

Lista 1 - Projeto e Análise de Algoritmos - 2018/1

Cristiano A. de Souza

① (a) Para descobrir o valor de n , igualamos as funções

$$8n^2 = 64n \log_2 n \quad \text{?}$$

$$n^2 = 8n \log_2 n \quad \text{? } n$$

$$n = 8 \log_2 n$$

$$\frac{n}{8} = \log_2 n$$

$$x = \log_a b \Leftrightarrow b = a^x$$

$$n = 2^{\frac{n}{8}}$$

?

n	$8n^2$	$64n \log_2 n$
1	8	0
20	3200	5532
43	14792	14933
44	15488	15373
60	28800	22682

Tabela com alguns valores

Pode-se visualizar que até $n=43$ o insertion sort com o custo de $8n^2$ é melhor, a partir de $n > 43$ o merge sort é melhor.

(b) Algoritmo $A = 100n^2$ algoritmo $B = 2^n$

$$100n^2 = 2^n$$

é uma forma difícil de achar então
chutamos valores para n

n	$100n^2$	2^n
1	100	2
5	2500	32
14	19600	16384
15	22500	32768
30	90000	1073741824

Até o valor de $n=14$ o algoritmo $B(2^n)$ é mais rápido. A partir de $n > 15$ o algoritmo mais rápido é o $A(100n^2)$.

Portanto o menor valor de n para que o algoritmo $A(100n^2)$ execute mais rápido é o $n=15$.

② (a) Maior tamanho de n de um problema que pode ser resolvido no tempo t
 computador: 10 GHz (10^{10} instruções por segundo)

1Gm

$$\frac{f(n)}{10^{10}} = t$$

$$\frac{\log_2 n}{10^{10}} = 1 \text{ segundo}$$

$$\log_2 n = 10^{10}$$

$$\log_{10} n = 10^{10}$$

$$\log_{10} 2$$

$$\log_{10} n = 10^{10} \cdot \log_{10} 2$$

$$n = 10^{10^{10} \log_{10} 2}$$

$$n = 10^{\log_{10} 2^{10^{10}}}$$

$$n = 2^{10^{10}}$$

$$1 \text{ segundo} = 2^{10^{10}}$$

$$1 \text{ minuto} = 60 \text{ seg} \rightarrow 2^{60 \cdot 10^{10}} = 2^{6 \cdot 10^{11}}$$

$$1 \text{ hora} = 3600 \text{ seg} \rightarrow 2^{3600 \cdot 10^{10}} = 2^{3,6 \cdot 10^{13}}$$

$$1 \text{ dia} = 86400 \text{ seg} \rightarrow 2^{86400 \cdot 10^{10}} = 2^{8,64 \cdot 10^{14}}$$

$$1 \text{ mês} = 2592000 \rightarrow 2^{2592000 \cdot 10^{10}} = 2^{2,592 \cdot 10^{16}}$$

$$1 \text{ Ano} = 31536000 \text{ seg} \rightarrow 2^{31536000 \cdot 10^{10}} = 2^{3,1536 \cdot 10^{17}}$$

$$1 \text{ século} = 3153600000 \text{ seg} \rightarrow 2^{3153600000 \cdot 10^{10}} = 2^{3,1536 \cdot 10^{18}}$$

