武汉理工大学研究生考试试卷（A 卷）

2023 ～ 2024 学年 1 学期 矩阵论(学硕) 课程 2024 年 1 月 7 日

（请在答题本上作答，不必抄题，但须标明题目序号）

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1 A为$m\times n$阶矩阵，那么A^T为$n\times m$阶矩阵，则A^TA为$n\times n$阶矩阵。由于$rankA=r$，因此解空间维数为$n-r$.

2 $A^HA=\begin{bmatrix}3&3\\3&9\end{bmatrix}$, $\lambda I-A^HA=\begin{bmatrix}\lambda-3&-3\\-3&\lambda-9\end{bmatrix}$，$\lambda=6\pm2\sqrt{3}$，所以奇异值为$\sqrt{6\pm2\sqrt{3}}$。

3 取$\beta_1=\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，则$\gamma_1=\dfrac{\beta_1}{||\beta_1||}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$.

取$\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{||\beta_1||^2}\beta_1=\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}-\dfrac{3}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$，则$\gamma_2=\dfrac{\beta_2}{||\beta_2||}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$.

$$A=QR=(\gamma_1,\gamma_2)\begin{bmatrix}||\beta_1|| & (\alpha_2,\gamma_1)\\0&||\beta_2||\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3}&\sqrt{3}\\0&\sqrt{6}\end{bmatrix}$$

4 矩阵范数 $\|A\|_1=\max\sum_{i=1}^{3}|a_{ij}|=4.$

矩阵范数 $\|A\|_\infty=\max\sum_{j=1}^{3}|a_{ij}|=4.$

矩阵范数 $\|A\|_F=\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}|a_{ij}|^2}=4.$

5 $\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda+2&0&0\\0&\lambda-i&1\\0&1&\lambda-3i\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&\lambda-3i\\\lambda-i&0&1\\0&\lambda+2&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&\lambda-3i\\0&0&(\lambda-2i)^2\\0&\lambda+2&0\end{bmatrix}$

$\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&(\lambda-2i)^2\\0&\lambda+2&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\lambda+2&0\\0&0&(\lambda-2i)^2\end{bmatrix}$. 所以极小多项式$m_A(\lambda)=(\lambda+2)(\lambda-2i)^2$.

二、（15 分）

解:

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix}\lambda-2&0&0\\-1&\lambda-1&-1\\-1&1&\lambda-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1&1&\lambda-3\\-1&\lambda-1&-1\\\lambda-2&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&\lambda-3\\\lambda-1&-1&-1\\0&\lambda-2&0\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&-1&\lambda-3\\0&\lambda-2&-(\lambda-2)^2\\0&\lambda-2&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\lambda-2&-(\lambda-2)^2\\0&\lambda-2&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\lambda-2&0\\0&0&(\lambda-2)^2\end{bmatrix}$$，即$Smith$标准型。

由Smith标准型知特征值为$\lambda=2$（三重），行列式因子为：$D_1=1,D_2=\lambda-2,D_3=(\lambda-2)^3$，不变因子为：$d_1=1,d_2=\lambda-2,d_3=(\lambda-2)^2$，初等因子为$\lambda-2,(\lambda-2)^2$。

因此Jordan标准型为$\begin{bmatrix}2&&\\&2&1\\&&2\end{bmatrix}=diag\left\{2,\begin{bmatrix}2&1\\2&0\end{bmatrix}\right\}$.

显然极小多项式$m_A(\lambda)=d_3=(\lambda-2)^2$.

三、（15 分）

解:（1）证明：映射 T 对$F[t]_3$加法和数乘封闭，且包含$\mathbf{0}$向量，所以为线性变换.

（2）下面用两种方法求解，其中解法一为线性变换，解法二为基坐标。

解 1 由已知$\{e_1,e_2,e_3\}=\{1,t,t^2\}$为一组基。

取$a=1,b=0,c=0$,有$T[f(t)]=T[1]=T[e_1]=1+2t+3t^2=\begin{bmatrix}1&t&t^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$.

取$a=0,b=1,c=0$,有$T[f(t)]=T[t]=T[e_2]=1+2t=\begin{bmatrix}1&t&t^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$.

取$a=0,b=0,c=3$,有$T[f(t)]=T[t^2]=T[e_3]=4+3t=\begin{bmatrix}1&t&t^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\3\\0\end{bmatrix}$.

