Lista I - Projeto e Análise de Algoritmos - 2018 S1

Cristiano A. de Souza

(1) (a) Para descobrir o valor de n, igualamos as funções

$8n^2 = 64 n \log_2 n \quad \div 8$

$n^2 = 8 n \log_2 n \quad \div n$

$n = 8 \log_2 n$

$\frac{n}{8} = \log_2 n \qquad x = \log_a b \Leftrightarrow b = a^x$

$n = 2^{\frac{n}{8}}$

?

n	$8n^2$	$64 n \log_2 n$
1	8	0
20	3200	5532
43	14792	14933
44	15488	15.373
60	28800	22682

Tabela com alguns valores

Pode-se visualizar que até n=43 o insertion sort com o custo de $8n^2$ é melhor, a partir de n>43 o merge sort é melhor.

(b) Algoritmo $A = 100n^2$ algoritmo $B = 2^n$

$100n^2 = 2^n$

é uma forma difícil de achar então chutamos valores para n

n	$100n^2$	2^n
1	100	2
5	2500	32
14	19600	16384
15	22500	32768
30	90000	1073741824

Até o valor de n=14 o algoritmo $B(2^n)$ é mais rápido, A partir de n>15 o algoritmo mais rápido é o $A\ (100n^2)$.

Portanto o menor valor de n para que o algoritmo $A(100n^2)$ execute mais rápido é o $\boxed{n=15}$

② (a) Maior tamanho de $\underline{n}$ de um problema que pode ser resolvido no tempo $\underline{t}$

computador: 10 GHz (10^{10} instruções por segundo)

$\boxed{\lg n}$ $1\,GHz = 10^9$ $10\,Ghz = 10^{10}$

$$\frac{f(n)}{10^{10}} = t$$

$$\frac{\log_2 n}{10^{10}} = 1 \text{ segundo}$$

$$\log_2 n = 10^{10}$$

$$\frac{\log_{10} n}{\log_{10} 2} = 10^{10}$$

$$\log_{10} n = 10^{10} \cdot \log_{10} 2$$

$$n = 10^{10^{10} \log_{10} 2}$$

$$n = 10^{\log_{10} 2^{10^{10}}}$$

$$n = 2^{10^{10}}$$

1 segundo $= 2^{10^{10}}$

1 minuto $= 60$ seg $\to 2^{60 \cdot 10^{10}} = 2^{6 * 10^{11}}$

1 hora $= 3600$ seg $\to 2^{3600 \cdot 10^{10}} = 2^{3{,}6 * 10^{13}}$

1 dia $= 86400$ seg $\to 2^{86400 \cdot 10^{10}} = 2^{8{,}64 * 10^{14}}$

1 mês $= 2592000 \to 2^{2592000 \cdot 10^{10}} = 2^{2{,}592 * 10^{16}}$

1 Ano $= 31536000$ seg $\to 2^{31536000 \cdot 10^{10}} = 2^{3{,}1536 * 10^{17}}$

1 seculo $= 3153600000$ seg $\to 2^{3153600000 \cdot 10^{10}} = 2^{3{,}1536 * 10^{18}}$

$\boxed{\sqrt{n}}$

1 segundo

$$\frac{f(n)}{10^{10}} = t$$

$$\frac{\sqrt{n}}{10^{10}} = 1$$

$$\sqrt{n} = 10^{10}$$

$$(\sqrt{n})^2 = (10^{10})^2$$

$$n = 10^{20}$$

1 minuto

$$\frac{f(n)}{10^{10}} = t$$

$$\frac{\sqrt{n}}{10^{10}} = 60 \text{ segundos}$$

$$\sqrt{n} = 60 \cdot 10^{10}$$

$$(\sqrt{n})^2 = (60 \cdot 10^{10})^2$$

$$n = 3{,}6 * 10^{23}$$

1 hora

$$\frac{\sqrt{n}}{10^{10}} = 3600 \text{ segundos}$$

$$\sqrt{n} = 3600 \cdot 10^{10}$$

$$(\sqrt{n})^2 = (3600 \cdot 10^{10})^2$$

$$n = 1{,}296 * 10^{27}$$

1 dia

$$\frac{\sqrt{n}}{10^{10}} = 86400 \text{ segundos}$$

$$\sqrt{n} = 86400 \cdot 10^{10}$$

$$(\sqrt{n})^2 = (8{,}6 \cdot 10^{14})^2$$

$$n = 7{,}46496 * 10^{29}$$

1 mês

$$\frac{\sqrt{n}}{10^{10}} = 2592000$$

$$\sqrt{n} = 2592000 \cdot 10^{10}$$

$$(\sqrt{n})^2 = (2{,}5 \cdot 10^{16})^2$$

$$n = 6{,}718464 * 10^{32}$$

1 ano

$$\frac{\sqrt{n}}{10^{10}} = 31536000$$

$$\sqrt{n} = 31536000 \cdot 10^{10}$$

$$(\sqrt{n})^2 = 3{,}1 \cdot 10^{17}$$

$$n = 9{,}94519296 * 10^{34}$$

1 seculo

$$\frac{\sqrt{n}}{10^{10}} = 3153600000$$

$$\sqrt{n} = 3153600000 \cdot 10^{10}$$

$$(\sqrt{n})^2 = 3{,}1 \cdot 10^{19}$$

$$n = 9{,}94519296 * 10^{38}$$

② (a) continuação

$\boxed{n}$

1 segundo
$n = 10^{10} \cdot 1 = 10^{10}$

1 minuto
$n = 10^{10} \cdot 60 = 6 * 10^{11}$

1 hora
$n = 10^{10} \cdot 3600 = 3,6 * 10^{13}$

1 dia
$n = 10^{10} \cdot 86400 =$
$n = 8,6 * 10^{14}$

1 mes
$n = 10^{10} \cdot 2592000$
$n = 2,5 * 10^{16}$

1 ano
$n = 10^{10} \cdot 31536000$
$n = 3,1 * 10^{17}$

1 seculo
$n = 10^{10} \cdot 3153600000$
$n = 3,1 * 10^{19}$

$\boxed{n \lg n}$

$$\frac{f(n)}{10^{10}} = t$$

$$\frac{n \lg n}{10^{10}} = 1$$

$$n \lg n = 10^{10}$$

$$\lg n = \frac{10^{10}}{n}$$

Propriedades logaritmos

$$\left(\log_a b = \frac{\log_x b}{\log_x a}\right)$$

$$\frac{\log_{10} n}{\log_{10} 2} = 10^{10} \cdot n^{-1}$$

$$\log_{10} n = 10^{10} \cdot n^{-1} * \log_{10} 2$$

$$\left(\log_a x^k = k \log_a x\right)$$

$$\log_{10} n = \log_{10} 2^{10^{10} \cdot n^{-1}}$$

$$\left(n = 10^x \Rightarrow \log_{10} n = x\right)$$

$$n = 10^{\log_{10} 2^{10^{10} \cdot n^{-1}}}$$

$$\left(b^{\log_a x} = x^{\log_a b}\right)$$

$$n = 2^{10^{10} \cdot n^{-1} \cdot \cancel{\log_{10} 10}}$$

$$n = 2^{10^{10} \cdot n^{-1}}$$

1 segundo $\Rightarrow 3,96 * 10^{8}$
1 minuto $\Rightarrow 1,34 * 10^{10}$
1 hora $\Rightarrow 9,85 * 10^{11}$
1 dia $\Rightarrow 2,11 * 10^{13}$
1 mes $\Rightarrow 5,67 * 10^{14}$
1 ano $\Rightarrow 6,41 * 10^{15}$
1 seculo $\Rightarrow 5,66 * 10^{16}$

