Fondamenti di Calcolo Numerico

PROGETTO 3: scadenza per la consegna **5 Giugno 2025 (ore 16:00) - Voto massimo : 3/30**

Nota: per risolvere numericamente gli esercizi proposti nel seguito, si suggerisce di creare uno script all'interno di una cartella nel vostro file system personale, e di salvarlo con il nome

`Progetto_3.m`

1 Modello matematico

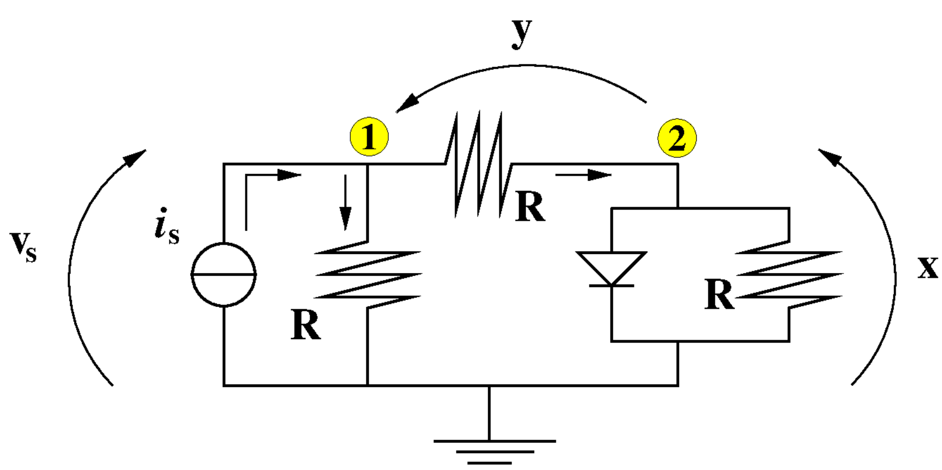

Figure 1: Circuito non lineare.

Si consideri il circuito non lineare illustrato in Figura 1 dove $i_s = 0.1$A e $R = 20\Omega$. La relazione tensione-corrente ai capi del diodo è

$$i(v) = i_{sat}\left(\exp(v/V_{th}) - 1\right), \tag{1}$$

dove $i_{sat} = 10^{-9}$A è la corrente di saturazione inversa e V_{th} è la tensione termica (che è contenuta nella variabile `Vth` che si ottiene eseguendo lo script `constants.m`).

Scrivere il sistema di tre equazioni nelle tre incognite v_s, y e x che si ottiene scrivendo:

- la legge di Kirchhoff alle tensioni rispetto alla maglia formata dai nodi 1, 2 e terra;
- la legge di Kirchhoff alle correnti che attraversano il nodo 1;
- la legge di Kirchhoff alle correnti che attraversano il nodo 2.
- verificare che eliminando dal sistema le incognite v_s e y in funzione di x si ottiene

$$g(x) = x + A\exp(x/V_{th}) - B = 0, \qquad \text{dove } A = (2/3)Ri_{sat} \quad \text{e} \quad B = A + Ri_s/3. \tag{2}$$

Riportare le equazioni del sistema e la derivazione dell'eq. nonlineare $g(x) = 0$.
[voto: 0.6/30]

2 Modello numerico

Si definiscano l'intervallo $\mathcal{J} = [x_a, x_b]$, con $x_a = 0.4$V e $x_b = 0.5$V, e il vettore di servizio `xx = [x_a:(x_b-x_a)/10000:x_b]`. Si considerino le due curve $g_1(x) = x$ e $g_2(x) = B - A\exp(x/V_{th})$ e si indichi con x^* il valore della tensione corrispondente al punto di intersezione tra le due curve.

1. [**voto: 0.2/30**]
   Si tracci il grafico delle due curve sovrapposte (colore blu per g_1, colore rosso per g_2) nell'intervallo $\mathcal{J}$ e si carichi la figura risultante in formato `pdf`.

2. [**voto: 0.2/30**]
   Si utilizzi la funzione `fzero` per determinare x^* partendo da `x0 = 0`. Si definisca `xex` il valore di x^* calcolato da `fzero` e si assuma nel seguito che `xex` sia la soluzione esatta dell'equazione non lineare $g(x) = 0$. **Si esegua il comando `format long e` e si riporti il valore di x^*.**

3. [**voto: 0.4/30**]
   Si consideri l'iterazione di punto fisso

   $$x^{(k+1)} = T_g(x^{(k)}) \qquad k \geq 0, \tag{3a}$$

   dove $x^{(0)}$ è un dato iniziale in $\mathcal{J}$ e T_g è la seguente funzione di iterazione

   $$T_g(x) = V_{th} \log\left(\frac{B - x}{A}\right). \tag{3b}$$

   Si ponga $W = |T_g'(\texttt{xex})|$ dove $T_g'(x)$ è la derivata di T_g rispetto a x. **Si riporti il valore di W e si discuta la convergenza del metodo** (3a) **alla luce della teoria.**

