

Lista I - Projeto e Análise de Algoritmos - 2018S1

Cristiano A. de Souza

① (a) Para descobrir o valor de m , igualamos as funções

$$8m^2 = 64m \log_2 m \quad | :8$$

$$m^2 = 8m \log_2 m \quad | :m$$

$$m = 8 \log_2 m$$

$$\frac{m}{8} = \log_2 m \quad x = \log_a b \Leftrightarrow b = a^x$$

$$m = 2^{\frac{m}{8}}$$

?

Tabela com alguns valores

Pode-se visualizar que até $m=43$ o insertion sort com o custo de $8m^2$ é melhor, a partir de $m>43$ o merge sort é melhor.

n	$8m^2$	$64n \log_2 n$
1	8	0
20	3200	5532
43	14792	14933
44	15488	15373
60	22600	22682

(b) Algoritmo A = $100m^2$ algoritmo B = 2^m

$100m^2 = 2^m$
é uma forma difícil de achar enteros
chutamos valores para m

n	$100m^2$	2^m
1	100	2
5	2500	32
14	19600	16384
15	22500	32768
30	90000	1073741824

Até o valor de $m=14$ o algoritmo B(2^m) é mais rápido.
A partir de $m>15$ o algoritmo mais rápido é o A ($100m^2$).
Portanto o menor valor de m para que o algoritmo A ($100m^2$) execute mais rápido é o $\boxed{m=15}$.

② (a) Maior tamanho de m de um problema que pode ser resolvido no tempo t
Computador: 10 GHz (10^{10} instruções por segundo)

$$\boxed{16m} \quad 16\text{Hz} = 10^9 \quad 10\text{GHz} = 10^{10}$$

$$\frac{f(m)}{10^{10}} = t$$

$$\frac{\log_2 m}{10^{10}} = 1 \text{ segundo}$$

$$\log_2 m = 10^{10}$$

$$\frac{\log_{10} m}{\log_{10} 2} = 10^{10}$$

$$\log_{10} 2$$

$$\log_{10} m = 10^{10}, 600102$$

$$m = 10^{10} \log_{10} 2$$

$$m = 10^{\log_{10} 2}$$

$$m = 2^{10^{10}}$$

$$1 \text{ segundo} = 2^{10^{10}}$$

$$1 \text{ minuto} = 60 \text{ seg} \rightarrow 2^{60 \cdot 10^{10}} = 2^{6 \cdot 10^{11}}$$

$$1 \text{ hora} = 3600 \text{ seg} \rightarrow 2^{3600 \cdot 10^{10}} = 2^{36 \cdot 10^{13}}$$

$$1 \text{ dia} = 86400 \text{ seg} \rightarrow 2^{86400 \cdot 10^{10}} = 2^{8,64 \cdot 10^{14}}$$

$$1 \text{ mês} = 2592000 \rightarrow 2^{2592000 \cdot 10^{10}} = 2^{2,592 \cdot 10^{16}}$$

$$1 \text{ Ano} = 31536000 \text{ seg} \rightarrow 2^{31536000 \cdot 10^{10}} = 2^{3,1536 \cdot 10^{17}}$$

$$1 \text{ século} = 3153600000 \text{ seg} \rightarrow 2^{3153600000 \cdot 10^{10}} = 2^{3,1536 \cdot 10^{18}}$$

