Tema 3

1) Generăm aleator un şir de n biţi. Calculaţi probabilitatea să apară un şir de 4 de 1 consecutivi ("1111")

a) Not. cu A_n evenimentul reprezentat de apariţia a cel puţin unei secvenţe "1111" într-un şir de n biţi şi deduceţi o formulă de recurenţă pentru probabilitatea acestui eveniment bazată pe probabilităţile lui A_{n-1}, A_{n-2}, A_{n-3} şi A_{n-4}.

primul 0, 4 de 1

$n = 4 \qquad A_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

$n = 5 \qquad A_5 = A_4 + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{3}{32}$

$n = 6 \qquad A_6 = \underbrace{\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2}}_{\text{primele}} + \underbrace{\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4}}_{\text{mij}} + \underbrace{\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2}}_{\text{ult. 4}} + \frac{1}{2^6}\cdot 3$

$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{2^6}\cdot 2^2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

$n = 7 \qquad A_7 = \underbrace{A_6\cdot\frac{1}{2}}_{\text{din primele 6 +0}} + \underbrace{A_6\cdot\frac{1}{2}}_{\text{+1 la fin}} + \underbrace{\frac{1}{32}}_{\text{ult 4}} = \frac{1}{8} + \frac{1}{32} = \frac{5}{32}$

$n = 8 \qquad A_8 = A_7\cdot\frac{1}{2} + A_7\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = \frac{6}{32}$

$A_9 = A_8\cdot\frac{1}{2} + A_8\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{16} = \frac{6}{32} + \frac{15}{512} = \frac{16\cdot 6 + 15}{512} = \frac{111}{512} \approx 0,216$

1 0 fixat, să nu fie 1111

care e prob a cel puţin unui 0 în 4 biţi? $1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

$A_{10} = A_9\cdot\frac{1}{2} + A_9\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{32}\cdot(1 - A_5) = \frac{111}{512} + \frac{1}{32}\cdot\frac{29}{32} \approx 0,24$

$$\boxed{A_n = A_{n-1} + \frac{1}{32}\cdot(1 - A_{n-5})}$$

$\underbrace{\qquad\quad}_{n-1}0$ → caz în care ult. bit este 0 $\Rightarrow P(A_{n-1})\cdot\frac{1}{2}$

$\underbrace{\qquad\quad}_{n-2}01 \rightarrow P(A_{n-2})\cdot\frac{1}{4}$

$\underbrace{\qquad\quad}_{n-3}011 \rightarrow P(A_{n-3})\cdot\frac{1}{8}$

$\underbrace{\qquad\quad}_{n-4}0111 \rightarrow P(A_{n-4})\cdot\frac{1}{16}$ (secv în primele n-4)

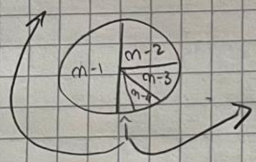
$\underbrace{\qquad\quad}_{n-4}1111 \rightarrow [1-P(A_{n-4})]\cdot\frac{1}{16}$ (secv în ult 4)

$P(n-2)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$\underbrace{\qquad\quad}_{n-1}0,1$

$\underbrace{\qquad\quad}0,1,1$ $P(n-3)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$\underbrace{\qquad\quad}0111$ $P(n-4)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4$



secv. și în primele n-4 și în ~~ultimele~~ 4.

$P(A_{n-4})\cdot\frac{1}{16}$ $\quad \underbrace{\qquad}_{}$ P(A n-4) 11111

$$\boxed{A_n = \frac{1}{2}\cdot P(A_{n-1}) + \frac{1}{4}\cdot P(A_{n-2}) + \frac{1}{8}\cdot P(A_{n-3}) + \frac{1}{16}\cdot P(A_{n-4}) + \frac{1}{16}}$$