C^p\left(L\right)$ şi se scrie $f\in C^p\left(D\right)$.

Fie $f\in C^2\left(D\right)$ şi $P_0\in D$. Am văzut că diferențiala de ordinul întâi a lui f în P_0 este aplicația liniară $df\left(P_0\right)\colon R^n\to\mathbb{R}$ $\qquad df\left(P_0\right)(h)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(P_0\right)h_i$

Forma pătratică $d f(P_0): R^n \to \mathbb{R}$ $d^2 f(P_0)(h)=\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(P_0) h_i h_j$

se numeşte diferenţiala a II-a a lui f în P_0.

În mod asemănător, dacă $f \in C^p(D)$, se ***defineşte diferenţiala de ordinul p a lui f în*** P_0 ca fiind aplicaţia $d^p f(P_0): R^n \to \mathbb{R}$ dată de formula

$$d^p f(P_0)(h)=\left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_1+\frac{\partial}{\partial x_2} h_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n} h_n\right)^{(p)} f(P_0)$$

ridicarea la putere fiind simbolică.

Exemplu. Fie $f(x, y)=x^2 y^3$ şi $P_0(2,1)$. Avem

$$\left.\begin{array}{l} f'_x = 2xy^3 \\ f'_y = 3x^2 y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} d f = f'_x\, d x + f'_y\, d y = 2xy^3 d x + 3x^2 y^2 d y \\ d f(2,1) = 4\, d x + 12\, d y \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} f''_{x^2} = 2y^2 \\ f''_{xy} = 6xy^2 \\ f''_{y^2} = 6x^2 y \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} d^2 f = f''_{x^2}\, d x^2 + 2 f''_{xy}\, d x\, d y + f''_{y^2} d y^2 = \\ \quad = 2y^2 dx^2 + 12xy^2 dxdy + 6x^2 y\, dy^2 \\ d^2 f(2,1) = 2d x^2 + 24 d x d y + 24 d y^2 \end{array}$$

Evident că putem scrie şi $d f(2,1)(h_1, h_2)=4h_1+12h_2$

$$d^2 f(2,1)(h_1, h_2)=2 h_1^2+24 h_1 h_2+24 h_2^2 .$$

Observaţia 1. Calculul diferenţialelor de ordin superior se poate face şi prin diferenţieri succesive folosind regulile de diferenţiere. Vom dovedi aceasta pentru $p=2$. În acest caz avem

$$d(df)=d\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot h_i\right)=\sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \cdot h_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_j\right) h_i=$$

$$=\sum_{i, j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \cdot h_i h_j=d^2 f .$$

Observaţia 2. Diferenţiala funcţiei compuse $F(x, y)=f(u(x, y), v(x, y))$ este

$$d F = F'_x dx + F'_y dy = \left(f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x\right) dx+\left(f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y\right) dy =$$

$$= f'_u\left(u'_x\, dx+u'_y\, dy\right)+ f'_v\left(v'_x\, dx+v'_y dy\right)=f'_u du+f'_v\, dv .$$

Proprietatea că $d F=\left(\frac{\partial}{\partial x} dx+\frac{\partial}{\partial y} dy\right) F=\left(\frac{\partial}{\partial u} du+\frac{\partial}{\partial v} dv\right) f=df$

se numeşte ***proprietatea de invarianţă a formei***.

Ea nu se mai păstrează la diferenţiala de ordinul doi, adică

$$d^2 F=\left(\frac{\partial}{\partial x} dx+\frac{\partial}{\partial y} dy\right)^{(2)} F \neq\left(\frac{\partial}{\partial u} du+\frac{\partial}{\partial v} dv\right)^{(2)} f$$

deoarece

$$d^2F = d\left(dF\right) = d\left(f'_u du + f'_v\, dv\right) = f''_{u^2}\, du^2 + 2 f''_{uv}\, dudv + f''_{v^2}\, dv^2 +$$
$$+ f'_u\, d^2u + f'_v\, d^2v = d^2 f + f'_u\, d^2u + f'_v\, d^2v.$$

iar d^2u şi d^2v fiind diferenţialele de ordinul doi ale unor funcţii (şi nu a unor variabile) nu sunt totdeauna nule. Aşadar

$$d^2F = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(2)} F = \left(\frac{\partial}{\partial u}du + \frac{\partial}{\partial v}\right)^{(2)} f + f'_u\, d^2u + f'_v\, d^2v.$$

3. Formula lui Taylor pentru funcţii de mai multe variabile

Fie $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *D* mulţime deschisă

Teoremă. *Dacă* $f \in C^{n+1}(D)$, *atunci oricare ar fi punctele* P_0, $P \in D$ *,există un punct* $P_1 \in (P_0, P)$ *astfel încât* $f(P) = f(P_0) + \frac{1}{1!} d\, f(P_0) + \ldots + \frac{1}{n!} d^n\, f(P_0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(P_1)$ *

Demonstraţia o vom face în cazul particular când $k = 2$. Fie deci $f = f(x, y)$ şi $P_0(x_0, y_0)$. Funcţia compusă $F(t) = f\left(x_0 + t(x - x_0),\ \ y_0 + t(y - y_0)\right)$ este evident de $(n+1)$ ori derivabilă pe $[0,1]$ şi $F(0) = f(x_0, y_0)$, $\quad F(1) = f(x, y)$.

Să-i aplicăm formula lui MacLaurin. Avem

$$F(t) = F(0) + \frac{1}{2} d\, F(0) + \ldots + \frac{1}{n!} d^n F(0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1}\, F(\theta) \ \ cu \ \ 0 < \theta < 1.$$

Dar pentru funcţia $F(t) = f(u(t), v(t))$ unde $u = x_0 + t(x - x_0)$ şi $v = y_0 + t(y - y_0)$ avem

$$dF = df \qquad \text{(proprietatea de invarianţă a formei)}$$

$$d^2F = d^2 f + f'_u\, d^2u + f'_v\, d^2v = d^2 f$$

deoarece în cazul de faţă $d^2u = d^2v = 0$. Analog găsim $d^nF = d^n f$.

Făcând acum $t = 1$, se obţine

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} d\, f(x_0, y_0) + \ldots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x_1, y_1)$$

unde $P_1(x_1, y_1)$ este un punct ce aparţine segmentului (P_0, P) deoarece $x_1 = x_0 + \theta(x - x_0)$ şi $y_1 = y_0 + \theta(y - y_0)$ cu $\theta \in (0, 1)$.

Observaţii.

1) În cazul particular în care $n = 0$ se obţine formula creşterilor finite a lui Lagrange pentru funcţii de mai multe variabile şi anume:

$$f(P) - f(P_0) = d\, f(P_1) h = f'(P_1)(P - P_0) \qquad P_1 \in (P_0, P) \text{ sau}$$

---

* Scrierea formulei este simbolică, pentru că aici $d^n f(P_0) = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x - x_1^0\right) + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_k - x_k^0\right)\right]^{(n)} f(P_0)$

$$f(x_1,\dots,x_k)-f(x_1^0,\dots,x_k^0)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1,\dots,\xi_k)(x_1-x_1^0)+$$

$$+\frac{\partial f}{\partial x_2}(\xi_1,\dots,\xi_k)(x_2-x_2^0)+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_k}(\xi_1,\dots,\xi_k)(x_k-x_k^0)$$

unde $\xi_i\in(x_i^{\,0},x_i)$ $i=\overline{1,K}$.

2) Formula lui Taylor poate fi folosită în calculul aproximativ având în vedere că variația funcției f

$$\Delta f=f(P)-f(P_0)\approx\frac{1}{1!}d\,f(P_0)+\frac{1}{2!}d^2f(P_0)+\dots+\frac{1}{n!}d^nf(P_0)$$

Exemple.

1.) Să se dezvolte funcția $f(x,y)=x^2y-2xy+2x^2-4x+y+2$ după puterile lui $x-1$ şi $y+2$.

Soluție. Vom aplica formula lui Taylor funcției f în $P_0(1-2)$. Din

$$f'_x=2xy-2y+4x-4 \qquad f'''_{x^3}=0$$

$$f'_y=x^2-2x+1 \qquad f'''_{x^2y}=2$$

$$f''_{x^2}=2y+4 \qquad f'''_{xy^2}=0$$

$$f''_{xy}=2x-2 \qquad f'''_{y^3}=0$$

$$f''_{y^2}=0$$

rezultă că $d\,f(P_0)=d^2\,f(P_0)=0$ şi

$$d^3f(P_0)=f'''_{x^3}(P_0)dx^3+3f'''_{x^2y}(P_0)dx^2dy+3f'''_{xy^2}(P_0)dx\,dy^2+f'''_{y^3}(P_0)dy^3=3\cdot2\,dx^2dy,$$

de unde $f(x,y)=\dfrac{1}{3!}d^3f(P_0)=(x-1)^2\,(y+2)$.

2) Să se calculeze cu aproximație $\sqrt[3]{(1{,}02)^2+(0{,}05)^2}$.

Soluție. Vom considera funcția $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2+y^2}$ şi vom folosi aproximația

$$f(P)-f(P_0)\approx\frac{1}{1!}d\,f(P_0)+\frac{1}{2!}d^2f(P_0) \text{ unde } P_0(1,0).$$

Avem

	$P_0(1,0)$	
$f(x,y)=(x^2+y^2)^{1/3}$	1	
$f'_x=\frac{1}{3}\cdot2x(x^2+y^2)^{-2/3}$	$\frac{2}{3}$	$\Rightarrow df(P_0)=\frac{2}{3}dx$
$f'_y=\frac{1}{3}\cdot2\,y\,(x^2+y^2)^{-2/3}$	0	

$$\left.\begin{array}{ll} f''_{x^2}=\frac{2}{3}(\quad)^{-2/3}-\frac{4}{9}x\cdot 2x(\quad)^{-5/3} & -\frac{2}{9} \\ f''_{xy}=-\frac{4}{9}\cdot 2y(\quad)^{-5/3} & 0 \\ f''_{y^2}=\frac{2}{3}(\quad)^{-2/3}-\frac{4}{9}y\cdot 2y(\quad)^{-5/3} & \frac{2}{3} \end{array}\right\}\Rightarrow d^2f(P_0)=-\frac{2}{9}dx^2+\frac{2}{3}dy^2,$$

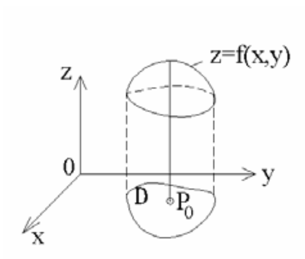
de unde având în vedere că $d\,x = x - x_0 = 0{,}02$ şi $dy = 0{,}05$ rezultă

$$\sqrt[3]{(1,02)^2+(0,05)^2}\approx 1+\frac{2}{3}\cdot 0{,}02+\frac{1}{2!}\left[-\frac{2}{9}\cdot(0{,}02)^2+\frac{2}{3}\cdot(0{,}05)^2\right]\approx 1{,}0141222\,.$$

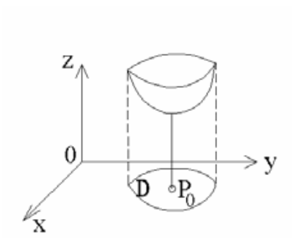
4. Extremele funcţiilor de mai multe variabile

Pentru început vom considera funcţia de două variabile. Fie aşadar $D\subset\mathbb{R}^2$ o mulţime deschisă şi $f:D\to\mathbb{R}$.

Definiţie. *Punctul $P_0\in D$ se numeşte* ***punct de maxim*** *pentru f dacă există o vecinătate V a lui P_0 astfel încât $f(P)\le f(P_0)$ $\forall P\in V$*



P_0 punct de maxim



P_0 punct de minim

Analog se defineşte punctul de minim.

Un punct de maxim sau de minim se numeşte punct de extrem.

Teoremă (Fermat). *Dacă f admite derivate parţiale de ordinul întâi într-o vecinătate a punctului de extrem P_0, atunci aceasta se anulează în P_0.*

Demonstraţie. Dacă $P_0(x_0, y_0)$ este punct de extrem pentru f, atunci x_0 este punct de extrem pentru funcţia de o singură variabilă $\varphi(x)=f(x,y_0)$ şi deci conform teoremei lui Fermat $\varphi'(x_0)=0$ adică $f'(P_0)=0$. În mod analog se arată că $f'_y(P_0)=0$.

Definiţie. *Un punct P_0 în care se anulează toate derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei f se numeşte* ***punct staţionar*** *(sau punct critic) pentru f.*

Punctele staţionare sunt deci soluţii ale sistemului $\{\, f'_x=0,\ f'_y=0$

După cum am văzut mai sus orice punct de extrem este punct staţionar.
Dar nu orice punct staţionar este punct de extrem.
Următoarea teoremă depistează punctele de extrem din cele staţionare.

Teoremă. *Fie P_0 punct staţionar pentru funcţia $f\in C^2(D)$ şi numărul*

$$\Delta(P_0) = \left[f''_{xy}(P_0)\right]^2 - f''_{x^2}(P_0) \cdot f''_{y^2}(P_0).$$

Atunci 1°. dacă $\Delta(P_0) < 0$ *, atunci* P_0 este punct de extrem şi anume

$$\text{punct de } \begin{cases} \text{maxim dacă } f''_{x^2}(P_0) < 0 \\ \text{minim dacă } f'_{x^2}(P_0) > 0 \end{cases}$$

2°. *dacă* $\Delta(P_0) > 0$ *, atunci* P_0 *nu este punct de extrem.*

Demonstrație. Folosind formula lui Taylor, avem

$$f(P) - f(P_0) = df(P_0) + \frac{1}{2} d^2 f(P_1) \qquad \text{unde } P_1 \in (P_0, P) \ .$$

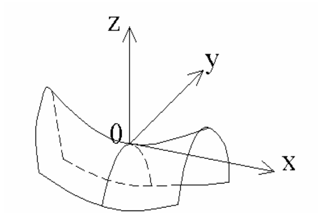
Cum P_0 este punct staționar şi $f'_x(P_0) = f'_y(P_0) = 0$, rezultă $df(P_0) = 0$. Urmează că

$$f(P) - f(P_0) = \frac{1}{2} d^2 f(P_1) = \frac{1}{2}\left[f''_{x^2}(P_1)h_1^2 + 2f''_{xy}(P_1)h_1\,h_2 + f''_{y^2}(P_1)h_2^2\right].$$

Având în vedere continuitatea derivatelor parțiale de ordinul doi în P_0, rezultă

$$f(P) - f(P_0) = \frac{1}{2}\left[\left(f''_{x^2}(P_0) + \alpha_1\right)h_1^2 + 2\left(f''_{xy}(P_0) + \alpha_2\right)h_1 h_2 + \left(f''_{y^2}(P_0) + \alpha_3\right)h_2^2\right] =$$

$= \frac{1}{2} d^2 f(P_0) + \omega(P_0, h)$ unde $\omega(P_0, h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$. Deci semnul diferenței $f(P) - f(P_0)$ este dat de $d^2 f(P_0) = h_2^2\left[f''_{x^2}(P_0)\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 + 2f''_{xy}(P_0)\frac{h_1}{h_2} + f''_{y^2}(P_0)\right]$ care are semn constant $\forall\ h_1, h_2 \neq 0$ numai dacă $\Delta(P_0) < 0$ şi anume pozitiv dacă $f''_{x^2}(P_0) > 0$, ceea ce implică $f(P) \geq f(P_0)$ şi negativ dacă $f''_{x^2}(P_0) < 0$, ceea ce implică $f(P) \leq f(P_0)$.



Dacă $\Delta(P_0) > 0$, atunci $d^2 f(P_0)$ poate fi atât pozitiv cât şi negativ. Se spune în acest caz că P_0 este punct şa.

Exemplu. Să se determine punctele de extrem ale funcției $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Soluție. Punctele staționare ale lui f sunt soluțiile sistemului

$$\begin{cases} f'_x \equiv 3x^2 - 3y = 0 \\ f'_y \equiv 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

Obținem $x_1 = 1, y_1 = 1$ şi $x_2 = 0, y_2 = 0$, deci $P_1(1,1), P_2(0,0)$. Derivatele de ordinul doi ale lui f calculate în cele două puncte sunt:

	P_1	P_2
$f''_{x^2} = 6x$	6	0

$f''_{xy} = -3$	-3	-3
$f''_{y^2} = 6y$	6	0

Din $\Delta(P_1) = (-3)^2 - 36 < 0$, $f''_{x^2}(P_1) = 6 > 0$ rezultă că P_1 este punct de minim, din $\Delta(P_2) = (-3)^2 > 0$, rezultă că P_2 nu este punct de extrem.

Valoarea minimă a funcției este $f_{\min} = f(1,1) = -1$, se deduce de aici că $x^3 + y^3 - 3xy + 1 \geq 0 \quad \forall\ x, y \in \mathbb{R}$.

Observație. În cazul funcțiilor cu mai mult de două variabile definițiile şi teorema lui Fermat rămân valabile. Aşadar, punctele de extrem ale funcției $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ sunt soluții (dar nu soluțiile) ale sistemului: $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 0, ..., \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0$.

Pentru a afla dacă un punct staționar P_0 este sau nu punct de extrem procedăm exact ca şi în cazul funcțiilor de două variabile. Semnul diferenței $f(P) - f(P_0)$ este dat de semnul diferențialei de ordinul doi a lui f în P_0 $\quad d^2 f(P_0) = \sum_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_j}(P_0) h_i\, h_j$

care este o formă pătratică, şi care dacă este pozitiv definită, atunci $f(P) \geq f(P_0)$ şi deci P_0 este punct de minim, iar dacă este negativ definită, atunci P_0 este punct de maxim.

Notând $\quad a_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_j}(P_0)$ şi $\delta_1 = a_{11}$, $\delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$,

conform teoremei lui Sylvester, rezultatul este următorul:

1°. dacă $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n > 0 \Rightarrow P_0$ punct de minim

2°. dacă $-\delta_1, \delta_2, -\delta_3, ..., (-1)^n \delta_n > 0 \Rightarrow P_0$ punct de maxim.

Exemplu. Să se determine extremul funcției

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2$$

Soluție. Avem

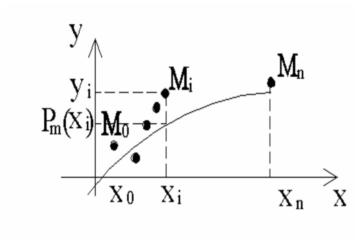
$$\begin{array}{lll} f'_x = 2x - z + 2 & f''_{x^2} = 2 & f''_{y^2} = 2 \\ f'_y = 2y - z + 2 & f''_{xy} = 0 & f''_{yz} = -1 \\ f'_z = 2z - x - y + 2 & f''_{xz} = -1 & f''_{z^2} = 2 \end{array}$$

Sistemul $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, $f'_z = 0$ dă singurul punct staționar $P_0(-3, -3, -4)$ pentru care $\quad \delta_1 = 2 > 0$, $\delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} > 0$, $\delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} > 0$

deci P_0 este punct de minim şi valoarea minimă a funcției este $f(-3, -3, -4) = -12$.

5. Metoda celor mai mici pătrate

Fie f o funcție dată tabelar. Deși expresia analitică a ei este necunoscută, se pune problema aflării chiar și aproximative a valorii ei într-un punct arbitrar x. Aceasta este problema interpolării.



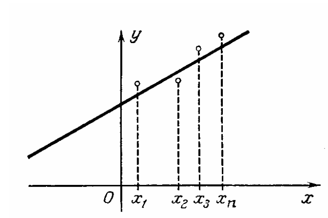
Metoda celor mai mici pătrate constă în determinarea unui polinom

$P_m(x) = a_0 + a_1x + ... + a_mx^m$ în general de grad $m \le n$ care să nu treacă neapărat prin punctele $M_i(x_i, y_i)$ dar care să aproximeze cel mai bine funcția dată, în sensul că suma pătratelor erorilor

$$R = r_0^2 + r_1^2 + ... + r_2^2 = \sum_0^n r_i^2 = \sum_0^n (P_m(x_i) - y_i)^2$$

să fie minimă.

În cazul aproximației liniare $(m = 1)$, $P_1(x) = a_0 + a_1x$ iar expresia $R = \sum_0^n (a_0 + a_1x_i - y_i)^2$ fiind o funcție în variabilele a_0 și a_1, este minimă dacă



$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial a_0} = 2\sum_0^n (a_0 + a_1x_i - y_i) = 0 \\ \dfrac{\partial R}{\partial a_1} \equiv 2\sum_0^n x_i(a_0 + a_1x_i - y_i) = 0. \end{cases}$$

Se obține evident sistemul liniar

$$\begin{cases} (n+1)a_0 + a_1\sum x_i = \sum y_i \\ a_0\sum x_i + a_1\sum x_i^2 = \sum x_i y_i \end{cases}$$

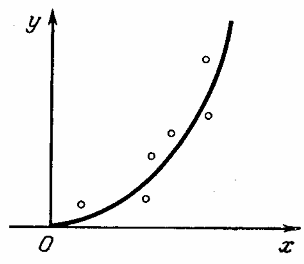
în necunoscutele a_0 și a_1, care dă soluția în mod unic.

În cazul $m = 2$, aproximația se numește pătratică, polinomul este $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$,

și expresia

$$R = \sum_0^n (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 - y_i)^2$$

x	x_0	x_1			x_n
y	y_0	y_1			y_n



este minimă dacă

$\dfrac{\partial R}{\partial a_1} = 0$, $\dfrac{\partial R}{\partial a_1} = 0$, $\dfrac{\partial R}{\partial a_2} = 0$. Efectuând calculele se obține sistemul

$$(n+1)a_0 + a_1 \sum x_i + a_2 \sum x_i^2 = \sum y_i$$
$$a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^3 = \sum x_i y_i$$
$$a_0 \sum x_i^2 + a_1 \sum x_i^3 + a_2 \sum x_i^4 = \sum x_i^2 y_i .$$

care dă în mod unic necunoscutele a_0, a_1, a_2.

Pentru cazul general se procedează analog.

Exemplu. Pentru a scrie aproximația liniară a funcției date pe coloanele x și y formăm coloanele x^2, xy şi suma $\sum$

	x	y	x^2	xy
	1	1	1	1
	3	2	9	6
	4	4	16	16
	6	4	36	24
	8	5	64	40
	9	7	81	63
	11	8	121	88
	14	9	196	126
$\sum$	56	40	524	364

Formăm sistemul

$$\begin{cases} 8a_0 + 56a_1 = 40 \\ 56a_0 + 524\,a_1 = 364 \end{cases}$$

care dă $a_0 = \frac{6}{11}$, $a_1 = \frac{7}{11}$.

Prin urmare funcția tabelară dată poate fi aproximată de dreapta

$$y = \frac{6}{11} + \frac{7}{11}x$$

Să observăm că centrul de greutate al punctelor $M_i(x_i, y_i)$ $G\left(\frac{\sum x_i}{8}, \frac{\sum y_i}{8}\right) = G(7,5)$

aparține dreptei $7x - 11y + 6 = 0$.

Exerciții

1.) Să se verifice teorema lui Euler pentru $f(x,y,z) = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2} \ln\frac{x}{y}$

2.) Să se determine $z = z(x,y)$ știind că $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^2+y^2}{x}$ și că $z(x,y) = \sin y$ atunci când $x = 1$.

$$R: z = \frac{x^2}{2} + y^2 \ln x + \sin y - \frac{1}{2}$$

3.) Care este unghiul dintre curbele plane obținute prin intersecția suprafețelor $z = x^2 + \frac{y^2}{6}$ și $z = \frac{x^2+y^2}{3}$ cu planul $y = 2$?

R : arctg $\frac{4}{7}$

4.) Pornind de la definiție să se calculeze $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(-2, 2)$ dacă $z = \sqrt[3]{x^2 y}$.

5.) Să se calculeze $\dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}$ dacă $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}, \quad x\neq y$.

$$R:(-1)^m \cdot 2\,(m+n-1)\frac{nx+my}{(x+y)^{m+n+1}}$$

6.) Să se arate că dacă

a.) $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, atunci $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\dfrac{2}{r}, \ \dfrac{\partial^2(\ln r)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2(\ln r)}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2(\ln r)}{\partial z^2}=\dfrac{1}{r^2}$

b.) $z=e^y\varphi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$, atunci $\left(x^2-y^2\right)\dfrac{\partial z}{\partial x}+xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=xyz$

c.) $u=\dfrac{xy}{z}\ln x+x\varphi\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)$, atunci $xu'_x+yu'_y+zu'_z=u+\dfrac{xy}{z}$.

7.) Să se calculeze cu aproximație

a.) variația funcției $z=\dfrac{x+3y}{y-3x}$ când x variază de la $x_1=2$ la $x_2=2,5$ și y de la $y_1=4$ la $y_2=3,5$.

b.) $(0{,}95)^{2{,}01}$

8.) Să se calculeze d^2u dacă

a.) $u=f\left(t,t^2,t^3\right)$, *b*.) $u=f\left(x+y+z,\,x^2+y^2+z^2\right)$, *c*.) $u=f\left(x^2+y^2,\,x^2-y^2,\,2xy\right)$.