m^2

② a) continuação

1 segundo

$\frac{f(n)}{10^{10}} = 1$

$n^2 = 10^{10}$

$n = \sqrt[2]{10^{10}}$

$n = 1{,}0 * 10^5$

1 minuto

$\frac{f(n)}{10^{10}} = 60$

$n^2 = 60 \cdot 10^{10}$

$n = \sqrt{60 \cdot 10^{10}}$

$n = 7{,}7 * 10^5$

1 hora

$\frac{f(n)}{10^{10}} = 3600$

$n^2 = 3600 \cdot 10^{10}$

$n = \sqrt{3600 \cdot 10^{10}}$

$n = 6{,}0 * 10^6$

1 dia

$\frac{f(n)}{10^{10}} = 86400$

$n^2 = 86400 \cdot 10^{10}$

$n = \sqrt{86400 \cdot 10^{10}}$

$n = 2{,}9 * 10^7$

1 mes

$\frac{f(n)}{10^{10}} = 2592000$

$n^2 = 2592000 \cdot 10^{10}$

$n = \sqrt{2592000 \cdot 10^{10}}$

$n = 1{,}6 * 10^8$

1 ano

$\frac{f(n)}{10^{10}} = 31536000$

$n^2 = 31536000 \cdot 10^{10}$

$n = \sqrt{31536000 \cdot 10^{10}}$

$n = 5{,}6 * 10^8$

1 seculo

$\frac{f(n)}{10^{10}} = 3153600000$

$n^2 = 3153600000 \cdot 10^{10}$

$n = \sqrt{3153600000 \cdot 10^{10}}$

$n = 5{,}6 * 10^9$

m^3

1 segundo

$\frac{f(n)}{10^{10}} = 1$

$n^3 = 10^{10}$

$n = \sqrt[3]{10^{10}}$

$n = 2{,}1 * 10^3$

1 minuto

$\frac{f(n)}{10^{10}} = 60$

$n^3 = 60 \cdot 10^{10}$

$n = \sqrt[3]{60 \cdot 10^{10}}$

$n = 8{,}4 * 10^3$

1 hora

$\frac{f(n)}{10^{10}} = 3600$

$n^3 = 3600 \cdot 10^{10}$

$n = \sqrt[3]{3600 \cdot 10^{10}}$

$n = 3{,}3 * 10^4$

1 dia

$\frac{f(n)}{10^{10}} = 86400$

$n^3 = 86400 \cdot 10^{10}$

$n = \sqrt[3]{86400 \cdot 10^{10}}$

$n = 9{,}5 * 10^4$

1 mes

$\frac{f(n)}{10^{10}} = 2592000$

$n^3 = 2592000 \cdot 1010$

$n = \sqrt[3]{2592000 \cdot 10^{10}}$

$n = 2{,}9 * 10^5$

1 ano

$\frac{f(n)}{10^{10}} = 31536000$

$n^3 = 31536000 \cdot 10^{10}$

$n = \sqrt[3]{3153600 \cdot 10^{10}}$

$n = 6{,}8 * 10^5$

1 seculo

$\frac{f(n)}{10^{10}} = 3153600000$

$n^2 = 3153600000 \cdot 10^{10}$

$n = \sqrt[3]{3153600000 \cdot 10^{10}}$

$n = 3{,}1 * 10^6$

② a) continuação

$\boxed{2^n}$

1 segundo

$\frac{f(n)}{10^{10}} = 1$

$2^n = 10^{10}$

$n = \log_2 10^{10}$

$n = \frac{\log_{10} 10^{10}}{\log_{10} 2}$

$n = \frac{10}{\log_{10} 2}$

$n = \frac{10}{0{,}301}$

$n = 33{,}22$

1 minuto

$\frac{f(n)}{10^{10}} = 60$

$2^n = 60.10^{10}$

$n = \frac{\log_{10} 60 * 10^{11}}{0{,}301}$

$n = 39{,}13$

1 hora

$\frac{f(n)}{10^{10}} = 3600$

$2^n = 3600.10^{10}$

$n = \frac{\log_{10} 3{,}6 * 10^{13}}{0{,}301}$

$n = 45{,}04$

1 dia

$\frac{f(n)}{10^{10}} = 86400$

$2^n = 86400.10^{10}$

$n = \frac{\log_{10} 8{,}6 * 10^{14}}{0{,}301}$

$n = 49{,}62$

1 mes

$\frac{f(n)}{10^{10}} = 2592000$

$2^n = 2592000.10^{10}$

$n = \frac{\log_{10} 2{,}5 * 10^{16}}{0{,}301}$

$n = 54{,}53$

1 ano

$\frac{f(n)}{10^{10}} = 31536000$

$2^n = 31536000.10^{10}$

$n = \frac{\log_{10} 3{,}1 * 10^{17}}{0{,}301}$

$n = 58{,}14$

1 seculo

$\frac{f(n)}{10^{10}} = 3153600000$

$2^n = 3153600000.10^{10}$

$n = \frac{\log_{10} 3{,}1 * 10^{19}}{0{,}301}$

$n = 64{,}78$

$\boxed{n!}$ com algoritmo

1 segundo: 13
1 minuto: 14
1 hora: 16
1 dia: 18
1 mes: 18
1 ano: 19
1 seculo: 20

② b) $f_2(n) = \sqrt{2n}$

$f_3(n) = n + 10$

$f_6(n) = n^2 \log n$

$f_1(n) = n^{2,5}$

$f_4(n) = 10^n$

$f_5(n) = 100^n$

c) a) $f(n) = n - 100$ $\quad g(n) = n - 200$

$f(n) \in \Theta(g(n))$

b) $f(n) \in O(g(n))$ pois $f(n) \leq g(n).c$

c) $f(n) \in O(g(n))$ pois $f(n) \leq g(n).c$

d) $f(n) \in \Theta(g(n))$ pois $f(n) = g(n).c$

e) $f(n) \in \Theta(g(n))$ pois $f(n) = g(n).c$

f) $f(n) \in O(g(n))$ pois $f(n) \leq g(n).c$

g) $f(n) \in \Omega(g(n))$ pois $f(n) \geq g(n).c$

h) $f(n) \in \Omega(g(n))$ pois $f(n) \geq g(n).c$

i) $f(n) \in \Omega(g(n))$ pois $f(n) \geq g(n).c$

j) $f(n) \in \Omega(g(n))$ pois $f(n) \geq g(n).c$

k) $f(n) \in O(g(n))$ pois $f(n) \leq g(n).c$

l) $f(n) \in \Theta(g(n))$ pois $f(n) = g(n).c$

m) $f(n) \in \Theta(g(n))$ pois $f(n) = g(n).c$

n) $f(n) \in O(g(n))$ pois $f(n) \leq g(n).c$

o) $f(n) \in O(g(n))$ pois $f(n) \leq g(n).c$

3) a) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Para o passo base 1

$$\sum_{i=1}^{1} i = \frac{1(1+1)}{2} \Rightarrow 1 = 1$$

supondo valido para k

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2} \Rightarrow 1+2+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Provando para k+1

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$1+2+\dots+k+k+1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + k+1 =$$

$$= \frac{k^2+k+2k+2}{2}$$

$$= \frac{k^2+3k+2}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\Rightarrow (k+1)(k+2) = k^2+2k+k+2 = k^2+3k+2$$

b) $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Para o passo base 0

$$\sum_{i=0}^{0} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \Rightarrow 0^2 = \frac{0(0+1)(2\cdot 0+1)}{6} \Rightarrow 0=0$$

supondo valido para k

$$\sum_{i=0}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \Rightarrow 0+1+4+\dots+k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Provando para k+1

$$\sum_{i=0}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}$$

$$0+1+2+4+\dots+k^2+(k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= \frac{(k^2+k)(2k+1)+(k+1)(k+1)}{6}$$

$$= \frac{2k^3+k^2+2k^2+k+k^2+2k+1}{6}$$

$$= \frac{2k^3+3k^2+k+6k^2+12k+6}{6}$$

$$= \frac{2k^3+9k^2+13k+6}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}$$

$$\Rightarrow (k^2+2k+k+2)(2(k+1)+1)$$
$$= (k^2+3k+2)(2k+3)$$
$$= 2k^3+3k^2+6k^2+9k+4k+6$$
$$= 2k^3+9k^2+13k+6$$

③ c) $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$

para o caso base (1)

$\sum_{i=1}^{1}(2.1-1) = 1^2 \Rightarrow 1=1$ ✓

supondo valido para K

$\sum_{i=1}^{k}(2.i-1) = k^2 \Rightarrow 1+3+5+\ldots+(2.k-1) = K^2$

Provando para k+1

$\sum_{i=1}^{k+1}(2.i-1) = (k+1)^2$

$1+3+5+\ldots+(2.k-1)+(2(k+1)-1) = (k+1)^2$

$\Rightarrow (k+1)(k+1)$

$= k^2+2k+1$

$= k^2+2(k+1)-1$

$= k^2+2k+2-1$

$= k^2+2k+1$

d) $\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ $\quad n \geq 1$

para o caso base (0)

$\sum_{i=0}^{0} 0^3 = \frac{0^2(0+1)^2}{4} \Rightarrow 0=0$

para o caso base (1)

$\sum_{i=0}^{1} 1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} \Rightarrow 1 = \frac{2^2}{4} \Rightarrow 1=1$ ✓

supondo valido para K

$\sum_{i=0}^{k} i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} \Rightarrow 0+1+8+\ldots+K^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$

Provando para k+1

$\sum_{i=0}^{k+1} i^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$

$0+1+8+\ldots+k^3+(k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$

$\Rightarrow \frac{(k+1)(k+1)\ (k+2)(k+2)}{4}$

$= \frac{(k^2+2k+1)(k^2+4k+4)}{4}$

$= \frac{k^4+4k^3+4k^2+2k^3+8k^2+8k+k^2+4k+4}{4}$

$= \frac{k^4+6k^3+13k^2+12k+4}{4}$

$= \frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3$

$= \frac{k^2.(k+1)(k+1)}{4}+(k+1)(k+1)(k+1)$

$= \frac{k^2(k^2+2k+1)}{4}+(k^2+2k+1)(k+1)$

$= \frac{k^4+2k^3+k^2}{4}+k^3+k^2+2k^2+2k+k+1$

$= \frac{k^4+2k^3+k^2}{4}+k^3+3k^2+3k+1$

$= k^4+2k^3+k^2+\frac{4k^3+12k^2+12k+4}{4}$

$= \frac{k^4+6k^3+13k^2+12k+4}{4}$

4) a) $T(1)=0$; $T(n) = T(n-1) + c$; c constante e $n > 1$

① Formula original

$T(n) = T(n-1) + c$

② descubra o passo

$T(n)$ esta descrito em função de $T(n-1)$

③ isole as equações para os proximos passos $T(n-1)$ e $T(n-2)$

$T(n-1) = T(n-2) + c$

$T(n-2) = T(n-3) + c$

④ substitua os valores isolados na formula original

$T(n) = T(n-1) + c$

$= (T(n-2) + c) + c$

$= (T(n-3) + c) + c) + c$

$= (T(n-3) + 3c$

⑤ identifique a formula do i-esimo passo

$T(n) = T(n-i) + i.c$

⑥ descubra o valor de (i) de forma a igualar o parametro T(X) ao parametro (valor de n) no caso base

$T(n-i) = T(1)$

$n - i = 1$

$i = n-1$

⑦ substitua o valor de (i) na formula do iesimo caso.

$T(n) = T(n-i) + i.c$

$= T(n-(n-1)) + (n-1).c$

$= T(1) + (n-1).c$

$= (n-1) * c$

⑧ complexidade: $T(n) \in O(n)$

⑨ Provando por indução

- caso base

$T(1) = n - 1 . c$

$0 = 1 - 1 . c$

$0 = 0$

- passo indutivo: $T(n-1) = ((n-1)-1) . c$

- $T(n) = T(n-1) + c$

$= ((n-1)-1).c + c$

$= c(n-1) - \cancel{c} + c$

$= (n-1).c$

4) b) $T(1) = 0;\ T(n) = T(n-1) + 2^n$

1) Formula original: $T(n) = T(n-1) + 2^n$

2) descubra o passo: $T(n)$ esta descrito em função de $T(n-1)$

3) isole as equacões para os proximos passos

$T(n-1) = T(n-2) + 2^{n-1}$

$T(n-2) = T(n-3) + 2^{n-2}$

4) substitua os valores isolados na formula Original

para $T(n-1)$

$T(n) = (T(n-2) + 2^{n-1}) + 2^n$

para $T(n-2)$

$T(n) = (T(n-3) + 2^{n-2}) + 2^{n-1} + 2^n$

$= T(n-k) + 2^{n-(k-1)} + 2^{n-(k-2)} + 2^n$

$k=n$ $\quad + 2^{n-n-1} + 2^{n-n-2} + 2^{n-k}$

$2^{-1} \quad 2^{-2} \quad + 2^0$

5) identifique a formula do iesimo passo

$T(n) = T(n-i) + 2^{n+1} - 4$

$S = \frac{(1^o\,termo).(Razão^{n}-1)}{Razão - 1}$

$= \frac{(1)(2^{(n-1)-1} - 1)}{2-1}$

$= 2^{n-1} - 1$

$= 2^{n+1} - 2^1 - 2^0 - 1$

$= 2^{n+1} - 4$

6) descubra o valor de i de forma a igualar o parametro de $T(X)$ ao parametro (valor de n) no caso base

