5 (a) $T(m) = T(m/2) + \Theta(1)$

$T(n) = aT(n/b) + f(n)$

$a = 1 \quad b = 2$ $\qquad f(m) = \Theta(1) = 1$

$\log_b a = \log_2 1 = 0$

caso 1: $f(n) \in O(n^{\log_b a - \varepsilon}) = O(n^{0-\varepsilon})$ Não é valido para $\varepsilon > 0$.

caso 2: $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^0) = O(1)$

então $T(m) \in \Theta(n^{\log_b a} \log m)$

$T(m) \in \Theta(1 \cdot \log m)$

(b) $T(m) = T(9m/10) + m$

$T(n) = aT(n/b) + f(n)$ $\qquad \frac{m}{b} = \frac{9.m}{10} \Rightarrow \frac{10m}{b} = 9m \Rightarrow \frac{10\cancel{m}}{9\cancel{m}} = b$

$a = 1 \quad b = \frac{9m}{10} = \frac{10}{9}$

$\log_b a = \log_{\frac{10}{9}} 1 = 0$

$f(n) = m$

caso 1: $f(m) \in O(m^{\log_{\frac{10}{9}} 1}) = O(m^{0-\varepsilon})$ não é valido para $\varepsilon > 0$

caso 2: se $f(m) \in O(n^{\log_{\frac{10}{9}} 1}) = \Theta(n^0) = \Theta(1)$ não é valido $f(n) > \Theta(1)$

caso 3: se $f(m) \in \Omega(n^{\log_{\frac{10}{9}} 1}) = \Omega(n^{0+\varepsilon})$ sendo $\varepsilon = 1$ $(\varepsilon > 0)$

será caso 3 se satisfazer a condição de regularidade

$af(\frac{m}{b}) \leq cf(m)$ para $c < 1$

$1 \cdot (\frac{9m}{10}) \leq \frac{9}{10}(m)$ para $c = \frac{9}{10}$ $(c < 1)$

Portanto se encaixa no caso 3

$T(n) \in \Theta(f(m)) = \Theta(n)$

(c) $T(m) = 16\,T(\frac{m}{4}) + m^2$

$T(m) = aT(\frac{m}{b}) + f(n)$ $\qquad a = 16 \quad b = 4 \quad f(n) = m^2$

$\log_b a = \log_4 16 = 2$

caso 1: se $f(m) \in O(m^{\log_4 16 - \varepsilon}) = O(m^{2-\varepsilon})$

não é valido para $\varepsilon > 0$

caso 2: se $f(m) \in \Theta(n^{\log_4 16}) = \Theta(m^2)$

$m^2 \in O(m^2)$

Portanto

$T(m) \in \Theta(m^{\log_b a} \log m) = \Theta(m^2 \log m)$

(5) (d) $T(n) = 7T(n/3) + n^2$

$T(n) = aT(n/b) + f(n)$

$a = 7$ $b = 3$ $\log_b a = \log_3 7 \cong 1{,}77$

se caso 1: $f(n) \notin O(n^{\log_3 7 - \varepsilon})$ (não valido pois $f(n) = n^2$)

se caso 2: $f(n) \notin \Theta(n^{\log_3 7})$ (não é valido pois $f(n) = n^2$)

se caso 3: $f(n) \in \Omega(n^{\log_3 7 + \varepsilon})$ para $\varepsilon > 0$

$a f(n/b) \leq c.f(n)$

$7.(n/3) \leq \frac{1}{3} n^2$

portanto se encaixa no caso 3

então $T(n) \in \Theta(n^2)$

(e) $T(n) = 7T(n/2) + n^2$

$T(n) = aT(n/b) + f(n)$

$a = 7$ $b = 2$ $\log_b a = \log_2 7 \cong 2{,}80$

Se caso 1:

$f(n) \in O(n^{(\log_2 7) - \varepsilon})$ para $\varepsilon > 0$

$\log_2 7 > 2$ e $\log_2 7 - \varepsilon > 2$ para $\varepsilon > 0$

portanto se encaixa no caso 1, então:

$f(n) \in \Theta(n^{\log_2 7})$

(f) $T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n}$

$T(n) = aT(n/b) + f(n)$

$a = 2$ $b = 4$ $\log_b a = \log_4 2 = \frac{1}{2}$ $f(n) = \sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}}$

se caso 1: $f(n) \in O(n^{(\log_2 4) - \varepsilon}) = O(n^{\frac{1}{2} - \varepsilon})$ portanto não é valido pois $f(n) = n^{\frac{1}{2}}$

se caso 2 $f(n) \in \Theta(n^{\log_2 4}) = \Theta(n^{\frac{1}{2}})$ é valido pois $f(n) = n^{\frac{1}{2}}$

Portanto

$T(n) \in \Theta(n^{\frac{1}{2}} \log n)$ ou $\Theta(\sqrt{n} \log n)$

5 (g) $T(n) = 4T(n/2) + n^2\sqrt{n}$

$T(n) = aT(n/b) + f(n)$

$a=4 \quad b=2 \quad \log_b a = \log_2 4 = 2 \quad f(n) = n^2\sqrt{n} = n^2 n^{1/2}$

se caso 1:

$f(n) \in O(n^{(\log_b a)-\varepsilon})$ para $\varepsilon > 0$

$n^2 n^{1/2} \in O(n^{2-\varepsilon})$ invalido

se caso 2:

$f(n) \in \Theta(n^{(\log_b a)})$

$n^2 n^{1/2} \notin \Theta(n^2)$ invalido

se caso 3:

$f(n) \in \Omega(n^{(\log_b a)+\varepsilon})$ para $\varepsilon > 0$

$n^2 n^{1/2} \in \Omega(n^{2+\varepsilon})$ é valido para um $\varepsilon < 0,5$

$af(\frac{n}{b}) \leq c.f(n)$ para $c < 1$

$\frac{4n}{2} \leq \frac{1}{2} n^2 n^{1/2}$

$2n \leq \frac{1}{2} n^{5/2}$

Portanto $T(n) \in \Theta(n^{5/2})$

(h) $T(n) = 27T(n/3) + n^3$

$T(n) = aT(n/b) + f(n)$

$a = 27 \quad b = 3 \quad \log_b a = \log_3 27 = 3 \quad f(n) = n^3$

se caso 1:

$f(n) \in O(n^{\log_b a - \varepsilon}) = O(n^{(\log_3 27)-\varepsilon})$ não é valido para um $\varepsilon > 0$.

pois $f(n) = n^3$ e $n^{\log_3 27} = n^3$

se caso 2:

$f(n) \in \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^{\log_3 27}) = \Theta(n^3)$

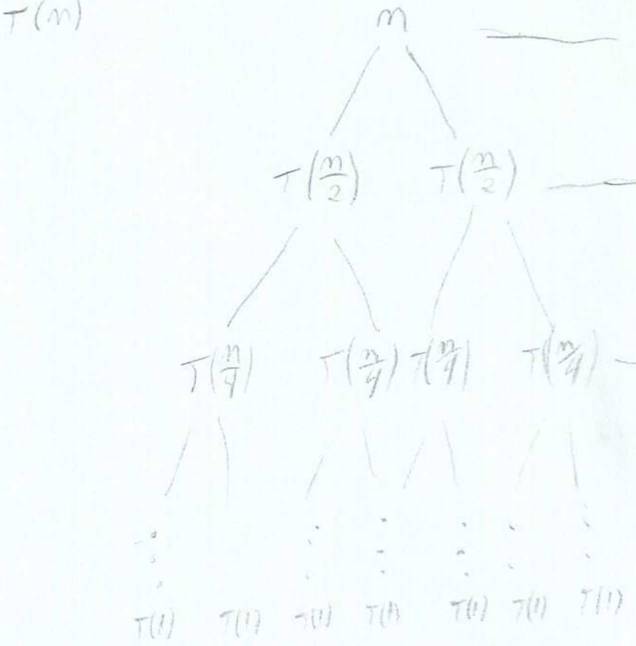
$n^3 \in \Theta(n^3)$

Portanto é caso 2 e

$T(n) \in \Theta(n^{\log_3 27} \log n)$

$T(n) \in \Theta(n^3 \log n)$

(6) (a) $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$ (merge sort)



