Lista 3: Análise Numérica

Cristiana Aparecida Nogueira Couto

Prof. Hugo de La Cruz

Outubro de 2020

1 Questão 2

Temos que $P(x)$ passa pelos pontos $(i, -i), i = 1, 2, ..., n$ e $(0, (-1)^n)$, pois $(-1)^n$ é o termo independente desse polinômio,

$$P(x) = \Delta[x_0]+\Delta[x_0, x_1](x-x_0)+...+\Delta[x_0, x_1, ..., x_n](x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})$$

No método das diferenças divididas, tem-se que $\Delta[x_0] = (-1)^n$, onde $x_0 = 0$. Além disso, $x_i = i$ e $y_i = -i$.

Fazendo as substituições:

$$\Delta[x_0, x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = -1 - (-1)^n$$

Como $y_{i+1} = y_i - 1$, $i > 0$ e xi, x_{i+1} são consecutivos os valores das diferenças dividas de segunda ordem são:

$$\Delta[x_i, x_{i+1}] = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = -1$$

.

Sendo assim, como esses valores são todos iguais e as diferenças dividas são recorrentes:

$$\Delta[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{\Delta[x_i, x_{i+1}] - \Delta[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i} = 0$$

Exceto para

$$\Delta[x_0, x_1, x_2] = \frac{-1 - (-1 - (-1)^n)}{x_2 - x_1} = \frac{(-1)^n}{2}$$

.

Assim, podemos notar que

$$\Delta[x_0, x_1, x_2, x_3] = -1 - (-1 - (-1)^n) = \frac{-(-1)^n}{3.2.1} = \frac{-(-1)^n}{3!}$$

De modo geral, para $m \geq 2$, m inteiro positivo:

$$\Delta[x_0, x_1, x_2, ..., x_m] = \begin{cases} \frac{-(-1)^n}{m!}, & \text{se m é ímpar} \\ \frac{(-1)^n}{m!}, & \text{se m é par} \end{cases}$$

$$\Delta[x_0, x_1, x_2, ..., x_m] = \frac{(-1)^m(-1)^n}{m!}$$

Pois, o termo $\Delta[x_1, x_1, x_2, ..., x_m] = 0$, o que pode-se ser facilmente verificado por indução.

Reescrevendo $P(x)$, tem-se:

$$P(x) = (-1)^n + [-1 - (-1)^n]x + ... + \frac{(-1)^{2n}}{n!}x(x-1)...(x-(n-1))$$

$$P(k) = (-1)^n + [-1 - (-1)^n]k + ... + \frac{1}{n!}k(k-1)...(k-(n-1))$$

Fazendo os cálculos obtemos:

$$= (-1)^n - k - (-1)^n k + ... + \binom{k}{n-1} + \binom{k}{n} = \binom{k-1}{n} - k$$

2 Questão 8

Assumindo que $n_0 = 1$, a sequência de números $(x_1, x_2, ...)$ são todos distintos dois a dois. Temos que $\Delta[x_i] = f(x_i)$, que é a diferença dividida de ordem zero.

A função $f(x) = sin(cx + d)$ é uma função infinitamente derivável em qualquer intervalo de $\mathbb{R}$, portanto é de classe C^k no intervalo $[a, b]$ que contém os valores de x_i, para $i = 1, 2, ..., k$. Além disso, a k-ésima diferença dividida $\Delta[x_1, x_2, ..., x_k]$ só depende primeiros k termos da sequência. Assim, vale o Teorema do Valor Médio para diferenças dividas

$$\Delta[x_1, x_2, ..., x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$$

Onde $\xi \in (a, b)$. Uma vez que as derivadas de $f(x)$ são $\alpha cos(cx + d)$ ou $\beta sen(cx+d)$, onde α e β são constantes obtidas pela regra da cadeia de derivadas, sendo $f^{(k)}$ limitada para todo k inteiro positivo.

$$|f^{(k)}(\xi)| \leq 1 \to \lim_{k \to \infty} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} = 0$$

3 Questão 12

3.a

Queremos construir um *spline cúbico paramétrico*, onde temos dois pontos guias que definem as retas tangentes aos pontos (x_1, y_1) e (x_n, y_n). Estabelecemos condições necessárias: queremos que além das tangentes definidas nos pontos final e inicial, a curva deve ser uma curva suave e passar por todos os pontos (x_i, y_i), para $i = 1, 2, ..., n$.