$T(n-i) \Leftrightarrow T(1)$

$n - i = 1$

$-i = 1 - n$

$i = n - 1$

7) substitua o valor de i na formula do iesimo caso

$T(n) = T(n-i) + 2^{n+1} - 4$

$= T(n-(n-1)) + 2^{n+1} - 4$

$= T(1) + 2^{n+1} + 4$

$= 0 + 2^{n+1} - 4$

8) Identifique a complexidade dessa formula: $T(n) \in \Theta(2^n)$

10) Prova por indução

- Passo base para $n=1$

$T(1) = 2^{n+1} - 4$

$0 = 2^{1+1} - 4$

$0 = 2^2 - 4$

$0 = 0$

- Hipotese $T(n-1) = 2^{(n-1)+1} - 4$

- Passo $T(n) = T(n-1) + 2^n$

$= 2^{(n-1)+1} - 4 + 2^n$

$= 2^n + 2^n - 4$

$\boxed{= 2^{n+1} - 4}$

$T(n) = 2^{n+1} - 4$

4) c) $T(1) = K$; $T(m) = c\,T(m-1)$; c, K constantes e $m > 0$

① formula original: $T(m) = c\,T(m-1)$

② descubra o passo: $T(m)$ esta descrito em funcão de $T(m-1)$

③ isole as equações proximos passos

$T(m-1) = c\,T(m-2)$

$T(m-2) = c\,T(m-3)$

④ substituindo na formula original

$T(m-1)$: $T(m) = c(c\,T(m-2))$

$= c^2\,T(m-2)$

$T(m-2)$:

$T(m) = c^2(c\,T(m-3))$

$= c^3\,T(m-3)$

⑤ identifique a formula do i-esimo passo

$T(m) = c^i\,T(m-i)$

⑥ descobrindo valor de i de forma a igualar o parametro $T(X)$ ao valor de m do caso base

-supondo $K=1$

$T(1) = T(m-i)$

$K = m-i$

$i = m-K$

$i = m-1$

⑦ substituindo valor de i na formula do iesimo caso

$T(m) = c^i\,T(m-i) = c^{m-1}\,T(m-(m-1)) = c^{m-1}\,T(1)$

$\boxed{= c^{m-1} \cdot K}$

⑧ identifique a complexidade: $T(m) \in \Theta(c^m)$

⑨ Prova por indução

para o passo base

$T(m) = c^{m-1} \cdot K$ para $m=1$, $c=1$, $K=1$ o resultado esperado é K

$= 1^{1-1} \cdot 1$

$1 = 1$ ✓

por indução assumimos que a formula esta correta para $(m-1)$

$T(m) = c^{m-1} \cdot K$

$T(m-1) = c^{(m-1)-1} \cdot K$

$= c^{m-2} \cdot K$

temdo

$T(m) = c\,T(m-1)$

$= c(c^{m-2} \cdot K)$

$= c \cdot c^{m-2} \cdot K$

$\boxed{= c^{m-1} \cdot K}$

4) d) $T(1) = 1;\ T(n) = 3T(n/2) + n$; para $n > 1$

① Formula original: $T(n) = 3T(n/2) + n$

② tamanho do passo: $T(n/2)$

③ Expandindo proximos passos

$$T(n/2) = 3T(n/4) + n/2$$
$$T(n/4) = 3T(n/8) + n/4$$

④ Substituindo na formula original

$T(n/2)$:

$$T(n) = 3(3T(n/4) + n/2) + n$$
$$3^2 T(n/4) + \frac{3n}{2} + n$$

$T(n/4)$:

$$T(n) = 3^2(3T(n/8) + n/4) + \frac{3n}{2} + n$$
$$= 3^3 T(n/8) + \frac{3^2 n}{4} + \frac{3n}{2} + n$$
$$= 3^3 T(n/2^3) + n \cdot \left[\frac{3^2}{2^2} + \frac{3^1}{2^1} + \frac{3^0}{1^0}\right]$$

$3^0 + 3^1 + 3^2 +$

$1 + 3 + 9 +$

$1.3 = 3$

$3.3 = 9$ Razão é 3

⑤ i-esimo passo

$$T(n) = 3^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + n\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{i-1} + \left(\frac{3}{2}\right)^{i-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^0\right]$$

⑥ encontrando i

$$T(1) = T\left(\frac{n}{2^i}\right)$$
$$1 = \frac{n}{2^i} \qquad \log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$
$$2^i = n$$
$$i = \log_2 n$$

⑦ aplicando i na formula

- primeiro encontrar a formula da soma geometrica

Formula soma:

$$S = \frac{(1^\circ\ termo).(Razão^n - 1)}{Razão - 1} = \frac{(1).\left(\frac{3}{2}^{\log_2 n} - 1\right)}{\frac{3}{2} - 1} = \frac{\frac{3}{2}^{\log_2 n} - 1}{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{2}{1}\right)\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 n} - 1\right) = \left(\frac{2}{1}\right) \cdot \left(\frac{3^{\log_2 n}}{2^{\log_2 n}} - 1\right)$$

$$= \left(\frac{2}{1}\right) \cdot \left(\frac{n^{\log_2 3}}{n^{\log_2 2}} - 1\right) = \left(\frac{2}{1}\right) \cdot \left(\frac{n^{\log_2 3}}{n^1} - 1\right) = \frac{2n^{\log_2 3}}{n} - 2$$

aplicando na formula iesimo termo

$$T(n) = 3^i\, T\left(\frac{n}{2^i}\right) + \cancel{n}\left(\frac{2n^{\log_2 3}}{\cancel{n}} - 2\right)$$
$$= 3^{\log_2 n}\, T\left(\frac{n}{2^{\log_2 n}}\right) + 2n^{\log_2 3} - 2n$$
$$= n^{\log_2 3}\, T\left(\frac{n}{n^{\log_2 2}}\right) + 2n^{\log_2 3} - 2n$$
$$= n^{\log_2 3}\, T\left(\frac{n}{n}\right) + 2n^{\log_2 3} - 2n$$
$$= n^{\log_2 3}\, T(1) + 2n^{\log_2 3} - 2n$$
$$\boxed{= 3n^{\log_2 3} - 2n}$$

⑧ complexidade

$$T(n) \in \Theta(n^{\log_2 3})$$

⑨ Provando por indução

- Caso Base:

$$T(1) = 3n^{\log_2 3} - 2$$
$$1 = 3.1^{\log_2 3} - 2$$
$$1 = 3 - 2$$
$$1 = 1 \checkmark$$

- supondo:

$$T(n/2) = 3\left(\frac{n}{2}\right)^{\log_2 3} - 2\left(\frac{n}{2}\right)$$

- temos

$$T(n) = 3T(n/2) + n$$
$$= 3\left(3\left(\frac{n}{2}\right)^{\log_2 3} - 2\left(\frac{n}{2}\right)\right) + n$$
$$= 3\left(3\left(\frac{n^{\log_2 3}}{2^{\log_2 3}}\right) - 2\left(\frac{n}{2}\right)\right) + n$$
$$= 3\left(3\left(\frac{n^{\log_2 3}}{3^{\log_2 2}}\right) - 2\left(\frac{n}{2}\right)\right) + n$$
$$= 3\left(\cancel{3}\left(\frac{n^{\log_2 3}}{\cancel{3}}\right) - \cancel{2}\left(\frac{n}{\cancel{2}}\right)\right) + n$$
$$= 3n^{\log_2 3} - 3n + n$$
$$\boxed{= 3n^{\log_2 3} - 2n}$$

(4) e) $T(1) = 1 \quad T(n) = 8T(n/2) + n$

① Formula original: $T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + n$

② Tamanho do passo: $T(n/2)$

③ Expandindo proximos passos: $T(n/2)$ e $T(n/4)$

$$T(n/2) = 8T(n/4) + \frac{n}{2}$$

$$T(n/4) = 8T(n/8) + \frac{n}{4}$$

④ substituindo

$T(n/2)$

$$T(n) = 8\left(8T(n/4) + \frac{n}{2}\right) + n$$

$$= 8^2 T(\tfrac{n}{4}) + 4n + n$$

$T(n/4)$

$$T(n) = 8^2\left(8T(\tfrac{n}{8}) + \tfrac{n}{4}\right) + 4n + n$$

$$= 8^3 T(\tfrac{n}{8}) + 16n + 4n + n$$

$$= 8^3 T(\tfrac{n}{2^3}) + 4^2 n + 4^1 n + 4^0 n$$

⑤ iesimo passo

$$T(n) = 8^i T(\tfrac{n}{2^i}) + 4^{i-1} n + 4^{i-2} n + 4^0 n$$

$$= 8^i T(\tfrac{n}{2^i}) + n\left[4^{i-1} + 4^{i-2} + 4^0\right]$$

Primeiro termo = 1

$1 . 4 = 4$

$4 . 4 = 16$ Razão é 4

$1 . 4^1 = 4$

$1 . 4^2 = 16$

⑥ descobrindo valor de i

$$T(\tfrac{n}{2^i}) = T(1)$$

Logaritmo: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$

$$\frac{n}{2^i} = 1$$

$$n = 2^i$$

$$i = \log_2 n$$

⑦ substituindo valor de i na formula

Antes ache o valor da serie geometrica

soma finita

$$S = \frac{(1^o \text{termo})(\text{Razão}^n - 1)}{\text{Razão} - 1}$$

$$= \frac{(1)(4^{(\log_2 n)}) - 1}{4-1} = \frac{4^{\log_2 n} - 1}{3}$$

$$= \frac{n^{\log_2 4^2} - 1}{3} = \frac{n^2 - 1}{3}$$

$$T(n) = 8^{\log_2 n} T(\tfrac{n}{2^i}) + n\left(\frac{n^2 - 1}{3}\right)$$

$$= n^{\log_2 8} T(1) + \frac{n^3 - n}{3}$$

$$= n^3 + \frac{n^3 - n}{3}$$

$$= \frac{3n^3 + n^3 - n}{3}$$

$$= \frac{4n^3 - n}{3}$$

⑧ complexidade

$$T(n) = 8T(\tfrac{n}{2}) + n \in \Theta(n^3)$$

⑨ Prova por indução

- Para o caso base

$$T(1) = \frac{4 . 1^3 - 1}{3}$$

$$1 = \frac{4 - 1}{3}$$

$$1 = 1$$

- supondo:

$$T(n/2) = \frac{4(\frac{n}{2})^3 - (\frac{n}{2})}{3}$$

$$T(n) = 8T(\tfrac{n}{2}) + n$$

$$= 8\left(\frac{4(\frac{n}{2})^3 - (\frac{n}{2})}{3}\right) + n$$

$$= \frac{32(\frac{n}{2})^3 - 8(\frac{n}{2})}{3} + n$$

$$= \frac{32\frac{n^3}{2^3} - \frac{8n}{2}}{3} + n$$

$$= \frac{\frac{32n^3}{2^3} - \frac{8n}{2}}{3} + n$$

$$= \frac{4n^3 - 4n + 3n}{3}$$

$$= \frac{4n^3 - n}{3}$$

4 f) $T(1) = 1; \quad T(n) = T(n/3) + n$

① formula original: $T(n) = T(\frac{n}{3}) + n$

② tamanho do passo: $T(n/3)$

③ expandindo proximos passos: $T(n/3)$ e $T(n/6)$

$$T(n/3) = T(n/9) + n/3$$

$$T(n/9) = T(n/27) + n/9$$

④ substituindo em $T(n)$

$T(n/3)$

$$T(n) = (T(n/9) + \frac{n}{3}) + n$$

$T(n/9)$

$$T(n) = (T(n/27) + \frac{n}{9}) + \frac{n}{3} + n$$

$$= T(\frac{n}{3^3}) + \frac{n}{3^2} + \frac{n}{3^1} + \frac{n}{3^0}$$

Razão é $\left(\frac{1}{3}\right)$

$$= T(\frac{n}{3^3}) + n\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^0\right]$$