$$\boxed{\sqrt{m}} \quad 1 \text{ segundo}$$

$$\frac{f(m)}{10^{10}} = t$$

$$\frac{\sqrt{m}}{10^{10}} = 1$$

$$\sqrt{m} = 10^{10}$$

$$(\sqrt{m})^2 = (10^{10})^2$$

$$m = 10^{20}$$

$$1 \text{ minuto}$$

$$\frac{f(m)}{10^{10}} = t$$

$$\frac{\sqrt{m}}{10^{10}} = 60 \text{ segundos}$$

$$\sqrt{m} = 60 \cdot 10^{10}$$

$$(\sqrt{m})^2 = (60 \cdot 10^{10})^2$$

$$m = 3,6 \cdot 10^{23}$$

$$1 \text{ hora}$$

$$\frac{\sqrt{m}}{10^{10}} = 3600 \text{ segundos}$$

$$\sqrt{m} = 3600 \cdot 10^{10}$$

$$(\sqrt{m})^2 = (3600 \cdot 10^{10})^2$$

$$m = 1,296 \cdot 10^{27}$$

$$1 \text{ dia}$$

$$\frac{\sqrt{m}}{10^{10}} = 86400 \text{ segundos}$$

$$\sqrt{m} = 86400 \cdot 10^{10}$$

$$(\sqrt{m})^2 = (8,6 \cdot 10^{14})^2$$

$$m = 7,46936 \cdot 10^{29}$$

$$1 \text{ século}$$

$$\frac{\sqrt{m}}{10^{10}} = 3153600000$$

$$\sqrt{m} = 3153600000 \cdot 10^{10}$$

$$(\sqrt{m})^2 = 3,1 \cdot 10^{30}$$

$$m = 9,94519296 \cdot 10^{38}$$

$$1 \text{ mês}$$

$$\frac{\sqrt{m}}{10^{10}} = 2592000$$

$$\sqrt{m} = 2592000 \cdot 10^{10}$$

$$(\sqrt{m})^2 = (25 \cdot 10^{16})^2$$

$$m = 6,718464 \cdot 10^{32}$$

$$1 \text{ ano}$$

$$\frac{\sqrt{m}}{10^{10}} = 31536000$$

$$\sqrt{m} = 31536000 \cdot 10^{10}$$

$$(\sqrt{m})^2 = 3,1 \cdot 10^{32}$$

$$m = 9,94519296 \cdot 10^{38}$$

② (a) continuaçāo

m

1 segundo
 $m = 10^{10} \cdot 1 = 10^{10}$

1 minuto
 $m = 10^{10} \cdot 60 = 6 \cdot 10^{11}$

1 hora
 $m = 10^{10} \cdot 3600 = 3,6 \cdot 10^{13}$

1 dia
 $m = 10^{10} \cdot 86400 = 8,6 \cdot 10^{14}$

1 mes
 $m = 10^{10} \cdot 2592000 = 2,5 \cdot 10^{16}$

1 ano
 $m = 10^{10} \cdot 31536000 = 3,1 \cdot 10^{17}$

1 século
 $m = 10^{10} \cdot 3153600000 = 3,1 \cdot 10^{19}$

$m | Gm$

$$\frac{f(n)}{10^{10}} = t$$

$$\frac{m | Gm}{10^{10}} = 1$$

$$m | Gm = 10^{10}$$

$$Gm = \frac{10^{10}}{m}$$

$$\frac{\log_{10} m}{\log_{10} 2} = 10^{10} \cdot m^{-1}$$

$$\log_{10} m = 10^{10} \cdot m^{-1} * \log_{10} 2$$

$$\log_{10} m = \log_{10} 2 \cdot 10^{10} \cdot m^{-1}$$

$$m = 10^{\log_{10} 2 \cdot 10^{10} \cdot m^{-1}}$$

$$m = 2^{10^{10} \cdot m^{-1} \cdot \log_{10} 2}$$

$$m = 2^{10^{10} \cdot m^{-1}}$$

Propriedades logarítmicas

$$(\log_a b = \frac{\log_x b}{\log_x a})$$

$$(\log_a x^k = k \log_a x)$$

$$(m = 10^x \Rightarrow \log_{10} m = x)$$

$$(b^{\log_a x} = x^{\log_a b})$$

$$1 \text{ segundo} \Rightarrow 3,96 \cdot 10^8$$

$$1 \text{ minuto} \Rightarrow 1,34 \cdot 10^{10}$$

$$1 \text{ hora} \Rightarrow 9,85 \cdot 10^{11}$$

$$1 \text{ dia} \Rightarrow 2,11 \cdot 10^{13}$$

$$1 \text{ mes} \Rightarrow 5,67 \cdot 10^{14}$$

$$1 \text{ ano} \Rightarrow 6,41 \cdot 10^{15}$$

$$1 \text{ século} \Rightarrow 5,66 \cdot 10^{16}$$

m^2

② a) Continuação

1 segundo

$$\frac{f(m)}{10^{10}} = 1$$

10^{10}

$$m^2 = 10^{10}$$

$$m = \sqrt[2]{10^{10}}$$

$$m = 1,0 * 10^5$$

1 dia

$$\frac{f(m)}{10^{10}} = 86400$$

10^{10}

$$m^2 = 86400 \cdot 10^{10}$$

$$m = \sqrt{86400 \cdot 10^{10}}$$

$$m = 2,9 * 10^7$$

1 minuto

$$\frac{f(m)}{10^{10}} = 60$$

10^{10}

$$m^2 = 60 \cdot 10^{10}$$

$$m = \sqrt{60 \cdot 10^{10}}$$

$$m = 7,7 * 10^5$$

1 hora

$$\frac{f(m)}{10^{10}} = 3600$$

10^{10}

$$m^2 = 3600 \cdot 10^{10}$$

$$m = \sqrt{3600 \cdot 10^{10}}$$

$$m = 6,0 * 10^6$$

1 mes

$$\frac{f(m)}{10^{10}} = 2592000$$

10^{10}

$$m^2 = 2592000 \cdot 10^{10}$$

$$m = \sqrt{2592000 \cdot 10^{10}}$$

$$m = 1,6 * 10^8$$

1 anno

$$\frac{f(m)}{10^{10}} = 31536000$$

10^{10}

$$m^2 = 31536000 \cdot 10^{10}$$

$$m = \sqrt{31536000 \cdot 10^{10}}$$

$$m = 5,6 * 10^8$$

1 seculo

$$\frac{f(m)}{10^{10}} = 3153600000$$

10^{10}

$$m^2 = 3153600000 \cdot 10^{10}$$

$$m = \sqrt{3153600000 \cdot 10^{10}}$$

$$m = 5,6 * 10^9$$

m^3

1 segundo

$$\frac{f(m)}{10^{10}} = 1$$

10^{10}

$$m^3 = 10^{10}$$

$$m = \sqrt[3]{10^{10}}$$

$$m = 2,1 * 10^3$$

1 minuto

$$\frac{f(m)}{10^{10}} = 60$$

10^{10}

$$m^3 = 60 \cdot 10^{10}$$

$$m = \sqrt[3]{60 \cdot 10^{10}}$$

$$m = 84 * 10^3$$

1 hora

$$\frac{f(m)}{10^{10}} = 3600$$

10^{10}

$$m^3 = 3600 \cdot 10^{10}$$

$$m = \sqrt[3]{3600 \cdot 10^{10}}$$

$$m = 3,3 * 10^4$$

1 dia

$$\frac{f(m)}{10^{10}} = 86400$$

10^{10}

$$m^3 = 86400 \cdot 10^{10}$$

$$m = \sqrt[3]{86400 \cdot 10^{10}}$$

$$m = 9,5 * 10^4$$

1 mes

$$\frac{f(m)}{10^{10}} = 259200$$

10^{10}

$$m^3 = 259200 \cdot 10^{10}$$

$$m = \sqrt[3]{259200 \cdot 10^{10}}$$

$$m = 2,9 * 10^5$$

1 anno

$$\frac{f(m)}{10^{10}} = 31536000$$

10^{10}

$$m^3 = 31536000 \cdot 10^{10}$$

$$m = \sqrt[3]{31536000 \cdot 10^{10}}$$

$$m = 6,8 * 10^5$$

1 seculo

$$\frac{f(m)}{10^{10}} = 3153600000$$

10^{10}

$$m^3 = 3153600000 \cdot 10^{10}$$

$$m = \sqrt[3]{3153600000 \cdot 10^{10}}$$

$$m = 3,1 * 10^6$$

② a) continuación

2^m

1 segundo

$$\frac{f(m)}{10^{10}} = 1$$

10^{10}

$$2^m = 10^{10}$$

$$m = \log_2 10^{10}$$

$$m = \frac{\log_{10} 10^{10}}{\log_{10} 2}$$

$$m = \frac{10}{\log_{10} 2}$$

$$m = \frac{10}{0,301}$$

$$m = 33,22$$

1 minuto

$$\frac{f(m)}{10^{10}} = 60$$

10^{10}

$$2^m = 60 \cdot 10^{10}$$

$$m = \frac{\log_{10} 60 \cdot 10^{10}}{0,301}$$

$$m = 39,13$$

1 hora

$$\frac{f(m)}{10^{10}} = 3600$$

10^{10}

$$2^m = 3600 \cdot 10^{10}$$

$$m = \frac{\log_{10} 3600 \cdot 10^{10}}{0,301}$$

$$m = 45,04$$

1 mes

$$\frac{f(m)}{10^{10}} = 2592000$$

10^{10}

$$2^m = 2592000 \cdot 10^{10}$$

$$m = \frac{\log_{10} 2592000 \cdot 10^{10}}{0,301}$$

$$m = 54,53$$

1 año

$$\frac{f(m)}{10^{10}} = 3153600000$$

10^{10}

$$2^m = 3153600000 \cdot 10^{10}$$

$$m = \frac{\log_{10} 3153600000 \cdot 10^{10}}{0,301}$$

$$m = 64,78$$

1 segundo

$$\frac{f(m)}{10^{10}} = 3153600000$$

10^{10}

$$2^m = 315360000 \cdot 10^{10}$$

$$m = \frac{\log_{10} 315360000 \cdot 10^{10}}{0,301}$$

$$m = 58,11$$

M!

com algoritmo

1 segundo: 12

1 minuto: 13

1 hora: 15

1 dia: 16

1 mes: 17

1 año: 18

1 seculo: 20

Q) b)

$$f_2(n) = \sqrt{2n}$$

$$f_3(n) = n + 10$$

$$f_6(n) = n^2 \log n$$

$$f_1(n) = n^{2.5}$$

$$f_4(n) = 10^n$$

$$f_5(n) = 100^n$$

C) $\boxed{d)}$
 $f(n) = n - 100 \quad g(n) = n - 200$
 $f(n) \in \Theta(g(n))$

b) $f(n) \in O(g(n))$ puis $f(n) \leq g(n).c$

c) $f(n) \in O(g(n))$ puis $f(n) \leq g(n).c$

d) $f(n) \in \Theta(g(n))$ puis $f(n) = g(n).c$

e) $f(n) \in \Theta(g(n))$ puis $f(n) = g(n).c$

f) $f(n) \in O(g(n))$ puis $f(n) \leq g(n).c$

g) $f(n) \in \Omega(g(n))$ puis $f(n) \geq g(n).c$

h) $f(n) \in \Omega(g(n))$ puis $f(n) \geq g(n).c$

i) $f(n) \in \Omega(g(n))$ puis $f(n) \geq g(n).c$

j) $f(n) \in \Omega(g(n))$ puis $f(n) \geq g(n).c$

k) $f(n) \in O(g(n))$ puis $f(n) \leq g(n).c$

l) $f(n) \in \Theta(g(n))$ puis $f(n) = g(n).c$

m) $f(n) \in \Theta(g(n))$ puis $f(n) = g(n).c$

n) $f(n) \in O(g(n))$ puis $f(n) \leq g(n).c$

o) $f(n) \in O(g(n))$ puis $f(n) \leq g(n).c$

$$3) \text{ a)} \sum_{i=1}^m i = \frac{m(m+1)}{2}$$

para o passo base 1

$$\sum_{i=1}^1 i = \frac{1(1+1)}{2} \Rightarrow 1 = 1 \quad \checkmark$$

supondo valido para K

$$\sum_{i=1}^K i = \frac{K(K+1)}{2} \Rightarrow 1 + 2 + \dots + K = \frac{K(K+1)}{2}$$

Provaendo para K+1

$$\sum_{i=1}^{K+1} i = \frac{(K+1)(K+2)}{2}$$

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + K + K+1 &= \frac{(K+1)(K+2)}{2} \\ &= \frac{K(K+1)}{2} + K+1 = \\ &= \frac{K^2 + K + 2K + 2}{2} \\ &= \frac{K^2 + 3K + 2}{2} \\ &= \frac{(K+1)(K+2)}{2} \end{aligned}$$

$$b) \sum_{i=0}^m i^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

para o passo base 0

$$\sum_{i=0}^0 i^2 = \frac{0(0+1)(2 \cdot 0+1)}{6} \Rightarrow 0 = 0 \quad \checkmark$$

supondo valido para K

$$\sum_{i=0}^K i^2 = \frac{K(K+1)(2K+1)}{6} \Rightarrow 0 + 1 + 4 + \dots + K^2 = \frac{K(K+1)(2K+1)}{6}$$

Provaendo para K+1

$$\sum_{i=0}^{K+1} i^2 = \frac{(K+1)(K+2)(2(K+1)+1)}{6}$$

$$\begin{aligned} 0 + 1 + 4 + \dots + K^2 + (K+1)^2 &= \frac{(K+1)(K+2)(2(K+1)+1)}{6} \\ &= \frac{K(K+1)(2K+1)}{6} + (K+1)^2 \\ &= \frac{(K^2 + K)(2K+1)}{6} + (K+1)(K+1) \end{aligned}$$

$$= \frac{2K^3 + K^2 + 2K^2 + K + K^2 + 2K + 1}{6}$$

$$= \frac{2K^3 + 3K^2 + K + 6K^2 + 12K + 6}{6}$$

$$= \frac{2K^3 + 9K^2 + 13K + 6}{6}$$

$$= \frac{(K+1)(K+2)(2(K+1)+1)}{6}$$

$$③ c) \sum_{i=1}^m (2i-1) = m^2$$

para o caso base (1)

$$\sum_{i=1}^1 (2i-1) = 1^2 \Rightarrow 1=1 \quad \checkmark$$

Supondo valido para K

$$\sum_{i=1}^k (2i-1) = k^2 \Rightarrow 1+3+5+\dots+(2k-1) = k^2$$

Provando para $k+1$

$$\sum_{i=1}^{k+1} (2i-1) = (k+1)^2$$

$$\begin{aligned} 1+3+5+\dots+(2k-1)+(2(k+1)-1) &= (k+1)^2 \\ &= k^2 + 2(k+1) - 1 \\ &= k^2 + 2k + 2 - 1 \\ &= k^2 + 2k + 1 \end{aligned}$$

$$d) \sum_{i=0}^m i^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4} \quad m \geq 1$$

para o caso base (0)

$$\sum_{i=0}^0 i^3 = \frac{0^2(0+1)^2}{4} \Rightarrow 0=0$$

para o caso base (1)

$$\sum_{i=0}^1 i^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} \Rightarrow 1 = \frac{2^2}{4} \Rightarrow 1=1 \quad \checkmark$$

Supondo valido para K

$$\sum_{i=0}^K i^3 = \frac{K^2(K+1)^2}{4} \Rightarrow 0+1+8+\dots+K^3 = \frac{K^2(K+1)^2}{4}$$

Provando para $k+1$

$$\sum_{i=0}^{k+1} i^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

$$0+1+8+\dots+k^3+(k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

$$= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$

$$= \underline{k^2(k+1)(k+1)} + (k+1)(k+1)(k+1)$$

$$= \underline{k^2(k^2+2k+1)} + (k^2+2k+1)(k+1)$$

$$= \underline{k^4+2k^3+k^2} + k^3+k^2+2k^2+2k+k+1$$

$$= \underline{k^4+2k^3+k^2} + k^3+3k^2+3k+1$$

$$= \underline{k^4+2k^3+k^2} + 4k^3+12k^2+12k+4$$

$$= \underline{k^4+6k^3+13k^2+12k+4}$$

$$= \frac{k^4+6k^3+13k^2+12k+4}{4}$$

$$\Rightarrow (k+1)(k+1)(k+2)(k+2)$$

$$= (k^2+2k+1)(\frac{k^2+4k+4}{4})$$

$$= k^4+4k^3+4k^2+2k^3+8k^2+8k+k^2+4k+4$$

$$= k^4+6k^3+13k^2+12k+4$$

- ④ a) $T(1) = 0$; $T(m) = T(m-1) + c$; c constante $\in \mathbb{R}$ e $m > 1$
- ① Formula original
 $T(n) = T(n-1) + c$
 - ② descubra o passo
 $T(n)$ é tão descrito em função de $T(n-1)$
 - ③ isole as equações para os próximos passos $T(n-1)$ e $T(n-2)$
 $T(n-1) = T(n-2) + c$
 $T(n-2) = T(n-3) + c$
 - ④ substitua os valores isolados na formula original

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + c \\ &= (T(n-2) + c) + c \\ &= (T(n-3) + c) + c + c \\ &= (T(n-3) + 3c) \end{aligned}$$
 - ⑤ identifique a formula do i -ésimo passo
 $T(n) = T(n-i) + i \cdot c$
 - ⑥ descubra o valor de (i) de forma a igualar o parâmetro $T(k)$ ao parâmetro (valor de n) no caso base
 $T(n-i) = T(1)$
 $m-i = 1$
 $i = m-1$
 - ⑦ substitua o valor de (i) na formula do i -ésimo caso.