9.) Să se scrie polinomul lui Taylor de gradul trei pentru funcția $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ în $(1,1)$.

10.) Să se scrie $f(x+h,\,y+k,\,z+\ell)$ în puteri ale lui h,k,ℓ dacă $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz$.

11.) Cursurile a două ape sunt reprezentate aproximativ de parabola $y=x^2$ și de dreapta $x-y-2=0$. Se cere să se unească cele două cursuri de apă printr-un canal rectiliniu de lungime minimă. Ce puncte leagă ?

$$R:A\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right),\ B\left(-\frac{1}{8},-\frac{17}{8}\right)$$

12.) Să se arate că $x+\dfrac{y^2}{4x}+\dfrac{z^2}{y}+\dfrac{2}{z}\geq 4 \quad \forall x,y,z>0$.

13.) Să se determine extremele funcției $f(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y$.

V. Derivata unei funcții vectoriale

1 . Diferențiabilitate

Fie f o funcție definită pe o mulțime deschisă $D \subset \mathbb{R}^n$ cu valori în $\mathbb{R}^m$ şi $f_1, f_2, \ldots, f_m$ componentele sale scalare.

Definiție. *Spunem că f este* ***diferențiabilă în punctul*** $P_0 \in D$ *dacă există o transformare liniară $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ astfel încât pentru $P_o + h \in D$ să avem*

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\| f(P_0 + h) - f(P_0) - L(h) \|}{\| h \|} = 0$$

Transformarea liniară $L(h)$ se notează $df(P_0)$ şi se numeşte ***diferențiala funcției** f **în*** P_0.

Teorema 1. *Funcția f este diferențiabilă în P_0 dacă şi numai dacă componentele ei scalare f_i $\left(i = \overline{1,m}\right)$ sunt diferențiabile în P_0. În acest caz*

$$d\,f(P_0) = \begin{pmatrix} d\,f_1(P_0) \\ d\,f_2(P_0) \\ \vdots \\ d\,f_m(P_0) \end{pmatrix}$$

Demonstrație. Fie $A = \left(a_{ij}\right)$ $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ matricea transformării liniare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ care apare în definiția diferențiabilității funcției f în P_0.

O relație de forma

$$f(P_0 + h) - f(P_0) - A \cdot h = \omega(h) \quad \text{cu} \lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|\omega(h)\|}{\| h \|} = 0$$

este echivalentă cu relațiile de pe componente:

$$f_i(P_0 + h) - f_i(P_0) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} h_j = \omega_i(h) \text{ cu } \lim_{\|h\| \to 0} \frac{\| \omega_i(h) \|}{\| h \|} = 0$$

care exprimă diferențiabilitatea funcțiilor f_i în P_0 şi faptul că $d\,f_i(P_0) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,h_j \,, i = \overline{1,m}.$

Cu teorema 1.&.2 cap VI avem însă $a_{ij} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(P_0)$. Astfel

$$df(P_0) = A \cdot h = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{P_0} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} df_1(P_0) \\ \vdots \\ df_m(P_0) \end{pmatrix}$$

Definind ***derivata funcției*** f ***în*** P_0 ca fiind matricea

$$f'(P_0)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P_0) \\ & \dots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(P_0) \end{pmatrix}$$

numită **matricea Jacobi*** **a funcției** f **în punctul** P_0 putem scrie $d\,f(P_0)=f'(P_0)h$

Dacă funcția f este diferențiabilă pe *D*, adică diferențiabilă în orice punct $P \in D$, atunci are loc formula $d\,f(P)=f'(P) \quad \forall \quad P \in D$.

În acest caz aplicația f' dată de $P \xrightarrow{f'} f'(P) \qquad \forall \quad P \in D$ se numeşte derivata funcției diferențiabile f.

Ea este dată de matricea funcțională $f'=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ & \dots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$.

În cazul în care $m=n$, determinantul asociat matricei de sus se numeşte **determinant funcțional** sau **iacobian** şi se notează $\frac{D(f_1,f_2,\dots,f_n)}{D(x_1,x_2,\dots.x_n)}$.

Exemple.

1.) Diferențiala funcției $L:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ $f(x,y,z,u)=\begin{pmatrix} xu \\ zy^2 \\ yu \end{pmatrix}$, fiind

$$d\,f=\begin{pmatrix} x\,du+u\,dx \\ y^2\,dz+2\,yzdy \\ u\,dy+ydu \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u & 0 & 0 & x \\ 0 & 2yz & y^2 & 0 \\ 0 & u & 0 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d\,x \\ d\,y \\ d\,z \end{pmatrix},$$

rezultă că $$f'(x,y,z,u)=\begin{pmatrix} u & 0 & 0 & x \\ 0 & 2yz & y^2 & 0 \\ 0 & u & 0 & y \end{pmatrix}$$

2.) Diferențiala lui $\bar{r}=x\,\bar{i}+y\,\bar{j}+z\,\bar{k}$ este $d\,\bar{r}=dx\,\bar{i}+dy\,\bar{j}+dz\,\bar{k}$.

Teorema 2. *Fie* $f:D\subset R^n \to R^m$ *diferențiabilă în* P_0 *şi* $g:R^m \to R^p$ *diferențiabilă în* $f(P_0)$. *Atunci funcția compusă* $g\circ f$ *este diferențiabilă în* P_0 *şi*

(1) $\quad (g\circ f)'(P_0)=g'(f(P_0))\cdot f'(P_0)$.

---

* C.G. Iacobi (1804 – 1851) matematician german.

Demonstrația o vom face în cazul în care atât componentele scalare $f_k\ \left(k=\overline{1,m}\right)$ ale lui *f* cât şi componentele scalare $g_i\ \left(i=\overline{1,p}\right)$ ale lui g admit derivate parțiale continue în P_0 respectiv în $f(P_0)$.

În acest caz deoarece $(g\circ f)(P)=\begin{pmatrix} g_1(f(P)) \\ \vdots \\ g_P(f(P))\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g_1(f_1(P),\dots,f_m(P)) \\ \vdots \\ g_P(f_1(P),\dots,f_m(P))\end{pmatrix}$

şi ca urmare

$$\text{(2)}\qquad \frac{\partial(g\circ f)_i}{\partial x_j}=\frac{\partial g_i}{\partial f_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_j}+\cdots+\frac{\partial g_i}{\partial f_m}\cdot\frac{\partial f_m}{\partial x_j}\qquad i=\overline{1,p},\quad j=\overline{1,n},$$

rezultă că funcțiile $(g\circ f)_i\ \left(i=\overline{1,p}\right)$ au derivate parțiale de ordinul întâi continue în P_0 şi deci sunt diferențiabile în P_0. Din (2) rezultă

$$\text{(3)}\qquad \left.\frac{\partial(g\circ f)_i}{\partial x_j}\right|_P=\sum_{K=1}^{m}\left.\frac{\partial g_i}{\partial f_K}\right|_{f(P_0)}\cdot\left.\frac{\partial f_K}{\partial x_j}\right|_{P_0}.$$

Având în vedere că $\quad (g\circ f)'(P_0)=\left(\frac{\partial(g\circ f)_i}{\partial x_j}\right)_{P_0},\quad g'(f(P_0))=\left(\frac{\partial g_i}{\partial f_K}\right)_{f(P_0)}$

şi $\quad f'(P_0)=\left(\frac{\partial f_K}{\partial x_j}\right)_{P_0}\quad$ este evident că $(3)\Rightarrow(1)$.

Observație. Funcțiile vectoriale de una sau două variabile au aplicații în teoria curbelor şi suprafețelor.

Fie C o curbă având reprezentarea vectorială

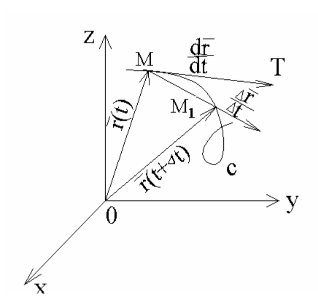
$$\bar r(t)=x(t)\bar i+y(t)\bar j+z(t)\bar k\qquad t\in[\alpha,\beta]\ .$$

Se spune că ea este ***netedă***, dacă funcțiile $x(t),\ \ y(t)$ şi $z(t)$ admit derivate continue care nu se anulează simultan pe $[a,b]$.

Fie $M(t)$ şi $M(t+\Delta t)\in C$. Se numeşte tangenta în M la curba C', poziția limită a coardei MM_1 când $M_1\to M$. Vectorul

$$\overline{MM_1}=\bar r(t+\Delta t)-\bar r(t)=\Delta\bar r$$

este însă coliniar cu $\quad \frac{\Delta\bar r}{\Delta t}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\bar i+\frac{\Delta y}{\Delta t}\bar j+\frac{\Delta z}{\Delta t}\bar k$.

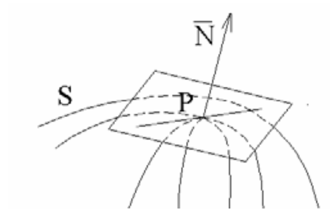


Trecând la limită, când $\Delta t\to 0$, se obține vectorul $\dot{\bar r}(t)=\dot x(t)\,\bar i+\dot y(t)\,\bar j+\dot z(t)\,\bar k$ numit derivata vectorului $\bar r(t)$ în raport cu *t*. El dă orientarea tangentei *MT*.

Fie acum $F(x,y,z)=0$ ecuația unei suprafețe *S*. Vom presupune că ea este ***netedă,*** adică *F* admite derivate parțiale de ordinul întâi continue care nu se anulează simultan.

Se spune că o dreaptă este tangentă la *S* într-un punct *P* al ei, dacă ea este tangentă oricărei curbe ce trece prin *P* aparținând suprafeței *S*.

Dacă $(C):\ \overline{r}=\overline{r}(t)$ este o astfel de curbă, atunci are loc relația $F(x(t),y(t),z(t))=0$, care derivată în raport cu t dă $F'_x\cdot\dot{x}+F'_y\cdot\dot{y}+F'_z\cdot\dot{z}=0$, egalitate care arată că vectorul $\overline{N}\left(F'_x,F'_y\,F'_y\right)$ este perpendicular pe orice dreaptă tangentă la *S* în *P*. Acestea aparțin deci aceluiași plan, numit planul tangent în *P* la *S*. Vectorul $\overline{N}$ dă direcția normalei la suprafața S în *P*.



2. Funcții implicite

Fie ecuația (1) $\quad F(x,y)=0$.

Se numește soluție a ecuației (1) o funcției $y=y(x)$ care o verifică identic, deci pentru care $F(x,y(x))\equiv 0$. Ecuația (1) poate avea

1.) o singură soluție, de exemplu ecuația $x-y-1=0\Rightarrow y=1-x$

2.) mai multe soluții, de exemplu $x^2+y^2-1=0\ \Rightarrow y=\pm\sqrt{1-x^2}\ :[\alpha,\beta]\subset[-1,1]$

3.) nici o soluție, cum este $e^{x^2+y^2}=0$.

Funcțiile $y=y(x)$ definite cu ajutorul ecuațiilor se numesc funcții implicite.

Astfel de ecuații nu se pot întotdeauna explicita, adică exprima ca funcții elementare. Așa de exemplu este funcția $y=y(x)$ definită de ecuația

$$\sin y+x\,e^y=0.$$

O funcție $y=y(x_1,\ldots,x_n)$ definită de o ecuație de forma $F(x_1,\ldots,x_n,y)=0$ este o funcție implicită de *n* variabile.

Problema care se pune este în ce condiții o ecuație definește o funcție implicită.

Vom da fără demonstrație următoarele teoreme de existență.

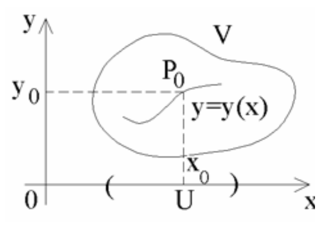
Teorema 1. *Fie* $F(x,y)$ *o funcție reală definită într-o vecinătate V a punctului* $P_0(x_0,y_0)$ *pentru care* $F(P_0)=0$.

Dacă $F\in C^1(V)$ *și* $F'_y(P_0)\neq 0$, *atunci există în mod unic o funcție* $y=y(x)$ *într-o anumită vecinătate U a punctului* x_0 *și derivabilă astfel încât*

$$F(x,y(x))\equiv 0\quad \text{pe } U$$

și

$$y(x_0)=y_0\,.$$



Teorema 2. *Fie* $F(x_1, \ldots, x_n, y)$ *o funcție definită într-o vecinătate V a punctului* $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_0)$ *cu* $F(P_0)=0$.

Dacă $F \in C^1(V)$ *şi* $F'_y(P_0) \neq 0$, *atunci există în mod unic o funcție* $y = y(x_1, \ldots, x_n)$ *într-o vecinătate U a punctului* $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *cu derivate parțiale de ordinul întâi continue astfel încât* $F(x_1, \ldots, x_n, y(x_1, \ldots, x_n)) \equiv 0$ *pe U*

şi $y(x_1^0, \ldots, x_n^0) = y_0$

Derivarea funcțiilor implicite.

1.) Dacă ecuația $F(x, y)=0$ defineşte funcția $y = y(x)$, atunci derivând egalitatea $F(x, y(x))=0$ obținem $F'_x + F'_y \cdot y' = 0$ de unde $y' = -\dfrac{F'_x}{F'_y}$.

2.) Dacă ecuația $F(x, y, z)=0$ defineşte funcția implicită $z = z(x, y)$, atunci derivând în raport cu *x* respectiv cu *y* egalitatea $F(x, y, z(x, y))=0$ avem $F'_x + F'_z \cdot z'_x = 0$, $F'_y + F'_z \cdot z'_y = 0$, de unde $z'_x = -\dfrac{F'_x}{F'_z}$, $\quad z'_y = -\dfrac{F'_y}{F'_z}$.

3.) În mod analog se obțin derivatele parțiale ale funcției implicite $y = y(x_1, \ldots, x_n)$ definite de ecuația $F(x_1, \ldots, x_n, y)$. Ele sunt $y'_{x_i} = -\dfrac{F'_{x_i}}{F'_y}$ $\quad i=\overline{1, n}$.

Exemple.

1.) Să se calculeze y'' dacă funcția *y* este definită implicit de ecuația $sin\, y + xe^y = 0$.

Soluție. Punând $F(x, y, z) = \sin y + xe^y$, avem

$$F'_x = e^{y}$$

$$F'_y = \cos y + xe^y$$

de unde $y' = -\dfrac{F'_x}{F'_y} = -\dfrac{e^y}{\cos y + xe^y}$.

Pentru determinarea lui y'', derivăm y' ținând seama că $y = y(x)$. Astfel

$$y'' = \frac{e^y y'(cos\, y + xe^y) - e^y(-sin\, y \cdot y' + e^y + xe^y \cdot y')}{(cos\, y + xe^y)^2} =$$

$$= \frac{e^{2y} - e^y(cos\, y + sin\, y)y'}{(cos\, y + xe^y)^2} = \frac{e^{2y} + e^{2y}\dfrac{cos\, y + sin\, y}{cos\, y + xe^y}}{(cos\, y + xe^y)^2} = e^{2y}\frac{2\, cos\, y + sin\, y + xe^y}{(cos\, y + xe^y)^3}.$$

2.) Să se calculeze dz, d^2z pentru $x=0$, $y=1$, $z=0$ dacă funcția implicită $z=z(x,y)$ este definită de ecuația $x^2+y^2+z^2=e^z$.

Metoda I. Avem $F(x,z,y)\equiv x^2+y^2+z^2-e^z$.

$$\left.\begin{array}{l} F'_x=2x \\ F'_y=2y \\ F'_z=2z-e^z \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} z'_x=-\dfrac{F'_x}{F'_z}=-\dfrac{2x}{2z-e^z}, \quad z'_x(0,1)=0 \\ z'_y=-\dfrac{F'_y}{F'_z}=\dfrac{2y}{2z-e^z}, \quad z'_y(0,1)=2 \end{array}$$

de unde $dz(0,1)=2dy$.

Pentru aflarea derivatelor parțiale de ordinul doi, se derivează cele de ordinul întâi având în vedere ca $z=z(x,y)$

$$z''_{x^2}=(z'_x)'_x=-2\frac{\left(2z-e^z\right)-x(2z'_x-e_z\cdot z'_x)}{\left(2z-e^z\right)^2}, \quad z''_{x^2}(0,1)=2$$

$$z''_{xy}=\left(z'_x\right)'_y=2\frac{x\left(2z'_y-e^z\cdot z'_y\right)}{\left(2z-e^z\right)^2}, \qquad z''_{xy}(0,1)=0$$

$$z''_{y^2}=\left(z'_y\right)'_y=-2\frac{2z-e^z-y\left(2z'_y-e^z\cdot z'_y\right)}{\left(2z-e^z\right)^2}, \qquad z''_{y^2}(0,1)=6$$

şi $\quad d^2z(0,1)=2dx^2+6dy^2$.

Metoda a II-a. Diferențiind de două ori ecuația dată, aplicând regulile de diferențiere şi având în vedere că *x* şi *y* fiind variabile independente, $d^2x=d^2y=0$ avem

$$2xdx+2ydy+2zdz=e^z dz$$

$$2dx^2+2dy^2+2(dz)^2+2z\,d^2z=e^z(dz)^2+e^z dz.$$

În particular pentru $x=0$, $y=1$, $z=0$, obținem $dz=2dy$ şi ca urmare

$2\,dx^2+2\,y^2+8\,dy^2=4\,dy^2+d^2z$ de unde $d^2z=2\,dx^2+6\,d\,y^2$.

Observație. Metoda a doua (prin diferențiere) poate fi utilizată şi pentru calculul derivatelor parțiale, căci o dată aflată diferențiala, acestea (derivatele parțiale) rezultă imediat.

Sisteme de funcții implicite

În multe probleme, nu numai de geometrie diferențială intervin funcții definite implicit de sisteme de ecuații.

Cazul cel mai simplu este al sistemului $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

Ne interesează în ce condiții acest sistem defineşte două funcții $y=y(x)$, $z=z(x)$ care să verifice în mod identic ecuațiile sistemului, şi cum se calculează derivatele lor.

Teorema 3. *Fie* $F(x,y,z)$ *şi* $G(x,y,z)$ *două funcții definite într-o vecinătate V a punctului* $P_0\ (x_0,y_0,z_0)$ *astfel încât* $F(P_0)=0,\ G(P_0)=0$.

Dacă $F, G \in C^1(V)$ *şi* $\left.\dfrac{D(F,G)}{D(y,z)}\right|_{P_0} \neq 0$, *atunci există în mod unic într-o vecinătate U a lui* x_0 *funcţiile* $y = y(x)$ şi $z = z(x)$ *derivabile astfel încât*

(2) $$\begin{cases} F(x, y(x), z(x)) = 0 \\ G(x, y(x), z(x)) \equiv 0 \quad pe\, U \end{cases} \quad \text{şi } y(x_0) = y_0,\ z(x_0) = z_0.$$

Derivatele acestor funcţii se obţin derivând ecuaţiile sistemului (2). Astfel avem

$$\begin{cases} F'_x + F'_y \cdot y' + F'_z \cdot z' = 0 \\ G'_x + G'_y \cdot y' + G'_z \cdot z' = 0, \end{cases}$$

de unde $$y' = -\frac{\dfrac{D(F,G)}{D(x,z)}}{\dfrac{D(F,G)}{D(y,z)}} \quad \text{şi} \quad z' = -\frac{\dfrac{D(F,G)}{D(y,x)}}{\dfrac{D(F,G)}{D(y,z)}}.$$

O generalizare a teoremei precedente este

Teorema 4. *Fie funcţiile* $F_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ $i = \overline{1,m}$ *definite într-o vecinătate a punctului* $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ *cu* $F_i(P_0) = 0$ $i = \overline{1,m}$.

Dacă $F_i \in C^1(V)$ *şi* $\left.\dfrac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}\right|_{P_0} \neq 0$, *atunci există într-o anumită vecinătate U a punctului* $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *un sistem unic de funcţii* $y_i = y_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = \overline{1,m}$ *cu derivate parţiale continue astfel încât*

(3) $$F_i(x_1, \ldots, x_n, y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_m(x_1, \ldots, x_n)) \equiv 0 \quad pe\ U,\ i = \overline{1,m}$$

şi $y_i(x_1^0, \ldots, x_n^0) = y_i^0$ $i = \overline{1,m}$.

Derivatele parţiale ale funcţiilor y_i se obţin derivând parţial ecuaţiile (3). Astfel

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = -\frac{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_i, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots x_j, \ldots, F_m)}}{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}}, \quad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1\ n}.$$

Exemplu. Să se calculeze derivatele parţiale ale funcţiilor $u = u(x, y)$ şi $v = v(x, y)$ în (0 , -1) , definite implicit de sistemul $\begin{cases} xu - yv = 0 \\ yu + xv = 1 \end{cases}$.

Metoda I. Derivând în raport cu *x* ecuaţiile sistemului şi ţinând seama că *u* şi *v* sunt funcţii de *x* şi *y* avem $\begin{cases} u + xu'_x - yv'_x = 0 \\ yu'_x + v + xv'_x = 0 \end{cases}$ de unde $u'_x = -\dfrac{ux + vy}{x^2 + y^2}$, $v'_x = \dfrac{uy - xv}{x^2 + y^2}$.

Analog, derivând sistemul în raport cu *y* se obţin derivatele parţiale

$$u'_y = \frac{xv - uy}{x^2 + y^2}, \quad v'_y = -\frac{vy + xu}{x^2 + y^2}.$$

Când $x = 0$ și $y = 1$, din sistemul dat rezultă $u = -1$, $v = 0$. Astfel

$$u'_x = 1,\ u'_y = -1,\ v'_x = 1,\ v'_y = 0.$$

Metoda a – II – a. Diferențiind cele două ecuații ale sistemului, avem

$$\begin{cases} udx + xdu - vdy - ydv = 0 \\ udy + ydu + vdx + xdv = 0. \end{cases}$$

Făcând $x = 0$, $y = -1$, $u = -1$, $v = 0$, obținem $du = -dy$, $dv = dx$, de unde se deduce că $u'_x = 0$, $u'_y = -1$, şi $v'_x = 1$; $v'_y = 0$ în $(0, -1)$.

3. Dependență funcțională

Fie D mulțime deschisă din $\mathbb{R}^n$ şi sistemul de funcții reale

(1) $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ unde $f_i \in C^1(D)$ $i = \overline{1, m}$.

O funcție $g: D \to \mathbb{R}$ spunem că ***depinde*** de funcțiile $f_1, f_2, \ldots, f_m$ pe D, dacă există o funcție diferențiabilă Φ astfel încât $g = \Phi(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ adică

$g(P) = \Phi(f_1(P), f_2(P), \ldots, f_m(P)) \quad \forall\ P \in D.$

Exemplu. Dacă $f_1(x, y) = x^2 + y^2$, $f_2(x, y) = x^2 - y^2$ şi $g(x, y) = x^4 - y^4$, atunci funcția g depinde de funcțiile f_1 *și* f_2 *pe* $\mathbb{R}^2$ deoarece $g = f_1 \cdot f_2$.

Definiție. *Spunem că sistemul (1) este **dependent** pe D dacă există cel puțin o funcție a sistemului, dependentă de celelalte pe D.*

În caz contrar, sistemul este independent pe D.

Independența funcțiilor pe D trebuie înțeleasă în sensul că nici o funcție a sistemului nu depinde de celelalte în nici o vecinătate a oricărui punct din D.

Teorema 1. *Dacă sistemul* (1) *este dependent pe D și* $m \le n$, *atunci toți minorii de ordinul m ai matricei lui Jacobi.* $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ *sunt identic nuli pe D.*

Demonstrație. Fie $f_K = \Phi(f_1, \ldots, f_{K-1}, \ldots, f_m)$ *pe* D. Atunci din

$\frac{\partial f_K}{\partial x_j} = \frac{\partial \Phi}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_j} + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial f_{K-1}} \cdot \frac{\partial f_{K-1}}{\partial x_j} + \frac{\partial \Phi}{\partial f_{K+1}} \cdot \frac{\partial f_{K+1}}{\partial x_j} + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial f_m} \cdot \frac{\partial f_m}{\partial x_j}, \quad j = \overline{1, n}$, rezultă că linia L_K a matricei este combinație liniară de celelalte linii

$$L_K = \frac{\partial \Phi}{\partial f_1} L_1 + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial f_{K-1}} L_{K-1} + \frac{\partial \Phi}{\partial f_{K+1}} \cdot L_{K+1} + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial f_m} \cdot L_m$$

şi prin urmare minorii de ordinul *m* sunt toţi nuli, ceea ce implică faptul că rangul matricei este strict mai mic decât *m*.