⑥ iesimo passo

$$T(n) = T(\frac{n}{3^i}) + n\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{i-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^0\right]$$

⑦ encontrando i

$$T(\frac{n}{3^i}) = T(1)$$

$$\frac{n}{3^i} = 1 \qquad \log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

$$n = 3^i$$

$$i = \log_3 n$$

Formula da soma Geometrica

$$S = \frac{(1^\circ termo)(Razão^n - 1)}{Razão - 1} = \frac{(1).\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 n} - 1}{\frac{1}{3} - 1}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 n} - 1}{\frac{1-3}{3}} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 n} - 1}{\frac{-2}{3}} = \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 n} - 1\right)$$

$$\frac{-2}{+3} = -$$

$$= \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{n^{\log_3 1}}{n^{\log_3 3}} - 1\right) = \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{n^0}{n^1} - 1\right)$$

$$= \boxed{\frac{-3}{2n} + \frac{3}{2}}$$

⑧ substituindo na formula

$$T(n) = T(1) + \frac{n}{1}\left[-\frac{3}{2n} + \frac{3}{2}\right]$$

$$= 1 + \left[-\frac{3\cancel{n}}{2\cancel{n}} + \frac{3n}{2}\right]$$

$$= \frac{3n}{2} - \frac{3}{2} + 1$$

$$= \frac{3n - 3 + 2}{2}$$

$$\boxed{= \frac{3n - 1}{2}}$$

⑧ complexidade: $T(n) = T(n/3) + n \in \Theta(n)$

⑨ Prova por indução

Base: $T(1) = \frac{3.1 - 1}{2}$

$$1 = \frac{2}{2}$$

$$1 = 1 \checkmark$$

supondo:

$$T(n/3) = \frac{3\left(\frac{n}{3}\right) - 1}{2}$$

Portanto: $T(n) = T(n/3) + n$

$$= \frac{3(n/3) - 1}{2} + n$$

$$= \frac{\frac{3}{1}\left(\frac{n}{3}\right) - 1}{2} + n = \frac{\frac{3n}{3} - 1}{2} + n = \frac{n - 1}{2} + n$$

$$= \frac{n - 1 + 2n}{2} = \boxed{\frac{3n - 1}{2}}$$

4 G) $T(1) = 1; \quad T(n) = 7T(n/4) + n$

① Formula original: $T(n) = 7T(n/4) + n$

② tamanho do passo: $T(n/4)$

③ Expandindo proximos passos $T(n/4)$ e $T(n/16)$

$$T(n/4) = 7T(n/16) + (n/4)$$
$$T(n/16) = 7T(n/64) + (n/16)$$

④ substituindo na formula:

$T(n/4)$:
$$T(n) = 7T(n/4) + n$$
$$= 7(7T(n/16) + n/4) + n$$
$$= 7^2 T(n/16) + \frac{7n}{4} + n$$

$T(n/16)$
$$= 7^2(7T(n/64) + (n/16)) + \frac{7n}{4} + n$$
$$= 7^3 T(n/64) + \frac{7^2 n}{16} + \frac{7n}{4} + n$$
$$= 7^3 T(n/4^3) + n\left[\left(\frac{7}{4}\right)^{i-2} + \left(\frac{7}{4}\right)^{i-1} + \left(\frac{7}{4}\right)^{0}\right]$$

⑤ iesimo passo
$$T(n) = 7^i T(n/4^i) + n\left[\left(\frac{7}{4}\right)^{i-1} + \left(\frac{7}{4}\right)^{i-2} + \left(\frac{7}{4}\right)^{0}\right]$$

⑥ Encontrando valor de i
$$T(1) = T(n/4^i)$$
$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$
$$1 = \frac{n}{4^i}$$
$$4^i = n$$
$$i = \log_4 n$$

⑦ Aplicando na formula de i-esimo passo
$$T(n) = 7^{\log_4 n} T\left(\frac{n}{4^{\log_4 n}}\right) + n\left(\frac{4n^{\log_4 7}}{3n} - \frac{4}{3}\right)$$
$$= n^{\log_4 7} T\left(\frac{n}{n^{\log_4 4}}\right) + \frac{n}{1}\left(\frac{4n^{\log_4 7}}{3n} - \frac{4}{3}\right)$$
$$= n^{\log_4 7} T(1) + \frac{4n^{\log_4 7}}{3} - \frac{4n}{3}$$
$$= n^{\log_4 7} + \frac{4n^{\log_4 7} - 4n}{3}$$
$$= \boxed{\frac{7n^{\log_4 7} - 4n}{3}}$$

⑧ complexidade
$$T(n) \in \Theta(n^{\log_4 7})$$

⑨ Prova por indução

① caso base: $T(1) = \frac{7 \cdot 1^{\log_4 7} - 4 \cdot 1}{3}$

$1 = 1$ ✓

② supondo
$$T(n/4) = \frac{7(n/4)^{\log_4 7} - 4(n/4)}{3}$$

③ tendo
$$T(n) = 7T(n/4) + n$$
$$= 7\left(\frac{7(n/4)^{\log_4 7} - 4(n/4)}{3}\right) + n$$

Encontrando soma da serie Geometrica
$$S = \frac{(1^{o}\,termo) \cdot (Razão^n - 1)}{Razão - 1}$$
$$= \frac{(1) \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^{\log_4 n} - 1}{\left(\frac{7}{4}\right) - 1}$$
$$= \frac{\left(\frac{7}{4}\right)^{\log_4 n} - 1}{\frac{7}{4} - \frac{4}{4}} = \frac{\left(\frac{7}{4}\right)^{\log_4 n} - 1}{\left(\frac{3}{4}\right)}$$
$$= \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^{\log_4 n} - 1$$
$$= \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{7^{\log_4 n}}{4^{\log_4 n}} - 1\right)$$
$$= \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{n^{\log_4 7}}{n^{\log_4 4}} - 1\right)$$
$$= \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{n^{\log_4 7}}{n} - 1\right)$$
$$= \frac{4n^{\log_4 7}}{3n} - \frac{4}{3}$$

$$= 7\left(\frac{7\left(\frac{n}{4}\right)^{\log_4 7} - n}{3}\right) + n$$
$$= 7\left(\frac{7\left(\frac{n^{\log_4 7}}{4^{\log_4 7}}\right) - n}{3}\right) + n$$
$$= 7\left(\frac{\cancel{7}\left(\frac{n^{\log_4 7}}{\cancel{7}}\right) - n}{3}\right) + n$$
$$= 7\left(\frac{n^{\log_4 7} - n}{3}\right) + n$$
$$= \frac{7n^{\log_4 7} - 7n + 3n}{3}$$
$$= \boxed{\frac{7n^{\log_4 7} - 4n}{3}}$$

④ h) $T(1) = 1$; $T(n) = 3T(n/4) + n^2$

① Formula original: $T(n) = 3T(n/4) + n^2$

② Tamanho do passo: $T(n/4)$

③ Expandindo proximos passos: $T(n/4)$ e $T(n/16)$

$$T(n/4) = 3T(n/16) + \left(\frac{n}{4}\right)^2$$
$$T(n/16) = 3T(n/64) + \left(\frac{n}{16}\right)^2$$

④ aplicando na formula $T(n/4)$:

$$T(n) = 3\left(3T\left(\frac{n}{16}\right) + \left(\frac{n}{4}\right)^2\right) + n^2$$
$$= 3^2 T\left(\frac{n}{16}\right) + 3\left(\frac{n}{4}\right)^2 + n^2$$
$$= 3^2\left(3T\left(\frac{n}{64}\right) + \left(\frac{n}{16}\right)^2\right) + 3\left(\frac{n}{4}\right)^2 + n^2$$
$$= 3^3 T\left(\frac{n}{4^3}\right) + 3^2\left(\frac{n}{16}\right)^2 + 3\left(\frac{n}{4}\right)^2 + n^2$$
$$= 3^3 T\left(\frac{n}{4^3}\right) + \left(\frac{3}{4^2}\right)^2 n^2 + \left(\frac{3}{4^2}\right) n^2 + n^2$$
$$= 3^3 T\left(\frac{n}{4^3}\right) + n^2\left[\left(\frac{3}{4^2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4^2}\right)^1 + \left(\frac{3}{4^2}\right)^0\right]$$

⑤ iesimo passo:

$$T(n) = 3^i T\left(\frac{n}{4^i}\right) + n^2\left[\left(\frac{3}{4^2}\right)^{i-1} + \left(\frac{3}{4^2}\right)^{i-2} + \left(\frac{3}{4^2}\right)^0\right]$$

Formula da Soma Geometrica

$$S = \frac{(1^{\circ}\text{ termo})(\text{razão}^{n} - 1)}{\text{Razão} - 1}$$
$$= \frac{(1)\left(\left(\frac{3}{4^2}\right)^{\log_4 n} - 1\right)}{\frac{3}{4^2} - 1}$$
$$= \frac{\frac{3^{\log_4 n}}{4^{\log_4 n}} - 1}{\frac{-13}{16}}$$
$$= \frac{\frac{n^{\log_4 3}}{n^{\log_4 16}} - 1}{\frac{-13}{16}}$$
$$= \left(-\frac{16}{13}\right)\left(\frac{n^{\log_4 3}}{n^2} - 1\right)$$
$$= \frac{16\, n^{\log_4 3}}{13 n^2} + \frac{16}{13}$$