$\left(\frac{2}{2}\right)^0 n = n$

$\left(\frac{2}{2}\right)^1 n = n$

$\left(\frac{2}{2}\right)^2 \cdot n = n$

Numero de Niveis

$\log_2 n + 1$

iesimo

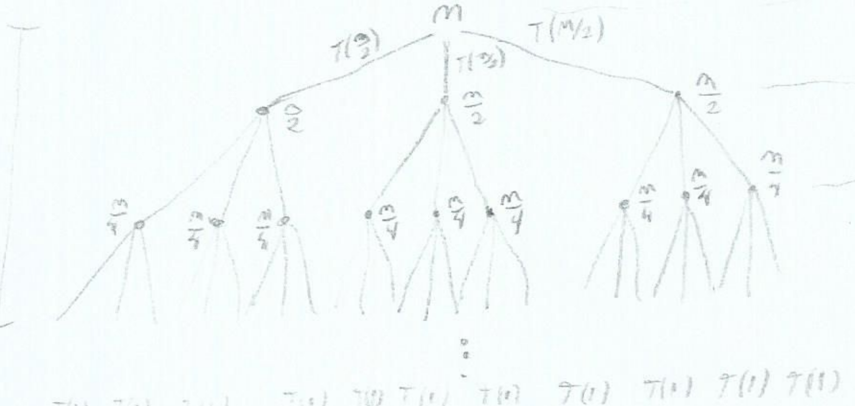
$\frac{n}{2^i} = 1 \qquad n = 2^i \Rightarrow i = \log_2 n$

altura , total por nivel

$T(n) = (\log_2 n + 1) \cdot n$

$= n\log_2 n + n$ sendo $O(n \log_2 n)$

(b) $T(n) = 3T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$



$n = \left(\frac{3}{2}\right)^0 n$

$\frac{3n}{2} = \left(\frac{3}{2}\right)^1 n$

$\frac{9n}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 n$

Numero de niveis

$\frac{n}{2^i} = 1$

$n = 2^i$

$i = \log_2 n$

$T(n) = n + \frac{3}{2}n + \frac{9}{4}n + \dots$

$= n\left[\left(\frac{3}{2}\right)^0 + \left(\frac{3}{2}\right)^1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \dots\right]$

Soma Geometrica

$S = \frac{(1^{\circ}\text{ termo})(\text{razão}^n - 1)}{\text{razão} - 1}$

$S = \frac{1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 n + 1} - 1}{\frac{3}{2} - 1}$

$S = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 n + 1} - 1}{\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 n}\left(\frac{3}{2}\right) - 1}{\frac{1}{2}}$

$= \frac{\left(\frac{3^{\log_2 n}}{2^{\log_2 n}}\right)\left(\frac{3}{2}\right) - 1}{\frac{1}{2}}$

$= \frac{\left(\frac{n^{\log_2 3}}{n^{\log_2 2}}\right)\left(\frac{3}{2}\right) - 1}{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{n^{\log_2 3}}{n}\right)\left(\frac{3}{2}\right) - 2$