Teorema 2. *Dacă rangul matricei iacobiene în* P_0 *este* $r<m$ *şi dacă, fără, restrânge generalitatea,* $\left.\frac{D(f_1,\ldots,f_r)}{D(x_1,\ldots,x_r)}\right|_{P_0} \neq 0$, *atunci există o vecinătate V a punctului* P_0 *în care sistemul* $\{f_1,\ldots,f_r\}$ *este independent, în timp ce funcţiile* $f_{r+1},\ldots,f_m$ *depind pe V de funcţiile* $f_1,\ldots,f_r$.

Demonstraţie. Determinantul funcţional $\frac{D(f_1,\ldots,f_r)}{D(x_1,\ldots,x_r)}$ care este o funcţie continuă pe *D*, fiind diferit de zero în P_0, este nenul într-o întreagă vecinătate a lui P_0 şi conform teoremei precedente sistemul $\{f_1,\ldots,f_r\}$ este independent în această vecinătate.

Partea a doua a demonstraţiei adică faptul că celelalte funcţii depind de primele *r* o vom face într-un caz particular, cazul general tratându-se analog.

Fie $m=n=3$ şi $r=2$. Funcţiile sistemului sunt în acest caz $y_1=f_1(x_1\, x_2, x_3)$, $y_2=f_2(x_1,x_2,x_3)$, $y_3=f_3(x_1,x_2,x_3)$, matricea iacobiană

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

are $\frac{D(f_1,f_2,f_3)}{D(x_1,x_2\, x_3)}=0$, $\frac{D(f_1,f_2)}{D(x_1,x_2)}\neq 0$ într-o vecinătate a punctului $P_0\left(x_1{}^0, x_2{}^0, x_3{}^0\right)$.

Dezvoltând primul determinant după ultima linie putem scrie

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\cdot\frac{D(f_1,f_2)}{D(x_2,x_3)}+\frac{\partial f_3}{\partial x_2}\cdot\frac{D(f_1,f_2)}{D(x_3,x_1)}+\frac{\partial f_3}{\partial x_3}\cdot\frac{D(f_1,f_2)}{D(x_1,x_2)}=0. \tag{2}$$

Fie sistemul de funcţii implicite $\begin{cases} F_1\equiv f_1(x_1,x_2,x_3)-y_1=0 \\ F_2\equiv f_2(x_1,x_2,x_3)-y_2=0 \end{cases}$

în necunoscutele x_1, x_2, $y_i{}^0=f_i(P_0)$ $\;i\in\{1,2\}$ şi punctul $M_0\left(x_1^0, x_2^0, x_3^0, y_1^0, y_2^0\right)$.

Din faptul că $\left.\frac{D(F_1,F_2)}{D(x_1,x_2)}\right|_{M_0}=\left.\frac{D(f_1,f_2)}{D(x_1,x_2)}\right|_{P_0}\neq 0$ rezultă conform teoremei de existenţă (teorema 3,§2) că există două funcţii

$$\begin{cases} x_1=\varphi_1(x_3,y_1,y_2) \\ x_2=\varphi_2(x_3,y_1,y_2) \end{cases} \tag{3}$$

astfel încât $\begin{cases} f_1(\varphi_1, \varphi_2, x_3) \equiv y_1 \\ f_2(\varphi_1, \varphi_2, x_3) \equiv y_2 \end{cases}$

Derivând parțial în raport cu x_3, avem $\begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdot \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3} = 0 \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} \cdot \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdot \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_3} = 0 \end{cases}$

de unde (4) $$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} = \frac{\dfrac{D(f_1, f_2)}{D(x_2, x_3)}}{\dfrac{D(f_1, f_2)}{D(x_1, x_2)}}, \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} = \frac{\dfrac{D(f_1, f_2)}{D(x_3, x_1)}}{\dfrac{D(f_1, f_2)}{D(x_1, x_2)}}.$$

Înlocuind funcțiile (3) în egalitatea $y_3 = f_3(x_1, x_2, x_3)$ obținem
$$y_3 = f_3(\varphi_1(x_3, y_1, y_2), \varphi_2(x_3, y_1, y_2), x_3) = \Phi(x_3, y_1, y_2).$$

Faptul că y_3 depinde doar de y_1 și y_2 va reieşi din aceea că $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_3} = 0$.

Într-adevăr, folosind (2) şi (4) avem $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_3} = \dfrac{\partial f_3}{\partial \varphi_1} \cdot \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial f_3}{\partial \varphi_2} \cdot \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} + \dfrac{\partial f_3}{\partial x_3} =$

$$= \frac{\dfrac{\partial f_3}{\partial \varphi_1} \cdot \dfrac{D(f_1, f_2)}{D(x_2, x_3)} + \dfrac{\partial f_3}{\partial \varphi_2} \cdot \dfrac{D(f_1, f_2)}{D(x_3, x_1)}}{\dfrac{D(f_1, f_2)}{D(x_1, x_2)}} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 0.$$ Deci $y_3 = \Phi(y_1, y_2)$.

Consecință. *În cazul unui sistem de n funcții de câte n variabile, sunt valabile afirmațiile:*

1.) $\left.\dfrac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}\right|_{P_0} \neq 0 \Rightarrow$ *sistemul $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ este independent într-o vecinatate a punctului P_0.*

2.) $\dfrac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} \equiv 0$ *pe $D \Rightarrow$ sistemul $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ este dependent pe D.*

Exemplu. Funcțiile $f_1 = \dfrac{x}{y}$, $f_2 = \dfrac{z}{y}$, $f_3 = \dfrac{x^2 + z^2 + xz}{y^2}$ $y \neq 0$. Având iacobianul

$$\frac{D(f_1, f_2, f_3)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{y} & -\dfrac{x}{y^2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{z}{y^2} & \dfrac{1}{y} \\ \dfrac{2x - z}{y^2} & \dfrac{-2}{z^3}\left(x^2 + z^2 - xz\right) & \dfrac{2z - x}{y^3} \end{vmatrix} \equiv 0$$

sunt în dependență funcțională. Din faptul că $\dfrac{D(f_1, f_2)}{D(x, y)} = -\dfrac{z}{y^3}$ este un minor de ordinul doi nenul,

rezultă o funcție diferențiabilă Φ astfel încât $f_3 = \Phi(f_1, f_2)$. Este evident că $f_3 = f_1^2 + f_2^2 - f_1 f_2$.

Observație. În teorema 4. &2 de existență a funcțiilor implicite definite de sistemul $F_i\left(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m\right)=0\ \ i=\overline{1,m}$, condiția $\left.\dfrac{D\left(F_1,\ldots,F_m\right)}{D\left(y_1,\ldots,y_m\right)}\right|_{P_0}\neq 0$ a însemnat de fapt independența funcțională a funcțiilor $F_1, F_2,\ldots,F_m$ ca funcții de $y_1,\ldots,y_m$.

4. Transformări punctuale în $\mathbb{R}^n$

Fie $D\subset\mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă. Se numeşte transformare o funcție vectorială $f:D\to\mathbb{R}^n$. Dacă $A\subset D$, atunci $f(A)$ este transformata mulțimii *A* prin *f*.

Definiție. *Transformarea $f=\left(f_1,\ldots,f_n\right)$ se spune că este **regulată în punctul** $P_0\in D$, dacă funcțiile $f_i\quad i=\overline{1,n}$ sunt de clasă C^1 într-o vecinătate a punctului P_0 şi* $\left.\dfrac{D\left(f_1,\ldots,f_n\right)}{D\left(x_1,\ldots,x_n\right)}\right|_{P_0}\neq 0$.

O transformare regulată în orice punct al lui D se spune că este regulată pe D.

Observații.

1.) Dacă *f* este regulată în P_0, atunci *f* este regulată într-o întreagă vecinătate a acestui punct. Aceasta rezultă din continuitatea iacobianului.

2.) Dacă *f* este regulată în P_0, atunci *f* este diferențiabilă în P_0 şi

$$\left|f'(P_0)\right|=\left.\frac{D\left(f_1,\ldots,f_n\right)}{D\left(x_1,\ldots,x_n\right)}\right|_{P_0}\neq 0$$

Diferențiabilitatea lui *f* rezultă din diferențiabilitatea componentelor sale scalare $f_i\quad\left(i=\overline{1,n}\right)$.

3.) O transformare regulată în P_0 este evident continuă în P_0

4.) Dacă $f=\left(f_1,\ldots,f_n\right)$ este regulată în P_0, atunci sistemul $\left\{f_1,\ldots,f_n\right\}$ este independent într-o vecinătate a lui P_0.

Exemple.

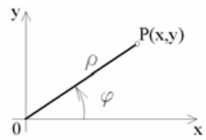
1.) Transformarea identică *I* a lui $\mathbb{R}^n$, dată de $I(P)=P\ \ P\in\mathbb{R}^n$, sau

$$I\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_1\left(x_1,\ldots,x_n\right)\\ \vdots\\ I_n\left(x_1,\ldots,x_n\right)\end{pmatrix}$$

este regulată pe $\mathbb{R}^n$, deoarece componentele sale scalare I_i au derivate parțiale continue peste tot şi

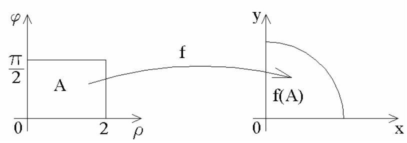
$$\left|I'(P)\right|=\frac{D\left(I_1,\ldots,I_n\right)}{D\left(x_1,\ldots,x_n\right)}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\ldots & 0\\ 0 & 1 & 0\ldots & 0\\ \ldots & \cdots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0\ldots & 1\end{vmatrix}=1\neq 0\qquad\forall\ P\in\mathbb{R}^n .$$

2.) Transformarea polară *T* care face trecerea de la coordonatele polare (ρ, φ) la cele carteziene (x, y) ale unui punct *P* din plan.



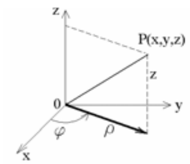
$T: \begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} : [0,\infty) \times [0,2\pi) \to \mathbb{R}^2$ are iacobianul

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho.$$ Este deci regulată dacă $\rho \neq 0$.



Transformata dreptunghiului $A = [0, 2] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ din planul $\rho O\varphi$ este sfertul de cerc de rază 2 din primul cadran al planului xOy.

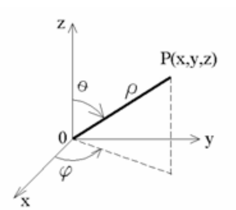
3.) Transformarea cilindrică leagă coordonatele cilindrice (ρ, φ, z) ale unui punct $P \in \mathbb{R}^3$ de cele carteziene (x, y, z).



$T: \begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} : [0,\infty) \times [0,2\pi) \times R \to R^3$ are iacobianul $\dfrac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, z)} = \rho$, este deci o transformare regulată peste tot cu excepția originii.

4.) Transformarea sferică este dată de

$$T: \begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases} : [0,\infty) \times [0,2\pi) \times [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$$



Din $\dfrac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, \theta)} = \rho^2 \sin\theta$, rezultă că transformarea sferică este regulată acolo unde $\rho \neq 0$ şi $\theta \neq 0, \pi$.

Vom da în continuare două proprietăți importante ale transformărilor regulate.

Teorema 1 *(compunerea transformărilor). Dacă f este regulată în P_0 şi g este regulată în $f(P_0)$, atunci transformarea $g \circ f$ este regulată în P_0.*

Demonstrație. Dacă $f = (f_1, \ldots, f_n), g = (g_1, \ldots, g_n)$, atunci

$$(g \circ f)(P) = \begin{pmatrix} g_1(f_1(P)) \\ \vdots \\ g_n(f(P)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(f_1(P)), \ldots, f_n(P) \\ \vdots \\ g_n(f_1(P), \ldots, f_n(P)) \end{pmatrix}$$

Este evident că dacă f_i şi g_i sunt de clasă C^1, atunci şi componentele scalare ale lui $g \circ f$ sunt de clasă C^1 într-o vecinătate a lui P_0. Din egalitatea matriceală $(g \circ f)'(P_0) = g'(f(P_0)) \cdot f'(P_0)$ rezultă $|(g \circ f)(P_0)| = |g'(f(P_0))| \cdot |f'(P_0)|$, şi cum transformările f şi g fiind regulate în P_0 respectiv în $f(P_0)$ au iacobienii nenuli în aceste puncte, rezultă că $(g \circ f)'(P_0) \neq 0$ şi deci că $g \circ f$ este o transformare regulată în P_0

Teorema 2 *(transformarea inversă). Dacă f este regulată în P_0, atunci există o transformare g definită într-o vecinătate a punctului $f(P_0)$, regulată în acest punct şi*

$$\left.\frac{D(g_1,\dots,g_n)}{D(y_1,\dots,y_n)}\right|_{f(P_0)} = \frac{1}{\left.\dfrac{D(f_1,\dots,f_n)}{D(x_1,\dots,x_n)}\right|_{P_0}} \quad \textit{unde } y_i = f_i(x_1,\dots,x_n).$$

Demonstrație. Fie $y_i^0 = f_i(P_0)$ şi $M_0(x_1^0,\dots,x_n^0,y_1^0,\dots,y_n^0)$. Sistemul de funcții

$$F_i(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) \equiv f_i(x_1,\dots,x_n) - y_i = 0 \qquad i=\overline{1,n}$$

defineşte în mod implicit funcțiile $x_i = g_i(y_1,\dots,y_n)$ care verifică în mod identic sistemul.

Într-adevăr, $F_i(M_0) = f_i(P_0) - y_i^0 = 0 \quad \forall \; i=\overline{1,n}$; funcțiile F_i au derivate parțiale continue într-o vecinătate a lui M_0 şi $\left.\dfrac{D(F_1,\dots,F_n)}{D(x_1,\dots,x_n)}\right|_{M_0} = \left.\dfrac{D(f_1,\dots,f_n)}{D(x_1,\dots,x_n)}\right|_{P_0} \neq 0$ din ipoteză.

Prin urmare există în mod unic într-o vecinătate *V* a punctului $f(P_0) = (y_1^0,\dots,y_n^0)$ funcțiile $x_i = g_i(y_1,\dots,y_n)$ cu derivate parțiale continue.

Fie *g* transformarea având componentele scalare g_i. Din

$$P = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_i(f(P)) \\ \vdots \\ g_n(f(P)) \end{pmatrix} = g(f(P)) \quad \forall \; P \in V,$$

rezultă $g \circ f = I$, de unde $|g'(f(P_0))| \cdot |f'(P_0)| = |I(P_0)| = 1$ şi deci relația din enunț $|g'(f(P_0))| = \dfrac{1}{|f'(P_0)|}$.

Exemplu. Transformarea polară $T: \begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$, regulată pentru $\rho > 0$ are inversa

$$T^{-1}: \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

iar iacobianul acesteia este $\dfrac{D(\rho,\varphi)}{D(x,y)} = \dfrac{1}{\dfrac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ dacă $x^2+y^2 \neq 0$.

5. Schimbări de variabile

O expresie în care apare o funcție împreună cu derivatele ei poate uneori primi o formă mult simplificată dacă elementele vechi, funcția şi (sau) variabilele ei se înlocuiesc cu altele noi.

Vom presupune că funcțiile ce intervin îndeplinesc condițiile necesare efectuării calculelor.

Vom pune în evidență câteva cazuri şi le vom trata practic prin exemple.

1) Intervertirea variabilelor $y(x) \rightarrow x(y)$

Exemplu. Să se transforme ecuația $y'y''' - 3(y'')^2 = x$ luând pe y ca nouă variabilă independentă.

Soluție. Se vede din ecuația dată că y este funcția şi x este variabila sa. Forma nouă a ecuației va trebui să antreneze funcția x de variabilă y şi evident derivatele acesteia

$$x' = \frac{dx}{dy} \quad , \quad x'' = \frac{d^2x}{dy^2}, \ldots$$

Folosind formulele de derivare a funcției compuse şi a funcției inverse, vom găsi legătura dintre derivatele vechi y', y'', y''' şi cele noi.

Astfel avem $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}} = \dfrac{1}{x'}$

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x'}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{x'}\right) \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{x''}{(x')^2} \cdot \frac{1}{x'} = -\frac{x''}{(x')^3}$$

$$y''' = \frac{d}{dx}(y'') = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x''}{(x')^3}\right) = \frac{d}{dy}\left(-\frac{x''}{(x')^3}\right) \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{3(x'')^2 - x'''x'}{(x')^5}$$

Făcând înlocuirile în ecuația dată obținem sau $x''' + (x')^5 x = 0$.

2) Schimbarea variabilei independente $y(x) \xrightarrow[x = x(t)]{} y(t)$.

Exemplu. Să se transforme ecuația $(1 - x^2)y'' - xy' + a^2 y = 0$ făcând $x = \cos t$.

Soluție. Avem $x = x(t) \Rightarrow t = t(x)$ şi derivata funcției compuse $y(t(x))$ este

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{-\sin t}$$

unde cu y'_t s-a notat derivata lui y în raport cu noua ei variabilă t.

Ceea ce s-a obținut este funcție de t. De aceea în continuare derivarea în raport cu x se face prin intermediul variabilei t. Avem

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'_t}{-\sin t}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{y''_t \sin t - y'_t \cos t}{\sin^2 t} \cdot \frac{1}{\sin t} .$$

Astfel ecuația devine $y''_t + a^2 y = 0$.

3) Schimbarea funcției şi a variabilei $y(t) \rightarrow u(t)$ prin transformarea $\begin{cases} x = x(u,t) \\ y = y(u,t) \end{cases}$.

Exemplu. Să se transforme ecuația $y'' + (x+y)(1+y')^3 = 0$ dacă $\begin{cases} x = u + t \\ y = u - t \end{cases}$ și $u = u(t)$.

Soluție. Ținând seama că $u = u(t)$, x și y devin funcții de t și avem

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{u'-1}{u'+1}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dt}\left(\frac{u'-1}{u'+1}\right) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{u''(u'+1) - u''(u'-1)}{(u'+1)^2} \cdot \frac{1}{u'+1} = \frac{2u''}{(u'+1)^3}.$$

Făcând înlocuirile, ecuația devine $u'' + 8uu' = 0$.

4) Schimbarea variabilelor independente ale unei funcții $z(x,y) \to z(u,v)$ prin transformarea $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$.

Exemplu. Dacă $u = x^2 - y^2$, $v = \frac{x}{y}$, să se transforme ecuația

$$xy\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + xy\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Soluție. Avem $\begin{cases} u'_x = 2x \;, \quad u'_y = -2y \\ v'_x = \frac{1}{y} \;, \quad v'_y = -\frac{x}{y^2} \end{cases}$ și cum $z = z(u(x,y), v(x,y))$,

$$z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x = z'_u \cdot 2x + z'_v \cdot \frac{1}{y}$$

$$z'_y = z'_u \cdot u'_z + z'_v \cdot v'_y = z'_u(-2y) + z'_v \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

În continuare, pentru calculul derivatelor parțiale de ordinul doi vom ține seama că și z'_u și sunt funcții de *x* și *y* prin intermediul variabilelor *u* și *v*. Astfel

$$z''_{x^2} = \left(z''_{u^2} \cdot 2x + z''_{uv} \cdot \frac{1}{y}\right) \cdot 2x + z'_u \cdot 2 + \left(z''_{uv} \cdot 2x + z''_{v^2} \cdot \frac{1}{y}\right) \cdot \frac{1}{y}$$

$$z''_{xy} = \left(z''_{u^2} \cdot (-2y) + z''_{uv} \cdot \frac{-y}{y^2}\right)(-2x) - 2z'_u + \left[z''_{uv} \cdot (-2y) + z''_{v^2} \cdot \frac{-x}{y^2}\right]\left(-\frac{x}{y^2}\right) + z'_v \cdot \frac{2x}{y^3}$$

Amplificând fiecare derivată cu coeficienții corespunzători din ecuația dată și adunând pe verticală, obținem

$$
\begin{array}{r|l}
-\,y & z'_x = 2x\cdot z'_u + \dfrac{1}{y}\cdot z'_v \\[2ex]
-\,x & z'_y = -2y\cdot z'_u - \dfrac{x}{y^2}\cdot z'_v \\[2ex]
xy & z''_{x^2} = 4x^2 z''_{u^2} + \dfrac{4x}{y}\cdot z''_{uv} + \dfrac{1}{y^2}\cdot z''_{v^2} + 2z'_u \\[2ex]
\left(x^2+y^2\right) & z''_{xy} = -4xy\cdot z''_{u^2} - \dfrac{2\left(x^2+y^2\right)}{y^2} z''_{uv} - \dfrac{x}{y^3}\cdot z''_{v^2} - \dfrac{1}{y^2}\cdot z'_v \\[2ex]
xy & z''_{y^2} = 4y^2\cdot z''_{u^2} + \dfrac{4x}{y} z''_{uv} - \dfrac{x^2}{y^4} z''_{v^2} - 2z'_u + \dfrac{2x}{y^3}\cdot z'_v \\
\hline
\end{array}
$$

$$0 = -\frac{2\left(x^2-y^2\right)^2}{y^2} z''_{uv} + \frac{2\left(x^2-y^2\right)}{y^2}\cdot z'_v$$

deci $z''_{uv}\cdot u - z'_v = 0$ este noua formă a ecuației.

5.) Schimbarea funcției și a variabilelor sale $z(x, y) \to w(u, v)$ printr-o transformare regulată din $\mathbb{R}^3$.

Exemplu. Să se transforme ecuația $(xy+z)\dfrac{\partial}{\partial x} + \left(1-y^2\right)\dfrac{\partial}{\partial y} = x + yz$ dacă $\begin{cases} u = yz - x \\ v = xz - y \\ w = xy - z \end{cases}$ și $w = w(u.v)$.

Soluție. Diferențiind relațiile date, avem

$$du = zdy + ydz - dx$$
$$dv = zdx + xdz - dy$$
$$dw = ydx + xdy - dz \quad ,$$

care introduse în formula

$$dw = w'_u du + w'_v dv$$

dau următoarea legătură între dx, dy și dz:

$$dz = \frac{y + w'_u - zw'_v}{1 + yw'_u - xw'_v} dx + \frac{x + w'_v - zw'_u}{1 + yw'_u + xw'_v} dy .$$

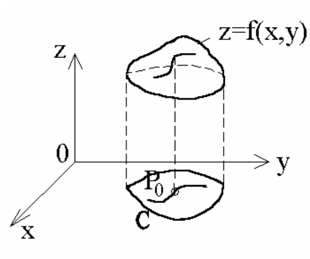
Dar cum $dz = z'_x dx + z'_y dy$, se deduc imediat derivatele parțiale ale lui z care înlocuite apoi în ecuația dată, dau ecuația

$$(xy+z)\left(y + w'_u - zw'_v\right) + \left(1-y^2\right)\left(x + w'_v - zw'_u\right) = (xy+z)\left(1 + yw'_u + xw'_v\right)$$

adică $\dfrac{\partial w}{\partial v} = 0$.

6. Extreme condiționate

Deseori în probleme de extrem apar condiții suplimentare impuse variabilelor. Cea mai simplă problemă de acest fel este determinarea extremelor funcției $f(x,y)$ cu condiția ca între variabilele *x* şi *y* să existe legătura $\varphi(x,y)=0$. Din punct de vedere geometric aceasta



înseamnă determinarea unui punct $P_0(x_0, y_0)$ aparținând curbei $C:\varphi(x,y)=0$ aşa ca în P_0 funcția *f* să ia valoare maximă sau minimă în raport cu celelalte puncte de pe curbă. Să vedem cum s-ar rezolva această problemă. Dacă ecuația $\varphi(x,y)$ defineşte în mod implicit funcția $y=y(x)$ (ecuația curbei *C*), atunci problema se reduce la determinarea punctelor de extrem ale funcției compuse $g(x)=f(x,y(x))$ şi care, după cum se ştie, se găsesc printre rădăcinile ecuației $g'(x)=0$, deci

(1) $\qquad f'_x + f'_y \cdot y' = 0.$

Derivând egalitatea $\varphi(x,y(x))=0$, avem şi

(2) $\qquad \varphi'_x + \varphi'_y \cdot y' = 0.$

Amplificând ecuația (2) cu un λ real oarecare şi adunând-o la (1), obținem relația

$$f'_x + \lambda\varphi'_x + \left(f'_y + \lambda\varphi'_y\right)\cdot y' = 0,$$

verificată de punctele de extrem legat.

Determinând λ aşa ca $f'_x + \lambda\varphi'_x = 0$, rezultă şi $f'_y + \lambda\varphi'_y = 0$.