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-i) + i \cdot c \\ &= T(n-(m-1)) + (m-1) \cdot c \\ &= T(1) + (m-1) \cdot c \\ &= (m-1) \cdot c \end{aligned}$$
 - ⑧ complexidade: $T(n) \in O(n)$
 - ⑨ provando por indução
 - caso base
 $T(1) = 1 - 1 \cdot c$
 $O = 1 - 1 \cdot c$
 $O = 0$
 - passo inductivo: $T(n-1) = ((m-1)-1) \cdot c$
 - $T(n) = T(n-1) + c$
 $= ((m-1)-1) \cdot c + c$
 $= c(m-1) - c + c$
 $= (m-1) \cdot c$

- ④ b) $T(1) = 0; T(m) = T(m-1) + 2^m$
- ① Formula original: $T(m) = T(m-1) + 2^m$
 - ② descubra o passo: $T(m)$ está descrito em função de $T(m-1)$
 - ③ Isola as equações para os próximos passos

$$T(m-1) = T(m-2) + 2^{m-1}$$

$$T(m-2) = T(m-3) + 2^{m-2}$$
 - ④ substitua os valores isolados na formula original para $T(m-1)$

$$T(m) = (T(m-2) + 2^{m-1}) + 2^m$$
 - Para $T(m-2)$

$$T(m) = (T(m-3) + 2^{m-2}) + 2^{m-1} + 2^m$$

$$= T(m-k) + 2^{m-(k-1)} + 2^{m-(k-2)} + 2^m$$

$$\quad \quad \quad + 2^{m-m-1} + 2^{m-m-2} + 2^{m-k}$$

$$\quad \quad \quad 2^{-1} \quad 2^{-2} \quad + 2^0$$
 - ⑤ identifique a formula do iésimo passo

$$T(m) = T(m-i) + 2^{m+1}-4$$
 - ⑥ descubra o valor de i de forma a isolar o parâmetro de $T(X)$ ao parâmetro (valor de m) na base

$$T(m-i) \Leftrightarrow T(1)$$

$$m-i = 1$$

$$-i = 1-m$$

$$i = m-1$$
 - ⑦ substitua o valor de i na formula do iésimo passo

$$T(m) = T(m-i) + 2^{m+1}-4$$

$$= T(m-(m-1)) + 2^{m+1}-4$$

$$= T(1) + 2^{m+1}-4$$

$$= 0 + 2^{m+1}-4$$

$$= 2^{m+1}-4$$
 - ⑧ Identifique a complexidade dessa formula: $T(m) \in \Theta(2^m)$
 - ⑨ Prova por indução
 - Passo base para $m=1$ - Hipótese $T(m-1) = 2^{(m-1)+1}-4$
 - $T(1) = 2^{m+1}-4$
 - $0 = 2^{2+1}-4$
 - $0 = 2^3-4$
 - $0 = 0$
 - Passo Indutivo
 - Passo $T(m) = T(m-1) + 2^m$
 - $= 2^{(m-1)+1}-4 + 2^m$
 - $= 2^m + 2^m - 4$
 - $= 2^{m+1}-4$
 - $T(n) = 2^{n+1}-4$

4) c) $T(1) = K; T(m) = cT(m-1)$, c, K constantes e $m > 0$

① Formula original: $T(m) = cT(m-1)$

② descreva o passo 8 $T(m)$ este deserto em função de $T(m-1)$

③ isole as equações próximas passos

$$T(m-1) = cT(m-2)$$

$$T(m-2) = cT(m-3)$$

④ substituindo na formula original

$$T(m-1) = c(cT(m-2))$$

$$= c^2 T(m-2)$$

$$T(m-2) = c^2 (cT(m-3))$$

$$= c^3 T(m-3)$$

⑤ identifique a formula do i -ésimo passo

$$T(m) = c^i T(m-i)$$

⑥ descrevendo valor de i de forma a isolá-lo o parâmetro $T(X)$ no

valor de m do caso base

-suponha $K=1$

$$T(1) = T(m-i)$$

$$K = m-i$$

$$i = m-K$$

⑦ substituindo valor de i na formula do i-ésimo caso

$$T(m) = c^{m-1} T(m-i) = c^{m-1} T(m-(m-1)) = c^{m-1} T(1)$$

$$\boxed{= c^{m-1}, K}$$

⑧ identifique a complexidade: $T(m) \in \Theta(c^m)$

⑨ prova por indução

para o passo base

$$T(m) = c^{m-1}, K \quad \text{para } m=1$$

$$\begin{matrix} c=1 \\ K=1 \end{matrix}$$

$\boxed{1 = 1}$
por indução a mostra que a formula é correta para $(m-1)$

$$T(1) = c^{m-1}, K$$

$$T(m-1) = c^{(m-1)-1}, K$$

$$= c^{m-2}, K$$

tendo

$$T(m) = cT(m-1)$$

$$= c(c^{m-2}, K)$$

$$= c \cdot c^{m-2}, K$$

$$\boxed{= c^{m-1}, K}$$

4) d) $T(1) = 1; T(m) = 3T(m/2) + m$: para $m \geq 1$

① Fórmula original: $T(m) = 3T(m/2) + m$

② Tamanho do passo: $T(m/2)$

③ Expandindo próximos passos

$$T(m/2) = 3T(m/4) + m/2$$

$$T(m/4) = 3T(m/8) + m/4$$

④ Substituindo na fórmula original

$$T(m/2) = T(m) = 3(3T(m/4) + m/2) + m$$

$$= 3^2 T(m/4) + \frac{3m}{2} + m$$

$$T(m/4) = T(m) = 3^2(3T(m/8) + m/4) + \frac{3m}{2} + m$$

$$= 3^3 T(m/8) + \frac{3^2 m}{4} + \frac{3m}{2} + m$$

$$= 3^3 T(m/8) + m \left[\frac{3^2}{2^2} + \frac{3^1}{2^1} + \frac{3^0}{2^0} \right]$$

⑤ i -ésimo passo

$$T(m) = 3^i T\left(\frac{m}{2^i}\right) + m \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{i-1} + \left(\frac{3}{2}\right)^{i-2} + \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^0 \right]$$

⑥ encontrando i

$$T(1) = T\left(\frac{m}{2^i}\right)$$

$$1 = \frac{m}{2^i} \quad \log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

$$2^i = m$$

$$i = \log_2 m$$

⑦ Aplicando i na fórmula

- primeiro encontrar a fórmula da soma geométrica

Fórmula soma:

$$S = \frac{(1^{\text{º}} \text{ termo})(\text{razão}^n - 1)}{\text{razão} - 1} = \frac{(1), \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 m} - 1}{\frac{3}{2} - 1} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 m} - 1}{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{2}{1}\right) \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 m} - 1\right) = \left(\frac{2}{1}\right) \cdot \left(\frac{3^{\log_2 m}}{2^{\log_2 m}} - 1\right)$$

$$= \left(\frac{2}{1}\right) \cdot \left(\frac{m^{\log_2 3}}{m^{\log_2 2}} - 1\right) = \left(\frac{2}{1}\right) \cdot \left(\frac{m^{\log_2 3}}{m^1} - 1\right) = \frac{2m^{\log_2 3}}{m} - 2$$

Aplicando na fórmula restante termo

$$T(m) = 3^i T\left(\frac{m}{2^i}\right) + m \left(\frac{2m^{\log_2 3}}{m} - 2 \right)$$

$$= 3^{\log_2 m} T\left(\frac{m}{2^{\log_2 m}}\right) + 2m^{\log_2 3} - 2m$$

$$= m^{\log_2 3} T\left(\frac{m}{m^{\log_2 2}}\right) + 2m^{\log_2 3} - 2m$$

$$= m^{\log_2 3} T\left(\frac{m}{m}\right) + 2m^{\log_2 3} - 2m$$

$$= m^{\log_2 3} T(1) + 2m^{\log_2 3} - 2m$$

$$= 3m^{\log_2 3} - 2m$$

⑧ complexidade

$$T(m) \in \Theta(m^{\log_2 3})$$

$$\begin{aligned} & 3^0 + 3^1 + 3^2 + \\ & 1 + 3 + 9 + \\ & \dots \\ & 1 \cdot 3 = 3 \\ & 3 \cdot 3 = 9 \quad \text{Razão é } 3 \end{aligned}$$

⑨ Provaado por indução

- Caso Base:

$$T(1) = 3^1 \cdot \log_2 3 - 2$$

$$1 = 3 \cdot 1 \cdot \log_2 3 - 2$$

$$1 = 3 - 2$$

$$1 = 1$$

- Símples:

$$T(m/2) = 3\left(\frac{m}{2}\right)^{\log_2 3} - 2\left(\frac{m}{2}\right)$$

- termos

$$T(m) = 3T(m/2) + m$$

$$= 3\left(3\left(\frac{m}{2}\right)^{\log_2 3}\right) - 2\left(\frac{m}{2}\right) + m$$

$$= 3\left(3\left(\frac{m^{\log_2 3}}{2^{\log_2 3}}\right)\right) - 2\left(\frac{m}{2}\right) + m$$

$$= 3\left(3\left(\frac{m^{\log_2 3}}{3^{\log_2 2}}\right)\right) - 2\left(\frac{m}{2}\right) + m$$

$$= 3\left(3\left(\frac{m^{\log_2 3}}{3}\right)\right) - 2\left(\frac{m}{2}\right) + m$$

$$= 3m^{\log_2 3} - 3m + m$$

$$= 3m^{\log_2 3} - 2m$$

$$(4) e) T(1) = 1 \quad T(m) = 8T\left(\frac{m}{2}\right) + m$$

① Formula original: $T(m) = 8T\left(\frac{m}{2}\right) + m$

② Tamanho do passo é $T\left(\frac{m}{2}\right)$

③ Expandindo próximos passos: $T\left(\frac{m}{2}\right)$ e $T\left(\frac{m}{4}\right)$

$$T\left(\frac{m}{2}\right) = 8T\left(\frac{m}{4}\right) + \frac{m}{2}$$

$$T\left(\frac{m}{4}\right) = 8T\left(\frac{m}{8}\right) + \frac{m}{4}$$

④ Substituindo

$$T\left(\frac{m}{2}\right) = 8\left(8T\left(\frac{m}{4}\right) + \frac{m}{2}\right) + m$$

