Fondamenti di Calcolo Numerico 2025

PROGETTO 1: scadenza per la consegna **31 Marzo 2025 (ore 12:00) - Voto massimo : 3/30**

Nota: per risolvere numericamente gli esercizi proposti nel seguito, si suggerisce di creare uno script all'interno di una cartella nel vostro file system personale, e di salvarlo con il nome

`Progetto_1.m`

1 Analisi circuitale: modello matematico

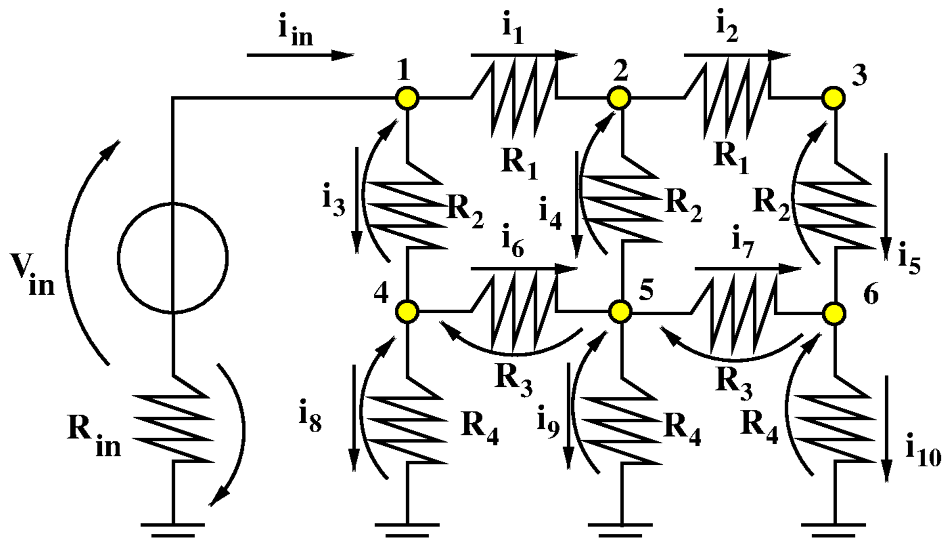

Figure 1: Rete di resistori pilotata in tensione.

Si consideri la rete di resistori lineari e tempo invarianti rappresentata nella Figura 1. La convenzione per il segno della corrente i che attraversa un nodo del circuito è: $i > 0$ se la corrente è uscente dal nodo, $i < 0$ se la corrente è entrante nel nodo.

1. Scrivere le leggi di Kirchhoff alle correnti per ogni nodo della rete.
2. Scrivere la legge di Ohm per ogni corrente di lato, indicando con $G = R^{-1}$ la conduttanza di lato.
3. Scrivere la legge di Kirchhoff alla tensione per la maglia di ingresso costituita dal generatore di tensione V_{in} e le resistenze R_{in}, R_2 e R_4.
4. Riportare l'elenco delle incognite del problema e verificare che il numero di equazioni è uguale al numero di incognite. Motivare la risposta.

2 Analisi circuitale con metodi diretti

Assegnare i seguenti valori dei parametri del circuito: $V_{in} = 5\text{V}$, $R_{in} = 600\Omega$ e

$$R_k = \frac{R_{in}}{k}, \quad \text{per } k = 1, \ldots, 4.$$

1. Dopo avere eliminato le correnti i_j, $j = 1, \ldots, 10$, in funzione dei potenziali nodali v_q, $q = 1, \ldots, 6$, definire in Matlab la matrice delle ammettenze $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{6\times6}$ e il termine noto $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{6\times1}$. Riportare qui sotto i valori visualizzati sulla finestra di comando.

2. Eseguire il comando `format short e`. Verificare l'esistenza ed unicità della fattorizzazione LU di $\mathbf{Y}$ con $L_{ii} = 1$, $i = 1, \ldots, 6$. Riportare i comandi utilizzati e risultati della verifica.

3. Calcolare la fattorizzazione LU utilizzando il comando `lu` di Matlab. Riportare qui sotto i coefficienti diagonali della matrice U e determinare se é stato eseguito il pivoting.

4. Eseguire il comando `format long e`. Si consideri la soluzione del sistema

$$\mathbf{Yx} = \mathbf{b}. \tag{1}$$

   Utilizzare la fattorizzazione LU di $\mathbf{Y}$ calcolata precedentemente per risolvere il sistema (1) con le funzioni `fwsub.m` e `bksub.m` utilizzate nel Lab 2. Memorizzare nel vettore `xc` la soluzione del sistema triangolare superiore. Risolvere il sistema (1) utilizzando il comando \ di Matlab e memorizzare nel vettore `xm` il risultato ottenuto. Visualizzare sulla finestra di comando i vettori `xm` e `xc` e riportarli e riportarli qui sotto.

5. Eseguire il comando `format short e`. Calcolare la norma infinito della differenza tra `xm` e `xc` e riportare il risultato ottenuto.

3 Analisi circuitale con metodi iterativi

1. Verificare che la matrice $\mathbf{Y}$ è simmetrica e definita positiva utilizzando gli opportuni comandi Matlab. Riportare qui sotto l'esito della verifica e i comandi utilizzati.

2. Eseguire il comando `format long e`. Si ponga `x0=zeros(6,1)`, `toll=1e-12` e `nmax=1000`. Si utilizzi la function `gs.m` utilizzata nel Lab 3 per risolvere il sistema (1) con il metodo di Gauss-Seidel e si memorizzi la soluzione calcolata nel vettore `xGS`. Riportare il numero di iterazioni k_{GS} effettuate per raggiungere la precisione prescritta.

3. Eseguire il comando `format short e`. Si calcoli e si riporti l'errore relativo commesso

$$\texttt{true\_rel\_err} = \frac{\|\texttt{xm} - \texttt{xGS}\|_2}{\|\texttt{xm}\|_2}.$$

4. Si calcoli il raggio spettrale ρ_{GS} della matrice di iterazione B_{GS} utilizzata al punto precedente e si confronti l'errore relativo precedentemente calcolato con ρ_{GS}^k, dove k_{GS} è il numero di iterazioni effettuate dal metodo di Gauss–Seidel. Riportare ρ_{GS} e motivare i risultati ottenuti alla luce della teoria.

5. Ripetere i tre punti precedenti utilizzando il metodo di Richardson stazionario con parametro α ottimale e `x0`, `toll` e `nmax` come sopra. Per approssimare la soluzione del sistema (1) si utilizzi la funzione `richardson.m` e si memorizzi la soluzione calcolata nel vettore `xR`. Si riporti il numero di iterazioni k_R effettuate per raggiungere la precisione prescritta e l'errore relativo commesso

$$\texttt{true\_rel\_err} = \frac{\|\texttt{xm} - \texttt{xR}\|_2}{\|\texttt{xm}\|_2}.$$

   Infine, si confronti tale risultato con ρ_R^k dove ρ_R è il raggio spettrale corrispondente alla matrice di iterazione di Richardson. Si riporti ρ_R e si commentino i risultati ottenuti alla luce della teoria.