Obținem astfel trei ecuații în necunoscutele x, y şi λ verificate de punctele de extrem legat

$$\begin{cases} f'_x + \lambda\varphi'_x = 0 \\ f'_y + \lambda\varphi'_y = 0 \\ \varphi = 0. \end{cases}$$

Să observăm că acest sistem este cel care dă punctele staționare ale funcției

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y).$$

Fie $M_0(x,y,\lambda_0)$ un punct staționar pentru *F*. Este evident că $P_0(x_0,y_0)\in C$. Fie de asemenea $P(x,y)\in C$. Să observăm că diferența

$$f(P) - f(P_0) = f(x,y)\cdot f(x_0,y_0) = f(x,y) + \lambda_0\,\varphi(x_0,y_0) =$$
$$= F(x,y,\lambda_0) - F(x_0,y_0,\lambda_0).$$

Prin urmare problema stabilirii dacă $P_0(x_0,y_0)$ este punct de extrem legat se reduce la studiul semnului lui $d^2F(x_0,y_0,\lambda_0)$.

În concluzie, pentru determinarea punctelor de extrem ale funcției $f(x,y)$ cu legătura $\varphi(x,y)=0$, se formează funcția auxiliară $F=f+\lambda\varphi$, i se determină punctele staționare iar dacă $M_0(x_0,y_0,\lambda_0)$ este unul din acestea, atunci se studiază dacă $P_0(x_0,y_0)$ este punct de extrem (liber) pentru $F(x,y,\lambda_0)$.

Exemplu. Să se găsească punctele de extrem ale funcției $f(x, y) = x + 2y$ știind că $x^2 + y^2 = 5$.

Soluție. Avem $\varphi(x, y) \equiv x^2 + y^2 - 5$,

$$F(x, y, \lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5).$$

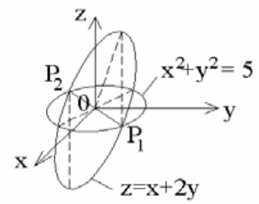
Punctele staționare ale lui F sunt soluțiile sistemului:

$$\begin{cases} F'_x \equiv 1 + 2\lambda x = 0 \\ F'_y \equiv 2 + 2\lambda y = 0 \\ F'_\lambda \equiv \varphi = x^2 + y^2 - 5 = 0 \end{cases}$$

și anume $M_1\ (1, 2, -\frac{1}{2})$ și $M_2\ (-1, -2, \frac{1}{2})$.

Pentru a stabili dacă punctele $P_1\ (1, 2)$ și $P_2\ (-1, -2)$ sunt sau nu puncte de extrem legat, calculăm

	M_1	M_2
$F''_{x^2} = 2\lambda$	- 1	1
$F''_{xy} = 0$	0	0
$F''_{y^2} = 2\lambda$	- 1	1



Avem

$$\Delta(P_1) = -1 < 0,\ F''_{x^2}(M_1) = -1 < 0 \Rightarrow P_1 \text{ punct de maxim}$$

$$\Delta(P_2) = -1 < 0,\ F''_{x^2}(M_2) = 1 > 0 \Rightarrow P_2 \text{ punct de minim}$$

$$f_{\max} = f(P_1) = 5 \qquad f_{\min} = f(P_2) = -5$$

Observația 1. Pentru determinarea extremelor funcției $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ supuse legăturilor $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad i = \overline{1, m}$, se construiește funcția auxiliară (funcția lui Lagrange) $F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f + \lambda_1\varphi_1 + \ldots + \lambda_m\varphi_m$, i se determină punctele staționare și dacă $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0)$ este un astfel de punct, se studiază dacă punctul $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ este punct de extrem liber pentru $F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1{}^0, \ldots, \lambda_m{}^0)$.

Aceasta este metoda multiplicatorilor lui Lagrange.

Exemplu. Să se găsească punctele de extrem ale funcției $f(x, y, z) = xyz$ cu condițiile $x + y + z = 5$, $xy + yz + zx = 8$.

Soluție. Avem

$$\varphi_1(x, y, z) = x + y + z - 5$$

$$\varphi_2(x, y, z) = xy + yz + zx - 8$$

și funcția auxiliară

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = xyz + \lambda(x + y + z - 5) + \mu(xy + yz + zx - 8).$$

Sistemul
$$\begin{cases} F'_x \equiv yz + \lambda + \mu(y+z) = 0 \\ F'_y \equiv xz + \lambda + \mu(x+z) = 0 \\ F'_z \equiv xy + \lambda + \mu(x+y) = 0 \\ F'_\lambda \equiv \varphi_1 \equiv x+y+z-5=0 \\ F'_\mu \equiv \varphi_2 \equiv xy+yz+zx-8=0 \end{cases}$$

ne dă punctele staționare ale lui $F: M_1(2,1,2,4,-2)$ şi $M_2(\frac{4}{3},\frac{7}{3},\frac{4}{3},\frac{16}{3},\frac{-4}{3})$.

Vom studia dacă $P_1(2,1,2)$ este punct de extrem liber pentru $F(x,y,z,4,-2)$. Pentru aceasta ne interesează semnul diferențialei $d^2F(M_1)$. Avem

$$d^2F(M_1) = -2dxdz.$$

	M_1
$F''_{x^2} = 0$	0
$F''_{xy} = z+\mu$	0
$F''_{xz} = y+\mu$	- 1
$F''_{y^2} = 0$	0
$F''_{yz} = x+\mu$	0
$F''_{z^2} = 0$	0

Diferențiind însă legăturile, avem relațiile
$$\begin{cases} dx+dy+dz=0 \\ (x+z)dx+(x+z)dy+(x+z)dz=0 \end{cases}$$
care pentru $P_1(2,1,2)$ devin $\begin{cases} dx+dy+dz=0 \\ 3dx+4dy+3dz=0 \end{cases}\Bigg|^{-4}$ de unde $dz=-dx$,

deci $d^2F(M_1) = 2dx^2 > 0$. Urmează că $f(P) - f(P_0) > 0$, deci P_1 este punct de minim (legat). Făcând un studiu asemănător pentru punctul $P_2(\frac{4}{3},\frac{7}{3},\frac{4}{3})$ se găseşte că acesta este un punct de maxim (legat).

Observația 2. Problema determinării extremelor funcției $f(x_1,\dots,x_n)$ cu condiții de forma: $\varphi_i(x_1,\dots,x_n) \ge 0 \;\; i=\overline{1,m}$ este problema generală a programării matematice.

Dacă atât funcția f cât şi funcțiile φ_i sunt liniare, atunci problema este de programare liniară (formulată în 1947 de către matematicianul american G. B. Dantzig).

Exerciții

1.) Să se arate că suprafețele $x+2y-\ln z+4=0$ şi $x^2-xy-8x+z+5=0$ sunt tangente una alteia în punctul $(2,-3,1)$.

2.) Să se scrie ecuația tangentei într-unul din punctele de abscisă $x=1$ ale curbei $x^2-2xy+y^2+x+y-2=0$. Să se determine d^2y în punctul ales.

3.) Să se calculeze u'_x, u'_y pentru $u=\frac{x+z}{y+z}$ dacă $ze^z = xe^x + ye^y$

4.) Să se arate că dacă

a.) $(y+z)\sin z - y(x+z) = 0$, atunci $z\sin z\frac{\partial z}{\partial x} - y^2\frac{\partial z}{\partial y} = 0$

b.) $x^2+y^2+z^2 = yf\left(\frac{z}{y}\right)$, atunci $(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial x} + 2xy\frac{\partial z}{\partial y} = 2xz$

c.) $f\left(\dfrac{x}{z}, \dfrac{y}{z}\right) = 0$, atunci $x\dfrac{\partial z}{\partial y} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$

d.) $f\left(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2\right) = 0$, atunci $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\dfrac{4(x-z)(y-z)}{\left(f'_u + 2z f'_v\right)^3}$

e.) $uv = 3x - 2y + z$, $v^2 = x^2 + y^2 + z^2$, atunci $xu'_x + yu'_y + zu'_z = 0$

5.) Să se calculeze d^2u şi d^2v pentru valorile $x = 1, y = 1$ $u = 0$, $v = \dfrac{\pi}{4}$ dacă

$e^{\frac{u}{x}} \cos\dfrac{v}{y} = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$, $e^{\frac{u}{x}} \sin\dfrac{v}{y} = \dfrac{y}{\sqrt{2}}$. R : $d^2u = dx^2$, $d^2v = \dfrac{1}{2}(dx - dy)^2$

6.) Să se afle extremele funcțiilor:

a.) y dacă $y^2 + 2yx^2 - 4x - 3 = 0$ R : $y_{\max}$ pt $x = \dfrac{1}{2}$

b.) z dacă $x^3 - y^2 - 3x + 4y + z^2 + z - 8 = 0$

c.) $f(x, y) = x^2 + y^2$ în discul $\left(x - \sqrt{2}\right)^2 + \left(y - \sqrt{2}\right)^2 \le 9$

d.) $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ cu condițiile $-x + yz = 1$, $x - z = 0$

e.) $f(x, y, z, t) = x + y + z + t$ ştiind că $xyzt = a^4$, $x, y, z, t, a > 0$

7.) Să se determine $\inf\limits_{A} f$ şi $\sup\limits_{A} f$ dacă $f(x,y) = x^2 y(4 - x - y)$ şi A este domeniul limitat de dreptele $x = 0, y = 0$, $x + y = 6$

8.) Pe elipsoidul $\dfrac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1$ să se găsească punctul cel mai depărtat şi punctul cel mai apropiat de planul $3x + 4y + 12z = 288$.

9.) Să se calculeze iacobianul transformării

$x = (\alpha + \rho\cos\theta)\cos\varphi$, $y = (a + \rho\cos\theta)\sin\varphi$, $z = \rho\sin\theta$ R : $\rho\,(\alpha + \rho\cos\theta)$

10.) Să se arate cu ajutorul determinanților funcționali că există o relație de dependență între funcțiile $x = (u + v)\cos\varphi$, $y = (u - v)\sin\varphi$, $z = u^2 + v^2 + 2uv\cos 2\varphi$ şi se dea o relație de legătură directă.

11.) În ecuațiile următoare să se facă schimbările indicate

a.) $y'' - xy'^3 + \cos y \cdot y'^3 = 0$, $x = x(y)$ R : $x'' + x - \cos y = 0$

b.) $y'' + y'\operatorname{th} x + \dfrac{m}{\operatorname{ch}^2 x} = 0$, $x = \ln tg\dfrac{t}{2}$ R : $\dfrac{d^2y}{dt^2} + m^2 y = 0$

c.) $\left(x^2 + y^2\right)(x + yy') = \left(x^2 + y^2 + x\right)(xy' - y)$, $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$, $\rho = \rho(\varphi)$ R : $\rho' = \rho + \cos\varphi$

d.) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\cos x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \sin^2 x\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \sin x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, $\begin{cases} u = \sin x + x - y \\ v = x - \sin x + y \end{cases}$ R : $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$

e.) $\dfrac{\partial z}{\partial y} + \dfrac{1}{2}y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{1}{x}$, $u = \dfrac{x}{y}$, $v = x$, $w = xz - y$, $w = w(u, v)$ R: $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2} = 0$

f.) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}+u=0,\ u=\varphi(r),\ r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ R : $\varphi''+\dfrac{2}{r}\varphi'+\varphi=0$

12.) Să se arate că orice ecuație de forma $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}+cz=0$ poate fi redusă la forma $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+c_1 u=0$ prin schimbarea de funcție $z=ue^{\alpha x+\beta y}$, $u=u(x,y)$.

R : $\alpha=-b,\ \beta=-a,\ c_1=c-ab$

13.) Să se transforme expresia $E=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ făcând schimbarea de variabile $x=\dfrac{u+v}{2},\ y=\dfrac{u-v}{2}$ şi schimbarea de funcție $z=\dfrac{u^2-v^2}{4}-w.$

PARTEA II
CALCUL INTEGRAL

I. INTEGRALA NEDEFINITĂ

1. Primitiva unei funcții

Fie o funcție $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Definiție. *Se numeşte* ***primitivă*** *a lui f pe I, o funcție F definită şi derivabilă pe I astfel încât* $F' = f$

Să observăm că:

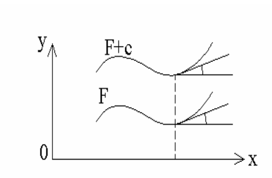
1.) dacă F este o primitivă a lui f, atunci $F + c$, unde c este o constantă oarecare, este primitivă a lui f,

2.) dacă F şi G sunt primitive ale lui f, atunci ele diferă printr-o constantă aditivă.

Rezultă de aici că dacă F este o primitivă a lui f, atunci oricare alta va fi de forma $F + c$ unde c este o constantă.

Mulțimea primitivelor funcției f se numeşte, prin abuz de limbaj – ***integrala nedefinită*** a lui f şi se notează $\int f(x)\, dx$ sau mai simplu $\int f\, dx$.

Astfel, prin definiție $\int f\, dx = F + c \quad \Leftrightarrow \quad F' = f$.



Din punct de vedere geometric, integrala nedefinită reprezintă o familie de curbe plane obținute una din alta printr-o translație de-a lungul axei Oy.

Interpretând semnul dx care apare în notația integralei nedefinite ca o diferențială, avem $fdx = F'dx = dF$. Astfel se obțin următoarele relații utile în calcule.

$$\int dF = F + c \quad \text{şi} \quad d\int f\, dx = f\, dx.$$

Operația de determinare a primitivelor unei funcții se numeşte integrare. Nu toate funcțiile admit primitive. Dar orice funcție continuă pe un interval admite primitivă pe acel interval (vezi cap X). În acest capitol ne vom ocupa de metode de determinare a primitivelor unor funcții continue. Mai întâi însă vom da

Lista integralelor imediate

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha\ real,\ \neq -1) \qquad \int \frac{dx}{x} = ln|x| + c \quad (x \neq 0)$$

$$\int e^{x} dx = e^{x} + c \qquad \int a^{x} dx = \frac{a^{x}}{ln\, a} + c \quad (a > 0,\ a \neq 1)$$

$$\int sin\, x\, dx = -\,cos\, x + c \qquad \int cos\, x\, dx = sin\, x + c$$

$$\int \frac{1}{cos^{2} x} dx = tg\, x + c \qquad \int \frac{1}{sin^{2} x} dx = -\,ctg\, x + c$$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$ $\qquad$ $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = arctg\, x + c$

$\int sh x\,dx = ch x + c$ $\qquad$ $\int ch x\,dx = sh x + c$

$\int \frac{1}{ch^2 x}\,dx = th\, x + c$ $\qquad$ $\int \frac{1}{sh^2 x}\,dx = -cth\, x + c$

Proprietățile integralei nedefinite rezultă cu uşurință din regulile de derivare şi sunt:

1.) dacă $f, g \in C(I)$, atunci

$\int (\alpha f + \beta g)dx = \alpha \int f\,dx + \beta \int g\,dx$ $\qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (proprietatea de liniaritate) **2**.) dacă $\varphi : \Im \to I$, $x = \varphi(t)$, $\varphi \in C^1(\Im)$, $\varphi'(t) \neq 0$ pentru a admite inversa $t = \psi(x)$, iar *f* este continuă, atunci

$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$ $\qquad$ (formula schimbării de variabilă)

3.) dacă $f, g \in C^1(I)$, atunci

$\int f\,g'\,dx = f\,g - \int g\,f'\,dx$ $\qquad$ (formula integrării prin părți).

Observația 1. În cazul schimbării de variabilă expresia de sub semnul integrală se comportă ca o diferențială; dacă $x = \varphi(t)$, atunci $f(x)\,dx = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$. Această observație simplifică calculele.

Formula schimbării de variabilă poate fi privită din ambele sensuri.

Funcția $x = \varphi(t)$ trebuie aleasă astfel încât să poată fi calculată integrala din membrul drept.

Uneori este preferabilă schimbarea de variabilă sub forma $t = \psi(x)$.

Exemple.

$$\mathbf{1.)} \int \frac{dx}{\sqrt{x}+1} \underset{\substack{x = t^2 = \varphi(t) \\ dx = 2t\,dt}}{=} 2\int \frac{t\,dt}{t+1} = 2\int \left(1 - \frac{t}{t+1}\right) dt = 2\left(t - \ln|t+1|\right) + c =$$

$$= 2\sqrt{x} - \ln\left(\sqrt{x}+1\right)^2 + c.$$

$$\mathbf{2.)} \int x \sin x^2\,dx \underset{\substack{t = x^2 = \psi(x) \\ dt = 2x\,dx}}{=} \frac{1}{2}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{2}\cos t + c = -\frac{1}{2}\cos x^2 + c.$$

Observația 2. Formula integrării prin părți pentru funcțiile $u, v \in C^1(I)$ poate fi scrisă şi sub forma $\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$ unde $du = u'dx$, $dv = v'dx$.

Ea se foloseşte de obicei la calculul integralelor de forma $\int x^n e^{ax} dx$; $\int x^n \ln x\,dx$; $\int e^{ax} \sin bx\,dx$; ; $\int x^n arctg\,x\,dx$ şi altele.

Cu ajutorul ei se pot obține formule de recurență utile în calculul unor primitive.

Exemplu. $I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+x^2-x^2}{\left(x^2+a^2\right)^n}dx = \frac{1}{a^2}I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x\cdot x\,dx}{\left(x^2+a^2\right)^n} = \ldots$

$$u = x \qquad dv = \frac{x\,dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}$$

$$du = dv \qquad v = \frac{1}{2(1-n)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}$$

$$\ldots = \frac{1}{a^2}I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\left[\frac{x}{2(1-n)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}I_{n-1}\right].$$

Astfel $I_n = \frac{x}{a^2(n-1)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2}I_{n-1} \qquad n>1.$

Pornind de la $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\,arctg\,\frac{x}{a}+c$, obținem succesiv

$$I_2 = \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^2} = \frac{x}{a^2\left(x^2+a^2\right)} + \frac{1}{2a^3}\,arctg\,\frac{x}{a}+c, \quad \text{etc}\ldots$$

2. Integrarea funcțiilor raționale

Integrarea funcției raționale $\frac{P(x)}{Q(x)}$ unde P şi Q sunt polinoame se face pe etape:

Dacă $grP \geq gr\,Q$, atunci facem împărțirea cu rest

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \qquad gr\,R < gr\,Q.$$

Dacă $gr\,P < gr\,Q$, atunci descompunem $\frac{P(x)}{Q(x)}$ în fracții simple. Acestea sunt

$$\frac{A}{(x-a)^n}\ , \quad \frac{Bx+C}{\left(ax^2+bx+c\right)^n} \qquad \left(n\in N\,,\,b^2-4ac<0\right).$$

De exemplu $\qquad \frac{3x^2+5x-4}{(x+1)^3\left(x^2+2\right)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{Dx+E}{x^2+2} + \frac{Fx+G}{\left(x^2+2\right)^2}$,

coeficienții urmând a fi determinați prin identificarea numărătorilor după ce fracțiile a fost aduse la acelaşi numitor sau prin alte metode.

Descompunerea în fracții simple este unică.

Urmează apoi integrarea fracțiilor simple. Astfel

1.) $\int \frac{A}{x-a}dx = A\,ln\left|\,x-a\,\right| + c$

2.) $\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int \frac{du}{u^n} = \frac{A}{(x-a)^{n-1}} + c, \qquad n>1$

3.) $\int \frac{Bx+c}{ax^2+bx+c}dx$ se calculează punând în evidență la numărător diferențiala trinomului de la numitor, adică $d\left(ax^2+bx+c\right)=(2ax+b)dx$ şi se obțin două integrale de forma $\int \frac{du}{u}$ *şi* $\int \frac{dy}{y^2+\alpha^2}$,

4.) $\int \frac{Bx+c}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}dx$ se reduce la calculul a două integrale de forma

$\int \frac{du}{u^n}$ *şi* $I_n=\int \frac{dy}{\left(y^2+\alpha^2\right)^n}$ după ce s-a procedat ca la 3.)

Exemplu.

$$I=\int \frac{3x+2}{\left(4x^2+4x+3\right)^2}dx=\frac{1}{8}\int \frac{3(8x+4)+4}{\left(4x^2+4x+3\right)^2}dx=-\frac{3}{8}\frac{1}{4x^2+4x+3}+\frac{1}{2}I_1$$

$$d\left(4x^2+4x+3\right)=(8x+4)\,dx$$

unde

$$I_1=\int \frac{dx}{\left[(2x+1)^2+2\right]^2}=\frac{1}{2}\int \frac{dy}{\left(y^2+2\right)^2}=\frac{1}{2}\left[\frac{y}{2\left(y^2+2\right)}+\frac{1}{2\cdot 2\sqrt{2}}arctg\frac{y}{\sqrt{2}}\right]+c=$$

$$\left.\begin{array}{l} y=2x+1 \\ dy=2\,dx \end{array}\right| \qquad =\frac{1}{4}\frac{2x+1}{4x^2+4x+3}+\frac{1}{8\sqrt{2}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{2}}+c.$$

Deci $I=\frac{1}{16}\frac{2x-5}{4x^2+4x+3}+\frac{1}{16\sqrt{2}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{2}}+c$.

După cum s-a putut observa, primitivele funcțiilor raționale sunt combinații liniare de funcții raționale, funcții logaritmice şi funcții arctg.

3. Integrale reductibile la integrale din funcții raționale

Integralele iraționale de forma

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{q_1},\dots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{q_n}\right)dx \qquad q_i\in Q$$

unde R este o expresie rațională de variabilele sale, se reduc la integrale din funcții raționale făcând $\boxed{\frac{ax+b}{cx+d}=t^N}$

unde N este numitorul comun al fracțiilor $q_1,\dots,q_n$.

Exemplu. Pentru $\int \frac{1+\sqrt{1-x}}{1-x+\sqrt[3]{(1-x)^2}}dx$ avem $N=6$; facem $1-x=t^6$ de unde $x=1-t^6$ şi $dx=-6t^5dt$, deci

$$I=-6\int\frac{1+t^3}{t^6+t^4}\cdot t^5\,d\,t=-6\int\frac{t^4+t}{t^2+1}\,dt=-6\int\left(t^2-1+\frac{t+1}{t^2+1}\right)dt=$$
$$=-2\,t^3+6t-3\,ln\,(t^2+1)-6\,arctg\,t+c=$$
$$=-2\sqrt{1-x}+6\sqrt[6]{1-x}-3\,ln\left[\sqrt[3]{1-x}+1\right]-6\,arctg\sqrt[6]{1-6x}+c\,.$$

Integralele binome au forma

$$\int x^m\left(ax^n+b\right)^p dx\quad m\,,n\,,p\in Q\,.$$

Ele se mai numesc şi integrale Cebâşev* după numele celui care a arătat că numai în următoarele trei cazuri ele pot fi reduse la integrale din funcţii raţionale:

1.) $p\in Z$ cu schimbarea $\boxed{x=t^N}$ unde N este numitorul comun a lui m şi n .

2.) $\dfrac{m+1}{n}\in Z$ cu $\boxed{ax^n+b=t^N}$ unde N este numitorul lui p

3.) $\dfrac{m+1}{n}+p\in Z$ cu $\boxed{ax^n+b=t^N x^n}$ unde N este numitorul lui p

Exemplu. Fie $I=\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^3}\,\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}=\int x^{-\frac{3}{2}}\left(x^{\frac{3}{4}}+1\right)^{-\frac{1}{3}}dx$. Facem $x^{\frac{3}{4}}+1=t^3x^{\frac{3}{4}}$ şi avem

$$x=(t^3-1)^{-\frac{4}{3}}\,,\;dx=-4t^2(t^3-1)^{-\frac{7}{3}}dt\,,\quad x^{\frac{3}{4}}+1=t^3(t^2-1)^{-1}\,.$$

Astfel $\quad I=-4\displaystyle\int t\,dt=-2\,t^2+c=-2\sqrt[3]{\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}+1\right)^2}+c\,.$

Integralele algebrice au forma

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$$

unde R este o funcţie raţională de două variabile.

Substituţiile indicate mai jos se datorează lui Euler:

1.) dacă $a>0$, $\quad\boxed{\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}\,x+t}$

2.) $a<0\,,c>0$, $\quad\boxed{\sqrt{ax^2+bx+c}=tx\pm\sqrt{c}}$

3.) $a<0$, $c<0$, $\quad\boxed{\sqrt{ax^2+bx+c}=t\left(x-x_1\right)}$ unde x_1 este rădăcină a ecuaţiei $ax^2+b+c=0$. Această ecuaţie nu poate avea rădăcini complexe deoarece trinomul ax^2+bx+c ar fi negativ $\forall\,x\in R$ şi n-ar avea sens radicalul.

* R.L. Cebâşev (1829 – 1894), academician rus cu contribuţii în matematică şi mecanică.

Putem de asemenea remarca faptul că ultima schimbare de variabilă poate fi aplicată nu numai când $a<0$ ci şi când $a>0$ dacă trinomul ax^2+bx+c are rădăcini reale.