$$= 8^2 T\left(\frac{m}{4}\right) + 4m + m$$

$T\left(\frac{m}{4}\right)$

$$T(m) = 8^2\left(8T\left(\frac{m}{8}\right) + \frac{m}{8}\right) + 4m + m$$

$$= 8^3 T\left(\frac{m}{8}\right) + 16m + 4m + m$$

$$= 8^3 T\left(\frac{m}{2^3}\right) + 4^2 m + 4^1 m + 4^0 m$$

⑤ mesmo passo

$$T(m) = 8^i T\left(\frac{m}{2^i}\right) + 4^{i-1} m + 4^{i-2} m + 4^0 m$$

$$= 8^i T\left(\frac{m}{2^i}\right) + m \left[4^{i-1} + 4^{i-2} + \dots + 4^0 \right]$$

primeiro termo = 1

$$1 \cdot 4 = 4$$

$$4 \cdot 4 = 16 \quad \text{Raiz de } 4$$

$$1 \cdot 4^1 = 4$$

$$1 \cdot 4^2 = 16$$

⑥ descobrindo valor de i

$$T\left(\frac{m}{2^i}\right) = T(1) \quad \text{logaritmo: } \log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

$$\frac{m}{2^i} = 1$$

$$m = 2^i$$

$$i = \log_2 m$$

⑦ substituindo valor de i na formula

Agora acha o valor da série geométrica

$$= \frac{(1)(4^{\log_2 m}) - 1}{4 - 1} = \frac{4^{\log_2 m} - 1}{3}$$

$$S = \frac{(\text{1º termo})(\text{razão}^m - 1)}{\text{razão} - 1}$$

$$= \frac{m^{\log_2 4} - 1}{3} = \frac{m^2 - 1}{3}$$

$$T(m) = 8^{\log_2 m} T\left(\frac{m}{2^i}\right) + m \left(\frac{m^2 - 1}{3} \right)$$

$$= m^{\log_2 8} T(1) + \frac{m^3 - m}{3}$$

$$= m^3 + \frac{m^3 - m}{3}$$

$$= 3m^3 + \frac{m^3 - m}{3}$$

$$= \frac{4m^3 - m}{3}$$

- supondo: $T\left(\frac{m}{2}\right) = \frac{4\left(\frac{m}{2}\right)^3 - \left(\frac{m}{2}\right)}{3}$

$$T(m) = 8T\left(\frac{m}{2}\right) + m$$

$$= 8 \left(\frac{4\left(\frac{m}{2}\right)^3 - \left(\frac{m}{2}\right)}{3} \right) + m$$

$$= \frac{32\left(\frac{m}{2}\right)^3 - 8\left(\frac{m}{2}\right)}{3} + m$$

$$= \frac{32\frac{m^3}{2^3} - \frac{8m}{2}}{3} + m$$

$$= \frac{32m^3 - 8m}{2^3} + m$$

$$= 4m^3 - 4m + 3m$$

$$= \frac{4m^3 - m}{3}$$

⑧ complexidade

$$T(m) = 8T\left(\frac{m}{2}\right) + m \in \Theta(m^3)$$

⑨ prova por indução

- para o caso base

$$T(1) = \frac{4 \cdot 1^3 - 1}{3}$$

$$1 = \frac{4-1}{3}$$

$$1 = 1$$

$$f) T(1) = 1; \quad T(m) = T(\frac{m}{3}) + m$$

① Fórmula original: $T(m) = T(\frac{m}{3}) + m$

② Tamnho de passo: $T(\frac{m}{3})$

③ expandindo proximos passos: $T(\frac{m}{3}) < T(\frac{m}{9})$

$$T(\frac{m}{9}) = T(\frac{m}{3}) + \frac{m}{3}$$

$$T(\frac{m}{27}) = T(\frac{m}{9}) + \frac{m}{9}$$

④ substituindo em $T(m)$

$$T(m) = (T(\frac{m}{9}) + \frac{m}{3}) + m$$

$$T(m) = (T(\frac{m}{27}) + \frac{m}{9}) + \frac{m}{3} + m$$

$$= T(\frac{m}{27}) + \frac{m}{27} + \frac{m}{9} + \frac{m}{3}$$

$$= T(\frac{m}{27}) + m \left[\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^0 \right]$$

Razão é $\left(\frac{1}{3}\right)$

⑤ i-esimo passo

$$T(m) = T\left(\frac{m}{3^i}\right) + m \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{i-2} + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^0 \right]$$

⑥ encontrando i

$$T\left(\frac{m}{3^i}\right) = T(1)$$

$$\frac{m}{3^i} = 1 \quad \log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

$$\frac{m}{3^i} = 1$$

$$m = 3^i$$

$$i = \log_3 m$$

$$\text{Fórmula da soma geométrica} \\ S = \frac{(1 - (\frac{1}{3})^{\log_3 m})}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{(1 - (\frac{1}{3})^{\log_3 m})}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 m} - 1}{\frac{-3}{3}} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 m} - 1}{-3} = \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 m} - 1\right)$$

$$= \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{m^{\log_3 1}}{m^{\log_3 3}} - 1\right) = \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{m^0}{m^1} - 1\right)$$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}$$

⑦ substituindo na fórmula:

$$T(m) = T(1) + m \left[-\frac{3}{2} + \frac{3}{2} \right]$$

$$= 1 + \left[-\frac{3m}{2} + \frac{3m}{2} \right]$$

$$= \frac{3m}{2} - \frac{3}{2} + 1$$

$$= \frac{3m}{2} - 3 + 2$$

$$= \frac{3m - 1}{2}$$

$$\text{⑧ complexidade: } T(m) = T(\frac{m}{3}) + m \in \Theta(m)$$

⑨ prova por indução

$$\text{Base: } T(1) = \frac{3 \cdot 1 - 1}{2}$$

$$1 = \frac{3}{2} - 1$$

$$1 = 1 \quad \checkmark$$

supondo:

$$T\left(\frac{m}{3}\right) = \frac{3\left(\frac{m}{3}\right) - 1}{2}$$

portanto: $T(m) = T(\frac{m}{3}) + m$

$$= \frac{3\left(\frac{m}{3}\right) - 1 + m}{2}$$

$$= \frac{3}{2} \left(\frac{m}{3} \right) - \frac{1}{2} + m = \frac{3m}{6} - \frac{1}{2} + m = \frac{m - 1 + 6m}{6} = \frac{7m - 1}{6}$$

$$= \frac{m - 1 + 2m}{2} = \boxed{\frac{3m - 1}{2}}$$

$$④ G) T(1) = 1; \quad T(m) = 7T(m/4) + m$$

① Formula original: $T(n) = 7T(n/4) + n$

② Tomando o passo: $T(m/4)$

③ Expandindo os próximos passos $T(m/4)$ e $T(m/16)$

$$T(m/4) = 7T(m/16) + (m/4)$$

$$T(m/16) = 7T(m/64) + (m/16)$$

④ Substituindo na formula:

$$T(m/4) = 7T(m/16) + m$$

$$= 7(7T(m/16) + (m/4)) + m$$

$$= 7^2T(m/16) + \frac{7m}{4} + m$$

$$T(m/16)$$

$$= 7^2(7T(m/64) + (m/16)) + \frac{7m}{4} + m$$

$$= 7^3T(m/64) + \frac{7^2m}{16} + \frac{7m}{4} + m$$

$$= 7^3T\left(\frac{m}{4^3}\right) + m \left[\left(\frac{7}{4}\right)^{i-2} + \left(\frac{7}{4}\right)^{i-1} + \left(\frac{7}{4}\right)^0 \right]$$

⑤ i-esimo passo

$$T(m) = 7^i T\left(\frac{m}{4^i}\right) + m \left[\left(\frac{7}{4}\right)^{i-2} + \left(\frac{7}{4}\right)^{i-1} + \left(\frac{7}{4}\right)^0 \right]$$

⑥ Encontrando valor de i

$$T(1) = T\left(\frac{m}{4^i}\right)$$

$$1 = \frac{m}{4^i}$$

$$4^i = m$$

$$i = \log_4 m$$

⑦ Aplicando a formula de i-esimo passo

$$T(m) = 7^{\log_4 m} T\left(\frac{m}{4^{\log_4 m}}\right) + m \left(-\frac{4m \log_4 7}{3m} - \frac{4}{3} \right)$$

$$= m^{\log_4 7} T\left(\frac{m}{m^{\log_4 4}}\right) + m \left(-\frac{4m \log_4 7}{3m} - \frac{4}{3} \right)$$

$$= m^{\log_4 7} T(1) + \frac{4m^{\log_4 7}}{3} - \frac{4m}{3}$$

$$= m^{\log_4 7} + \frac{4m^{\log_4 7} - 4m}{3}$$

$$\boxed{\frac{7m^{\log_4 7} - 4m}{3}}$$

⑧ complexidade

$$T(m) \in \Theta(m^{\log_4 7})$$

⑨ prova por indução

$$\text{① caso base: } T(1) = \frac{7 \cdot 1^{\log_4 7} - 4 \cdot 1}{3}$$

$$1 = 1 \checkmark$$

② supondo

$$T\left(\frac{m}{4}\right) = \frac{7\left(\frac{m}{4}\right)^{\log_4 7} - 4\left(\frac{m}{4}\right)}{3}$$

③ tendo

$$T(m) = 7T\left(\frac{m}{4}\right) + m$$

$$= 7\left(\frac{7\left(\frac{m}{4}\right)^{\log_4 7} - 4\left(\frac{m}{4}\right)}{3}\right) + m$$

Encontrando soma da serie Geometrica

$$S = \frac{(1\text{-termo})(10^{\log_4 m} - 1)}{R12^{\log_4 m} - 1}$$

$$= \frac{(1)\left(\frac{7}{4}\right)^{\log_4 m} - 1}{\left(\frac{7}{4}\right)^{\log_4 m} - 1}$$

$$= \frac{\left(\frac{7}{4}\right)^{\log_4 m} - 1}{\frac{7}{4} - \frac{4}{4}} = \frac{\left(\frac{7}{4}\right)^{\log_4 m} - 1}{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^{\log_4 m} - 1$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{7^{\log_4 m}}{4^{\log_4 m}} - 1\right)$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{m^{\log_4 7}}{m^{\log_4 4}} - 1\right)$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{m^{\log_4 7}}{m} - 1\right)$$

$$= \frac{4m^{\log_4 7}}{3m} - \frac{4}{3}$$

$$= \frac{4m^{\log_4 7}}{3m} - \frac{4}{3}$$

$$D = 7 \left(\frac{7\left(\frac{m}{4}\right)^{\log_4 7} - m}{3} \right) + m$$

$$= 7 \left(\frac{7\left(\frac{m^{\log_4 7}}{4^{\log_4 7}}\right) - m}{3} \right) + m$$

$$= 7 \left(\frac{7\left(\frac{m^{\log_4 7}}{4^{\log_4 7}}\right) - m}{3} \right) + m$$

$$= 7 \left(\frac{m^{\log_4 7} - m}{3} \right) + m$$

$$= 7m^{\log_4 7} - 7m + 3m$$

$$= 7m^{\log_4 7} - 4m$$

$$\textcircled{5} \text{ (a)} T(m) = T(\frac{m}{2}) + \Theta(1)$$

$$T(m) = aT(\frac{m}{b}) + f(m)$$

$$a=1 \quad b=2$$

$$\log_b a = \log_2 1 = 0$$

$$f(m) = \Theta(1) = 1$$

Caso 1: $f(n) \in O(m^{\log_b a - \epsilon}) = O(m^{0-\epsilon})$ Não é válido para $\epsilon > 0$.