\sqrt{n}

$$\frac{f(n)}{10^{10}} = t$$

$$\frac{\sqrt{n}}{10^{10}} = 1$$

$$\sqrt{n} = 10^{10}$$

$$(\sqrt{n})^2 = (10^{10})^2$$

$$n = 10^{20}$$

1 minuto

$$\frac{f(n)}{10^{10}} = t$$

$$\frac{\sqrt{n}}{10^{10}} = 60 \text{ segundos}$$

$$\sqrt{n} = 60 \cdot 10^{10}$$

$$(\sqrt{n})^2 = (60 \cdot 10^{10})^2$$

$$n = 3,6 \cdot 10^{23}$$

1 hora

$$\frac{\sqrt{n}}{10^{10}} = 3600 \text{ segundos}$$

$$\sqrt{n} = 3600 \cdot 10^{10}$$

$$(\sqrt{n})^2 = (3600 \cdot 10^{10})^2$$

$$n = 1,296 \cdot 10^{27}$$

1 dia

$$\frac{\sqrt{n}}{10^{10}} = 86400 \text{ segundos}$$

$$\sqrt{n} = 86400 \cdot 10^{10}$$

$$(\sqrt{n})^2 = (8,6 \cdot 10^{14})^2$$

$$n = 7,46496 \cdot 10^{29}$$

1 século

$$\frac{\sqrt{n}}{10^{10}} = 3153600000$$

$$\sqrt{n} = 3153600000 \cdot 10^{10}$$

$$(\sqrt{n})^2 = 3,1 \cdot 10^{19}$$

$$n = 9,94519296 \cdot 10^{38}$$

1 mês

$$\frac{\sqrt{n}}{10^{10}} = 2592000$$

$$\sqrt{n} = 2592000 \cdot 10^{10}$$

$$(\sqrt{n})^2 = (25 \cdot 10^{16})^2$$

$$n = 6,718464 \cdot 10^{32}$$

1 ano

$$\frac{\sqrt{n}}{10^{10}} = 31536000$$

$$\sqrt{n} = 31536000 \cdot 10^{10}$$

$$(\sqrt{n})^2 = 3,1 \cdot 10^{12}$$

$$n = 9,94519296 \cdot 10^{37}$$

② (a) continuação

m

1 segundo

$$m = 10^{10} \cdot 1 = 10^{10}$$

1 minuto

$$m = 10^{10} \cdot 60 = 6 \times 10^{11}$$

1 hora

$$m = 10^{10} \cdot 3600 = 3,6 \times 10^{13}$$

1 dia

$$m = 10^{10} \cdot 86400 = 8,64 \times 10^{14}$$

1 mes

$$m = 10^{10} \cdot 2592000 = 2,592 \times 10^{16}$$

1 ano

$$m = 10^{10} \cdot 31536000 = 3,1536 \times 10^{17}$$

1 século

$$m = 10^{10} \cdot 3153600000 = 3,1536 \times 10^{19}$$

$m \lg m$

$$\frac{f(n)}{10^{10}} = t$$

$$\frac{m \lg m}{10^{10}} = 1$$

$$m \lg m = 10^{10}$$

$$\lg m = \frac{10^{10}}{m}$$

$$\frac{\log_{10} m}{\log_{10} 2} = 10^{10} \cdot m^{-1}$$

$$\log_{10} m = 10^{10} \cdot m^{-1} \times \log_{10} 2$$

$$\log_{10} m = \log_{10} 2^{10^{10} \cdot m^{-1}}$$

$$m = 10^{\log_{10} 2^{10^{10} \cdot m^{-1}}}$$

$$m = 2^{10^{10} \cdot m^{-1} \cdot \log_{10} 2}$$

$$m = 2^{10^{10} \cdot m^{-1}}$$

Propriedades logaritmas

$$\left(\log_a b = \frac{\log_x b}{\log_x a} \right)$$

$$\left(\log_a x^k = k \log_a x \right)$$

$$\left(m = 10^x \Rightarrow \log_{10} m = x \right)$$

$$\left(b^{\log_a x} = x^{\log_a b} \right)$$