Exemplu. Fie $I=\int \frac{dx}{x\sqrt{-3x^2+5x+1}}$. Făcând $\sqrt{-3x^2+5x+1}=tx+1$, avem

$$x=\frac{5-2t}{t^2+3},\quad dx=\frac{2(t^2-5t-3)}{(t^2+3)^2}dt,\quad \sqrt{-3x^2+5x+1}=t\cdot\frac{5-2t}{t^2+3}+1=\frac{-t^2+5t+3}{t_2+3},$$

de unde
$$I=\int\frac{2\,dt}{2t-5}=ln\left|2t-5\right|+c=ln\left|2\frac{\sqrt{-3x^2+5x+1}}{x}-5\right|+c.$$

Integralele din funcţii trigonometrice de forma $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$ se transformă în integrale din funcţii raţionale dacă:

1.) funcţia R este impară în $\cos x$, adică
$$R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x) \text{ cu } \boxed{\sin x=t}$$

2.) R este impară în $\sin x$,
$$R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x) \text{ cu } \boxed{\cos x=t}$$

3.) R este pară în $\sin x$ şi $\cos x$
$$R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x) \text{ cu } \boxed{\operatorname{tg} x=t}$$

4.) facem $\boxed{\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t}$

În primele două situaţii se diferenţiază substituţiile şi se pun în evidenţă la numărător diferenţialele lor.

În ultimele două cazuri se exprimă vechea variabilă în funcţie de cea nouă şi apoi se diferenţiază.

Exemple.

1.) Fie $I=\int\frac{sin^3 x}{2+cos\,2}dx$. Efectuăm schimbarea de variabilă $cos\,x=t$ şi avem $-sin\,x=d\,x=d\,t$, după care integrala devine

$$I=\int\frac{sin^2 x\,sin\,x\,dx}{2+cos\,x}=\int\frac{(t^2-1)d\,t}{2+t}=\int\left(t+2+\frac{3}{t+2}\right)d\,t=$$
$$=\frac{t^2}{2}+2t+3ln\left|t+2\right|+c=\frac{cos^2 x}{2}-2cos\,x+3ln(cos\,x+2)+c\,.$$

2.) Fie $I=\int\frac{1+sin\,x}{sin\,x+sin\,x\,cos\,x}dx$. Făcând $tg\,\frac{x}{2}=t$, avem $x=2arctg\,t$, $dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}$ şi cum $sin\,x=\frac{2t}{1+t^2}$, $cos\,x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, urmează că

$$I=\int\frac{(t+1)^2}{2t}d\,t=\frac{1}{2}\int\left(t+2+\frac{1}{t}\right)d\,t=\frac{1}{4}tg^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}ln\left|tg\,\frac{x}{2}\right|+c\,.$$

Alte tipuri de integrale

1.) O integrală de forma $\int R\left(e^{ax}\right)dx$

se reduce la o integrală rațională dacă se face $\boxed{e^{ax}=t}$. Atunci $x=\frac{1}{a}\ln t$, $dx=\frac{dt}{at}$ şi ea devine $\int R(t)\frac{dt}{at}=\int R_1(t)\,dt$.

Exemplu. $I=\int\frac{d\,x}{sh\,x+1}=\int\frac{d\,x}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}+1}=2\int\frac{dx}{e^x-e^{-x}+2}=2\int\frac{1}{t-\frac{1}{t}+2}\cdot\frac{dt}{t}=$

$$=2\int\frac{dt}{t^2+2t-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}ln\left|\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}\right|+c=\frac{1}{2}ln\left|\frac{e^x+1-\sqrt{2}}{e^x+1+\sqrt{2}}\right|+c$$

2.) Integrarea unor funcții hiperbolice se poate face utilizând formule asemănătoare celor trigonometrice.

Exemplu. $I=\int ch^4x\,d\,x=\int\left[\frac{1+ch\,2x}{2}\right]^2d\,x=\frac{1}{4}\int\left(1+2ch\,2x+ch^2\,2x\right)d\,x=$

$$=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}sh\;2x+\frac{1}{4}\int\frac{1+ch\,4x}{2}d\,x=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}sh\,2x+\frac{1}{32}sh\,4x+c.$$

3.) Integralele de forma $I_1=\int e^{ax}\cos bx\,dx$ şi $I_2=\int e^{ax}\sin bx\;dx$ se pot obține simultan astfel:

$$I_1+i\,I_2=\int e^{ax}\left(cos\,bx+i\,sin\,bx\right)dx=\int e^{ax}\cdot e^{ibx}dx=\int e^{(a+ib)x}dx=\frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}+c=$$

$$=\frac{a+ib}{a^2+b^2}e^{ax}\left(cos\,bx+i\,sin\,bx\right)+c$$

Separând partea reală de cea imaginară, avem

$$I_1=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\,cos\;bx+b\,sin\,bx\right)+c$$

$$I_2=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\,sin\,bx-b\,cos\,bx\right)+c\,.$$

Calculul unor integrale cu ajutorul unor substituții trigonometrice şi hiperbolice

Uneori substituțiile indicate în dreptul integralelor ce urmează pot conduce la integrări mai rapide:

1.) $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx,$ cu $\boxed{x=a\cos t}$ sau $\boxed{x=a\sin t}$

2.) $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx,$ cu $\boxed{x=a\,\mathrm{tg}\,t}$ sau $\boxed{x=a\,sht}$

3.) $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx,$ cu $\boxed{x=a\,ch\,t}$

Exemplu.

$$I=\int\sqrt{x^2-2x-3}dx=\int\sqrt{(x-1)^2-4}dx \underset{\substack{x-1=2ch\,t\\ dx=2sht\,dt}}{=} 4\int sh^2t\,dt=2\int(ch\,2t-1)d\,t=sh\,2t-t+c$$

Pentru revenirea la variabila x se au în vedere formulele $\operatorname{sh}2t=2\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t$, $e^t=\operatorname{sh}t+\operatorname{ch}t$ şi că din

$\operatorname{ch}t=\frac{x-1}{2}$ rezultă $\operatorname{sh}t=\sqrt{\operatorname{ch}^2t-1}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2-2-3}$.

Astfel $I=\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x-3}+\frac{1}{2}\ln\left(x-1+\sqrt{x^2-2x-3}\right)+c$.

Integrale care nu pot fi exprimate prin funcţii elementare

O diferenţă esenţială între calculul diferenţial şi cel integral este aceea că derivata unei funcţii elementare se exprimă totdeauna prin funcţii elementare, nu acelaşi lucru se poate spune despre primitiva unei funcţii elementare.

Aşa de exemplu sunt funcţiile:

$si(x)=\int\frac{sin\,x}{x}dx$ (sinus integral) $\qquad ci(x)=\int\frac{cos\,x}{x}dx$ (cosinus integral)

$li(x)=\int\frac{dx}{ln\,x}$ (logaritm integral) $\qquad \int e^{-x^2}dx$ (funcţia de eroare)

$\int\frac{e^x}{x}dx$ (exponenţial integral)

Tot din această categorie fac parte în general primitivele de forma $\int R\left(x,\sqrt{P(x)}\right)dx$

unde P este polinom de grad $n>2$ ca de exemplu $\int\frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ sau funcţiile

eliptice $\int\sqrt{1-k^2\,sin^2\,x}\,dx$, $\int\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\,sin^2\,x}}$.

Exerciţii

Să se calculeze următoarele integrale nedefinite:

1.) $\int\frac{\ln(\ln x)}{x}dx$

2.) $\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{x}dx$

3.) $\int\frac{\operatorname{sh}\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}dx$

4.) $\int xe^x\cos x\,dx$

12.) $\int\frac{x^4-2x^2+2}{(x^2-2x+2)^2}dx$

13.) $\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}$

14.) $\int\frac{x^5\,dx}{(x^3+1)(x^3+8)}$

15.) $\int\frac{x^2\,dx}{(x-1)^{10}}$

23.) $\int\frac{\cos^4x+\sin^4x}{\cos^2x\sin^2x}dx$

24.) $\int\sin^5x\sqrt[3]{\cos x}\,dx$

25.) $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$

26.) $\frac{\sec^2x\,dx}{\sqrt{tg^2x+4\operatorname{tg}x+1}}$

5.) $\int \sin 10x \sin 15x \, dx$

6.) $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$

7.) $\int \ln^n x \, dx$

8.) $\int x^n e^{-x} \, dx$

9.) $\int \frac{x \cos x}{\sin^2 x} dx$

10.) $\int \frac{\ln \sin x}{\sin^2 x} dx$

11.) $\int x^2 \ln \frac{1+x}{1-x} dx$

16.) $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)^2}$

17.) $\int x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \, dx$

18.) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{5-x} + \sqrt{5-x}}$

19.) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}$

20.) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$

21.) $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}} \, dx$

22.) $\int \frac{dx}{(2-\sin x)(3-\sin x)}$

27.) $\int \frac{\sin^2 \frac{x}{2} + 1}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin x} dx$

28.) $\int \frac{dx}{(x^2+1)\left(2x - \sqrt{+x^2}\right)}$

29.) $\int \frac{5x \, dx}{\sqrt{1+x^4}}$

30.) $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-2x^2-x^4}}$

31.) $\int \frac{dx}{2 \operatorname{sh} x + 3 \operatorname{ch} x}$

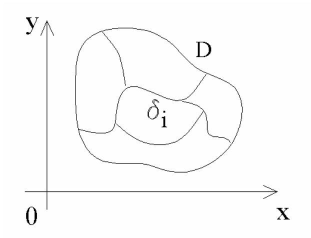
32.) $\int \frac{\cos ax}{\sqrt{a^2 + \sin^2 ax}} dx$

II. INTEGRALA DUBLĂ

1. Definiția integralei duble

Fie D un compact din $\mathbb{R}^2$ (domeniu închis şi mărginit).

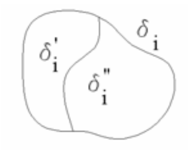
Domeniile ce intervin aici, vom presupune că au arie (vezi Manual cls.a XII-a) şi frontierele lor sunt curbe netede pe porțiuni, adică reuniuni finite de curbe netede.



Numim diviziune a lui D, un număr finit de compacte $\Delta = \{\delta_i\}_1^n$, fără puncte interioare comune astfel încât

$$D = \bigcup_1^n \delta_i .$$

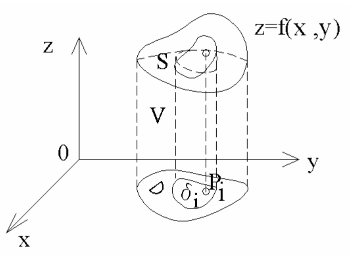
Norma diviziunii Δ este prin definiție $\nu(\Delta) = \max\limits_{i=\overline{1,n}} d(\delta_i)$ unde $d(\delta_i)$ este diametrul compactului δ_i adică marginea superioară a distanțelor dintre două puncte oarecare ale lui δ_i.



Spunem că diviziunea Δ' este mai fină decât Δ (scriem $\Delta' \prec \Delta$) dacă orice domeniu al diviziunii Δ este o reuniune finită de domenii ale diviziunii Δ'. Evident că

$$\Delta' \prec \Delta \Rightarrow \nu(\Delta') \le \nu(\Delta) \quad .$$

Fie acum $f\colon D \to \mathbb{R}$ o funcție (eventual mărginită), $\Delta = \{\delta_i\}_1^n$ o diviziune a lui D şi punctele intermediare $P_i(\xi_i, \eta_i) \in \delta_i \quad i = \overline{1,n}$.



Fie de asemenea suma integrală

$$\sigma_\Delta(f) = \sum_1^n f(P_i) \ aria \ \delta_i = \sum_1^n f(\xi_i, \eta_i) \ aria \ \delta_i .$$

Geometric, dacă $f \ge 0$, atunci $\sigma_\Delta(f)$ aproximează volumul corpului V delimitat de suprafața S având ecuația $z = f(x,y)$, planul xOy şi suprafața cilindrică a cărei generatoare este paralelă cu axa Oz şi se sprijină pe frontiera domeniului D.

Această aproximație este cu atât mai bună cu cât diviziunea Δ este mai fină.

Definiția 1. *Spunem că funcția f este integrabilă pe D, dacă există şi este finită limita*

$$\lim_{\nu(\Delta)\to 0} \sigma_\Delta(f) = I$$

oricare ar fi alegerea punctelor intermediare P_i.

Această definiție este evident echivalentă cu

Definiția 2. *Funcția f este integrabilă pe D, dacă există un număr real I, astfel încât* $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \eta(\varepsilon)$ *aşa ca pentru orice diviziune* Δ *a lui D cu* $\nu(\Delta) < \eta$, *şi oricare ar fi alegerea punctelor intermediare, să avem*

$$\left|\sigma_\Delta(f)-I\right|<\varepsilon .$$

O definiție echivalentă se poate da şi prin şiruri ca şi la integrala definită.

Numărul I se numeşte ***integrala dublă a lui f pe D*** şi se notează

$$I=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \quad sau \quad I=\iint_D f\,dx\,dy .$$

Dacă funcția f este mărginită pe D, atunci se pot considera ca şi la funcțiile de o singură variabilă, sumele Darboux ale lui f corespunzătoare diviziunii $\Delta=\{\delta_i\}_1^n$ a domeniului D

$$s_\Delta(f)=\sum_1^n m_i \ aria\ \delta_i \qquad S_\Delta(f)=\sum_1^n M_i \ aria\ \delta_i$$

unde $$m_i=\inf_{P\in\delta_i} f(P), \quad M_i=\sup_{P\in\delta_i} f(P).$$

Notând cu m şi M respectiv marginile funcției f pe D, au loc evident următoarele inegalități: $m\ aria\ D\le s_\Delta(f)\le\sigma_\Delta(f)\le S_\Delta(f)\le M\ aria\ D$.

Se pot pune în evidență următoarele proprietăți ale sumelor Darboux:

1.) $s_\Delta(f)=\inf\sigma_\Delta(f), \quad S_\Delta(f)=\sup\sigma_\Delta(f)$

marginile luându-se după toate alegerile posibile ale punctelor intermediare

2.) Dacă $\Delta'\prec\Delta$, atunci $s_\Delta(f)\le s_{\Delta'}(f)\le S_{\Delta'}(f)\le S_\Delta(f)$.

Într-adevăr, dacă $\delta_i=\delta_i'\cup\delta_i''$ şi $m_i'=\inf_{P\in\delta_i'} f(P), \quad m_i''=\inf_{P\in\delta_i''} f(P)$,

atunci $m_i\ aria\ \delta_i\le m_i'\ aria\ \delta_i'+m_i''\ aria\ \delta_i''$.

Deducem de aici că dacă $\nu(\Delta)\downarrow$, atunci $s_\Delta(f)\uparrow$ *şi* $S_\Delta(f)\downarrow$.

3.) Oricare ar fi diviziunile Δ_1 *şi* Δ_2, $m\ aria\ D\le s_{\Delta_1}(f)\le S_{\Delta_2}(f)\le M\ aria\ D$.

Rezultă de aici că există integralele Darboux ale lui f pe D:

$\underline{I}=\sup_\Delta s_\Delta(f), \quad \overline{I}=\inf_\Delta S_\Delta(f)$ şi că $s_\Delta(f)\le\underline{I}\le\overline{I}\le S_\Delta(f) \quad \forall\ \Delta$.

2. Criterii de integrabilitate

Teorema 1 *(criteriul lui Darboux). O funcție mărginită f este integrabilă pe D dacă şi numai dacă* $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\eta(\varepsilon)$ *astfel încât* $\forall\,\Delta$ *cu* $\nu(\Delta)<\eta$

$$S_\Delta(f)-s_\Delta(f)<\varepsilon .$$

Demonstrație $\Rightarrow$ Funcția f fiind integrabilă, $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\eta(\varepsilon)$ astfel încât $\forall\,\Delta$ cu $\nu(\Delta)<\eta$ să avem $I-\varepsilon\le\sigma_\Delta(f)\le I+\varepsilon$ oricare ar fi alegerea punctelor P_i.

Dar atunci avem şi $I-\varepsilon\le s_\Delta(f)\le S_\Delta(f)\le I+\varepsilon$.

Prin urmare $S_\Delta(f)-s_\Delta(f)\le I+\varepsilon-(I-\varepsilon)=2\varepsilon \quad \forall\,\Delta \ cu\ \nu(\Delta)<\eta$.

$\Leftarrow$ Presupunem pentru funcția mărginită f că este îndeplinită condiția din enunț. Atunci are loc şi $O\le\overline{I}-\underline{I}\le S_\Delta(f)-s_\Delta(f)<\varepsilon \ \ \forall\Delta$ cu $\nu(\Delta)<\eta$.

Cum ε este arbitrar, rezultă $\overline{I} = \underline{I} = I$.

Din $s_{\Delta}(f) \le I \le S_{\Delta}(f)$, $s_{\Delta}(f) \le \sigma_{\Delta}(f) \le S_{\Delta}(f)$, rezultă că $\left| \sigma_{\Delta}(f) - I \right| \le S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f) < \varepsilon$ indiferent de alegerea punctelor P_i, dacă $\nu(\Delta) < \eta$.

Deci *f* este integrabilă şi $\iint\limits_D f\,dx\,dy = I$.

Teorema 2. *Dacă f este continuă pe* $D \Rightarrow f$ *este integrabilă pe D.*

Demonstrație. Funcția *f* fiind continuă pe compactul *D*, este uniform continuă pe *D* şi deci $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta(\varepsilon)$ astfel încât oricare ar fi $P', P'' \in D$ cu $d(P', P'') < \eta$ să avem

$$\left| f(P') - f(P'') \right| < \frac{\varepsilon}{aria\ D}.$$

Fie $\Delta = \{\delta_i\}_1^n$ o diviziune a lui *D* cu $\nu(\Delta) < \eta$ şi m_i, M_i marginile lui *f* pe δ_i $i = \overline{1, n}$.

Dar *f* fiind continuă pe compactul δ_i, îşi atinge marginile pe δ_i, deci $\exists P_i', P_i'' \in \delta_i$ aşa ca, $m_i = f(P_i')$, $M_i = f(P_i'')$. Prin urmare

$$S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f) = \sum_1^n (M_i - m_i)\, aria\ \delta_i \le \sum_1^n \left[(P_i'') - f(P_i') \right] aria\ \delta_i \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{aria\ D} \cdot \sum_1^n aria\ \delta_i = \varepsilon.$$

Cu criteriul lui Darboux rezultă acum integrabilitatea funcției continue *f*.

Definiție. *O mulțime* $A \subset \mathbb{R}^2$ *se spune că este de **măsură Lebesgue nulă** (sau neglijabilă) dacă* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ *un şir* $\{I_n\}_n$ *de intervale deschise bidimensionale care acoperă* A $\left(A \subset \bigcup\limits_n I_n \right)$ *şi astfel încât* $\sum\limits_1^{\infty} aria\ I_n < \varepsilon$.

Teorema 3 *(criteriul lui Lebesgue). O funcție mărginită este integrabilă pe* $D \Leftrightarrow$ *mulțimea punctelor sale de discontinuitate este de măsură Lebesgue nulă.*

Drept consecință, dacă mulțimea punctelor de discontinuitate ale unei funcții mărginite este o curbă netedă pe porțiuni, atunci funcția este integrabilă.

3. Proprietățile integralei duble

Se pot pune în evidență următoarele proprietăți:

1.) $\iint\limits_D dx\,dy = aria\ D$

2.) $f, g\ integr.\ D, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f + \beta g\ integr.\ D$ şi

$$\iint\limits_D (\alpha f + \beta g)\,dx\,dy = \alpha \iint\limits_D f\,dx + \beta \iint\limits_D g\,dx\,dy$$

(proprietatea de liniaritate)

3.) f integr.D, $f \geq 0 \Rightarrow \iint\limits_D f\,dxdy \geq 0$ (proprietatea de pozitivitate)

4.) f, g integr. D, $f \leq g \Rightarrow \iint\limits_D f\,dx\,dy \leq \iint\limits_D g\,dx\,dy$ (proprietatea de monotonie)

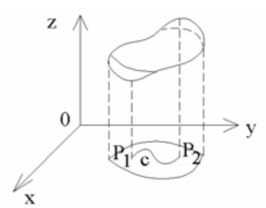
5.) f integr. $D \Rightarrow |f|$ integr. D şi $\left|\iint\limits_D f\,dx\,dy\right| \leq \iint\limits_D |f|\,dx\,dy$

6.) f integr. D şi $m \leq f(P) \leq M \quad \forall\, P \in D \Rightarrow$ $m\; aria\; D \leq \iint\limits_D f\,dx\,dy \leq M\; aria\; D$

7.) f continuă pe $D \Rightarrow \exists\, P_0 \in D$ astfel încât

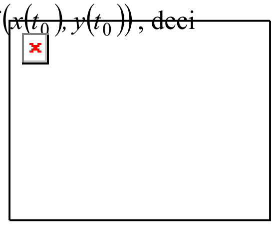
$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = f(P_0)\,aria\;D \qquad \text{(teorema de medie)}$$

Într-adevăr, dacă m şi M sunt marginile funcției continue f pe D şi ele sunt atinse în P_1 respectiv P_2 din D, atunci $f(P_1) = m \leq \dfrac{\iint\limits_D f\,dx\,dy}{aria\;D} = \lambda \leq M = f(P_2)$.



Dacă C este o curbă conținută în D având capetele P_1 şi P_2 şi reprezentarea parametrică $(C): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$, atunci funcția compusă $g(t) = f(x(t), y(t))$ este continuă pe $[\alpha, \beta]$ şi $g(\alpha) = m$, $g(\beta) = M$.

Din proprietatea lui Darboux a funcției g, deoarece $g(\alpha) \leq \lambda \leq g(\beta)$ rezultă că $\exists\; t_0 \in [\alpha, \beta]$ astfel încât $\lambda = g(t_0) = f(x(t_0), y(t_0))$, deci $\exists\; P_0(x(t_0), y(t_0)) \in D$ cu proprietatea din enunț.

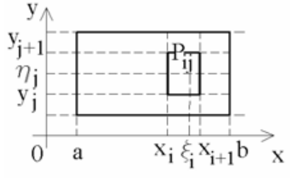


8.) Dacă f este integrabilă pe $D = D_1 \cup D_2$ unde D_1 şi D_2 sunt domenii compacte fără puncte interioare comune, atunci $\iint\limits_D f dxdy = \iint\limits_{D_1} f dxdy + \iint\limits_{D_2} f dxdy$

(proprietatea de aditivitate față de domenii).

4. Calculul integralei duble

În cele ce urmează vom presupune că f este funcție continuă pe D.



1.) Fie $D = [a,b] \times [c,d]$. Fie

$$\Delta' : \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

$$\Delta'' : \quad c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d$$

diviziuni oarecare ale intervalelor $[a,b]$ respectiv $[c,d]$.

Vom considera pentru D diviziunea $\Delta = \{\delta_{ij}\}$

unde $\delta_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_i, y_{i+1}]$ $i = \overline{0, n-1}$, $j = \overline{0, m-1}$

Fie punctele $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$, $\eta_j \in [y_j, y_{j+1}]$, $j = \overline{0, m-1}$. Evident că $P_{ij}(\xi_i, \eta_j) \in \delta_{ij}$ şi că $\nu(\Delta) \to 0 \Leftrightarrow \nu(\Delta') \to 0, \nu(\Delta'') \to 0$.

Cum funcția *f* este integrabilă, avem

$$\sigma_\Delta(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f(P_{ij}) \; aria \; \delta_{ij} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \, \Delta y_j =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{m-1} f(\xi_i, \eta_j) \Delta y_j \right) \Delta x_i$$

$$\Big\downarrow \; \text{când } \nu(\Delta'') \to 0$$

$$F(\xi_i) = \int_c^d f(\xi i \;\;, y) dy$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} F(\xi_i) \Delta x_i$$

$$\Big\downarrow \; \text{când } \nu(\Delta') \to 0$$

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dx \right) dx$$

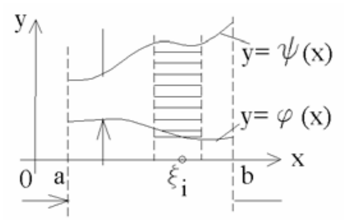
$$\sigma_\Delta(f) \xrightarrow{\text{când } \nu(\Delta) \to 0} \iint_D f(x, y) \, dx \, dy$$

Deci
$$\iint_D f(x, y) dx \, dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy .$$

Analog (sau ținând seama de teorema de integrare a unei integrale cu parametru)

$$\iint_D f(x, y) dx \, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx .$$

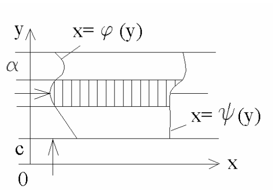
2.) Fie $D \begin{cases} a \le x \le b \\ \varphi(x) \le y \le \psi(x) \end{cases}$ unde φ şi ψ sunt funcții continue pe $[a, b]$ (domeniu simplu în raport cu *Oy*)



În acest caz limitele de integrare la integrala $F(\xi_i)$ nu mai sunt constante ci dependent de ξ_i

$$F(\xi_i) = \int_{\varphi(\xi_i)}^{\psi(\xi_i)} f(\xi_i, y) dy$$

şi $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy .$$



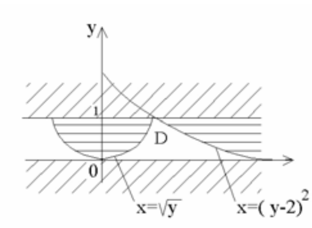
3.) Dacă $D:\begin{cases} c \le y \le d \\ \varphi(y) \le x \le \tau(y) \end{cases}$ cu φ, ψ continue pe $[a,b]$.