Assim, temos que:

- $(x(0), y(0)) = (x_i, y_i)$
- $(x(1), y(1)) = (x_{i+1}, y_{i+1})$
- $(x'(0), y'(0)) = k_0(\hat{x}_1 - x_1, \hat{y}_1 - y_1)$ (Quando fazemos a curva ligando os pontos (x_1, y_1) e (x_2, x_2))
- $(x'(1), y'(1)) = k_1(\hat{x}_n - x_n, \hat{y}_n - y_n)$ (Quando fazemos a curva ligando os pontos (x_{n-1}, y_{n-1}) e (x_n, x_n))

Definimos x e y como: $x = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x$ e $y = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y$, pois desejamos uma *splime* cúbica, onde $t \in [0, 1]$. Começando com os pontos (x_1, y_1) e (x_2, x_2):

$$d_{x_1} = x_1$$

$$d_{y_1} = y_1$$

Definindo $k_0 = k_1 = 1$.

$$c_{x_1} = \hat{x}_1 - x_1$$

$$c_{y_1} = \hat{y}_1 - y_1$$

Além disso,

$$a_{x_1} + b_{x_1} + c_{x_1} + d_{x_i} = x_2$$

Como há duas incógnitas para uma equação, podemos arbitrar um valor para b_{x_1} e a_{x_1} fica definido. Por exemplo, $b_{x_1} = 1$. Temos o mesmo para as constantes em $y(t)$.

Agora aplicando as restrições nas equações para os pontos (x_i, y_i) e $(x_{i+1}, y_{i+1}), 1 < i < n - 1$, tem-se:

Note que nesse caso a derivada em $x'(0)$ é igual à $\overline{x'}(1)$, onde $\overline{x}$ é a *spline* que liga os pontos (x_{i-1}, y_{i-1}) e (x_i, y_i).

$$d_{x_i} = x_i$$

$$d_{y_i} = y_i$$

$$c_{x_1} = 3a_{x_{i-1}} + 2b_{x_{i-1}} + c_{x_{i-1}}$$

$$c_{y_1} = 3a_{y_{i-1}} + 2b_{y_{i-1}} + c_{y_{i-1}}$$

Novamente podemos arbitrar um valor para b_{x_i}, pois temos apenas que:

$$a_{x_i} + b_{x_i} + c_{x_i} + d_{x_i} = x_{i+1}$$

Para o caso ligando os pontos (x_{n-1}, y_{n-1}) e (x_n, y_n), temos $x'(0)$ definida pela curva anterior e $x'(1)$ definida pelo ponto guia $(\hat{x}_n, \hat{y}_n)$. Portanto,

$$d_{x_{n-1}} = x_{n-1}$$
$$d_{y_{n-1}} = y_{n-1}$$

$$c_{x_{n-1}} = 3a_{x_{n-2}} + 2b_{x_{n-2}} + c_{x_{n-2}}$$
$$c_{y_{n-1}} = 3a_{y_{n-2}} + 2b_{y_{n-2}} + c_{y_{n-2}}$$

Como temos que:

$$a_{x_{n-1}} + b_{x_{n-1}} + c_{x_{n-1}} + d_{x_{n-1}} = x_n$$

$$3a_{x_{n-1}} + 2b_{x_{n-1}} + c_{x_{n-1}} = \hat{x}_n - x_n$$

Logo,

$$b_{x_{n-1}} = 4x_n - \hat{x}_n - 2c_{x_{n-1}} - 3d_{x_{n-1}}$$
$$a_{x_{n-1}} = x_n - b_{x_{n-1}} - c_{x_{n-1}} - d_{x_{n-1}}$$

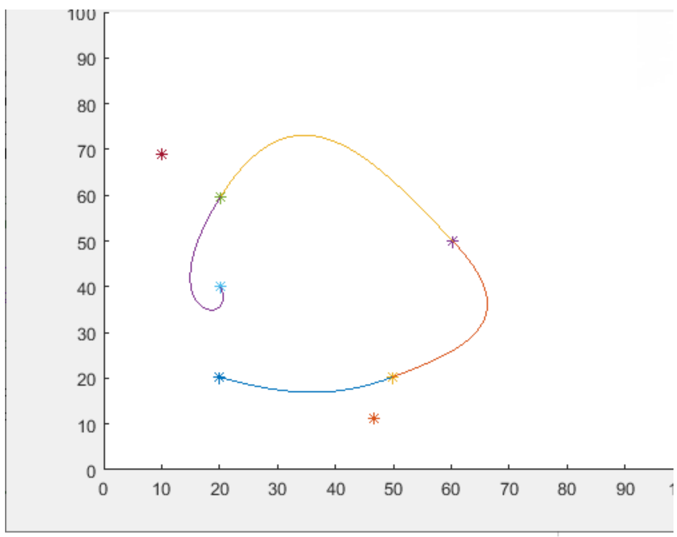
Novamente, o mesmo vale para as constantes de $y(t)$.

Feito isso, obtemos as equações paramétricas para a *splime cúbica paramétrica* que interpola os pontos $(x_i, y_i), i = 1, 2, ..., n$ e tem tangente determinada pelos pontos guia $(\hat{x}_1, \hat{y}_1)$ e $(\hat{x}_n, \hat{y}_n)$ nos pontos (x_1, y_1) e (x_n, y_n), respectivamente. Quando $n = 2$ a *spline* cúbica paramétrica é equivalente a curva de Bézier.

3.b

A implementação se encontra nos arquivos anexados. A seguir está uma imagem produzida pelo programa, o teste foi feito com a figura 2:

(Obs: Como algumas constantes foram arbitradas consequentemente as imagens podem diferir um pouco daquelas que estão na lista).


100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90