Caso 2: $f(n) \in \Theta(m^{\log_b a}) = \Theta(m^0) = \Theta(1)$

então $T(m) \in \Theta(m^{\log_b a} \log m)$

$T(m) \in \Theta(1 \cdot \log m)$

$$(b) T(m) = T(9m/10) + m$$

$$T(m) = aT(\frac{m}{b}) + f(m) \quad \frac{m}{b} = \frac{9m}{10} \Rightarrow \frac{10m}{b} = 9m \Rightarrow \frac{10m}{9m} = b$$

$$a=1 \quad b = \frac{9m}{10} = \frac{10}{9}$$

$$\log_b a = \log_{\frac{10}{9}} 1 = 0$$

$f(m) = m$ não é válido para $\epsilon > 0$

Caso 1: $f(m) \in O(m^{\log_{\frac{10}{9}} 1}) = O(m^{0-\epsilon})$ não é válido para $\epsilon > 0$

Caso 2: se $f(m) \in O(m^{\log_{\frac{10}{9}} 1}) = \Theta(m^0) = \Theta(1)$ não é válido $f(m) > \Theta(1)$

Caso 3: se $f(m) \in \Omega(m^{\log_{\frac{10}{9}} 1}) = \Omega(m^{0+\epsilon})$ sendo $\epsilon = 1 (\epsilon > 0)$

Caso 3: se satisfizer a condição de regularidade

$$af(\frac{m}{b}) \leq cf(m) \text{ para } c < 1$$

$$1 \cdot (\frac{9m}{10}) \leq \frac{9}{10} m \text{ para } c = \frac{9}{10} (c < 1)$$

portanto se encaixa no caso 3

$$T(m) \in \Theta(f(m)) = \Theta(m)$$

$$(c) T(m) = 16T(\frac{m}{4}) + m^2$$

$$T(m) = aT(\frac{m}{b}) + f(m)$$

$$a=16 \quad b=4 \quad f(m)=m^2$$

$$\log_b a = \log_4 16 = 2$$

Caso 1: se $f(m) \in O(m^{\log_4 16 - \epsilon}) = O(m^{2-\epsilon})$

não é válido para $\epsilon > 0$

Caso 2: se $f(m) \in \Theta(m^{\log_4 16}) = \Theta(m^2)$

$$m^2 \in O(m^2)$$

portanto

$$T(m) \in \Theta(m^{\log_b a \log m}) = \Theta(m^2 \log m)$$

$$(5)(d) T(m) = 7T(\sqrt[3]{m}) + m^2$$

$$T(m) = aT(\sqrt[3]{b}) + f(m)$$

$$a=7 \quad b=3 \quad \log_3 a = \log_3 7 \approx 1,77$$

se caso 1: $f(m) \notin O(m^{\log_3 7} - \epsilon)$ (não valido pois $f(m) = m^2$)

se caso 2: $f(m) \notin \Theta(m^{\log_3 7})$ (não é valido pois $f(m) \in m^2$)

se caso 3: $f(m) \in \Omega(m^{\log_3 7} + \epsilon)$ para $\epsilon > 0$

$$aT(\sqrt[3]{b}) \leq c \cdot f(m)$$

$$7T(\sqrt[3]{3}) \leq \frac{1}{3}m^2$$

portanto se encaixa no caso 3

$$\text{então } T(m) \in \Theta(m^2)$$

$$(e) T(m) = 7T(\sqrt[2]{m}) + m^2$$

$$T(m) = aT(\sqrt[2]{b}) + f(m)$$

$$a=7 \quad b=2 \quad \log_2 a = \log_2 7 \approx 2,80$$

se caso 1:

$$f(m) \in O(m^{\log_2 7} - \epsilon) \text{ para } \epsilon > 0$$

$$\log_2 7 > 2 \text{ e } \log_2 7 - \epsilon > 2 \text{ para } \epsilon > 0$$

portanto se encaixa no caso 1; então:

$$f(m) \in \Theta(m^{\log_2 7})$$

$$(f) T(m) = 2T(\sqrt[4]{m}) + \sqrt{m}$$

$$T(m) = aT(\sqrt[4]{b}) + f(m)$$

$$a=2 \quad b=4 \quad \log_4 a = \log_4 2 = \frac{1}{2} \quad f(m) = \sqrt{m} = m^{\frac{1}{2}}$$

se caso 1: $f(m) \in O(m^{\log_4 4} - \epsilon) = O(m^{\frac{1}{2}} - \epsilon)$ portanto não é valido pois $f(m) = m^{\frac{1}{2}}$

se caso 2: $f(m) \in \Theta(m^{\log_4 4}) = \Theta(m^{\frac{1}{2}})$ é valido pois $f(m) = m^{\frac{1}{2}}$

portanto

$$T(m) \in \Theta(m^{\frac{1}{2}} \log m) \text{ ou } \Theta(\sqrt{m} \log n)$$

$$\textcircled{5}(g) T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \sqrt{n}$$

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

$$a = 4 \quad b = 2 \quad \log_b a = \log_2 4 = 2 \quad f(n) = n^2 \sqrt{n} = n^2 n^{\frac{1}{2}}$$

Se caso 1:

$$f(n) \in O(n^{(\log_b a) - \varepsilon}) \text{ para } \varepsilon > 0$$

$$n^2 \in O(n^{2-\varepsilon}) \text{ invalido}$$

Se caso 2:

$$f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$$

$$n^2 n^{\frac{1}{2}} \notin \Theta(n^2) \text{ invalido}$$

Se caso 3:

$$f(n) \in \Omega(n^{(\log_b a) + \varepsilon}) \quad \text{para } \varepsilon > 0$$

$$n^2 n^{\frac{1}{2}} \notin \Omega(n^{2+\varepsilon}) \text{ é valido para um } \varepsilon < 0.5$$

$$af\left(\frac{n}{b}\right) \leq c \cdot f(n) \quad \text{para } c < 1$$

$$\frac{4n}{2} \leq \frac{1}{2} n^2 n^{\frac{1}{2}}$$

$$2n \leq \frac{1}{2} n^{\frac{5}{2}}$$

Portanto $T(n) \in \Theta(n^{\frac{5}{2}})$

$$(h) T(n) = 27T\left(\frac{n}{3}\right) + n^3$$

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

$$a = 27 \quad b = 3 \quad \log_b a = \log_3 27 = 3 \quad f(n) = n^3$$

Se caso 1:

$$f(n) \in O(n^{\log_b a - \varepsilon}) = O(n^{\log_3 27 - \varepsilon}) \quad \text{mas é valido para um } \varepsilon > 0.$$

Pois $f(n) = n^3$ e $n^{\log_3 27} = n^3$

Se caso 2:

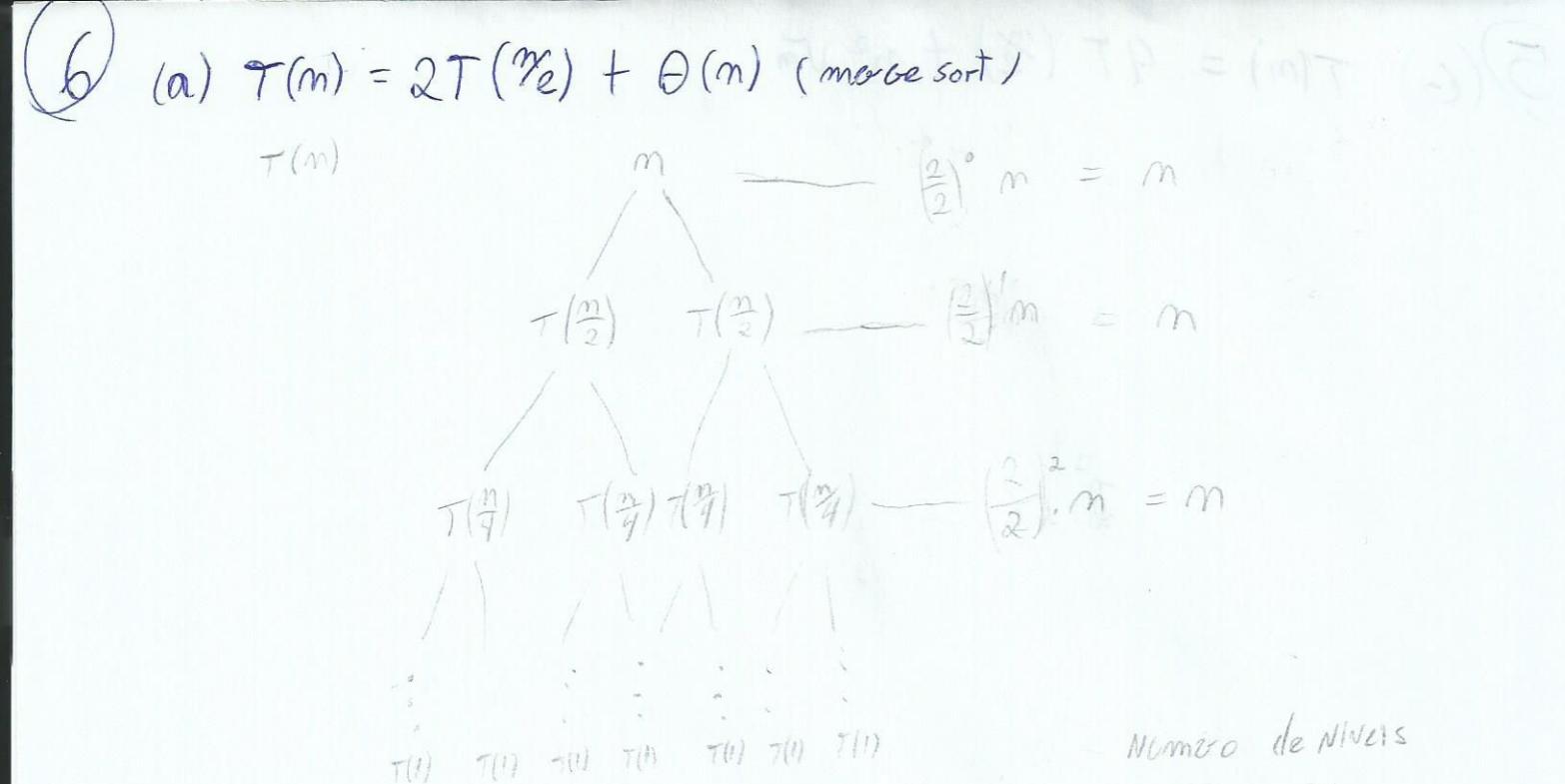
$$f(n) \in \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^{\log_3 27}) = \Theta(n^3)$$