(domeniu simplu în raport cu Ox) atunci

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx .$$

Exemplu. Să se calculeze $I = \iint_D \dfrac{2x}{(y-2)^2}\,dxdy$ dacă

$$D = \left\{(x,y) \in R^2 \,\middle|\, 0 \le y \le 1,\, y \le x^2,\, x \le (y-2)^2 \right\}.$$



Soluție. Domeniul D este simplu în raport cu Ox putând fi scris şi astfel:

$$D:\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ \sqrt{y} \le x \le (y-2)^2 \end{cases}$$

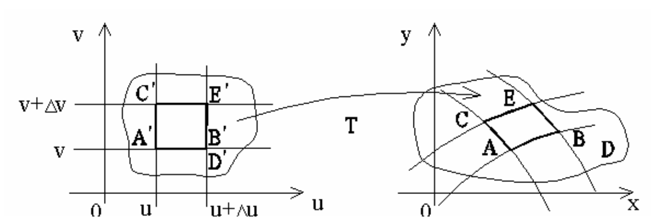
Deci

$$I = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{(y-2)^2} \frac{2x}{(y-2)^2}\,dx = \int_0^1 \frac{dy}{(y-2)^2}\, x^2 \Big|_{\sqrt{y}}^{(y-2)^2} = \int_0^1 \frac{1}{(y-2)^2}\left[(y-2)^4 - y\right]dy =$$

$$= \int_0^1 \left[(y-2)^2 - \frac{y}{(y-2)^2}\right]dy = \frac{(y-2)^3}{3}\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \left[\frac{1}{y-2} + \frac{2}{(y-2)^2}\right]dy = ln\,2 + \frac{4}{3}$$

Schimbarea de variabile la integrala dublă

Fie f o funcție continuă definită pe compactul D din planul xOy şi transformarea regulată: $T:\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ $(u,v) \in D'$.



Corespondența domeniilor este cea din figură.

Evident, funcția compusă $f\left(x(u,v), y(u,v)\right)$ este continuă pe D.

Ne interesează care este legătura dintre elementul de arie $dxdy$ din planul xOy şi $dudv$ din uOv. Rețeaua de curbe coordonate din uOv este $u = const$ şi $v = const$. Avem evident

$$dx = x'_u du + x'_v dv, \quad dy = y'_u du + y'_v dv .$$

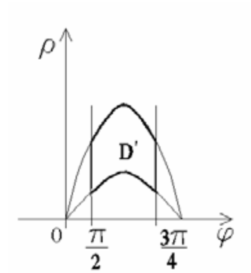
Cum $B' \in v = const$, $C' \in u = const$, rezultă că punctele A, B şi E au coordonatele $A(x,y), B\left(x + x'_u du, y + y'_u du\right), C\left(x + x'_v dv, y + y'_v dv\right)$, de unde rezultă că

$$dx\,dy = 2\, aria\, \Delta\, ABC = 2 \cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x + x'_u du & y + y'_u du & 1 \\ x + x'_v dv & y + y'_v dv & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x'_u du & y'_u du & 0 \\ x'_v dv & y'_v dv & 0 \end{vmatrix} = \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| dudv,$$

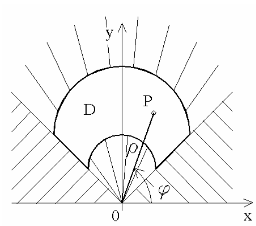
deci $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_D f\left(x(u,v), y(u,v)\right) \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| dudv$.(formula schimbării de variabile).

Exemplu. Să se calculeze $I = \iint\limits_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$ unde

$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| ay \le x^2 + y^2 \le 2ay, x^2 \le y^2 \right\}.$



Soluție.



Făcând transformarea polară, avem

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

$D' : \begin{cases} \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{3\pi}{4} \\ a\sin\varphi \le \rho \le 2a\sin\varphi \end{cases}$ şi iacobianul

$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)} = \rho$, deci

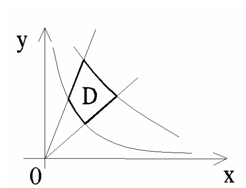
$$I = \iint\limits_{D'} \frac{\rho\cos\varphi}{\rho} \rho d\rho d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos\varphi\, d\varphi \int_{a\sin\varphi}^{2a\sin\varphi} \rho d\rho = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos\varphi \cdot 3a^2 \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{3a^2}{2} \cdot \frac{\sin^3\varphi}{3} \Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = 0$$

5. Aplicații ale integralei duble

Aria unui domeniu plan $\quad aria\ D = \iint\limits_D dxdy$

Exemplu. Să se calculeze aria domeniului D definit de inegalitățile $1 \le xy \le 2$, $x \le y \le 3x$

Soluție. Făcând transformarea $T : \begin{cases} u = xy \\ v = \frac{x}{y} \end{cases}$, domeniul D se



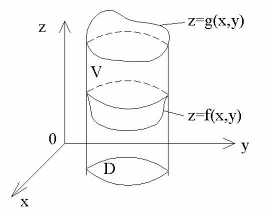
transformă în dreptunghiul $D' : \begin{cases} 1 \le u \le 2 \\ 1 \le v \le 3 \end{cases}$. Avem apoi

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 2\frac{y}{x}$$, de unde

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}}=\frac{x}{2y}=\frac{1}{2v} \ .$$

Prin urmare $aria\, D=\iint\limits_{D} dxdy=\iint\limits_{D'}\frac{1}{2v}dudv=\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{2}du\int\limits_{1}^{3}\frac{dv}{v}=\frac{1}{2}ln\,3$.

Calculul volumelor



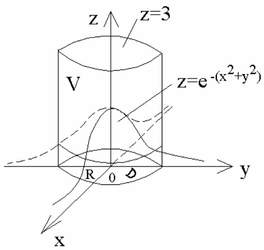
Fie un domeniu $V\subset\mathbb{R}^3$ definit de inegalităţile

$$V:\begin{cases} (x,y)\in D \\ f(x,y)\le z\le g(x,y)\end{cases}$$

unde f şi g sunt funcţii continue pe D.

Cu interpretarea geometrică a integralei duble rezultă că

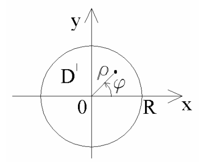
$$vol\,V=\iint\limits_{D}\left[g(x,y)-f(x,y)\right]dxdy\ .$$



Exemplu. Să se calculeze volumul corpului limitat de suprafeţele $z=e^{-\left(x^2+y^2\right)}$, $z=3$ şi $x^2+y^2=R^2$.

Soluţie. Avem

$$\text{vol}V=\iint\limits_{D}\left[3-e^{-\left(x^2+y^2\right)}\right]dxdy=3\iint\limits_{D}dxdy-\iint\limits_{D}e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy=\ldots$$

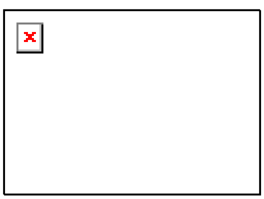


$$T:\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi\end{cases}\qquad D':\begin{cases} 0\le\rho\le R \\ 0\le\varphi\le 2\pi\end{cases}$$

$$\ldots=3aria\,D-\iint\limits_{D'}e^{-\rho^2}\rho d\rho d\varphi=$$

$$=3\pi R^2-\int\limits_{0}^{R}e^{-\rho^2}\rho d\rho\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi=3\pi R^2+\pi\left(e^{-R^2}-1\right)$$

Masa şi centrul de greutate ale unei plăci plane



Dacă D este o placă materială din planul xOy având densitatea superficială $\rho(x,y)$, funcţie continuă, atunci cum masa plăcii

este $\qquad M=\sum m_i=\sum\rho(P_i)aria\,\delta_i$,

rezultă că $\qquad M=masa\,D=\iint\limits_{D}\rho(x,y)dxdy$.

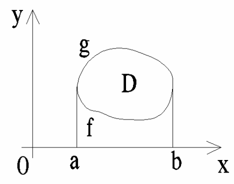
Coordonatele centrului de greutate $G(x_G,y_G)$ al plăcii sunt date evident de formulele

$$x_G = \frac{1}{M}\iint_D x\rho(x,y)\,dxdy, \quad y_G = \frac{1}{M}\iint_D y\rho(x,y)\,dxdy .$$

Dacă placa este omogenă $\left(\rho = \text{const}\right)$, atunci

$$x_G = \frac{1}{\text{aria } D}\iint_D xdxdy, \quad y_G = \frac{1}{\text{aria } D}\iint_D ydxdy .$$

Presupunând că domeniul $D: \begin{cases} x \in [a,b] \\ f(x) \le y \le g(x) \end{cases}$ se află în întregime de o parte a axei Ox, să observăm că ultima formulă poate fi scrisă sub forma



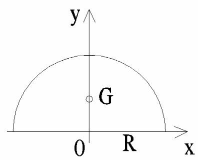
$$\text{aria } D \cdot y_G = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} ydy = \frac{1}{2}\int_a^b g^2(x)\,dx - \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,dx .$$

Amplificând cu 2π se obține volumul corpului de rotație a domeniului D în jurul axei Ox şi anume

$$v = \text{aria } D \cdot 2\pi y_G$$

S-a ajuns astfel la ***a doua teoremă a lui Guldin***: *dacă un domeniu plan se roteşte în jurul unei axe din planul său şi care nu îl intersectează, atunci volumul corpului de rotație astfel obținut este egal cu produsul dintre aria domeniului şi lungimea cercului descris de centrul de greutate.*

Exemplul 1. Cu ajutorul teoremei lui Guldin putem rapid calcula centrul de greutate al semicercului de rază R. Astfel

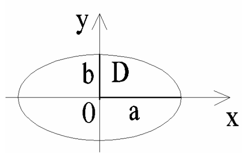


$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi R^2}{2} \cdot 2\pi y_G$$

de unde $$y_G = \frac{4}{3\pi} R = 0{,}425 R .$$

Exemplul 2. Să se determine coordonatele centrului de greutate al plăcii plane omogene

$$D = \left\{ (x,y) \middle| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1, \ x, y \ge 0 \right\}.$$



Soluție. Elipsa fiind un cerc de rază 1 deformat $\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\right)$ vom folosi transformarea polară generalizată:

$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi \\ y = b\rho\sin\varphi \end{cases}$ pentru care $\dfrac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)} = ab\rho$. În acest caz $D': \begin{cases} 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$.

Astfel $\text{aria } D = \iint_D dxdy = \iint_{D'} ab\rho d\rho d\varphi = ab\int_0^1 \rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \pi\dfrac{ab}{4}$,

$$\iint_D x\,dx\,dy = \iint_{D'} a\rho\cos\varphi\, ab\rho\, d\rho\, d\varphi = a^2 b\int_0^1 \rho^2 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi = \frac{a^2 b}{3}$$ şi $x_g = \frac{4a}{3\pi}$. Având în vedere forma domeniului rezultă $G\left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{3\pi}\right)$.

Momentele de inerție ale unei plăci plane

Momentele de inerție ale plăcii D având densitatea superficială $\rho(x, y)$, față de originea axelor şi față de axele de coordonate sunt date de formulele:

$$I_O = \iint_D \left(x^2 + y^2\right)\rho(x, y)\, dxdy, \qquad I_{Ox} = \iint_D y^2\rho(x, y)\, dxdy, \qquad I_{Oy} = \iint_D x^2\rho(x, y)\, dxdy.$$

Exemplu. Să se calculeze momentul de inerție al discului de rază R în raport cu centrul său, în ipoteza că este omogen.

Soluție. Dacă densitatea discului este d, atunci avem

$$I_O = d\iint_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy = d\iint_{D'} \rho^2 \rho\, d\rho\, d\varphi = d\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{\pi R^4}{2} d$$

.

Exerciții

1.) Să se calculeze $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}y}^{\frac{\pi}{2}\sqrt{y}} \frac{\sin x}{x} dx$ schimbând ordinea de integrare. R : $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}$

2.) Să se calculeze

a) $\iint_D \frac{dx\, dy}{6x + y + 9}$, unde $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2|x| - 1 \le y \le x^2\right\}$ R : $3\ln 2 - 2$

b) $\iint_D x \sin(x + y)\, dx\, dy$, unde $D = [0, \pi] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ R : $\pi - 2$

c) $\iint_D \frac{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}}{x^2 + y^2} dx\, dy$, dacă $D = \left\{(x, y) \in R^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}$

d) $\iint_D \left(x^2 + y^2 - 4x - 4y + 10\right) dx\, dy$, unde $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 \le 0\right\}$

R : $\frac{17\pi}{2}$

e) $\iint_D \frac{dx\, dy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$ unde $D = \left\{(x, y) \in R^2 \,\middle|\, 2x \le x^2 + y^2 \le 4x,\ 2y \le x^2 + y^2 \le 6y\right\}$ R : $\frac{1}{12}$

f) $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)} \sin\left(x^2+y^2\right) dx\, dy$

3.) Să se calculeze ariile domeniilor limitate de

a) elipsa $(x-2y+3)^2+(3x+4z+1)^2=100$ R : $10\pi \cdot u=x-2y$, $v=3x+4y$

b) cercurile $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$ şi dreptele $y=x,\ y=0$ R : $3\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)$

c) parabolele $y^2=x,\ y^2=2x,\ x^2=ay,\ x^2=2ay$, $a>0$ R : $\frac{a}{3}$

4.) Să se calculeze volumul corpului limitat de suprafețele

a) R : $\frac{9}{2}a^4$

$z=x^2+y^2$, $xy=a^2$, $xy=2a^2$, $y=\frac{x}{2}$, $y=2x$

b) $x^2+y^2-az=0$, $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$, $z=0$, $a>0$ R : $\frac{\pi a^3}{8}$

5.) Să se determine centrul de greutate al plăcii omogene limitate de astroida $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ şi axele Ox şi Oy R: $x_6=y_6=\frac{256}{315}\frac{a}{\pi}$

6.) Să se calculeze momentele de inerție în raport cu axele de coordonate ale plăcii omogene mărginite de curba $x^2+y^2=ay$ $(a>0)$. R : $I_x=\frac{5\pi a^4}{64}d,\ I_y=\frac{\pi a^4}{64}d$

III. INTEGRALA TRIPLĂ

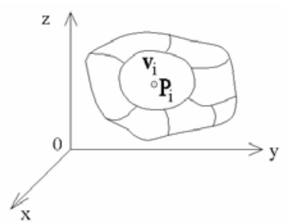
1. Definiția integralei triple

Integrala triplă a unei funcții de trei variabile pe un domeniu compact din $\mathbb{R}^3$ se introduce absolut analog integralei duble.

Noțiunea de integrabilitate, diversele criterii de integrabilitate, proprietățile funcțiilor integrabile, se transpun cu uşurință de la funcțiile de două la cele de trei variabile.

Pentru a nu relua întreaga teorie şi mai ales pentru a simplifica expunerea, ne vom limita la cazul funcțiilor continue.

Fie V un compact din $\mathbb{R}^3$ şi $\Delta = \{v_i\}_1^n$ o diviziune a sa, obținută prin împărțirea lui V într-un număr finit de compacte cu ajutorul unor suprafețe, neavând puncte interioare comune. Norma diviziunii Δ este $\nu(\Delta) = \max\limits_{i=\overline{1,n}} d(v_i)$, $d(v_i)$ fiind diametrul mulțimii v_i.



Fie $f : V \to \mathbb{R}$ o funcție continuă, $\Delta = \{v_i\}^n$, o diviziune a lui V, punctele $P_i(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i) \in v_i$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ şi suma integrală
$$\sigma_\Delta(f) = \sum_1^n f(P_i)\, vol\, v_i = \sum_1^n f(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)\, vol\, v_i\,.$$

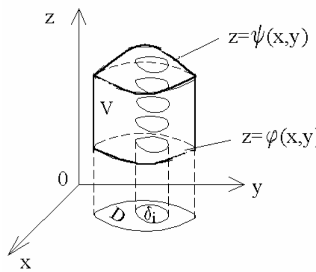
Dacă $f \geq 0$ reprezintă densitatea unui corp ce ocupă domeniul V, atunci $\sigma_\Delta(f)$ aproximează masa corpului, aproximația fiind cu atât mai bună cu cât diviziunea Δ este mai fină.

Numim ***integrala triplă a funcției f pe V***, numărul $$I = \lim_{\nu(\Delta)\to 0} \sigma(f).$$

În cazul funcției continue f, această limită există, este finită şi nu depinde de alegerea punctelor P_i. Integrala triplă se notează $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$, $\iiint\limits_V f\,dx\,dy\,dz$ *sau* $\iiint\limits_V f\,d\omega$.

2. Calculul integralei triple

Fie V un domeniu simplu în raport cu axa Oz adică un domeniu definit de inegalitățile
$$V : \begin{cases} (x,y) \in D \\ \varphi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y) \end{cases}$$
unde φ şi ψ sunt funcții continue pe D.

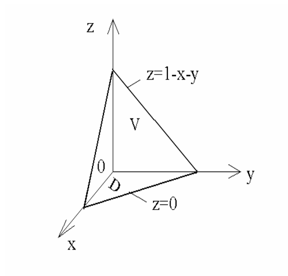


Procedând ca în cazul integralei duble se obține următoarea formulă de calcul
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_D dx\,dy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

Prin urmare calculul integralei triple se reduce la calculul unei integrale duble şi a unei integrale simple.

Exemplu. Să se calculeze $I = \iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}$ dacă domeniul V este limitat de planele $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$.

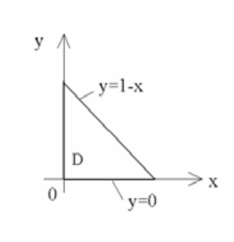
Soluție.



Deoarece $V:\begin{cases}(x,y)\in D\\ 0\le z\le 1-x-y\end{cases}$ avem

$$I=\iint\limits_D dx\,dy\int_0^{1-x-y}\frac{dz}{(1+x+y+z)^3}=-\frac{1}{2}\iint\limits_D \frac{1}{(1+x+y+z)^2}\Bigg|_0^{1-x-y}dx\,dy=$$

$$=-\frac{1}{2}\iint\limits_D\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{(1+x+y)^2}\right)dx\,dy=-\frac{1}{8}\,aria\,D+\frac{1}{2}\iint\limits_D\frac{dx\,dy}{(1+x+y)^2}=$$



$$=-\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{dy}{(1+x+y)^2}=-\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\int_0^1\left[-\frac{1}{1+x+y}\right]_0^{1-x}dy=$$

$$=-\frac{1}{16}-\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1+x}\right)dx=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}.$$

Schimbarea de variabile la integrala triplă.

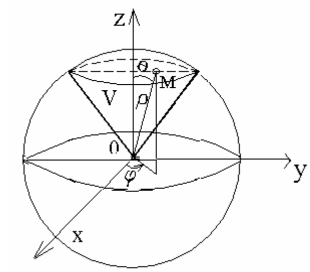
Dacă domeniul compact V este imaginea domeniului V' prin transformarea regulată $T:\begin{cases}x=x(u,v,w)\\ y=y(u,v,w)\\ z=z(u,v,w)\end{cases}$ $(u,v,w)\in V'$ iar $f(x,y,z)$ este o funcție continuă pe V, atunci are loc formula

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{V'} f\big(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\big)\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right|du\,dv\,dw$$

numită formula schimbării de variabile la integrarea triplă.

Exemplu. Să se calculeze $I=\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz$ unde

$V=\left\{(x,y,z)\in R^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2\le 8,\ x^2+y^2\le z^2,\ z\le 0\right\}.$



Soluție. Făcând transformarea sferică:

$\begin{cases}x=\rho\sin\theta\cos\varphi\\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi\\ z=\rho\cos\theta\end{cases}$, avem $\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,\theta)}=\rho^2\sin\theta$, și $V':\begin{cases}0\le\rho\le 2\sqrt{2}\\ 0\le\varphi\le 2\pi\\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\end{cases}$.

Astfel $\quad I=\iiint\limits_{V'}\rho\cos\theta\cdot\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta=\int_0^{2\sqrt{2}}\rho^2\,d\rho\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2\theta}{2}d\theta=8\pi.$

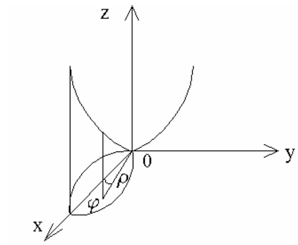
3. Aplicații ale integralei triple

Calculul volumelor Faptul că $vol\,V = \iiint_V dx\,dy\,dz$ rezultă din aceea că orice sumă integrală a funcției $f(x,y,z) \equiv 1$ este egală cu $vol\,V$.

Exemplu. Să se calculeze volumul din cilindrul $x^2 + y^2 = 2ax$ cuprins între paraboloidul $x^2 + y^2 = 2az$ și planul xOy.

Soluție. Cu transformarea cilindrică:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \text{ avem } \frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,z)} = \rho \text{, și } V': \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \rho \le 2a\cos\varphi \\ 0 \le z \le \frac{\rho^2}{2a} \end{cases}$$. Prin urmare



$$\mathrm{vol}V = \iiint_V dx\,dy\,dz = \iiint_{V'} \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} \rho\,d\rho \int_0^{\frac{\rho^2}{2a}} dz =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} \rho\,d\rho \cdot \frac{\rho^2}{2a} = \frac{1}{2a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{4} \cdot 16a^4 \cos^4\varphi = \frac{3\pi}{4} a^3.$$

Masa şi centrul de greutate ale unui corp

Dacă $\rho(x,y,z)$ este densitatea unui corp ce ocupă domeniul $V \subset \mathbb{R}^3$, atunci masa corpului este dată de $M = \iiint_V \varphi(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ iar coordonatele centrului de greutate de:

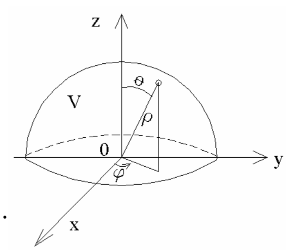
$$x_G = \frac{1}{M}\iiint_V x\rho(x,y,z)dx\,dy\,dz\,,\ y_G = \frac{1}{M}\iiint_V y\,\rho(x,y,z)dx\,dy\,dz\,,\ z_G = \frac{1}{M}\iiint_V z\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,.$$

Exemplu. Să se calculeze centrul de greutate al jumătății superioare a sferei de rază R cu centrul în origine, dacă densitatea sa este constantă.

Soluție. Corpul fiind omogen, $z_G = \frac{1}{\mathrm{vol}V}\iiint_V z\,dx\,dy\,dz$. Avem apoi $vol V = \frac{2\pi}{3}R^3$ și

$$\iiint_V z\,dx\,dy\,dz = \iiint_{V'} \rho\cos\theta \cdot \rho^2 \sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3\,d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin 2\theta\,d\theta = \frac{\pi}{4}R^4, \text{ de unde } z_G = \frac{3}{8}R.$$

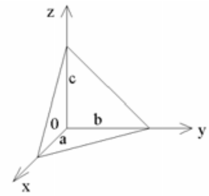


În virtutea simetriei corpului V, centrul de greutate este $G\left(0,0,\frac{3}{8}R\right)$.

Momentele de inerție ale unui corp având densitatea $\rho(x,y,z)$ şi ocupând domeniul V sunt date de formule ca: $I_0 = \iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$,

$I_{0z} = \iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$, $\qquad I_{x0y} = \iiint\limits_V z^2\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$.

Exemplu. Să se calculeze momentele de inerție ale piramidei omogene limitate de planele de coordonate şi planul $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.



Soluție. Avem $\rho = \text{const.}$, deci

$$I_{xOy} = \rho\iiint\limits_V z^2\,dx\,dy\,dz = \rho\int_0^a dx\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} dy\int_0^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)} z^2\,dz = \frac{abc^3}{60}\rho.$$

Prin urmare

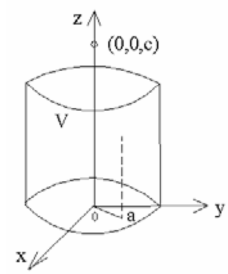
$$I_{yOz} = \frac{a^3bc}{60}\rho,\ I_{zOx} = \frac{ab^3c}{60}\rho \text{ şi } I_O = \frac{abc}{60}\left(a^2+b^2+c^2\right)\rho .$$

Potențialul newtonian

Pentru un punct material de masă *m,* potențialul newtonian sau gravitațional se defineşte prin formula U=m/r, unde *r* este distanța punctului material până la punctul din spațiu în care se consideră potențialul.