⑥ encontrando valor de i

$$T(1) = T\left(\frac{n}{4^i}\right)$$
$$1 = \frac{n}{4^i} \qquad \log_a b = x \iff b = a^x$$
$$4^i = n$$
$$i = \log_4 n$$

⑦ aplicando na formula do

$$T(n) = 3^{\log_4 n}\, T\left(\frac{n}{4^{\log_4 n}}\right) + n^2\left(-\frac{16}{13}\left(\frac{n^{\log_4 3}}{n^2} - 1\right)\right)$$
$$= 3^{\log_4 n}\, T\left(\frac{n}{n}\right) + \left(-\frac{16}{13}\right)\left(n^{\log_4 3} - n^2\right)$$
$$= n^{\log_4 3}\, T(1) - \frac{16}{13} n^{\log_4 3} + \left(\frac{16}{13}\right) n^2$$
$$= \frac{13 n^{\log_4 3} - 16 n^{\log_4 3}}{13} + \left(\frac{16}{13}\right) n^2$$
$$\boxed{= \frac{-3 n^{\log_4 3}}{13} + \left(\frac{16}{13}\right) n^2}$$

- indução

- base: $T(1) = -\frac{3(1)^{\log_4 3}}{13} + \left(\frac{16}{13}\right) 1^2$

$$1 = \frac{13}{13}$$
$$1 = 1$$

- hipotese: $T\left(\frac{n}{4}\right) = \frac{-3\left(\frac{n}{4}\right)^{\log_4 3}}{13} + \left(\frac{16}{13}\right)\left(\frac{n}{4}\right)^2$

$$= -\frac{3\left(\frac{n^{\log_4 3}}{4^{\log_4 3}}\right)}{13} + \left(\frac{16}{13}\right)\left(\frac{n^2}{16}\right)$$
$$= -\frac{3\left(\frac{n^{\log_4 3}}{3}\right)}{13} + \frac{n^2}{13}$$
$$= -\frac{n^{\log_4 3}}{13} + \frac{n^2}{13}$$

- passo indução

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2$$
$$= 3\left(-\frac{n^{\log_4 3}}{13} + \frac{n^2}{13}\right) + n^2$$
$$= -\frac{3 n^{\log_4 3}}{13} + \frac{3}{13} n^2 + \frac{13}{13} n^2$$
$$\boxed{= \frac{-3 n^{\log_4 3}}{13} + \frac{16 n^2}{13}}$$

5 (a) $T(n) = T(n/2) + \Theta(1)$

$T(n) = a\,T(n/b) + f(n)$

$a = 1 \quad b = 2$ $\qquad f(n) = \Theta(1) = 1$

$\log_b a = \log_2 1 = 0$

caso 1: $f(n) \in O(n^{\log_b a - \varepsilon}) = O(n^{0-\varepsilon})$ Não é valido para $\varepsilon > 0$.

caso 2: $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^0) = \Theta(1)$

então $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log n)$

$T(n) \in \Theta(1 \cdot \log n)$

(b) $T(n) = T(9n/10) + n$

$T(n) = a\,T(n/b) + f(n)$ $\qquad \frac{n}{b} = \frac{9 \cdot n}{10} \Rightarrow \frac{10n}{b} = 9n \Rightarrow \frac{10\cancel{n}}{9\cancel{n}} = b$

$a = 1 \quad b = \frac{9n}{10} = \frac{10}{9}$

$\log_b a = \log_{\frac{10}{9}} 1 = 0$

$f(n) = n$

caso 1: $f(n) \in O(n^{\log_{\frac{10}{9}} 1}) = O(n^{0-\varepsilon})$ não é valido para $\varepsilon > 0$

caso 2° se $f(n) \in \Theta(n^{\log \frac{10}{9} 1}) = \Theta(n^0) = \Theta(1)$ não é valido $f(n) > \Theta(1)$

caso 3° se $f(n) \in \Omega(n^{\log_{\frac{10}{9}} 1}) = \Omega(n^{0+\varepsilon})$ sendo $\varepsilon = 1$ ($\varepsilon > 0$)

será caso 3 se satisfazer a condição de regularidade

$a f(\frac{n}{b}) \leq c f(n)$ para $c < 1$

$1 \cdot (\frac{9n}{10}) \leq \frac{9}{10}(n)$ para $c = \frac{9}{10}$ ($c < 1$)

Portanto se encaixa no caso 3

$T(n) \in \Theta(f(n)) = \Theta(n)$

(c) $T(n) = 16\,T(\frac{n}{4}) + n^2$

$T(n) = a\,T(\frac{n}{b}) + f(n)$ $\qquad a = 16 \quad b = 4 \quad f(n) = n^2$

$\log_b a = \log_4 16 = 2$

caso 1: se $f(n) \in O(n^{\log_4 16 - \varepsilon}) = O(n^{2-\varepsilon})$

não é valido para $\varepsilon > 0$

caso 2: se $f(n) \in \Theta(n^{\log_4 16}) = \Theta(n^2)$

$n^2 \in \Theta(n^2)$

Portanto

$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log n) = \Theta(n^2 \log n)$

5 (d) $T(n) = 7T(n/3) + n^2$

$T(n) = aT(n/b) + f(n)$

$a = 7 \quad b = 3 \quad \log_b a = \log_3 7 \cong 1,77$

se caso 1: $f(n) \notin O(n^{\log_3 7 - \varepsilon})$ (não valido pois $f(n) = n^2$)

se caso 2: $f(n) \notin \Theta(n^{\log_3 7})$ (não é valido pois $f(n) \in n^2$)

se caso 3: $f(n) \in \Omega(n^{\log_3 7 + \varepsilon})$ para $\varepsilon > 0$

$a f(n/b) \leq c \cdot f(n)$

$7 \cdot (n/3) \leq \frac{1}{3} n^2$

portanto se encaixa no caso 3

então $T(n) \in \Theta(n^2)$

(e) $T(n) = 7T(n/2) + n^2$

$T(n) = aT(n/b) + f(n)$

$a = 7 \quad b = 2 \quad \log_b a = \log_2 7 \cong 2,80$

Se caso 1:

$f(n) \in O(n^{(\log_2 7) - \varepsilon})$ para $\varepsilon > 0$

$\log_2 7 > 2$ e $\log_2 7 - \varepsilon > 2$ para $\varepsilon > 0$

portanto se encaixa no caso 1, então:

$f(n) \in \Theta(n^{\log_2 7})$

(f) $T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n}$

$T(n) = aT(n/b) + f(n)$

$a = 2 \quad b = 4 \quad \log_b a = \log_4 2 = \frac{1}{2} \quad f(n) = \sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}}$

Se caso 1: $f(n) \in O(n^{(\log_2 4) - \varepsilon}) = O(n^{\frac{1}{2} - \varepsilon})$ portanto não é valido pois $f(n) = n^{\frac{1}{2}}$

se caso 2 $f(n) \in \Theta(n^{\log_2 4}) = \Theta(n^{\frac{1}{2}})$ é valido pois $f(n) = n^{\frac{1}{2}}$

Portanto

$T(n) \in \Theta(n^{\frac{1}{2}} \log n)$ ou $\Theta(\sqrt{n} \log n)$

(5) (g) $T(n) = 4T(n/2) + n^2\sqrt{n}$

$T(n) = aT(n/b) + f(n)$

$a = 4 \quad b = 2 \quad \log_b a = \log_2 4 = 2 \qquad f(n) = n^2\sqrt{n} = n^2 n^{1/2}$

Se caso 1:

$f(n) \in O(n^{(\log_b a)-\varepsilon})$ para $\varepsilon > 0$

$n^2 n^{1/2} \in O(n^{2-\varepsilon})$ invalido

se caso 2:

$f(n) \in \Theta(n^{(\log_b a)})$

$n^2 n^{1/2} \notin \Theta(n^2)$ invalido

se caso 3:

$f(n) \in \Omega(n^{(\log_b a)+\varepsilon})$ para $\varepsilon > 0$

$n^2 n^{1/2} \in \Omega(n^{2+\varepsilon})$ é valido para um $\varepsilon < 0{,}5$

$af(\frac{n}{b}) \leq c.f(n)$ para $c < 1$

$\frac{4n}{2} \leq \frac{1}{2} n^2 n^{1/2}$

$2n \leq \frac{1}{2} n^{5/2}$

Portanto $T(n) \in \Theta(n^{5/2})$

(h) $T(n) = 27T(n/3) + n^3$

$T(n) = aT(n/b) + f(n)$

$a = 27 \quad b = 3 \quad \log_b a = \log_3 27 = 3 \qquad f(n) = n^3$

se caso 1:

$f(n) \in O(n^{\log_b a - \varepsilon}) = O(n^{(\log_3 27)-\varepsilon})$ não é valido para um $\varepsilon > 0$.

pois $f(n) = n^3$ e $n^{\log_3 27} = n^3$

se caso 2:

$f(n) \in \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^{\log_3 27}) = \Theta(n^3)$

$n^3 \in \Theta(n^3)$

Portanto é caso 2 e

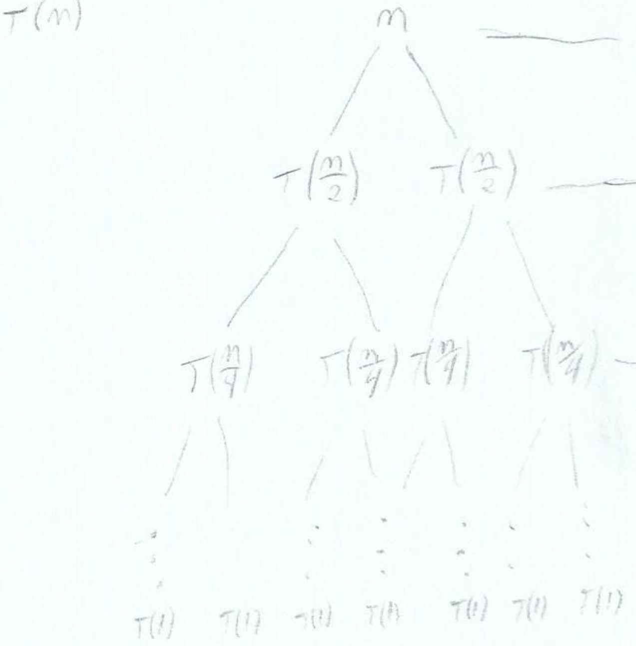
$T(n) \in \Theta(n^{\log_3 27} \log n)$

$T(n) \in \Theta(n^3 \log n)$

6

(a) $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$ (merge sort)