$$1 \text{ segundo} \Rightarrow 3,96 \times 10^3$$

$$1 \text{ minuto} \Rightarrow 1,34 \times 10^{10}$$

$$1 \text{ hora} \Rightarrow 9,85 \times 10^{11}$$

$$1 \text{ dia} \Rightarrow 2,11 \times 10^{13}$$

$$1 \text{ mes} \Rightarrow 5,67 \times 10^{14}$$

$$1 \text{ ano} \Rightarrow 6,41 \times 10^{15}$$

$$1 \text{ século} \Rightarrow 5,66 \times 10^{16}$$

m^2

(2) a) Continuação

1 segundo

$$\frac{f(m)}{10^{10}} = 1$$

$$m^2 = 10^{10}$$

$$m = \sqrt{10^{10}}$$

$$m = 1,0 \times 10^5$$

1 minuto

$$\frac{f(m)}{10^{10}} = 60$$

$$m^2 = 60 \cdot 10^{10}$$

$$m = \sqrt{60 \cdot 10^{10}}$$

$$m = 7,7 \times 10^5$$

1 hora

$$\frac{f(m)}{10^{10}} = 3600$$

$$m^2 = 3600 \cdot 10^{10}$$

$$m = \sqrt{3600 \cdot 10^{10}}$$

$$m = 6,0 \times 10^6$$

1 dia

$$\frac{f(m)}{10^{10}} = 86400$$

$$m^2 = 86400 \cdot 10^{10}$$

$$m = \sqrt{86400 \cdot 10^{10}}$$

$$m = 2,9 \times 10^7$$

1 mes

$$\frac{f(m)}{10^{10}} = 2592000$$

$$m^2 = 2592000 \cdot 10^{10}$$

$$m = \sqrt{2592000 \cdot 10^{10}}$$

$$m = 1,6 \times 10^8$$

1 ano

$$\frac{f(m)}{10^{10}} = 31536000$$

$$m^2 = 31536000 \cdot 10^{10}$$

$$m = \sqrt{31536000 \cdot 10^{10}}$$

$$m = 5,6 \times 10^8$$

1 século

$$\frac{f(m)}{10^{10}} = 3153600000$$

$$m^2 = 3153600000 \cdot 10^{10}$$

$$m = \sqrt{3153600000 \cdot 10^{10}}$$

$$m = 5,6 \times 10^9$$

m^3

1 segundo

$$\frac{f(m)}{10^{10}} = 1$$

$$m^3 = 10^{10}$$

$$m = \sqrt[3]{10^{10}}$$

$$m = 2,1 \times 10^3$$

1 minuto

$$\frac{f(m)}{10^{10}} = 60$$

$$m^3 = 60 \cdot 10^{10}$$

$$m = \sqrt[3]{60 \cdot 10^{10}}$$

$$m = 8,4 \times 10^3$$

1 hora

$$\frac{f(m)}{10^{10}} = 3600$$

$$m^3 = 3600 \cdot 10^{10}$$

$$m = \sqrt[3]{3600 \cdot 10^{10}}$$

$$m = 3,3 \times 10^4$$

1 dia

$$\frac{f(m)}{10^{10}} = 86400$$

$$m^3 = 86400 \cdot 10^{10}$$

$$m = \sqrt[3]{86400 \cdot 10^{10}}$$

$$m = 9,5 \times 10^4$$

1 mes

$$\frac{f(m)}{10^{10}} = 2592000$$

$$m^3 = 2592000 \cdot 10^{10}$$

$$m = \sqrt[3]{2592000 \cdot 10^{10}}$$

$$m = 2,9 \times 10^5$$

1 ano

$$\frac{f(m)}{10^{10}} = 31536000$$

$$m^3 = 31536000 \cdot 10^{10}$$

$$m = \sqrt[3]{31536000 \cdot 10^{10}}$$

$$m = 6,8 \times 10^5$$

1 século

$$\frac{f(m)}{10^{10}} = 3153600000$$

$$m^3 = 3153600000 \cdot 10^{10}$$

$$m = \sqrt[3]{3153600000 \cdot 10^{10}}$$