În cazul unui corp material care ocupă domeniul $V\subset\mathbb{R}^3$ şi are densitatea $\rho(x,y,z)$, potențialul newtonian în punctul $P_0(x_0,y_0,z_0)$ este $U(P_0) = \iiint\limits_V \frac{\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$

Exemplu. Să se calculeze potențialul newtonian al cilindrului omogen definit de inegalitățile $x^2+y^2\le a^2,\ 0\le z\le h$ într-un punct de pe axa cilindrului.



Soluție. Fie $c>h$ şi densitatea μ. Avem

$$U(0,0,c) = \mu\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-c)^2}} =$$

$$= \mu\int_0^{2r} d\varphi\int_0^h dz\int_0^a \frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{\rho^2+(z-c)^2}} = 2\pi\mu\int_0^h\left\{\sqrt{a^2+(z-c)^2}-|z-c|\right\}dz =$$

$$= \pi\mu\left[\,a^2\ln\frac{(h-c)+\sqrt{(h-c)^2+a^2}}{\sqrt{a^2+c^2}-c}+(h-c)\sqrt{(h-c)^2+a^2}+c\sqrt{a^2+c^2}+h(h-2c)\right]\bullet$$

Exerciții

1.) Să se calculeze

a) $\iiint\limits_V \left[x^2+y^2+(z-2)^2\right]^{-1/2} dx\,dy\,dz$ unde V este cilindrul $x^2+y^2\le 1,\ -1\le z\le 1$

b) $\iiint\limits_V xyz\ sin\,(x+y+z)\,d\omega$ unde V este limitat de planele $x+y+z=\frac{\pi}{2}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$

c) $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ d\omega$ unde $V=\left\{(x,y,z)\in R^3 \middle| x^2+y^2+z^2 \le z\right\}$ R : $\frac{\pi}{10}$

d) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int\limits_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\ dz$ trecând la coordonate cilindrice R : $\frac{8}{9}a^2$

e) $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\ge 1} \frac{dx\,dy\,dz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}$ R : $\frac{4\pi}{3}$; f) $\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} \frac{dx\,dydz}{\sqrt{(1+x+y+z)^7}}$ R : $\frac{8}{15}$

2.) Să se calculeze volumul corpului mărginit de planele

$$x+y+z=a\ ,\ x+y+z=2a\ ,\ x+y=z\ ,\ x+y=2z\ ,\ y=x,\ y=3x \qquad \text{R: } \frac{49}{864}a^3$$

3.) Să se calculeze volumul corpului mărginit de suprafața $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=a^3x$ R : $\frac{\pi a^3}{3}$

4.) Să se calculeze volumul corpului limitat de sfera $x^2+y^2+z^2=4$ şi paraboloidul $x^2+y^2=3\text{z}$ (interior paraboloidului). R : $\frac{19\pi}{6}$

5.) Să se determine centrul de greutate al corpului material omogen care ocupă domeniul

$V: x,y,z\ge 0,\ \frac{x^2}{\text{a}^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$. R : $G\left(\frac{3}{8}a,\frac{3}{b}b,\frac{3}{8}c\right)$

6.) Să se calculeze momentele de inerție în raport cu planele de coordonate ale corpului material care ocupă domeniul mărginit de suprafețele $\frac{a^2}{x^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$, $z=c\ >0$ şi având densitatea d = const.

R : $I_{x0y}=\frac{\pi\, abc^3 d}{5}$, $I_{y0z}=\frac{\pi\ a^3bc\ d}{20}$, $I_{x0z}=\frac{\pi\ ab^3c\ d}{20}$

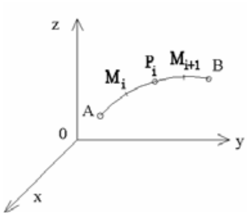
7.) Să se calculeze masa paralelipipedului $a\le x\le \text{a}\quad 0\le y\le b$, $0\le z\le c$ dacă densitatea în fiecare punct (x,y,z) este dată de $\rho\,(x,y,z)=x+y+z$ R : $\frac{abc}{2}(a+b+c)$

8.) Să se calculeze momentul de inerție în raport cu originea a corpului de densitate $\rho=1$ care ocupă domeniul $V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \middle| x^2+y^2+z^2\le 2az\ ,\ x^2+y^2+z^2\le 3a^2,\ a>0\right\}$. R : $\frac{\pi a^5}{3}\left(18\sqrt{3}-\frac{97}{6}\right)$

IV. INTEGRALE CURBILINII

Integralele curbilinii se introduc pentru funcții definite pe un arc de curbă.

Fie C o curbă simplă din $\mathbb{R}^3$, netedă (sau netedă pe porțiuni) şi orientată, având extremitățile A şi B.



Fie $\Delta = \{M_i\}_0^n$, unde $A = M_0 < M_1 <\ldots< M_n = B$, o diviziune a ei prin punctele $M_i \in C$.

Norma $\nu(\Delta)$ a diviziunii Δ este cea mai mare dintre lungimile coardelor M_iM_{i+1}. Dacă $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \quad t\in[\alpha,\beta] \\ z = z(t) \end{cases}$ cu $x, y, z \in C^1[\alpha,\beta]$ este reprezentarea parametrică a curbei C, atunci evident că diviziunii Δ îi corespunde diviziunea $\Delta = \{t_i\}_0^n$ a segmentului $[\alpha,\beta]$ unde $\alpha = t_0 < t_1 <\ldots< t_n = \beta$ şi $M_i(t = t_i)$.

Să observăm că $\nu(\Delta) \to 0 \Leftrightarrow \nu(\Delta') \to 0$. Într-adevăr, cu teorema creşterilor finite avem

$$|M_iM_{i+1}| = \sqrt{[x(t_{i+1}) - x(t_i)]^2 + [y(t_{i+1})]^2 + [z(t_{i+1}) - z(t_i)]^2} =$$

$$= \sqrt{[\dot{x}(\xi_i)]^2 + [\dot{y}(\eta_i)]^2 + [\dot{z}(\varsigma_i)]^2}\,(t_{i+1} - t_i) = \lambda_i(t_{i+1} - t_i)$$

unde $\xi_i, \eta_i, \varsigma_i \in [t_i, t_{i+1}]$ $\quad i = \overline{1,n-1}$. Notând cu $m = \min\limits_{i=\overline{0,n-1}} \lambda_i$, $\quad M = \max\limits_{i=\overline{0,n-1}} \lambda_i$, avem

$$\nu(\Delta) = \max M_iM_{i+1} \le M \max(t_{i+1} - t_i) = M\nu(\Delta') \text{ şi}$$

$$\nu(\Delta') = \max(t_{i+1} - t_i) \le \frac{1}{m} \max M_iM_{i+1} = \frac{1}{m}\nu(\Delta).$$

1. Integrala curbilinie în raport cu lungimea arcului (de speța I-a)

Fie funcția continuă $F : C \to \mathbb{R}, \Delta = \{M\}_0^n$ o diviziune a curbei C, câte un punct P_i aparținând arcului $\overset{\frown}{M_i M_{i+1}}$ şi suma integrală $\sigma_\Delta(F) = \sum\limits_0^{n-1} F(P_i)l_i$ unde l_i este lungimea arcului M_iM_{i+1}.

În cazul în care F reprezintă densitatea liniară a firului material având ca imagine curba C, $\sigma_\Delta(F)$ aproximează masa firului.

Prin definiție, integrala curbilinie în raport cu lungimea arcului a funcției F de-a lungul arcului AB este $\int\limits_{AB} F\,dl = \lim\limits_{\nu(\Delta)\to 0} \sigma_\Delta(F)$. Se foloseşte şi notația $\int\limits_C F\,dl$.

Se poate demonstra că în ipoteza făcută (curba netedă şi funcția F continuă) limita de sus există, este finită şi nu depinde de alegerea punctelor intermediare P_i.

Proprietăţi ale $\int_C F\,dl$.

1.) $\int_{AB} F\,dl$ nu depinde de sensul de parcurs al curbei, adică $\int_{AB} F\,dl = \int_{BA} F\,dl$.

2.) $\int_{AB} (\alpha F + \beta G)\,dl = \alpha \int_{AB} F\,dl + \beta \int_{AB} G\,dl \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ (liniaritatea)

3.) $\int_{AB} F\,dl = \int_{AC} F\,dl + \int_{CB} F\,dl$ dacă $C \in \overset{\frown}{AB}$ (aditivitatea faţă de arce)

Calculul $\int_C F\,dl$.

Evident că dacă $P_i(\tau_i) \in M_i M_{i+1}$, atunci $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$. Are loc aproximarea

$$\sigma_\Delta(F) = \sum F(P_i)\,l_i \approx \sum F(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i))\sqrt{\dot{x}^2(\xi_i) + \dot{y}^2(\eta_i) + \dot{z}^2(\varsigma_i)}(t_{i+1} - t_i) \approx$$
$$\approx \sum F(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i))\sqrt{\dot{x}^2(\tau_i) + \dot{y}^2(\tau_i) + \dot{z}^2(\tau_i)}(t_{i+1} - t_i)$$

unde $\xi_i, \eta_i, \varsigma_i, \tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$. Aceasta rezultă din continuitatea uniformă a funcţiei $g(u,v,w) = \sqrt{\dot{x}^2(u) + \dot{y}^2(v) + \dot{z}^2(w)}$ pe compactul $[\alpha,\beta]\times[\alpha,\beta]\times[\alpha,\beta]$, precum şi din mărginirea funcţiei $F(x(t), y(t), z(t))$ pe $[\alpha,\beta]$. Într-adevăr, $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \eta(\varepsilon)$ astfel încât oricare ar fi punctele $P'(u',v',w')$, $P''(u'',v'',w'')$ cu $|u'-u''|, |v'-v''|, |w'-w''| < \eta$ să avem

$|g(u',v',w') - g(u'',v'',w'')| < \dfrac{\varepsilon}{\beta - \alpha}$. Atunci, dacă $\nu(\Delta') < \eta$, rezultă

$$\left|\sum \left[F(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i))\,g(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i) - F(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i))\,g(\tau_i, \tau_i, \tau_i)\,\Delta t_i\right]\right| \le$$
$$\le \sum |F(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i))|\,|g(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i) - g(\tau_i, \tau_i, \tau_i)|\,(t_{i+1} - t_i) \le$$
$$\le M \sum \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha}(t_{i+1} - t_i) = M\varepsilon.$$

Funcţia $F(x,y,z)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$ fiind continuă pe $[\alpha,\beta]$, deci integrabilă, observăm că trecând la limită $\sigma_\Delta(F)$ când $\nu(\Delta) \to 0$ (echivalent cu $\nu(\Delta') \to 0$), obţinem formula de calcul a integralei curbilinii de prima speţă şi anume

$$\int_C F\,dl = \int_\alpha^\beta F(x(t), y(t), z(t))\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt.$$

Observaţii:

1.) Forma diferenţială $dl = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ se numeşte ***element de arc al curbei*** *C*.

2.) Formula de calcul trebuie adoptată pentru diferitele reprezentări ale curbei care poate fi şi plană.

Exemplu. Să se calculeze $I = \int_C xy^2 z dl$ de-a lungul curbei $C: x = t,\, y = \frac{1}{3}\sqrt{8t^3},\, z = \frac{t^2}{2}$ între punctele $A(0,0,0)$ şi $B\left(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

Soluție. Evident că $t \in [0,1]$. Avem apoi $\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = \sqrt{2t} \\ \dot{z} = t \end{cases} \Rightarrow dl = \sqrt{1 + 2t + t^2}\, dt = |1+t|\, dt = (1+t) dt$

şi deci $$I = \int_0^1 t \cdot \frac{8t^3}{9} \cdot \frac{t^2}{2}(1+t)\, dt = \frac{4}{9}\int_0^1 t^6 (t+1)\, dt = \frac{5}{42}.$$

Aplicații

Lungimea unui arc de curbă

Este evident că lungimea curbei C este dată de formula $L = \int_C dl$.

Masa şi centrul de greutate ale unui fir material

Dacă densitatea $\rho(x, y, z)$ a firului material, imagine a curbei simple C este funcție continuă, atunci masa firului este dată de $M = \int_C \rho(x,y,z)\, dl$, iar centrul de greutate G are coordonatele $x_G = \frac{1}{L}\int_C x dl,\, y_G = \frac{1}{L}\int_C y dl,\, z_G = \frac{1}{L}\int_C z dl,$ unde L este lungimea curbei.

Momentele de inerție ale unui fir material de densitate $\rho(x, y, z)$ se calculează cu formule ca: $I_0 = \int_C \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\rho(x,y,z)\, dl$,

$$I_{xOy} = \int_C z^2 \rho(x,y,z)\, dl, \quad I_{Oz} = \int_C \left(x^2 + y^2\right)\rho(x,y,z)\, dl$$

Exemple.

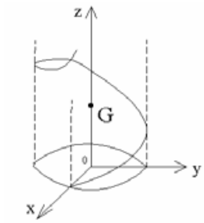
1.) Să se calculeze masa firului material care are ca imagine arcul de parabolă $y = \frac{x^2}{2}$, $x \in [0,1]$ şi densitatea liniară $\rho(x, y) = 1 + x$.

Soluție. Masa este dată de $M = \int_C (1+x)\, dl$, iar $dl = \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \sqrt{1 + x^2}\, dx$, deci

$$M = \int_0^1 (1+x)\sqrt{1+x^2}\, dx = \int_0^{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} (1 + \operatorname{sh} u)\operatorname{ch}^2 u\, du = \frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \frac{7\sqrt{2}-2}{6}.$$

2.) Să se determine centrul de greutate al unei spire a elicei:
$x = a\cos t,\, y = a\sin t,\, z = bt, \quad t \in [0, 2\pi]$ ştiind că densitatea sa liniară este constantă:

Soluție. Din $\dot{x} = -a\sin t, \dot{y} = a\cos t, \dot{z} = b$ rezultă $dl = \sqrt{a^2+b^2}\,dt$. Urmează că



$$L = \int_C dl = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2+b^2}\,dt = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}$$

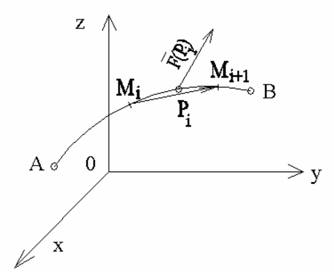
$$\int_C x\,dl = \int_0^{2\pi} a\cos t \cdot \sqrt{a^2+b^2}\,dt = 0\,,\ \int_C y\,dl = \int_0^{2\pi} a\sin t \cdot \sqrt{a^2+b^2}\,dt = 0$$

$$\int_C z\,dl = \int_0^{2\pi} bt \cdot \sqrt{a^2+b^2}\,dt = 2\pi b\sqrt{a^2+b^2}$$, şi deci $G(0,0,b\pi)$, rezultat evident.

2. Integrala curbilinie în raport cu coordonatele (de speța a II-a)

Vom presupune de data aceasta că pe curba *C* este definită funcția vectorială continuă $\overline{F} : C \to R^3$ unde $\overline{F}(P) = X(P)\overline{i} + Y(P)\overline{j} + Z(P)\overline{k} \quad P \in C$.

Dacă $\Delta = \{M_i\}_0^n$ este o diviziune a curbei *C* şi $P_i \in M_i M_{i+1}$, să considerăm suma



$$\sigma_\Delta\left(\overline{F}\right) = \sum_0^{n-1} \overline{F}(P_i) \cdot \overrightarrow{M_i M_{i+1}} =$$

$$= \sum_0^{n-1} \left(X(P_i)\Delta x_i + Y(P_i)\Delta y_i + Z(P_i)\Delta z_i \right)$$

Dacă $\overline{F}$ este o forță ce acționează de-a lungul curbei *C*, atunci $\sigma_\Delta\left(\overline{F}\right)$ reprezintă cu aproximație lucrul mecanic efectuat de ea.

Integrala curbilinie a funcției $\overline{F}$ de-a lungul curbei *C* (integrala de speța a doua) se introduce ca fiind $\int_C X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \lim_{\nu(\Delta)=0} \sigma_\Delta\left(\overline{F}\right)$. Ea se notează şi $\int_C \overline{F} \cdot d\overline{r}$ având în vedere că dacă $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$, atunci $d\overline{r} = dx\,\overline{i} + dy\,\overline{j} + dz\,\overline{k}$.

Limita de sus, în condițiile impuse curbei de a fi netedă sau netedă pe porțiuni şi funcției $\overline{F}$ de a fi continuă, există, este finită şi nu depinde de punctele intermediare P_i .

Observații

1.) Analog se defineşte $\int_C X\,dx + Y\,dy$ unde *C* este o curbă din plan.

2.) Integrala curbilinie a funcției vectoriale $\overline{F}$ de-a lungul curbei închise *C* se numeşte ***circulația vectorului*** $\overline{F}$ prin conturul închis *C* şi se notează $\Gamma = \oint_C \overline{F}\,d\overline{r}$.

Proprietăți:

1.) $\int_{AB} \overline{F} \cdot d\overline{r} = -\int_{BA} \overline{F} \cdot d\overline{r}$;

2.) $\int\limits_{AB} \left(\alpha\overline{F}+\beta\overline{G}\right)\cdot d\overline{r} = \alpha \int\limits_{AB} \overline{F}\cdot d\overline{r} + \beta \int\limits_{AB} \overline{G}\cdot d\overline{r} \qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$;

3.) $\int\limits_{AB} \overline{F}\cdot d\overline{r} = \int\limits_{AC} \overline{F}\cdot d\overline{r} + \int\limits_{CB} \overline{F}\cdot d\overline{r} \qquad \forall\, C\in \overset{\frown}{AB}$.

Calculul $\int\limits_{AB} \overline{F}\cdot d\overline{r}$ **.**

În cazul particular în care $\overline{F}=X\,\overline{i}$, avem

$\sigma_{\Delta}(F)=\sum X\,P_i\left[x\left(t_{i+1}\right)-x(t_i)\right]=\sum X\,(P_i)\,\dot{x}(\xi_i)\left(t_{i+1}-t_i\right)$, unde $\xi_i\in\left[t_i,t_{i+1}\right]$.

Având în vedere că $\int\limits_{C} X\,dx$ nu depinde de alegerea punctelor P_i , vom alege

$P_i\,(\xi_i)\in M_iM_{i+1}$, şi vom avea

$$\sigma_{\Delta}\left(X\,\overline{i}\right)=\sum X\left(x(\xi_i),y(\xi_i),z(\xi_i)\right)\dot{x}(\xi_i)\left(t_{i+1}-t_i\right)$$

$$\downarrow\ \nu(\Delta)\to 0 \qquad\qquad \downarrow\ \nu(\Delta')\to 0$$

$$\int\limits_{C} X\,(x,y,z)\,dx \quad = \quad \int\limits_{\alpha}^{\beta} X\left(x(t),y(t),z(t)\right)\dot{x}(t)\,dt$$

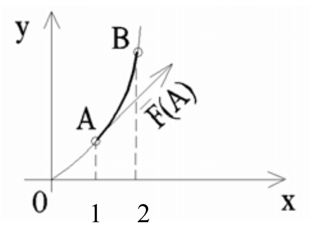
Ca urmare formula de calcul a integralei curbilinii în raport cu coordonatele este

$$\int\limits_{C} X\left(x,y,z\right)dx+Y\left(x,y,z\right)dy+Z\left(x,y,z\right)dz=$$

$$=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left\{X\left(x(t),y(t),z(t)\right)\dot{x}(t)+Y\left(x(t),y(t),z(t)\right)\dot{y}(t)+Z\left(x(t),y(t),z(t)\right)\dot{z}(t)\right\}dt.$$

Aplicații

1.) Să se calculeze lucrul mecanic prestat de forța $\overline{F}\,(x,y)=2x\overline{i}+3y\overline{j}$ în deplasare pe arcul $\overset{\frown}{AB}$ al parabolei : $y=x^2$ de la $A\left(1,1\right)$ la $B\left(2,4\right)$.

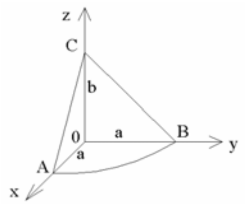


Soluție. De-a lungul arcului $\overset{\frown}{AB}$ a cărui reprezentare explicită este $y=x^2$, $x\in\left[1,2\right]$ avem $dy=2x\,dx$, deci lucrul mecanic va fi

$$L = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \overline{F}\cdot d\overline{r} = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} 2x\,dx+3y\,dy=\int\limits_{1}^{2}\left(2x+3x^2\cdot 2x\right)dx=25{,}5$$

2.) Să se calculeze circulația vectorului $\overline{F}=x^2\overline{i}+xy\overline{j}-yz\overline{k}$ în conturul închis $ABCA$ unde $A\left(a,0,0\right), B\left(0,a,0\right), C\left(0,0,b\right)$, $\overset{\frown}{AB}$ este un arc de cerc, $\overset{\frown}{CA}$ este arc de elipsă.

Soluție. Avem



$$\Gamma = \oint_{ABCA} \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int_{ABCA} x^2 dx + xy\, dy - yz\, dz = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_2} .$$

Punând în evidență reprezentările parametrice ale celor trei arce avem :

$$(C_1): \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = 0 \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \begin{cases} dx = -a \sin t\, dt \\ dy = a \cos t\, dt \\ dz = 0 \end{cases}$$

şi $\displaystyle\int_{C_1} \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-a^3 \cos^2 t \sin t + a^3 \sin t \cos^2 t\right) dt = 0$,

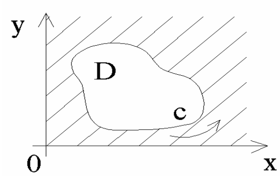
$$(C_2): \begin{cases} x = 0 \\ y = a\left(1 - \dfrac{z}{b}\right) \end{cases} \quad z \in [0, b] \Rightarrow \begin{cases} dx = 0 \\ dy = -\dfrac{a}{b} dz \end{cases} \quad \text{şi} \quad \int_{C_2} \overline{F} \cdot d\,\overline{r} = -\int_0^b a\left(1 - \frac{z}{b}\right) z\, dz = -\frac{ab^2}{6}$$

$$(C_3): \begin{cases} x = a \sin t \\ y = 0 \\ z = b \cos t \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \begin{cases} dx = a \cos t\, dt \\ dy = 0 \\ dz = -b \sin t\, dt \end{cases} \quad \text{şi} \quad \int_{C_3} \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 \sin^2 t \cos t\, dt = \frac{a^3}{3} .$$

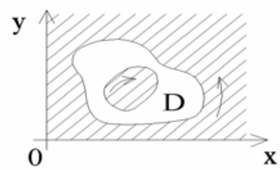
Deci $\Gamma = \dfrac{a^3}{3} - \dfrac{ab^2}{6}$.

3. Formula lui Green*

Dacă $D \subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu compact a cărui frontieră este curba netedă pe porțiuni *C*, atunci vom considera ***sens direct*** sau pozitiv de parcurgere a frontierei, acela în care un observator deplasându-se de-a lungul ei lasă interiorul domeniului la stânga.



Domeniu simplu conex



Domeniu dublu conex (cu o “gaură”)

Ambele domenii au frontiera orientată direct.

Teoremă. *Fie X şi Y două funcții definite şi continue pe un domeniu elementar* $D \subset \mathbb{R}^2$ *a cărui frontieră este curba netedă C. Dacă* $\dfrac{\partial X}{\partial y}$ *şi* $\dfrac{\partial Y}{\partial x}$ *sunt continue pe D, atunci are loc formula (lui Green)*

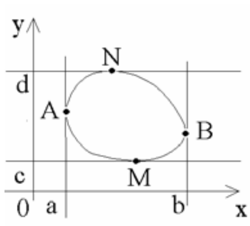
$$\oint_C X\, dx + Y\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\, dy$$

sensul de parcurs al frontierei fiind cel direct.

---

* G. Green (1793 - 1841) matematician britanic.