$T(n)$



$\left(\frac{2}{2}\right)^0 n = n$

$\left(\frac{2}{2}\right)^1 n = n$

$\left(\frac{2}{2}\right)^2 \cdot n = n$

Numero de Niveis

$\log_2 n + 1$

iesimo

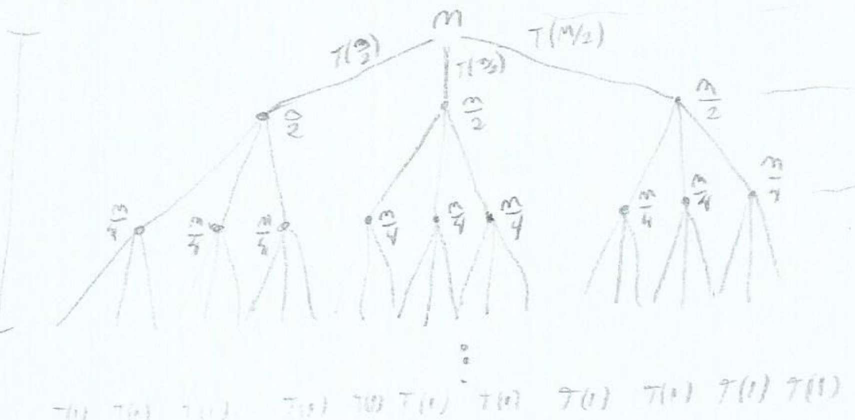
$\frac{n}{2^i} = 1 \qquad n = 2^i \Rightarrow i = \log_2 n$

altura , total por nivel

$T(n) = (\log_2 n + 1) \cdot n$

$= n\log_2 n + n$ sendo $O(n \log_2 n)$

(b) $T(n) = 3T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$



$n = \left(\frac{3}{2}\right)^0 n$

$\frac{3n}{2} = \left(\frac{3}{2}\right)^1 n$

$\frac{9n}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 n$

Numero de niveis

$\frac{n}{2^i} = 1$

$n = 2^i$

$i = \log_2 n$

Soma Geometrica

$S = \frac{(1^o\ termo)(razão^n - 1)}{razão - 1}$

$S = \frac{1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 n + 1} - 1}{\frac{3}{2} - 1}$

$S = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 n + 1} - 1}{\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 n}\left(\frac{3}{2}\right) - 1}{\frac{1}{2}}$

$= \frac{\left(\frac{3^{\log_2 n}}{2^{\log_2 n}}\right)\left(\frac{3}{2}\right) - 1}{\frac{1}{2}}$

$= \frac{\left(\frac{n^{\log_2 3}}{n^{\log_2 2}}\right)\left(\frac{3}{2}\right) - 1}{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{n^{\log_2 3}}{n}\right)\left(\frac{3}{2}\right) - 2$

$= \frac{n^{\log_2 3}}{n} \cdot 3 - 2$

$T(n) = n + \frac{3}{2}n + \frac{9}{4}n + \dots$

$= n\left[\left(\frac{3}{2}\right)^0 + \left(\frac{3}{2}\right)^1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \dots\right]$

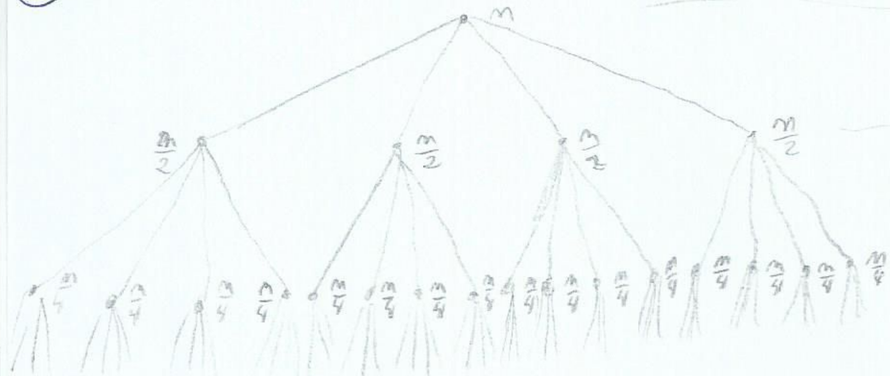
$= n\left[\frac{n^{\log_2 3}}{n} \cdot 3 - 2\right]$

$= n^{\log_2 3} \cdot 3n - 2n$

$= 3n^{\log_2 3} - 2n$

Portanto $T(n) \in O(n^{\log_2 3})$

⑥ (c) $T(m) = 4T(\lfloor \frac{m}{2} \rfloor) + \Theta(m)$



$\left(\frac{4}{2}\right)^0 m = m$

$\left(\frac{4}{2}\right)^1 m = 2m$

$\left(\frac{4}{2}\right)^2 m = 4m$

i-esimo

$\frac{m}{2^i} = 1 \Rightarrow m = 2^i \Rightarrow i = \log_2 m$

Niveis $= \log_2 m + 1$

$T(m) = m + 2m + 4m + \dots$

$= m\left[2^0 + 2^1 + 2^2 \dots\right]$

$T(m) = m\left[2m - 1\right]$

$= 2m^2 - m$

portanto $T(m) \in O(m^2)$

⇒ Soma Geometrica

$S = \frac{(1^o)(\text{Razão}^m - 1)}{\text{Razão} - 1}$

$S = \frac{1(2^{(\log_2 m)+1} - 1)}{2 - 1}$

$S = \frac{2^{\log_2 m + 1} - 1}{1}$

$= 2^{\log_2 m + 1} - 1$

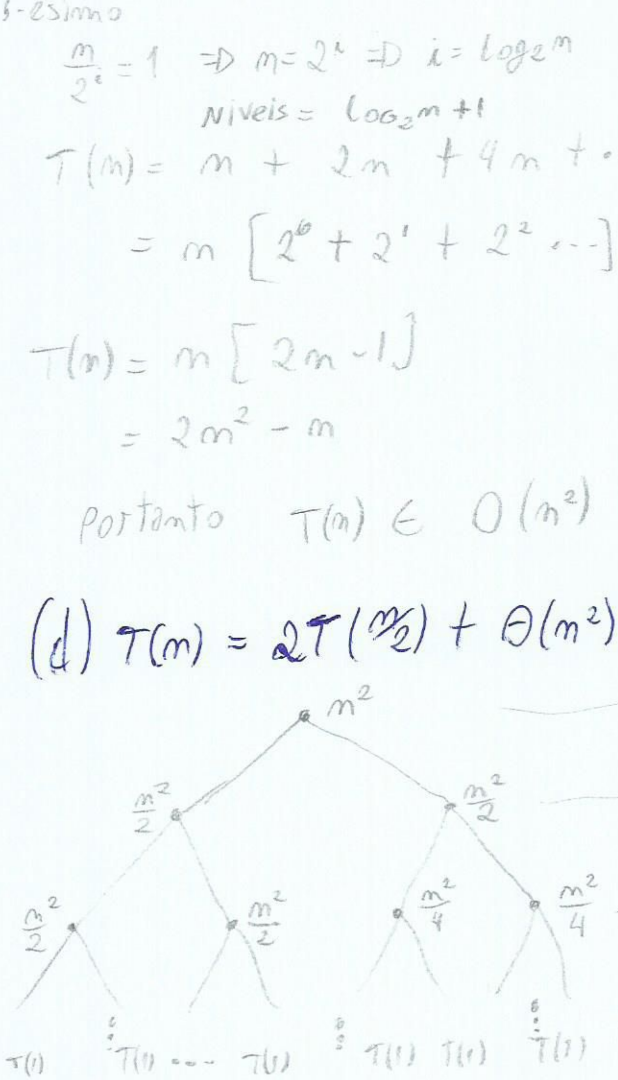
$= (2^{\log_2 m})(2) - 1$

$= m^{\log_2 2}(2) - 1$

$= m \cdot 2 - 1$

$= 2m - 1$

(d) $T(m) = 2T(m/2) + \Theta(m^2)$



$\left(\frac{2}{2}\right)^0 m^2$ — m^2

$\left(\frac{2}{2}\right)^1 m^2$ — m^2

$\left(\frac{2}{2}\right)^2 m^2$ — m^2

$\frac{m}{2^i} = 1$

$m = 2^i$

$i = \log_2 m$

Niveis $= \log_2 m + 1$

$T(m) = \underbrace{m^2 + m^2 + m^2 + \dots}_{(i+1) \cdot m^2}$ ⇒

$T(m) =$ Numero Niveis . Soma por nivel

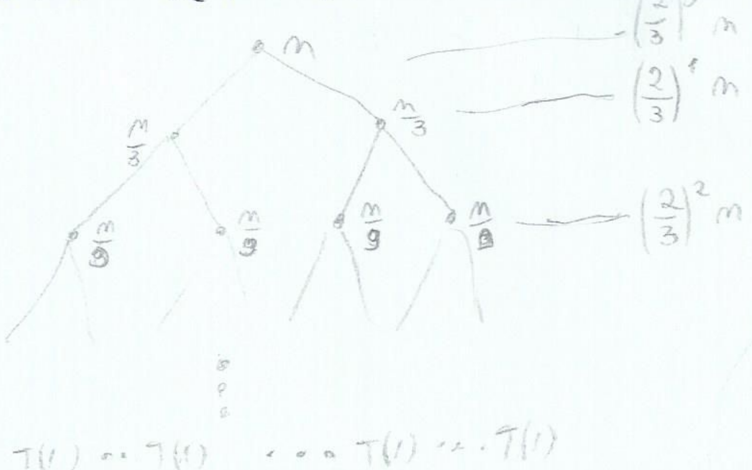
$= (\log_2 m + 1) \cdot m^2$

$= m^2 \log_2 m + m^2$

portanto

$T(m) \in O(m^2 \log_2 m)$

⑥ (e) $T(n) = 2T(n/3) + \Theta(n)$



$\frac{n}{3^i} = 1$

$n = 3^i \Leftrightarrow i = \log_3 n$

Níveis: $\log_3 n + 1$

Soma Geométrica

$S = \frac{(1^o \text{ termo}) \cdot (\text{Razão}^n - 1)}{\text{Razão} - 1}$

$S = \frac{(1) \cdot \left(\frac{2}{3}^{\log_3 n + 1} - 1\right)}{\frac{2}{3} - 1}$

$S = \frac{\left(\frac{2}{3}^{\log_3 n}\right)\left(\frac{2}{3}\right) - 1}{-\frac{1}{3}}$

