武汉理工大学研究生考试试卷（A 卷）

2023 ～ 2024 学年 1 学期 矩阵论(学硕) 课程 2024 年 1 月 7 日

（请在答题本上作答，不必抄题，但须标明题目序号）

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 已知 $m \times n$ 矩阵 A 的秩为 r，线性方程组 $A^TAx = 0$ 的解空间的维数__________。

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 的奇异值为____________________。

3. 求 (2) 中矩阵 A 的 QR 分解为____________________。

4. 已知 $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & i & -1 \\ 0 & -1 & 3i \end{bmatrix}, i^2 = -1$，则其矩阵范数 $\|A\|_1 =$________；$\|A\|_\infty =$________；$\|A\|_F =$________。

5. 已知矩阵 A 如 (4)，则 A 的最小多项式为__________________。

二、（15 分）

设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

1. 求 A 的行列式因子，不变因子，初等因子；

2. 求 A 的 Jordan 标准形和 $\lambda E - A$ 的 Smith 标准形；

3. 求 A 的最小多项式。

三、（15 分）

设 $F[t]_3 = \{f(t) = a + bt + ct^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$，对 $F[t]_3$ 中的任意元素 $f(t) = a + bt + ct^2$，定义映射 $T[f(t)] = (a + b + 4c) + (2a + 2b + 3c)t + 3at^2$。

1. 证明 T 是 $F[t]_3$ 上的线性变换；

2. 求 T 在基 $1, t, t^2$ 基下的矩阵；

3. 求 T 的像空间 $\mathrm{Im}T$ 的一组基和维数。

四、（15 分）

已知微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

1. 求 e^{At}, e^{A}；
2. 求微分方程组的解。

五、（15 分）

设 $\mathbb{R}^4$ 的子空间

$$W = \{X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \mid AX = 0\}, \text{ 其中 } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

对于任意的 $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T, Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T \in W$，定义内积

$$(X, Y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_4y_4$$

1. 证明 W 为子空间；
2. 求 W 一组标准正交基。

六、（25 分）

设 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

1. 求 A 的满秩分解；
2. 求 A 的广义逆 A^+；
3. 利用广义逆判断方程组 $Ax = b$ 的相容性；
4. 求 $Ax = b$ 的最小二乘解；
5. 求 $Ax = b$ 的极小范数最小二乘解。