$= \frac{n^{\log_2 3}}{n} \cdot 3 - 2$

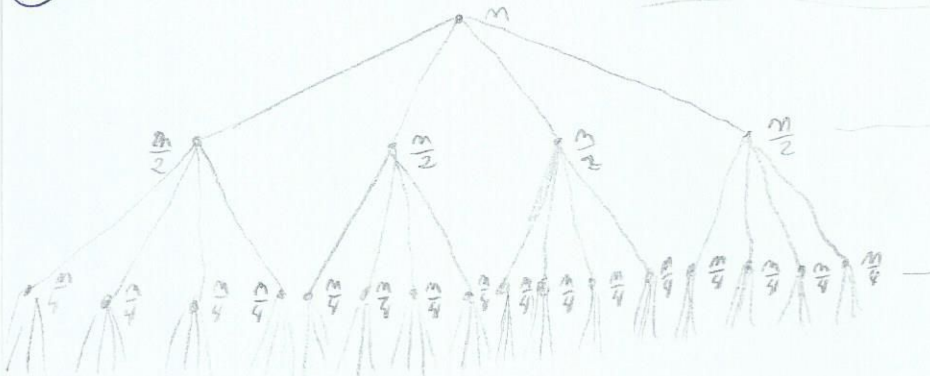
$= n\left[\frac{n^{\log_2 3}}{n} \cdot 3 - 2\right]$

$= n^{\log_2 3} \cdot 3n - 2n$

$= 3n^{\log_2 3} - 2n$

Portanto $T(n) \in O(n^{\log_2 3})$

⑥ (c) $T(n) = 4T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + \Theta(n)$



$\left(\frac{4}{2}\right)^0 n = n$

$\left(\frac{4}{2}\right)^1 n = 2n$

$\left(\frac{4}{2}\right)^2 n = 4n$

i-ésimo

$\frac{n}{2^i} = 1 \Rightarrow n = 2^i \Rightarrow i = \log_2 n$

Niveis $= \log_2 n + 1$

$T(n) = n + 2n + 4n + \dots$

$= n\left[2^0 + 2^1 + 2^2 \dots\right]$

$T(n) = n\left[2n - 1\right]$

$= 2n^2 - n$

portanto $T(n) \in O(n^2)$

Soma Geometrica

$S = \frac{(p^o)(\text{Razão}^n - 1)}{\text{Razão} - 1}$

$S = \frac{1(2^{(\log_2 n)+1} - 1)}{2 - 1}$

$S = \frac{2^{\log_2 n + 1} - 1}{1}$

$= 2^{\log_2 n + 1} - 1$

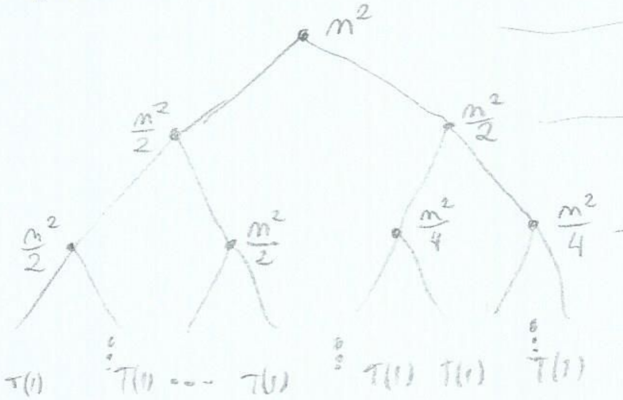
$= (2^{\log_2 n})(2) - 1$

$= n^{\log_2 2}(2) - 1$

$= n \cdot 2 - 1$

$= 2n - 1$

(d) $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n^2)$



$\left(\frac{2}{2}\right)^0 n^2$ — n^2

$\left(\frac{2}{2}\right)^1 n^2$ — n^2

$\left(\frac{2}{2}\right)^2 n^2$ — n^2

$\frac{n}{2^i} = 1$

$n = 2^i$

$i = \log_2 n$

Niveis $= \log_2 n + 1$

$T(n) = \underbrace{n^2 + n^2 + n^2 + \dots}_{(i+1) \cdot n^2}$

$T(n) =$ Numero Niveis . Soma por nivel

$= (\log_2 n + 1) \cdot n^2$

$= n^2 \log_2 n + n^2$

Portanto

$T(n) \in O(n^2 \log_2 n)$