$S = \left(-\frac{3}{1}\right)\left(\frac{2^{\log_3 n}}{3^{\log_3 n}}\right)\left(\frac{2}{3}\right) + 3$

$S = \frac{2^{\log_3 n}}{3^{\log_3 n}} \cdot (-2) + 3$

$S = \frac{n^{\log_3 2}}{n^{\log_3 3}} \cdot (-2) + 3$

$S = \frac{n^{\log_3 2}}{n} \cdot (-2) + 3$

$S = \frac{2n^{\log_3 2}}{n} + 3$

$T(n) = n + \frac{2}{3}n + \frac{4}{9}n + \dots$

$= n\left[\left(\frac{2}{3}\right)^0 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots\right]$

$T(n) = \cancel{n}\left[\frac{2n^{\log_3 2}}{\cancel{n}} + 3\right]$

$T(n) = 2n^{\log_3 2} + 3n$

Portanto

$T(n) \in O(n^{\log_3 2})$

⑦ (a) Algoritmo A = Divide em 5 subproblemas de metade do tamanho $5T(\frac{n}{2})$, combina soluções em $O(n)$

$T(n) = 5T(\frac{n}{2}) + O(n)$

$T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$

$a = 5 \quad b = 2 \quad \log_b a = \log_2 5 \quad f(n) = n$

Caso 1. $f(n) \in O(n^{(\log_b a) - \varepsilon})$ para $\varepsilon > 0$

$n \in O(n^{(\log_2 5) - \varepsilon})$

Portanto $T(n) \in \Theta(n^{\log_2 5})$

(b) Algoritmo B = Divide em dois subproblemas de tamanho $(n-1)$, combina soluções em $f(n) = O(1)$

$T(n) = 2T(n-1) + O(1)$

Pelo método da expansão telescópica
- Tamanho do passo $T(n-1)$
- Expandindo próximos passos

$T(n-1) = 2T(n-2) + 1$

$T(n-2) = 2T(n-3) + 1$

7) continuação

- substituindo em $T(n)$

$T(n-1)$.

$$T(n) = 2T(n-1)+1$$
$$= 2(2T(n-2)+1)+1 = 2^2 T(n-2)+2+1$$

$T(n-2)$

$$T(n) = 2^2(2T(n-3)+1)+2+1$$
$$= 2^3 T(n-3) + \underbrace{2^2 + 2^1 + 2^0}$$

→ serie geometrica

$$S = \frac{(1^{\circ}\text{termo})(\text{Razao}^n - 1)}{\text{Razao} - 1}$$

$$S = \frac{1 \cdot 2^{n-1} - 1}{2-1}$$

$$S = 2^{n-1} - 1$$

- Encontrando iesimo passo

$$T(n) = 2^i T(n-i) + 2^{i-1} + 2^{i-2} + 2^0$$

- Encontrando i

$$T(n-i) = T(1)$$
$$n-i = 1$$
$$i = n-1$$

- substituindo i na formula

$$T(n) = 2^{n-1} T(n-(n-1)) + 2^{n-1} - 1$$
$$= 2^{n-1} \cdot 1 + 2^{n-1} - 1$$
$$= 2^1 \cdot 2^{n-1} - 1$$
$$\boxed{= 2^n - 1}$$

- Provando por indução
- caso base

$$T(1) = 2^n - 1$$
$$1 = 2^1 - 1$$
$$1 = 1 \checkmark$$

- supondo $T(n-1) = 2^{n-1} - 1$

- $T(n) = 2T(n-1) + 1$

$$= 2^1(2^{n-1} - 1) + 1$$
$$= 2^n - 2 + 1$$
$$\boxed{= 2^n - 1}$$

Portanto:

$$T(n) \in O(2^n)$$

(C) Algoritmo C: Divide em 9 subproblemas de $n/3$ combina soluções em $O(n^2)$

$$T(n) = 9T(n/3) + O(n^2)$$

- Teorema mestre $\quad a = 9 \quad b = 3 \quad f(n) = O(n^2) = n^2$

$$n^{\log_b a} = n^{\log_3 9} = n^2$$

$$f(n) = n^{\log_b a}$$
$$n^2 = n^2 \quad \text{Portanto é caso 2.}$$

então,

$$T(n) \in \Theta(n^2 \log n)$$

⑦ continuação

- consumo de tempo de cada algoritmo

  Algoritmo a) $\Theta(n^{\log_2 5})$

  Algoritmo b) $\Theta(2^n)$

  Algoritmo c) $\Theta(n^2 \log_2 n)$

A complexidade do algoritmo da letra a) é mais eficiente assintoticamente no pior caso, pois sua complexidade do tempo é $T(n) = \Theta(n^{\log_2 5})$. fazendo comparação com os outros algoritmos, ele é melhor pois tem um valor fixo em seu expoente.

8 (a) temos $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + c$

-pelo metodo da iteração

-expandindo proximos passos

$T(\frac{n}{2}) = 2T(\frac{n}{4}) + c$

$T(\frac{n}{4}) = 2T(\frac{n}{8}) + c$

-substituindo na formula

$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + c$

$= 2(2T(\frac{n}{4}) + c) + c$

$= 2^2(2T(\frac{n}{8}) + c) + 2c + c$

$= 2^3 T(\frac{n}{8}) + 2^2 c + 2c + c$

$= 2^3 T(\frac{n}{8}) + c[2^2 + 2^1 + 2^0]$

- iesimo passo

$= 2^i T(\frac{n}{2^i}) + c[2^{i-1} + 2^{i-2} + 2^0]$

- encontrando i

$T(1) = T(\frac{n}{2^i})$

$1 = \frac{n}{2^i}$

$i = \log_2 n$

- Na formula

$= 2^{\log_2 n} T(\frac{n}{\log_2 n}) + c[n-1]$

$= n^{\log_2 2} T(\frac{n}{\log_2 2}) + cn - c$

$= n + cn - c$

- Por indução

-Base

$T(1) = 1 + 2.1 - 2$ para $c=2$

$1 = 1$

-indução

$T(\frac{n}{2}) = \frac{n}{2} + c.\frac{n}{2} - c$

-Tendo

$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + c$

$= 2(\frac{n}{2} + c.\frac{n}{2} - c) + c$

$= n + cn - 2c + c$

$= n + cn - c$

portanto $T(n) \in \Theta(n)$

$S = \frac{(1^{\circ}\,termo).(Razão^n - 1)}{Razão - 1}$

$S = \frac{(1)(2^{\log_2 n} - 1)}{2-1}$

$S = \frac{2^{\log_2 n} - 1}{1}$

$\boxed{= n - 1}$

Alem disso:

Dado $n=2$ imprime 1 vez

-Ainda Rodando

Dado $n=4$ imprime 3 vezes

-Ainda Rodando

-Ainda Rodando

-Ainda Rodando

Assim temos $(n-1)$ na qual simplesmente é $\Theta(n)$

8 (b) $n \geq 0$ considerando n
$r \geq 0$

$T(0) = 1$
$T(n) = T(n-1) + c_1 k + c_2$

considerando $k = r^n$ $\rightarrow T(n) = T(n-1) + c_1 r^n + c_2$

Pelo metodo de iteração

- expandindo

$T(n-1) = T(n-2) + c_1 r^{n-1} + c_2$
$T(n-2) = T(n-3) + c_1 r^{n-2} + c_2$

- substituindo na formula

$T(n) = T(n-1) + c_1 k^n + c_2$
$= T(n-2) + c_1 r^{n-1} + c_2 + c_1 r^n + c_2$
$= T(n-3) + c_1 r^{n-2} + c_2 + c_1 r^{n-1} + c_2 + c_1 r^n + c_2$
$= T(n-3) + c_1 (r^{n-2} + r^{n-1} + r^n) + 3c_2$

- iesimo passo

$T(n) = T(n-i) + c_1 (r^{n} + r^{n-(i-1)} r^{(n-i-2)}) + i c_2$

Soma Geometrica

$S = \frac{(1^o \text{ termo})(\text{Razão}^n - 1)}{\text{Razão} - 1}$

$S = \frac{(r)(r^n - 1)}{r-1}$

- encontrando i

$T(0) = T(n-i)$
$0 = n - i$
$i = n$

- $T(n) = T(n-n) + c_1 \left(\frac{r(r^n - 1)}{r-1}\right) + n c_2$
$= T(0) + c_1 \left(\frac{r(r^{n+1} - 1)}{r-1}\right) + n c_2$
$= \boxed{1 + c_1 \left(\frac{r^{n+1} - 1}{r-1}\right) + n . c_2}$

Portanto o algoritmo é $O(r^n)$

Como o objetivo é determinar a quantidade de vezes que CAIXA-PRETA é chamada considera-se $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$

Assim conclui-se:

$\boxed{1 + \frac{r^{n+1} - r}{r-1}}$

- Prova por indução

- Base: $T(0) = 1 + c_1 \left(\frac{r - r^0}{r-1}\right) + 0$
$1 = 1$

- considerando $n-1$ na formula

$T(n-1) = 1 + c_1 \left(\frac{r^n - r}{r-1}\right) + (n-1) c_2$

- $T(n) = T(n-1) + c_1 r^n + c_2$
$= 1 + c_1 \left(\frac{r^n - r}{r-1}\right) + (n-1) c_2 + c_1 r^n + c_2$
$= 1 + c_1 \left(\frac{r^{n+1} - r}{r-1}\right) + c_2 n - c_2 + c_2$
$\boxed{= 1 + c_1 \left(\frac{r^{n+1} - r}{r-1}\right) + c_2 n}$

9. a) Implemente duas versões deste algoritmo em qualquer linguagem de programação:

– versão 1: em tempo Ω(n log n)

```python
def merge(A, p, q, r):
    L = [0] * (r +1)
    for i in range(p , q+1):
        L[i] = A[i]
    for j in range(q+1 , r+1):
        L[r+q+1-j] = A[j]
    i = p
    j = r
    k = p
    for k in range (p, r+1):
        if L[i] <= L[j]:
            A[k] = L[i]
            i += 1
        else:
            A[k] = L[j]
            j -= 1

def mergeSort(A,p,r):
    if p < r:
        q = (p+(r-1))/2
        mergeSort(A, p, q)
        mergeSort(A, q+1, r)
        merge(A, p, q, r)


def selectMedian(A, n):
    mergeSort(A, 0,n-1)
    i = (n)/2
    return (A[i])
```

– versão 2: em tempo médio O(n)

```python
def troca(A,i,j):
    aux = A[i]
    A[i] = A[j]
    A[j] = aux

def particione(A, p, r):
    pivo = A[r]
    i = p-1
    for j in range(p, r):
        if (A[j] <= pivo):
            i+=1
            troca(A,i,j)
    troca(A,i+1, r)
    return (i+1)

def particione_aleatorio(A, p, r):
    j = random.randrange(p,r)
    troca(A, j, r)
    return particione(A, p, r)

def select_NL(A, p, r, i):
    if (p == r):
        return A[p]
    q = particione_aleatorio(A, p,r)
    k = q - p + 1
    if (i == k):
        return A[q]
    elif (i < k):
        return select_NL(A, p, q-1, i)
    else:
        return select_NL(A, q+1, r, i-k)
```

9. b) (OPCIONAL – pontuação extra) Implemente duas versões do filtro de mediana, considerando os dois algoritmos desenvolvidos no item (a), para matrizes bidimensionais m × n de inteiros 0 ≤ f(i, j) ≤ 255, sendo 0 ≤ i < m, 0 ≤ j < n, supondo janela de filtro com vizinhança parametrizável de p × q, sendo 2 ≤ p < m e 2 ≤ q < n. A

técnica, exemplos é código (em C) podem ser consultados no seguinte documento: https://www.ime.usp.br/~reverbel/ccm118-12/eps/ep4.pdf
Avalie o tempo de execução real (por exemplo, em segundos) das duas versões implementadas do filtro para uma matriz (imagem) suficientemente grande (≥ 640 × 480 pixels) e para diferentes escolhas de p e q (por exemplo, 3, 7, 15, . . .).