$$m = 3,1 \times 10^6$$

② a) continuação

2^m

1 segundo

$$\frac{f(m)}{10^{10}} = 1$$

$$10^{10}$$

$$2^m = 10^{10}$$

$$m = \log_2 10^{10}$$

$$m = \frac{\log_{10} 10^{10}}{\log_{10} 2}$$

$$m = \frac{10}{0,301}$$

$$m = \frac{10}{0,301}$$

$$m = 33,22$$

1 minuto

$$\frac{f(m)}{10^{10}} = 60$$

$$10^{10}$$

$$2^m = 60 \cdot 10^{10}$$

$$m = \frac{\log_{10} 60 \cdot 10^{10}}{0,301}$$

$$m = 39,13$$

1 dia

$$\frac{f(m)}{10^{10}} = 86400$$

$$10^{10}$$

$$2^m = 86400 \cdot 10^{10}$$

$$m = \frac{\log_{10} 8,6 \cdot 10^{14}}{0,301}$$

$$m = 49,62$$

1 século

$$\frac{f(m)}{10^{10}} = 3153600000$$

$$10^{10}$$

$$2^m = 3153600000 \cdot 10^{10}$$

$$m = \frac{\log_{10} 3,1 \cdot 10^{19}}{0,301}$$

$$m = 64,78$$

1 hora

$$\frac{f(m)}{10^{10}} = 3600$$

$$10^{10}$$

$$2^m = 3600 \cdot 10^{10}$$

$$m = \frac{\log_{10} 3,6 \cdot 10^{13}}{0,301}$$

$$m = 45,04$$

1 mes

$$\frac{f(m)}{10^{10}} = 2592000$$

$$10^{10}$$

$$2^m = 2592000 \cdot 10^{10}$$

$$m = \frac{\log_{10} 2,5 \cdot 10^{16}}{0,301}$$

$$m = 54,53$$

1 ano

$$\frac{f(m)}{10^{10}} = 31536000$$

$$10^{10}$$

$$2^m = 31536000 \cdot 10^{10}$$

$$m = \frac{\log_{10} 3,1 \cdot 10^{17}}{0,301}$$

$$m = 58,14$$

$m!$

com algoritmo

1 segundo: 13

1 minuto: 44

1 hora: 16

1 dia: 18

1 mes: 18

1 ano: 19

1 século: 20

② b)

$$f_2(m) = \sqrt{2m}$$

$$f_3(m) = m + 10$$

$$f_6(m) = m^2 \log m$$

$$f_1(m) = m^{2.5}$$

$$f_4(m) = 10^m$$

$$f_5(m) = 100^m$$

c) a) $f(m) = m - 100$ $g(m) = m - 200$
 $f(m) \in \Theta(g(m))$

b) $f(m) \in O(g(m))$ pois $f(m) \leq g(m) \cdot c$

c) $f(m) \in O(g(m))$ pois $f(m) \leq g(m) \cdot c$

d) $f(m) \in \Theta(g(m))$ pois $f(m) = g(m) \cdot c$

e) $f(m) \in \Theta(g(m))$ pois $f(m) = g(m) \cdot c$

f) $f(m) \in O(g(m))$ pois $f(m) \leq g(m) \cdot c$

g) $f(m) \in \Omega(g(m))$ pois $f(m) \geq g(m) \cdot c$

h) $f(m) \in \Omega(g(m))$ pois $f(m) \geq g(m) \cdot c$

i) $f(m) \in \Omega(g(m))$ pois $f(m) \geq g(m) \cdot c$

j) $f(m) \in \Omega(g(m))$ pois $f(m) \geq g(m) \cdot c$

k) $f(m) \in O(g(m))$ pois $f(m) \leq g(m) \cdot c$

l) $f(m) \in \Theta(g(m))$ pois $f(m) = g(m) \cdot c$

m) $f(m) \in \Theta(g(m))$ pois $f(m) = g(m) \cdot c$

n) $f(m) \in O(g(m))$ pois $f(m) \leq g(m) \cdot c$

o) $f(m) \in O(g(m))$ pois $f(m) \leq g(m) \cdot c$