4. [**voto: 0.4/30**]
   Si esegua il comando `[x, niter, err] = fixed_point (x0, Tg, toll, itmax);` con `x0 = 0`, `itmax = 1000` e `toll = 1e-12`, e dove `Tg` è la function handle che rappresenta T_g. Si indichi con `x_fix` l'approssimazione di x^* calcolata dalla function `fixed_point` e si calcolino l'errore stimato

   $$\texttt{EST\_ERR} = \texttt{err(end)}$$

   e l'errore effettivamente commesso

   $$\texttt{TRUE\_ERR} = \texttt{xex} - \texttt{x\_fix}.$$

   Riportare i valori di `x_fix`, `EST_ERR` e `TRUE_ERR`.

3 Analisi in regime dinamico

Si consideri il circuito non lineare illustrato in Figura 2 dove $C = 10^{-6}$F. Si definisca l'intervallo $I_T = (t_0, t_f)$ con $t_0 = 0$s e $t_f = 0.1$s, e si ponga $i_s(t) = \bar{i}_s \sin(\omega t)\exp(-t/t_d)$, dove $\bar{i}_s = 0.1$A, $\omega = 2\pi f$, con $f = 100\text{s}^{-1}$, e $t_d = 10^{-2}$s. Indichiamo con:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{3x}{2RC} + \frac{i_{sat}}{C}(1 - e^{\frac{x}{V_{th}}}) + \frac{i_s(t)}{2C} \qquad t \in I_T, \tag{4a}$$

$$x(t_0) = 0, \tag{4b}$$

il problema di Cauchy che rappresenta il modello matematico del circuito in regime dinamico.

Per l'approssimazione numerica di (4), si utilizzino:

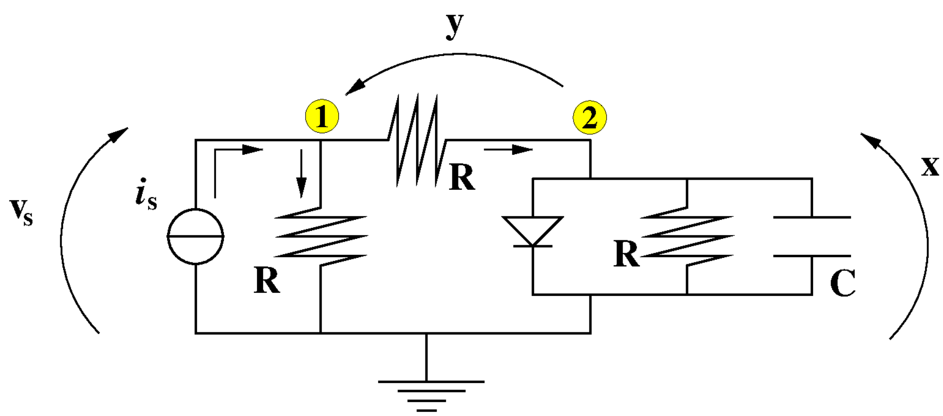

Figure 2: Circuito non lineare in regime dinamico.

(A) la function `ode15s` di Matlab;

(B) la function `crank_nicolson`.

Nel caso (A), si definisca la function handle `f(t,x)` che rappresenta il termine di destra di (4a). Nel caso (B), si definisca anche la function handle `dfdx` che rappresenta $\partial f/\partial x$, e si ponga `NT=1000`, `tol = 1e-12` e `maxit = 100`. Si risolva (4) con (A), definendo `xm` e `tm` la soluzione e il vettore dei tempi discreti forniti in uscita dalla function `ode15s`. Si calcoli

$$\Delta x_A = \max_{t \in \texttt{tm}} \texttt{xm}(t) - \min_{t \in \texttt{tm}} \texttt{xm}(t).$$

Si risolva (4) con (B), definendo `xth` e `tth` la soluzione e il vettore dei tempi discreti forniti in uscita dalla function `crank_nicolson`. Si calcoli

$$\Delta x_B = \max_{t \in \texttt{tth}} \texttt{xth}(t) - \min_{t \in \texttt{tth}} \texttt{xth}(t).$$

1. **Si riportino i valori di Δx_A e Δx_B.** [**voto: 0.8/30**]

2. Riportare sullo stesso grafico le soluzioni numeriche ottenute con i metodi sopra e si **carichi la figura risultante in formato** `pdf`.[**voto: 0.4/30**]