Códigos:

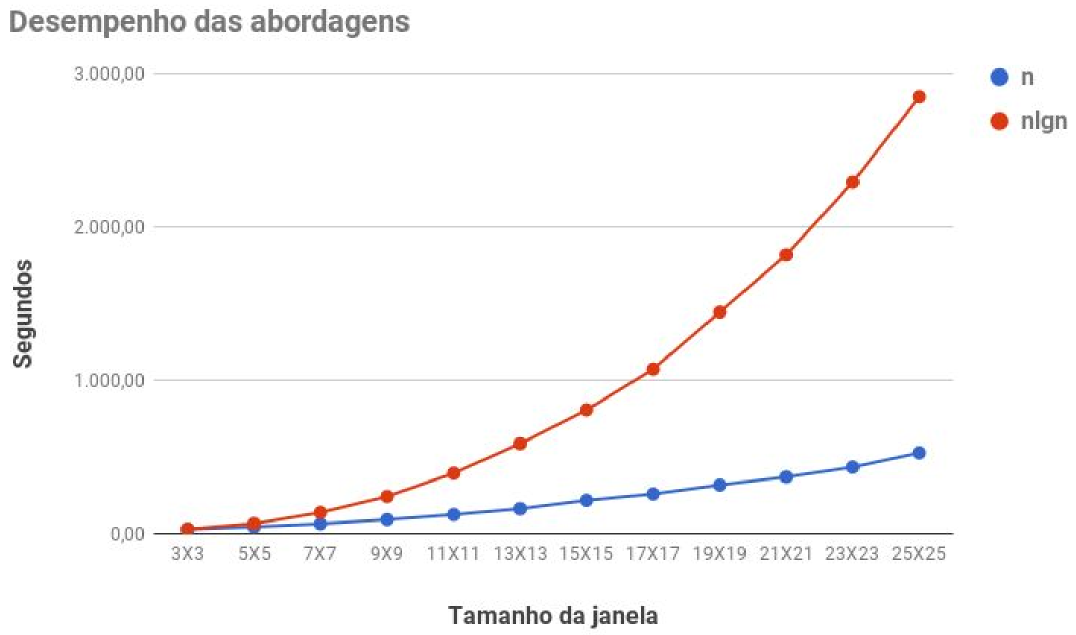
```python
def readImage (nome):
    imagem = cv2.imread(nome)
    gray_image = cv2.cvtColor(imagem, cv2.COLOR_BGR2GRAY)
    return gray_image

def aplica_janela(imagem, p, q, i, j, algoritmo_mediana):
    vetor = [0] * (p*q)
    k = 0
    if ((p % 2) == 0 or (q % 2) == 0):
        for r in range( i - (p/2), i + (p/2) -1):
            for l in range(j - (q/2), j+(q/2) -1):
                vetor[k] = imagem[r,l]
                k += 1
    else:
        for r in range( i - (p/2), i + (p/2)):
            for l in range(j - (q/2), j+(q/2)):
                vetor[k] = imagem[r,l]
                k += 1
    if (algoritmo_mediana == 1):
        a = select_NL(vetor, 0, k-1, math.floor((k+1)/2.0) )
    else:
        a = selectMedian(vetor, k, math.floor((k+1)/2.0))
    return a


def filtro_mediana(imagem, p, q, algoritmo_mediana):
    imagem_filtrada = copy.copy(imagem)
    if ( (p<2 or p >= imagem.shape[0]) or (q<2 or q >= imagem.shape[1])):
        print ("Tamanho invalido para janela de filtro!")
    else:
        for i in range(0,imagem.shape[0]):
            for j in range(0, imagem.shape[1]):
                if ( (i - (p/2) >= 0) and (j - (q/2) >= 0) and (i+(p/2) < imagem.shape[0]) and (j+(q/2) < imagem.shape[1]) ):
                    imagem_filtrada[i,j]= aplica_janela(imagem, p, q, i, j, algoritmo_mediana)
                else:
                    imagem_filtrada[i,j] = 0
    return imagem_filtrada
```

Imagem Original
Nome: paisagem.jpg
Tamanho: 720 x 900

Resultado dos experimentos:



A seguir são exibidos os resultados de cada experimento.

Experimento 1

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(n)

-- Tamanho da Janela: 3 X 3

-- Tempo inicial: 1525797785.67

-- Tempo final: 1525797810.05

-- Tempo execução total: 24.3830571175

Experimento 2

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(nlogn)

- -- Tamanho da Janela: 3 X 3
- -- Tempo inicial: 1525798525.17
- -- Tempo final: 1525798550.4
- -- Tempo execução total: 25.2275538445

Experimento 3

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(n)

- -- Tamanho da Janela: 5 X 5
- -- Tempo inicial: 1525798656.22
- -- Tempo final: 1525798696.67
- -- Tempo execução total: 40.4442090988

Experimento 4

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(nlogn)

- -- Tamanho da Janela: 5 X 5
- -- Tempo inicial: 1525798787.47
- -- Tempo final: 1525798849.44
- -- Tempo execução total: 61.9720978737

Experimento 5

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(n)

- -- Tamanho da Janela: 7 X 7
- -- Tempo inicial: 1525799926.17
- -- Tempo final: 1525799986.4
- -- Tempo execução total: 60.2346711159

Experimento 6

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(nlogn)

-- Tamanho da Janela: 7 X 7

-- Tempo inicial: 1525800037.88

-- Tempo final: 1525800172.0

-- Tempo execução total: 134.117254972

Experimento 7

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(n)

-- Tamanho da Janela: 9 X 9

-- Tempo inicial: 1525800233.3

-- Tempo final: 1525800321.8

-- Tempo execução total: 88.5035991669

Experimento 8

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(nlogn)

-- Tamanho da Janela: 9 X 9

-- Tempo inicial: 1525800355.24

-- Tempo final: 1525800594.04

-- Tempo execução total: 238.805572033

Experimento 9

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(n)

-- Tamanho da Janela: 11 X 11

-- Tempo inicial: 1525800635.54

-- Tempo final: 1525800756.12

-- Tempo execução total: 120.586702108

Experimento 10

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(nlogn)

- -- Tamanho da Janela: 11 X 11
- -- Tempo inicial: 1525800773.81
- -- Tempo final: 1525801165.0
- -- Tempo execução total: 391.187102079

Experimento 11

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(n)

- -- Tamanho da Janela: 13 X 13
- -- Tempo inicial: 1525801231.84
- -- Tempo final: 1525801390.38
- -- Tempo execução total: 158.544473886

Experimento 12

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(nlogn)

-- Tamanho da Janela: 13 X 13

-- Tempo inicial: 1525801452.18

-- Tempo final: 1525802036.3

-- Tempo execução total: 584.113286018

Experimento 13

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(n)

-- Tamanho da Janela: 15 X 15

-- Tempo inicial: 1525802247.06

-- Tempo final: 1525802460.79

-- Tempo execução total: 213.731586933

Experimento 14

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(nlogn)

-- Tamanho da Janela: 15 X 15

-- Tempo inicial: 1525802500.77

-- Tempo final: 1525803305.65

-- Tempo execução total: 804.878239155

Experimento 15

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(n)

-- Tamanho da Janela: 17 X 17

-- Tempo inicial: 1525803354.67

-- Tempo final: 1525803610.05

-- Tempo execução total: 255.383650064

Experimento 16

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(nlogn)

- -- Tamanho da Janela: 17 X 17
- -- Tempo inicial: 1525803643.58
- -- Tempo final: 1525804714.53
- -- Tempo execução total: 1070.95259213

Experimento 17

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(n)

- -- Tamanho da Janela: 19 X 19
- -- Tempo inicial: 1525804789.2
- -- Tempo final: 1525805102.74
- -- Tempo execução total: 313.545382977

Experimento 18

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(nlogn)

-- Tamanho da Janela: 19 X 19

-- Tempo inicial: 1525805127.55

-- Tempo final: 1525806571.39

-- Tempo execução total: 1443.84177804

Experimento 19

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(n)

-- Tamanho da Janela: 21 X 21

-- Tempo inicial: 1525885454.78

-- Tempo final: 1525885821.87

-- Tempo execução total: 367.093325853

Experimento 20

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(nlogn)

-- Tamanho da Janela: 21 X 21

-- Tempo inicial: 1525885862.28

-- Tempo final: 1525887680.27

-- Tempo execução total: 1817.99079394

Experimento 21

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(n)

-- Tamanho da Janela: 23 X 23

-- Tempo inicial: 1525887702.08

-- Tempo final: 1525888133.27

-- Tempo execução total: 431.186913013

Experimento 22

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(nlogn)

- -- Tamanho da Janela: 23 X 23
- -- Tempo inicial: 1525888152.84
- -- Tempo final: 1525890445.56
- -- Tempo execução total: 2292.71445107

Experimento 23

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(n)

- -- Tamanho da Janela: 25 X 25
- -- Tempo inicial: 1525806719.54
- -- Tempo final: 1525807243.69
- -- Tempo execução total: 524.145744085

Experimento 24

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(nlogn)

-- Tamanho da Janela: 25 X 25

-- Tempo inicial: 1525807280.03

-- Tempo final: 1525810131.36

-- Tempo execução total: 2851.33629513