$$n^3 \in \Theta(n^3)$$

Portanto é caso 2

$$T(n) \in \Theta(n^{\log_3 27} \log n)$$

$$T(n) \in \Theta(n^3 \log n)$$



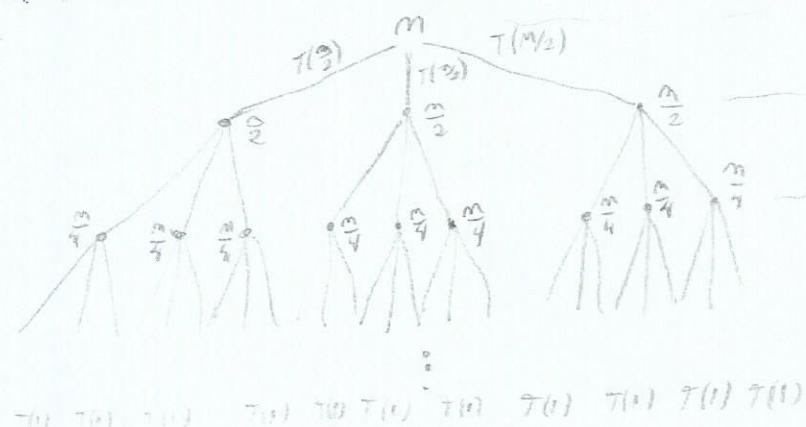
desmo
 $\frac{m}{2^i} = 1 \quad m = 2^i \Rightarrow i = \log_2 m$

$T(m) = (\text{altura, total de níveis}) \cdot m$
 $= m \log_2 m + m \quad \text{sendo } O(m \log_2 m)$

Número de Níveis

$$\log_2 m + 1$$

(b) $T(m) = 3T\left(\lfloor \frac{m}{2} \rfloor\right) + \Theta(m)$



$$T(m) = m + \frac{3}{2}m + \frac{9}{4}m + \dots$$

$$= m \left[\left(\frac{3}{2}\right)^0 + \left(\frac{3}{2}\right)^1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \dots \right]$$

$$= m \left[\frac{m^{\log_2 3}}{m} \cdot 3 - 2 \right]$$

$$= m^{\log_2 3} \cdot 3m - 2m$$

$$= 3m^{\log_2 3} - 2m$$

Portanto $T(m) \in O(m^{\log_2 3})$

$$- m = \left(\frac{3}{2}\right)^0 m$$

Número de níveis
 $\frac{m}{2^i} = 1$

$$m = 2^i$$

$$i = \log_2 m$$

$$\frac{3m}{2} = \left(\frac{3}{2}\right)^1 m$$

$$\frac{9m}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 m$$

Soma Geométrica

$$S = \frac{(1^{\text{º termo}})(\text{razão}^m - 1)}{\text{razão} - 1}$$

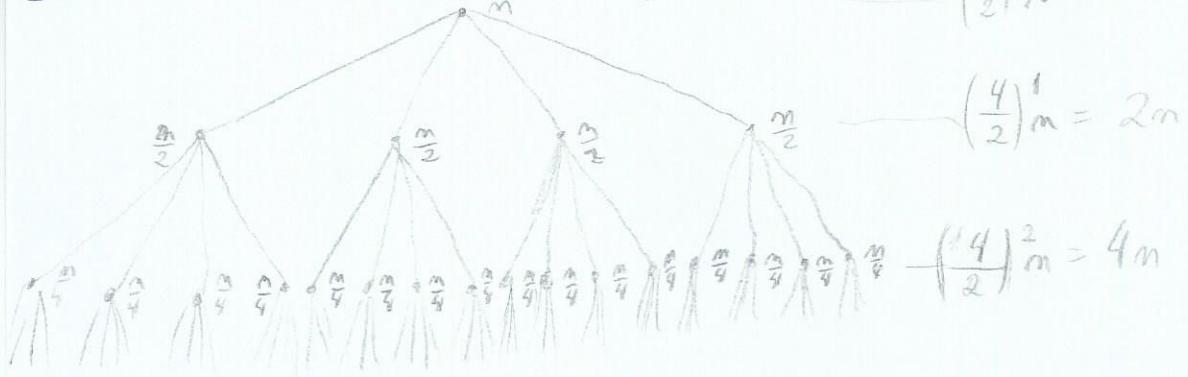
$$S = \frac{1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 m + 1} - 1}{\frac{3}{2} - 1}$$

$$S = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 m + 1} - 1}{\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 m} \left(\frac{3}{2}\right) - 1}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\left(\frac{3^{\log_2 m}}{2^{\log_2 m}}\right) \left(\frac{3}{2}\right) - 1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{1} \left(\frac{3^{\log_2 m}}{2^{\log_2 m}} \right) \left(\frac{3}{2}\right) - 1$$

$$= \frac{m^{\log_2 3} \cdot 3 - 2}{m}$$

$$⑥ (d) T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$$



3-estimo

$$\frac{m}{2^i} = 1 \Rightarrow m = 2^i \Rightarrow i = \log_2 m$$

$$\text{Niveis} = \log_2 m + 1$$

$$T(n) = n + 2n + 4n + \dots$$

$$= m [2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots]$$

$$T(n) = m [2m - 1]$$

$$= 2m^2 - m$$

$$\text{portanto } T(n) \in O(n^2)$$

Some Geometrica

$$S = \frac{(r^i - 1)(\text{Raiz}^m - 1)}{\text{Raiz}^m - 1}$$

$$S = \frac{1 / 2^{(\log_2 m) + 1} - 1}{2 - 1}$$

$$S = \frac{2^{\log_2 m + 1} - 1}{1}$$

$$= 2^{\log_2 m + 1} - 1$$

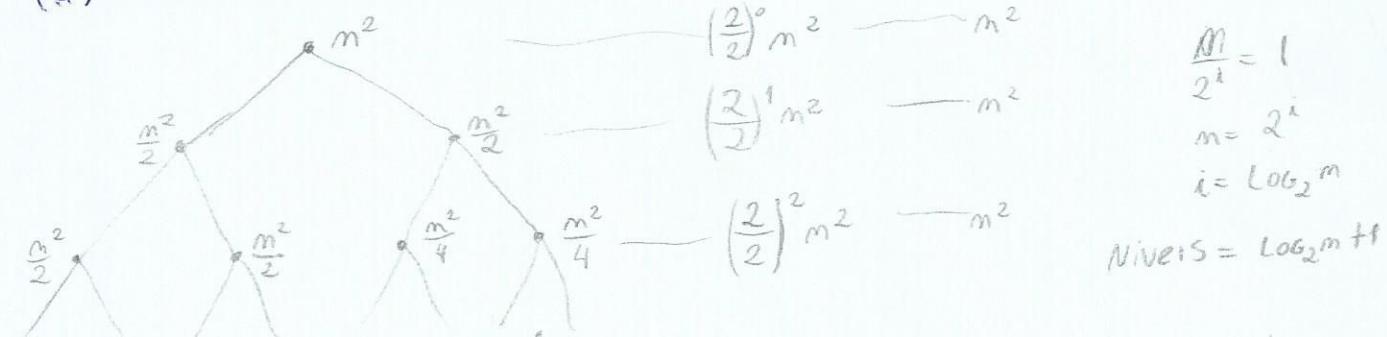
$$= (2^{\log_2 m}) / (2) - 1$$

$$= m^{\log_2 2} / (2) - 1$$

$$= m \cdot 2 - 1$$

$$= 2m - 1$$

$$(d) T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n^2)$$



$$T(1) \quad T(1) \dots T(1) \quad T(1) \quad T(1) \quad T(1)$$

$$T(n) = \underbrace{n^2 + n^2 + n^2 + \dots}_{(i+1) \cdot n^2}$$

$T(n) = \text{Numero Niveis} \cdot \text{Somma per nível}$

$$= (\log_2 m + 1) \cdot m^2$$

$$= m^2 \log_2 m + m^2$$

portanto

$$T(n) \in O(m^2 \log_2 m)$$

$$\frac{M}{2^i} = 1$$

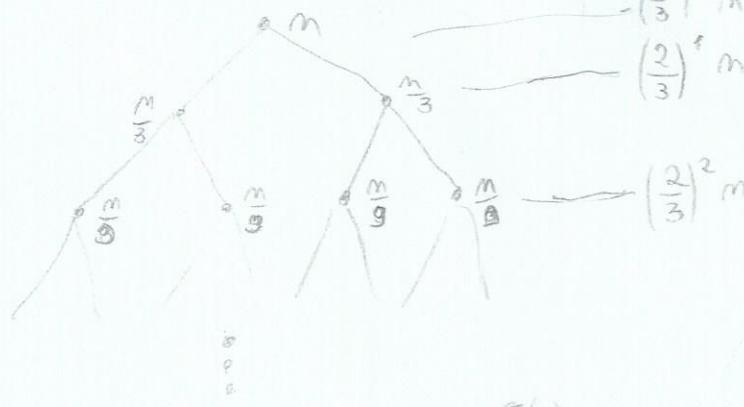
$$2^i = M$$

$$m = 2^i$$

$$i = \log_2 m$$

$$\text{Niveis} = \log_2 m + 1$$

$$\textcircled{6} \text{ (e)} T(n) = 2T\left(\frac{n}{3}\right) + \Theta(n)$$



$$T(1) = T(1) \dots T(1) = T(1)$$

$$T(n) = n + \frac{2}{3}n + \frac{4}{9}n + \dots$$

$$= n \left[\left(\frac{2}{3}\right)^0 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots \right]$$

$$T(n) = \cancel{n} \left[\frac{2^{log_3 2}}{\cancel{n}} + 3 \right]$$

$$T(n) = 2^{log_3 2} n + 3n$$

Portanto

$$T(n) \in O(n^{log_3 2})$$

\textcircled{7}

(a) Algoritmo A = divide em 5 subproblemas de metade do tamanho
 $ST(\frac{n}{2})$ combina soluções em $O(n)$