Demonstrație



Dacă ecuația arcului $\overset{\frown}{AMB}$ este $y=\varphi_1(x)$ cu $x\in[a,b]$ şi a arcului $\overset{\frown}{ANB}: y=\varphi_2(x)$ cu $x\in[a,b]$, atunci domeniul *D* fiind definit de inegalitățile:

$$a\le x\le b$$
$$\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)$$

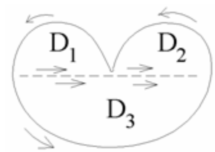
avem

$$I_1=\iint_D\frac{\partial X}{\partial y}dx\,dy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\frac{\partial X}{\partial y}dy=\int_a^b\left[X(x,\varphi_2(x))-X(x,\varphi_1(x))\right]dx=$$
$$=\int_{ANB}X(x,y)\,dx-\int_{AMB}X(x,y)\,dx=-\oint_{C_\lrcorner}X(x,y)\,dx.$$

În mod analog, dacă ecuația arcului MAN este $x=\psi_1(y)$ cu $y\in[c,d]$ şi a arcului $\overset{\frown}{MBN}, x=\psi_2(y)$ cu $y\in[c,d]$, atunci avem $D:\begin{cases}c\le y\le d\\ \psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\end{cases}$ şi

$$I_2=\iint_D\frac{\partial Y}{\partial x}dx\,dy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)}\frac{\partial Y}{\partial x}dx=\int_c^d\left[Y(\psi_2(y),y)-Y(\psi_1(y),y)\right]dy=$$
$$=\int_{MBN}Y(x,y)\,dy-\int_{MAN}Y(x,y)\,dy=\oint_C Y(x,y)\,dy.$$

Formula lui Green rezultă acum făcând diferența I_2-I_1.



Observații

1.) Formula lui Green rămâne valabilă şi pentru domenii care se descompun într-un număr finit de domenii elementare, având în vedere că frontierele interioare sunt parcurse în ambele sensuri. Aici

$$\iint_D\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)dx\,dy=\sum_{i=1}^{3}\iint_{D_i}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)dx\,dy=\sum_{i=1}^{3}\int_{C_i}X\,dx+Y\,dy=\int_C X\,dx+Y\,dy.$$

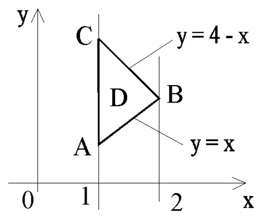
2.) În cazurile particulare: $Y(x,y)\equiv x,\ X(x,y)\equiv 0$ şi $X(x,y)\equiv y,\ Y(x,y)\equiv 0$, obținem formulele $\iint_D dx\,dy=\int_C x\,dy$, $\iint_D dx\,dy=-\int_C y\,dx$ de unde rezultă următoarea formulă de calcul al ariei unui domeniu *D* cu ajutorul integralei curbilinii pe frontiera sa.

$$aria\ D=\frac{1}{2}\oint_C x\,dy-y\,dx\ .$$

Exemple.

1.) Să se calculeze $I=\oint_C 2\left(x^2+y^2\right)\ dx+\left(x+y\right)^2\ dy$ unde C este triunghiul de vârfuri $A(1,1), B(2,2), C(1,3)$.

Soluție. Curba C este frontiera domeniului $D:\begin{cases}1\le x\le 2\\ x\le y\le 4-x\end{cases}$

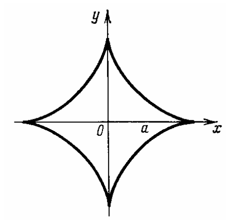


Aplicând formula lui Green, avem $\dfrac{\partial Y}{\partial x}=2(x+y),\ \ \dfrac{\partial X}{\partial y}=4y$ şi

$$I=\iint_D 2(x-y)\,dx\,dy=2\int_1^2 dx\int_x^{4-x}(x-y)\,dy=-4\int_1^2 (x-2)^2\,dx=-\frac{4}{3}.$$

2.) Să se calculeze aria domeniului limitat de curba $C:\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}\quad t\in[0,2\pi]$.

Soluție. Avem



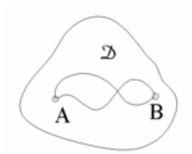
$$\begin{cases}dx=-3a\cos^2 t\sin t\,dt\\ dy=3a\sin^2 t\cos t\,dt.\end{cases}\Rightarrow x\,dy-y\,dx=\frac{3}{4}a^2\sin^2 2t\,dt\ .$$

Aria astroidei va fi

$$aria\ D=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{4}a^2\sin^2 2t\,dt=\frac{3}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4t}{2}\,dt=\frac{3}{8}\pi a^2\ .$$

4. Integrale curbilinii care nu depind de drum

Fie D un domeniu din $\mathbb{R}^2$, A şi B două puncte din D..



Există funcții vectoriale $\overline{F}=X\,\overline{i}+Y\,\overline{j}$ pe D care integrate pe orice curbă care leagă cele două puncte dau un rezultat dependent doar de punctele A şi B.

Un exemplu din fizică este forța gravitațională al cărei lucru mecanic nu depinde de drumul de-a lungul căruia ea acționează. O integrală curbilinie care nu depinde de drum, adică de arcul de curbă ce leagă cele două puncte se notează $\int_{AB}\overline{F}\cdot d\overline{r}$, $\int_A^B F\cdot d\overline{r}$ sau $\int_A^B X\,dx+Y\,dy$ fără a indica drumul care leagă punctele.

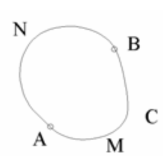
În cele ce urmează vom da condiții necesare şi suficiente ca o integrală curbilinie să nu depindă de drum. Vom presupune în continuare că funcțiile X şi Y sunt continue pe D..

Teorema 1. *Integrala* (1) $\int X\,dx+Y\,dy$

nu depinde de drum în D $\Leftrightarrow$ *integrala (1) este nulă pe orice curbă închisă din* D.

Demonstrație $\Rightarrow$ Să presupunem că integrala (1) nu depinde de drum.

Fie C o curbă închisă din D, A şi B două puncte ale sale. Avem evident



$$\int_{\overset{\frown}{AMB}}\overline{F}\cdot d\overline{r}=\int_{\overset{\frown}{ANB}}\overline{F}\cdot d\overline{r}\ .$$

Rezultă de aici că

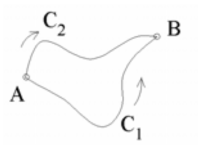
$$\oint_C \overline{F}\cdot d\overline{r} = \int_{\overset{\frown}{AMB}} + \int_{\overset{\frown}{BNA}} = \int_{AMB} - \int_{ANB} = 0 .$$

$\Leftarrow$ Fie $\oint_C \overline{F}\cdot d\overline{r} = 0$ oricare ar fi curba închisă $C \subset D$. Fie A şi B două puncte oarecare din D..

Două curbe C_1 şi C_2 care le leagă şi nu se taie, alcătuiesc împreună o curbă închisă C pe care integrala (1) este nulă, $\int_C \overline{F}\cdot d\overline{r} = 0$ de unde rezultă $\int_{C_1} - \int_{C_2} = 0$ şi deci $\int_{C_1} = \int_{C_2}$.

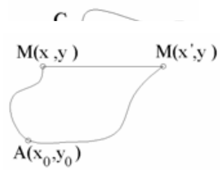
Dacă cele două drumuri se intersectează, atunci se alege un al treilea drum C_3 care nu taie nici C_1 nici C_2 şi independența de drum rezultă atunci din egalitățile $\int_{C_1} = \int_{C_3} = \int_{C_2}$.

Teorema 2. *Integrala (1) nu depinde de drum $\Leftrightarrow$ există o funcție U diferențiabilă pe D astfel încât $dU = X\,dx + Y\,dy$. În acest caz*



$$\int_A^B X\,dx + Y\,dy = U(B) - U(A) .$$

Demonstrație $\Rightarrow$ Fie $A(x_0, y_0)$ un punct fixat din D şi $M(x, y)$ un punct oarecare.



În ipoteza în care integrala (1) nu depinde de drum ci numai de capete, să considerăm funcția U dată de formula

$$U(x,y) = \int_A^M X\,dx + Y\,dy = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} X\,dx + Y\,dy .$$

Vom arăta că U admite derivate parțiale de ordinul întâi pe D.. Avem

$$\frac{U(x',y) - U(x,y)}{x'-x} = \frac{1}{x'-x}\int_M^{M'} X\,dx + Y\,dy = \frac{1}{x'-x}\int_x^{x'} X\,dx = X(\xi, y) \xrightarrow[x'\to x]{} X(x,y)$$

deoarece U este continuă. Deci $\dfrac{\partial U}{\partial x} = X$. Analog se arată că $\dfrac{\partial U}{\partial y} = Y$. Cum $\dfrac{\partial U}{\partial x}\, si\, \dfrac{\partial U}{\partial y}$ sunt continue, rezultă că U este diferențiabilă şi că $dU = X\,dx + Y\,dy$.

Reciproc, dacă $dU = X\,dx + Y\,dy$, atunci $\dfrac{\partial U}{\partial x} = X$ şi $\dfrac{\partial U}{\partial y} = Y$. Să arătăm că integrala (1) nu depinde de drum. Fie de aceea arcul de curbă $\overset{\frown}{AB}$ având reprezentarea parametrică

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]\, cu\ x, y \in C^1[\alpha, \beta]. \qquad \text{Atunci}$$

$$\int_{AB} X\,dx + Y\,dy = \int_{AB} \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = \int_{\alpha}^{\beta}\left[U'_x \cdot x'(t) + U'_y \cdot y'(t)\right]dt =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt} U\big(x(t), y(t)\big)dt = U\big(x(t), y(t)\big)\Big|_{\alpha}^{\beta} = U(B) - U(A),$$

de unde se vede că integrala depinde doar de capetele drumului.

Lemă. *Dacă f este o funcție continuă pe domeniul simplu conex* D *şi* $\iint_D F(x, y)\,dx\,dy = 0 \quad \forall D \subset \mathsf{D}$ *, atunci funcția f este identic nulă pe* D*..*

Demonstrație. Să presupunem prin absurd că ar exista un punct $P_0 \in \mathsf{D}$ aşa ca $f(P_0) \neq 0$. Dacă se exemplu, $f(P_0) > 0$ atunci funcția *f* fiind continuă, există o întreagă vecinătate *V* a lui P_0 pe care *f* să fie pozitivă. Cu formula de medie rezultă atunci existența unui punct $P_1 \in V$ aşa ca $\iint_V f(x, y)\,dx\,dy = f(P_1)\ aria\ V > 0$ ceea ce contrazice ipoteza pentru $D = V$.

Teorema 3. *Dacă* $\frac{\partial X}{\partial y}$ *ş* $\frac{\partial Y}{\partial x}$ *sunt continue pe* D *, atunci integrala* (1) *nu depinde de drum* $\Leftrightarrow \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$ *pe* D*.*

Demonstrație $\Rightarrow$ Fie $D \subset \mathsf{D}$ oarecare şi $C = \mathrm{fr}\,D$. Dacă integrala (1) nu depinde de drum, atunci conform teoremei 1, $\int_C \overline{F} \cdot d\overline{r} = 0$. Aplicând formula lui Green,

avem $\iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\,dy = 0$. Cum D este oarecare şi funcția $\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}$ este continuă, rezultă cu lema de mai sus că $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$ pe D.

$\Leftarrow$ Dacă $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$ pe D, atunci $\oint_C X\,dx + Y\,dy = 0$ oricare ar fi curba închisă *C* din D, deci integrala (1) nu depinde de drum conform teoremei 1.

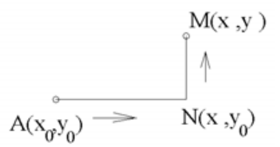
Observații

1.) Funcția *U* (din teorema 2) numită şi primitivă a expresiei $X\,dx + Y\,dy$ nu este unică, deoarece şi $d(U + c) = dU$ oricare ar fi constanta *c*, iar *V* este aşa ca $dV = X\,dx + Y\,dy$, atunci din $d(V - U) = 0$ pe D rezultă $V = U + c$. De aceea

$$V(x,y)-V(x_0,y_0)=U(x,y)-U(x_0,y_0)=U(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} X\,dx+Y\,dy\,.$$

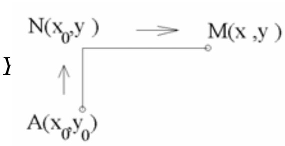
2.) Pentru determinarea primitivei *U* este convenabilă alegerea unui drum paralel cu axele:

sau



Astfel

$U(x,y)=\int_{x_0}^{x} X(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}$ Y



$(x,y)\,dx$

.

3.) Pentru ca o integrală curbilinie din spațiu $\int X\,dx+Y\,dy+Z\,dz$ să nu depindă de drum este necesar şi suficient ca

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x},\ \frac{\partial Y}{\partial z}=\frac{\partial Z}{\partial y},\ \frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{\partial Y}{\partial z}\quad pe\ D\subset\mathbb{R}^3$$

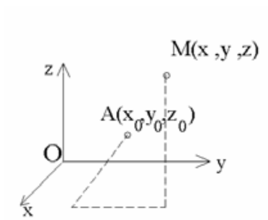
în ipoteza că $X,Y,Z\in C^1(\mathcal{D})$.

Teorema 1 rămâne evident valabilă şi pentru acestea iar în teorema 2 condiția de independență de drum este să existe o funcție diferențială *U* astfel încât

$$dU=X\,dx+Y\,dy+Z\,dz\,.$$

Spunem în acest caz că expresia diferențială de sus este o ***diferențială totală***.

Calculul primitivei *U* se poate face fie cu ajutorul integralei curbilinii



$$U(x,y,z)=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} X\,dx+Y\,dy+Z\,dz$$

de-a lungul unui drum convenabil ales, ca cel paralel cu axele pe porțiuni $(x_0,y_0,z_0)\to(x,y_0,z_0)\to(x,y,z_0)\to(x,y,z)$ fie ținând seama că toate derivatele parțiale de ordinul întâi ale lui *U* sunt cunoscute

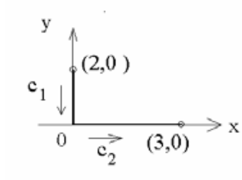
$$\begin{cases} U'_x=X \\ U'_y=Y \\ U'_z=Z. \end{cases}$$

4.) Considerând câmpul vectorial $\overline{F}=X\overline{i}+Y\overline{i}+Z\overline{k}$, condiția ca integrala curbilinie $\int \overline{F}\cdot d\overline{r}$ să nu depindă de drum este ca $rot\,\overline{F}=0$, ceea ce înseamnă că $\overline{F}$ este un câmp irotațional.

Totodată se poate observa că în această situație, existând U astfel încât $U'_x = X,\ U'_y = Y,\ \ U'_z = Z$, avem $\overline{F} = grad\, U$.

Un câmp vectorial care este gradientul unui câmp scalar, se numeşte ***câmp potențial.***

Funcția U se numeşte potențialul scalar al câmpului $\overline{F}$. După cum am văzut el (potențialul scalar) se poate calcula după formula $U(P) = \int_{P_0}^{P} \overline{F} \cdot d\overline{r}$.



Exemple

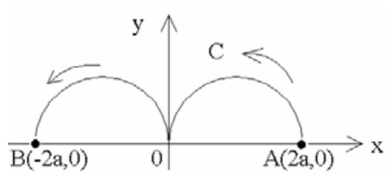
1.) Să se calculeze $I = \int_{(0,2)}^{(3,0)} y^2 e^x dx + 2ye^x dy$.

Soluție. Integrala nu depinde de drum deoarece $\dfrac{\partial X}{\partial y} = 2ye^x = \dfrac{\partial Y}{\partial x}$.

De aceea vom alege drumul indicat în figura alăturată şi vom avea

$$I = \int_{C_1} + \int_{C_2} = \int_2^0 2ye^0\ dx + \int_0^3 0 \cdot e^x\ dx = -4 .$$

2.) Să se calculeze $I = \int_C (a+y)\,dx + (a+x)\,dy$ unde



$x^2 + y^2 - 2ax = 0,\ y \ge 0$ reunit cu semicercul $x^2 + y^2 + 2a$
$A(2a, 0),\ \ a > 0$.

Soluție. Se observă că $\dfrac{\partial X}{\partial y} = \dfrac{\partial Y}{\partial x} = 1$. Integrala nedepinzând de drum vom alege drumul direct de la A la B pe axa Ox. Astfel

$$I = \int_A^B (a+y)dx + (a+x)dy = \int_{2a}^{-2a} a\,dx = -4a^2$$

3.) Să se calculeze o primitivă a expresiei $(2x - 3yz)dx + (2y - 3xz)dy + (2z - 3xy)dz$.

Soluție. Verificăm mai întâi dacă expresia dată este o diferențială totală, calculând rotorul funcției $\overline{F} = (2x - 3yz)\,\overline{i} + (2y - 3xz)\,\overline{j} + (2z - 3xy)\,\overline{k}$. Avem

$$rot\,\overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x - 3yz & 2y - 3xz & 2z - 3xy \end{vmatrix} = \overline{i}\,(-3x + 3x) - \overline{j}\,(-3y + 3y) + \overline{k}\,(-3z + 3z) = \overline{0}.$$

Vom calcula primitivele expresiei date prin ambele metode.

Metoda I. Pornind de la un punct convenabil ales, originea de exemplu, pe drumul $(0,0,0) \to (x,0,0) \to (x,y,0) \to (x,y,z)$ avem

$$U(x,y,z)=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}(2x-3yz)\,dx+(2y-3xz)\,dy+(2z-3xz)\,dz=$$

$$=\int_0^x 2x\,dx+\int_0^y 2y\,dy+\int_0^z(2z-3xy)\,dy=x^2+y^2+z^2-3xyz.$$

Primitivele expresiei date vor fi de forma $x^2+y^2+z^2-3xyz+C$ cu C oarecare.

Metoda a II-a. Vom determina funcția U știind că

$$U'_x=2x-3yz$$
$$U'_y=2y-3xz$$
$$U'_z=2z-3xy$$

Din prima ecuație rezultă prin integrare că $U(x,y,z)=x^2-3xyz+f(y,z)$.

Urmează să determinăm funcția $f(y,z)$ ținând cont și de următoarele două ecuații ale sistemului, adică de faptul că

$$\begin{cases}-3x+f'_y=2y-3xz\\-3xy+f'_z=2z-3xy\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'_y=2y\\f'_z=2z.\end{cases}$$

Problema s-a redus astfel la determinarea funcției de două variabile $f(y,z)$ cunoscându-i derivatele parțiale.

Din prima ecuație rezultă că $f(y,z)=y^2+g(z)$, iar $g(z)$ se determină știind că $g'(z)=2z$, deci $g(z)=z^2+C$. Astfel $U(x,y,z)=x^2-3xyz+y^2+z^2+C$.

Exerciții

1.) Să se calculeze integralele curbilinii de prima speță:

a) $\int_C ye^{-x}dl$ *unde* $C: x=\ln\left(1+t^2\right),\ y=2\operatorname{arctg}t-t+1,\ t\in[0,1]$. R: $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}$

b) $\int_C\left(x^2+y^2\right)dl$ unde C este un arc al spiralei logaritmice $\rho=ae^{m\varphi}$ $(m>0)$ având capetele $A(0,a)$ *și* $O(-\infty,0)$. R: $\frac{a^2\sqrt{1+m^2}}{5m}$

c) $\int_C\sqrt{2y^2+z^2}\,dl$ unde C este cercul $x^2+y^2+z^2=a^2,\ x=y$. R: $2\pi a^2$

d) $\int_C xy\,dl$ unde C este conturul pătratului $|x|+|y|=a,\ a>0$ R: 0

e) $\int_C xy\,dl$ unde C este sfertul cercului $x^2+y^2+z^2=R^2,\ x^2+y^2=\frac{R^2}{4}$ din primul octant R: $\frac{R^4\sqrt{3}}{32}$

2.) Să se calculeze masa firului material având ca imagine curba $\bar{r} = at\,\bar{i} + \frac{at^2}{2}\bar{j} + \frac{at^3}{3}\bar{k}$ între $t_1 = 0,\ t_2 = 1$ ştiind că densitatea sa este $\rho = \sqrt{\frac{3z}{x}}$.

3.) Să se determine centrul de greutate al firului material reprezentat de curba: $x = 4t^5$, $y = \sqrt{15}t^4,\ z = 2t^3,\quad t \in [-1,1]$ având densitatea $\rho = \frac{1}{2}|z|$.

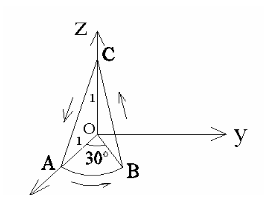
4.) Să se calculeze integralele curbilinii de speța a doua:

a) $\int_C \frac{xy\,(y\,dx - x\,dx)}{x^2 + y^2}$ unde C este bucla din dreapta a lemniscatei $\rho^2 = a^2\,cos\,2\varphi$ parcursă în sensul acelor de ceasornic.

b) $\int_C \frac{(y+z)dx + (x+y)dy + dz}{x^2 + y^2}$ unde C este segmentul orientat $AB,\ A(-1,1,0),\ B(1,2,-1)$.

5.) Să se calculeze circulația câmpului $\overline{V} = x^2\bar{i} + y^2\bar{j} + z^2\bar{k}$ de-a lungul curbei de intersecție a suprafețelor $x^2 + y^2 + z^2 = a$ şi $x^2 + y^2 - ax = 0$ (curba lui Viviani).

6.



Să se calculeze circulația câmpului $\overline{V} = x^2\bar{i} - xy^2\bar{j} + yz^2\bar{k}$ prin conturul închis $ABCA$.

7.) Fie C o curbă închisă care mărgineşte un domeniu de arie A. Să se calculeze
$\int_C (y + \cos x \sin y)\,dx + (1 + \sin x \cos y)\,dy$.

8.) Să se calculeze $\int_{\overset{\frown}{AMO}} \left(e^x \sin y - m\,y\right)dx + \left(e^x \cos y - m\right)dy,\quad AMO$ fiind semicercul $x^2 + y^2 = ax$ parcurs de la $A(a,0)$ *la* $O(0,0)$ în sens direct.

R: $\frac{m\pi a^2}{8}$ Se completează cu segmentul OA şi se aplică formula lui Green

9.) Să se calculeze aria buclei curbei $(x+y)^3 = xy$

R: $\frac{1}{60}$. Se obține reprezentarea parametrică făcând $y = tx$.

10.) Să se determine o primitivă a integrantului şi să se calculeze integrala

$$\int_{(-2,-1)}^{(3,0)} \left(x^4 + 4xy^3\right)dx + \left(6x^2y^2 - 5y^4\right)dy \qquad \text{R: } 62$$

11.) Să se calculeze $\int\limits_{(-1,1,5)}^{(2,2,4)} \frac{z\,dx + z\,dy - (x+y)dz}{x^2+y^2+z^2+2xy}$. R: $\frac{\pi}{4}$

12.) Să se determine constantele *a* şi *b* astfel încât expresia $\frac{\left(y^2+2xy+ax^2\right)dx - \left(x^2+2xy+by^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ să devină o diferențială totală şi să i se determine o primitivă.

13.) Să se determine *u* dacă

$$du = e^{\frac{y}{z}}\,dx + \left(e^{\frac{y}{z}}\frac{(x+1)}{z} + ze^{yz}\right)dy + \left(-\frac{e^{\frac{y}{z}}(x+1)y}{z^2} + ye^{yz} + e^{-z}\right)dz.$$ R: $u = e^{\frac{y}{z}}(x+1) + e^{yz} - e^{-z}$

BIBLIOGRAFIE

1. A. Angot, *Complemente de matematici pentru inginerii din electrotehnică şi din telecomunicaţii*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1965.
2. L. Bal, *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1971.
3. Gh. Budianu, V. Mihăilescu, A. Popa, C*ulegere de probleme de analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1993.
4. M. Craiu, V.V. Tănase, *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980.
5. R. Cristescu, *Matematici superioare,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1963.
6. R. Cristescu, *Matematici generale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1967.
7. B. Demidovich, *Problems in Mathematical Analysis,* Mir Publication, Moscow, 1989.
8. N. Donciu, D. Flondor, *Algebră şi analiză matematică, culegere de probleme,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.
9. G.M. Fihtenholţ, *Curs de calcul diferenţial şi integral,* Editura Tehnică, Bucureşti, vol. I, II, III, 1963 – 1965.
10. P. Flondor, O. Stănăşilă, *Lecţii de analiză matematică,* Editura ALL Bucureşti, 1993.
11. A. Halanay, V. Olaru, S. Turbatu, *Analiză matematică,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.
12. A.D. Myškis, *Introductory Mathematics for Engineers*, Mir Publication, Moscow, 1977.
13. M. Nicolescu, N. Dinculeanu, S. Marcus, *Analiză matematică,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, vol. I, II, III, 1971
14. M. Roşculeţ, *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.
15. O. Stănăşilă, *Analiză matematică,* Editura Didactică şi Pedagocică, Bucureşti, 1981.
16. N. Tiţa, D. Tofan, *Analiza Matematică Reală,* Editura Didactică şi Pedagocică,
Bucureşti, 2003.
17. R. Trandafir, *Probleme de matematici pentru ingineri,* Editura Tehnică, Bucureşti, 1977.