$$T(n) = ST\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$$

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

$$a = 5 \quad b = 2 \quad log_2 a = log_2 5 \quad f(n) = n$$

Caso 1. $-f(n) \in O(n^{(log_2 5)-\epsilon})$ para $\epsilon > 0$

$$n \in O(n^{(log_2 5)-\epsilon})$$

portanto $T(n) \in O(n^{log_2 5})$

(b) Algoritmo B = divide em dois subproblemas de tamanho $(n-1)$
 combina soluções em $f(n) = O(1)$

$$g(n) = 2T(n-1) + O(1)$$

pelo método de expansão - 212s cap18

- tamanho do passo $T(n-1)$

- expandindo próximos passos

$$T(n-1) = 2T(n-2) + 1$$

$$T(n-2) = 2T(n-3) + 1$$

$$\frac{n}{3^i} = 1$$

$$n = 3^i \Rightarrow i = log_3 n$$

Níveis: $log_3 n + 1$

Soma geométrica

$$S = \underbrace{(10 \text{ termos})}_{R=2}(2^{log_3 n}-1)$$

$$S = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} \cdot (2^{log_3 n}-1)$$

$$S = \frac{\left(\frac{2}{3}^{log_3 n}\right)\left(\frac{2}{3}\right)-1}{-\frac{1}{3}}$$

$$S = \frac{2}{1} \left(\frac{2^{log_3 n}}{3^{log_3 n}} \right) \left(\frac{2}{3} \right) + 3$$

$$S = \frac{2^{log_3 n}}{3^{log_3 n}} \cdot (-2) + 3$$

$$S = \frac{m^{log_2 5}}{n^{log_2 3}} \cdot (-2) + 3$$

$$S = \frac{m^{log_2 5}}{m} \cdot (-2) + 3$$

$$S = \frac{2m^{log_2 5}}{m} + 3$$

7

continuação:

- substituindo em $T(n)$ $T(m-1)$:

$$\begin{aligned} T(m) &= 2T(m-1) + 1 \\ &= 2(2T(m-2) + 1) + 1 = 2^2 T(m-2) + 2 + 1 \end{aligned}$$

 $T(m-2)$:

$$\begin{aligned} T(m) &= 2^2(2T(m-3) + 1) + 2 + 1 \\ &= 2^3 T(m-3) + \underbrace{2^2 + 2^1 + 2^0}_{\text{termos}} \end{aligned}$$

- encontrando i-esimo passo

$$T(n) = 2^i T(n-i) + 2^{i-1} + 2^{i-2} + 2^0$$

- encontrando i

$$T(n-i) = T(1)$$

$$n-i = 1$$

$$i = m-1$$

- substituindo i na formula

$$\begin{aligned} T(n) &= 2^{m-1} T(n-(m-1)) + 2^{m-1} - 1 \\ &= 2^{m-1}, 1 + 2^{m-1} - 1 \\ &= 2^1 \cdot 2^{m-1} - 1 \\ &= \boxed{2^m - 1} \end{aligned}$$

- provando por indução

- caso base

$$T(1) = 2^m - 1$$

$$1 = 2^1 - 1$$

$$1 = 1$$

$$- supondo T(m-1) = 2^{m-1} - 1$$

$$\begin{aligned} - T(n) &= 2T(m-1) + 1 \\ &= 2^1(2^{m-1} - 1) + 1 \\ &= 2^m - 2 + 1 \\ &= \boxed{2^m - 1} \end{aligned}$$

serie geométrica
 $S = (\text{1º termo})(R^{n-1} - 1)$

$$S = \frac{1 \cdot 2^{m-1} - 1}{2 - 1}$$

$$S = 2^{m-1} - 1$$

Portanto:
 $T(n) \in O(2^m)$ (C) Algoritmo C: Divide em 9 subproblemas de \mathcal{M}_3
com blma soluções em $O(m^2)$

$$T(n) = 9T(\mathcal{M}_3) + O(m^2)$$

- Teorema neste caso: $a = 9$, $b = 3$, $f(n) = O(m^2) = m^2$

$$m^{\log_3 9} = m^{\log_3 3^2} = m^2$$

$$f(n) = m^{\log_3 9}$$

$$m^2 = m^2$$

portanto é caso 2.

então,

$$T(n) \in \Theta(m^2 \log m)$$

⑦ continuacão

- consumo de tempo de cada algoritmo
 - Algoritmo a) $\Theta(n \log_2 s)$
 - Algoritmo b) $\Theta(2^n)$
 - Algoritmo c) $\Theta(n^2 \log_2 m)$

A complexidade do algoritmo da letra a) é mais eficiente assintoticamente no pior caso, pois sua complexidade de tempo é $T(n) = \Theta(n \log_2 s)$, fazendo comparação com os outros algoritmos, ele é melhor pois tem um valor fixo em seu expoente.

(8) (a)

$$\text{temos } T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + c$$

- pelo método da árvore

- expandindo próximos passos

$$T\left(\frac{n}{2}\right) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + c$$

$$T\left(\frac{n}{4}\right) = 2T\left(\frac{n}{8}\right) + c$$

- substituindo na formula

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + c$$

$$= 2(2T\left(\frac{n}{8}\right) + c) + c$$

$$= 2^2(2T\left(\frac{n}{16}\right) + c) + 2c + c$$

$$= 2^3 T\left(\frac{n}{32}\right) + 2^2 c + 2c + c$$

$$= 2^3 T\left(\frac{n}{32}\right) + c [2^2 + 2^1 + 2^0]$$

- testimo passo

$$= 2^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + c [2^{i-1} + 2^{i-2} + \dots + 2^0]$$

- encontrando i

$$T(1) = T\left(\frac{n}{2^i}\right)$$

$$1 = \frac{n}{2^i}$$

$$i = \log_2 n$$

- na formula

$$= 2^{\log_2 n} T\left(\frac{n}{2^{\log_2 n}}\right) + c(n-1)$$

$$= n^{\log_2 2} T\left(\frac{n}{n}\right) + cn - c$$

$$= n + cn - c$$

- por indução

- base

$$T(1) = 1 + 2 \cdot 1 - 2 \quad \text{para } c=2$$

$$1 = 1$$

- indução

$$T\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n}{2} + c \cdot \frac{n}{2} - c$$

- Termo

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + c$$

$$= 2\left(\frac{n}{4} + c \cdot \frac{n}{2} - c\right) + c$$

$$= n + cn - 2c + c$$

$$= n + cn - c$$

portanto $T(n) \in \Theta(n)$

$$S = \frac{(1^{\text{º termo}}) \cdot (R^{\log_2 m} - 1)}{R - 1}$$

$$S = \frac{(1)(2^{\log_2 m} - 1)}{2 - 1}$$

$$S = \frac{2^{\log_2 m} - 1}{1}$$

$$= m - 1$$

→ Alex Melisso

dado $m=2$

- Almeida Rodolfo

imprime 1 vez

dado $m=4$

- Almeida Rodolfo

imprime 3 vezes

- Almeida Rodolfo

- Almeida Rodolfo

Assim temos $(m-1)$ mzs

que é simplesmente o

$\Theta(m)$

(8) (b) $m \geq 0$ considerando n
 $r \geq 0$ $T(0) = 1$
 $T(n) = T(n-1) + C_1 K + C_2$

considerando $K = r^m \rightarrow T(n) = T(n-1) + C_1 r^m + C_2$

Pelo método de iterações

- expandindo $T(n-1) = T(n-2) + C_1 r^{m-1} + C_2$

$$T(n-2) = T(n-3) + C_1 r^{m-2} + C_2$$

- substituindo na formula

$$T(n) = T(n-1) + C_1 K^n + C_2$$

$$= T(n-2) + C_1 r^{m-1} + C_2 + C_1 r^m + C_2$$

$$= T(n-3) + C_1 r^{m-2} + C_2 + C_1 r^{m-1} + C_2 + C_1 r^m + C_2$$

$$= T(n-3) + C_1(r^{m-2} + r^{m-1} + r^m) + 3C_2$$

- iésima passo

$$T(n) = T(n-i) + C_1 \underbrace{(r^{m-i} + r^{m-(i-1)} + \dots + r^{m-(2-1)})}_{\text{Soma Geométrica}} + iC_2$$

- em contramão i

$$T(0) = T(m-i)$$

$$0 = m-i$$

$$i = m$$

Soma Geométrica

$$S = \frac{(1^{\text{º termo}})(R^{(n-1)} - 1)}{R - 1}$$

$$S = \frac{(r)(r^m - 1)}{r - 1}$$

- $T(n) = T(m-m) + C_1 \left(\frac{r(r^m - 1)}{r-1} \right) + mC_2$

$$= T(0) + C_1 \left(\frac{r(r^m - 1)}{r-1} \right) + mC_2$$

$$= 1 + C_1 \left(\frac{r^{m+1} - r}{r-1} \right) + mC_2$$

Portanto o algoritmo é $O(r^m)$

- prova por indução

$$\text{- base: } T(0) = 1 + C_1 \left(\frac{r-r^0}{r-1} \right) + 0$$

$$1 = 1$$

- considerando $m-1$ na formula

$$T(m-1) = 1 + C_1 \left(\frac{r^m - r}{r-1} \right) + (m-1)C_2$$

Como o objetivo é determinar a quantidade de vezes que CAIXA-PRETA é chamada considera $C_1 = 1$ e $C_2 = 0$

Assim considera:

$$1 + \frac{r^{m+1} - r}{r-1}$$

- $T(n) = T(m-1) + C_1 r^m + C_2$

$$= 1 + C_1 \left(\frac{r^m - r}{r-1} \right) + (m-1)C_2 + C_1 r^m + C_2$$

$$= 1 + C_1 \left(\frac{r^{m+1} - r}{r-1} \right) + C_2 m - C_2 + C_2$$

$$= 1 + C_1 \left(\frac{r^{m+1} - r}{r-1} \right) + C_2 m$$

9. a) Implemente duas versões deste algoritmo em qualquer linguagem de programação:

– versão 1: em tempo $\Omega(n \log n)$

```
def merge(A, p, q, r):
    L = [0] * (r+1)
    for i in range(p, q+1):
        L[i] = A[i]
    for j in range(q+1, r+1):
        L[r+q+1-j] = A[j]
    i = p
    j = r
    k = p
    for k in range(p, r+1):
        if L[i] <= L[j]:
            A[k] = L[i]
            i += 1
        else:
            A[k] = L[j]
            j -= 1

def mergeSort(A, p, r):
    if p < r:
        q = (p+(r-1))/2
        mergeSort(A, p, q)
        mergeSort(A, q+1, r)
        merge(A, p, q, r)

def selectMedian(A, n):
    mergeSort(A, 0, n-1)
    i = (n)/2
    return (A[i])
```

– versão 2: em tempo médio $O(n)$

```
def troca(A,i,j):
    aux = A[i]
    A[i] = A[j]
    A[j] = aux

def particione(A, p, r):
    pivo = A[r]
    i = p-1
    for j in range(p, r):
        if (A[j] <= pivo):
            i+=1
            troca(A,i,j)
    troca(A,i+1, r)
    return (i+1)

def particione_aleatorio(A, p, r):
    j = random.randrange(p,r)
    troca(A, j, r)
    return particione(A, p, r)

def select_NL(A, p, r, i):
    if (p == r):
        return A[p]
    q = particione_aleatorio(A, p,r)
    k = q - p + 1
    if (i == k):
        return A[q]
    elif (i < k):
        return select_NL(A, p, q-1, i)
    else:
        return select_NL(A, q+1, r, i-k)
```

9. b) (OPCIONAL – pontuação extra) Implemente duas versões do filtro de mediana, considerando os dois algoritmos desenvolvidos no item (a), para matrizes bidimensionais $m \times n$ de inteiros $0 \leq f(i, j) \leq 255$, sendo $0 \leq i < m$, $0 \leq j < n$, supondo janela de filtro com vizinhança parametrizável de $p \times q$, sendo $2 \leq p < m$ e $2 \leq q < n$. A

técnica, exemplos é código (em C) podem ser consultados no seguinte documento:
<https://www.ime.usp.br/~reverbel/ccm118-12/eps/ep4.pdf>

Avalie o tempo de execução real (por exemplo, em segundos) das duas versões implementadas do filtro para uma matriz (imagem) suficientemente grande ($\geq 640 \times 480$ pixels) e para diferentes escolhas de p e q (por exemplo, 3, 7, 15, . . .).

Códigos:

```
def readImage (nome):
    imagem = cv2.imread(nome)
    gray_image = cv2.cvtColor(imagem, cv2.COLOR_BGR2GRAY)
    return gray_image

def aplica_janela(imagem, p, q, i, j, algoritmo_mediana):
    vetor = [0] * (p*q)
    k = 0
    if ((p % 2) == 0 or (q % 2) == 0):
        for r in range( i - (p/2), i + (p/2) -1):
            for l in range(j - (q/2), j+(q/2) -1):
                vetor[k] = imagem[r,l]
                k += 1
    else:
        for r in range( i - (p/2), i + (p/2)):
            for l in range(j - (q/2), j+(q/2)):
                vetor[k] = imagem[r,l]
                k += 1
    if (algoritmo_mediana == 1):
        a = select_NL(vetor, 0, k-1, math.floor((k+1)/2.0) )
    else:
        a = selectMedian(vetor, k, math.floor((k+1)/2.0))
    return a

def filtro_mediana(imagem, p, q, algoritmo_mediana):
    imagem_filtrada = copy.copy(imagem)
    if ( (p<2 or p >= imagem.shape[0]) or (q<2 or q >= imagem.shape[1])):
        print ("Tamanho invalido para janela de filtro!")
    else:
        for i in range(0,imagem.shape[0]):
            for j in range(0, imagem.shape[1]):
                if ( (i - (p/2) >= 0) and (j - (q/2) >= 0) and (i+(p/2) < imagem.shape[0]) and (j+(q/2) < imagem.shape[1]) ):
                    imagem_filtrada[i,j]=aplica_janela(imagem, p, q, i, j, algoritmo_mediana)
                else:
                    imagem_filtrada[i,j] = 0
    return imagem_filtrada
```

Imagen Original

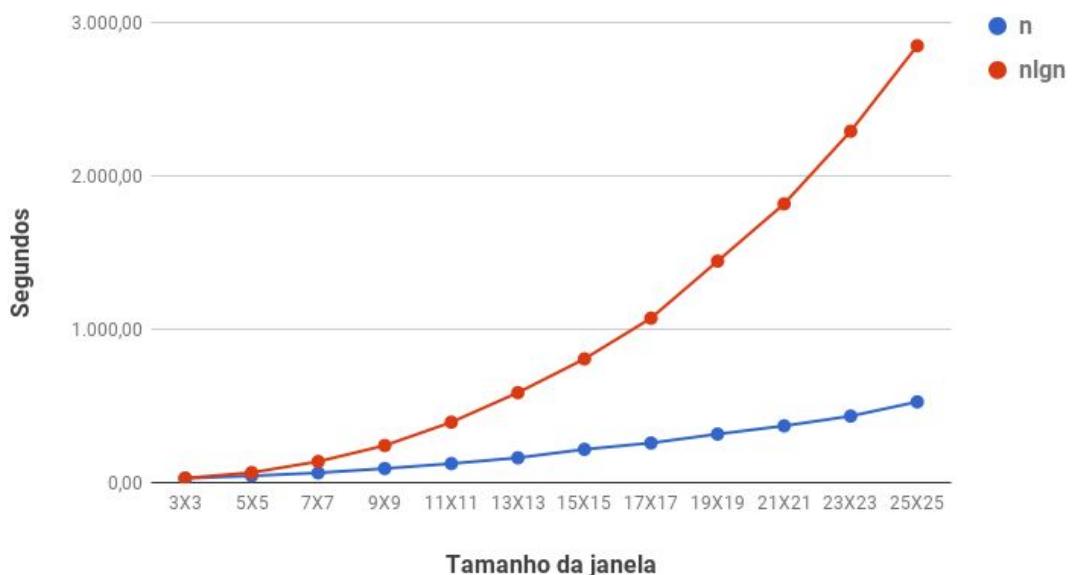
Nome: paisagem.jpg

Tamanho: 720 x 900



Resultado dos experimentos:

Desempenho das abordagens



A seguir são exibidos os resultados de cada experimento.

Experimento 1

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: $O(n)$

- Tamanho da Janela: 3 X 3
- Tempo inicial: 1525797785.67
- Tempo final: 1525797810.05
- Tempo execução total: 24.3830571175



Experimento 2

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(nlogn)

- Tamanho da Janela: 3 X 3
- Tempo inicial: 1525798525.17
- Tempo final: 1525798550.4
- Tempo execução total: 25.2275538445



Experimento 3

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(n)

- Tamanho da Janela: 5 X 5
- Tempo inicial: 1525798656.22
- Tempo final: 1525798696.67
- Tempo execução total: 40.4442090988



Experimento 4

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(nlogn)

- Tamanho da Janela: 5 X 5
- Tempo inicial: 1525798787.47
- Tempo final: 1525798849.44
- Tempo execução total: 61.9720978737



Experimento 5

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(n)

- Tamanho da Janela: 7 X 7
- Tempo inicial: 1525799926.17
- Tempo final: 1525799986.4
- Tempo execução total: 60.2346711159



Experimento 6

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(nlogn)

-- Tamanho da Janela: 7 X 7

-- Tempo inicial: 1525800037.88

-- Tempo final: 1525800172.0

-- Tempo execução total: 134.117254972



Experimento 7

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(n)

-- Tamanho da Janela: 9 X 9

-- Tempo inicial: 1525800233.3

-- Tempo final: 1525800321.8

-- Tempo execução total: 88.5035991669



Experimento 8

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(nlogn)

-- Tamanho da Janela: 9 X 9

-- Tempo inicial: 1525800355.24

-- Tempo final: 1525800594.04

-- Tempo execução total: 238.805572033



Experimento 9

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(n)

-- Tamanho da Janela: 11 X 11

-- Tempo inicial: 1525800635.54

-- Tempo final: 1525800756.12

-- Tempo execução total: 120.586702108



Experimento 10

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(nlogn)

- Tamanho da Janela: 11 X 11
- Tempo inicial: 1525800773.81
- Tempo final: 1525801165.0
- Tempo execução total: 391.187102079



Experimento 11

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(n)

- Tamanho da Janela: 13 X 13
- Tempo inicial: 1525801231.84
- Tempo final: 1525801390.38
- Tempo execução total: 158.544473886



Experimento 12

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(nlogn)

- Tamanho da Janela: 13 X 13
- Tempo inicial: 1525801452.18
- Tempo final: 1525802036.3
- Tempo execução total: 584.113286018



Experimento 13

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(n)

- Tamanho da Janela: 15 X 15
- Tempo inicial: 1525802247.06
- Tempo final: 1525802460.79
- Tempo execução total: 213.731586933



Experimento 14

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(nlogn)

- Tamanho da Janela: 15 X 15
- Tempo inicial: 1525802500.77
- Tempo final: 1525803305.65
- Tempo execução total: 804.878239155



Experimento 15

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(n)

- Tamanho da Janela: 17 X 17
- Tempo inicial: 1525803354.67
- Tempo final: 1525803610.05
- Tempo execução total: 255.383650064



Experimento 16

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(nlogn)

- Tamanho da Janela: 17 X 17
- Tempo inicial: 1525803643.58
- Tempo final: 1525804714.53
- Tempo execução total: 1070.95259213



Experimento 17

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(n)

- Tamanho da Janela: 19 X 19
- Tempo inicial: 1525804789.2
- Tempo final: 1525805102.74
- Tempo execução total: 313.545382977



Experimento 18

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(nlogn)

- Tamanho da Janela: 19 X 19
- Tempo inicial: 1525805127.55
- Tempo final: 1525806571.39
- Tempo execução total: 1443.84177804



Experimento 19

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(n)

- Tamanho da Janela: 21 X 21
- Tempo inicial: 1525885454.78
- Tempo final: 1525885821.87
- Tempo execução total: 367.093325853



Experimento 20

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(nlogn)

- Tamanho da Janela: 21 X 21
- Tempo inicial: 1525885862.28
- Tempo final: 1525887680.27
- Tempo execução total: 1817.99079394



Experimento 21

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(n)

- Tamanho da Janela: 23 X 23
- Tempo inicial: 1525887702.08
- Tempo final: 1525888133.27
- Tempo execução total: 431.186913013



Experimento 22

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(nlogn)

- Tamanho da Janela: 23 X 23
- Tempo inicial: 1525888152.84
- Tempo final: 1525890445.56
- Tempo execução total: 2292.71445107



Experimento 23

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(n)

- Tamanho da Janela: 25 X 25
- Tempo inicial: 1525806719.54
- Tempo final: 1525807243.69
- Tempo execução total: 524.145744085



Experimento 24

IMAGEM: paisagem.jpg

IMAGEM: 720 X 900

Filtro: O(nlogn)

-- Tamanho da Janela: 25 X 25

-- Tempo inicial: 1525807280.03

-- Tempo final: 1525810131.36

-- Tempo execução total: 2851.33629513