所以$T(1,t,t^2)=T(e_1,e_2,e_3)=(T(e_1),T(e_2),T(e_3))=(1,t,t^2)\begin{bmatrix}1&1&4\\2&2&3\\3&0&0\end{bmatrix}$.

不难看出T 在基 $1,t,t^2$ 基下的表示矩阵为$\begin{bmatrix}1&1&4\\2&2&3\\3&0&0\end{bmatrix}$.

解 2 $T[f(t)] = (a+b+4c) + (2a+2b+3c)t + 3at^2 = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$

显然T 在基 $1, t, t^2$ 基下的表示矩阵为$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

（3）由于$rank\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3$，所以$\mathrm{Im}T = 3$，显然可以取一组基为$\{1, t, t^2\}$.

四、（15 分）

解：（1）先求出Smith标准型以得到极小多项式，再利用待定系数法计算即可。

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 1 & \lambda-3 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ \lambda-2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & \lambda-3 \\ \lambda-1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -1 & \lambda-3 \\ 0 & \lambda-2 & -(\lambda-2)^2 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -(\lambda-2)^2 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^2 \end{bmatrix}.$$

显然A的极小多项式为$m_A(\lambda) = (\lambda-2)^2$，$\deg\ m_A(\lambda)$=2，所以待定系数的最高次为$2-1=1$次。设$f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda$。记$e^\lambda = g(\lambda)$.

考虑$m_A(\lambda) = (\lambda-2)^2$，特征值为$\lambda = 2$（两重），带入$f(\lambda)$得：

$$f(2) = a_0 + 2a_1 = g(2) = e^2$$

$$f'(2) = a_1 = g'(2) = e^2$$

解上述方程组得到系数:

$$a_0 = -e^2$$

$$a_1 = e^2$$

所以$e^A = a_0E + a_1A = (A-E) \times e^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} e^2.$

同理可得$e^{tA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1-t & t \\ t & -t & 1+t \end{bmatrix} e^{2t}.$

（2）带入公式即可：

$$x(t) = e^{tA}x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1-t & t \\ t & -t & 1+t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t}$$

五、（15 分）

解：（1）显然.

（2）由题意，W中向量为$AX=0$的解空间，又注意到$\text{rank}A=2$，所以解空间维数为2。

解方程$AX=0$得$X=c_1\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}(c_1,c_2\in\mathbf{R})$，二者恰好正交。

显然W的一组标准正交基可取$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}$和$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$。

注 1 *若上面解出来的X两组解向量并不正交，进行一次Gram-Schmidt正交化即可。*

六、（25 分）

解：（1）注意到矩阵A的一、二列相同，且二三列显然线性无关，因此rankA=2。

利用矩阵乘法的右乘有$A=\begin{bmatrix}0&0&2\\1&1&0\\0&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}=BC=\begin{bmatrix}0&2\\1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

即得满秩分解A=BC，其中：

$$B=\begin{bmatrix}0&2\\1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

（2）由于A为4×3阶矩阵，所以Moore-Penrose广义逆A^+应为3×4阶矩阵，直接带入公式即可。

$$\begin{aligned}A^+&=C^H(CC^H)^{-1}(BB^H)^{-1}B^H\\&=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2&1\\1&6\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0&1&0&1\\2&0&1&1\end{bmatrix}\\&=\frac{1}{22}\begin{bmatrix}1&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&-1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&1\\2&0&1&1\end{bmatrix}=\frac{1}{22}\begin{bmatrix}-2&6&-1&5\\-2&6&-1&5\\8&-2&4&2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$A^+ = \frac{1}{22}\begin{bmatrix} -2 & 6 & -1 & 5 \\ -2 & 6 & -1 & 5 \\ 8 & -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

（3）相容性即验证AA^+b是否与b相等即可。

$$AA^+ = \frac{1}{22}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 6 & -1 & 5 \\ -2 & 6 & -1 & 5 \\ 8 & -2 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{22}\begin{bmatrix} 16 & -4 & 8 & 4 \\ -4 & 12 & -2 & 10 \\ 8 & -2 & 4 & 2 \\ 4 & 10 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

$$AA^+b = \frac{1}{22}\begin{bmatrix} 16 & -4 & 8 & 4 \\ -4 & 12 & -2 & 10 \\ 8 & -2 & 4 & 2 \\ 4 & 10 & 2 & 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 6 \\ 14 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = b$$

显然，方程组 $Ax = b$ 的相容性不相容。

（5）极小范数最小二乘解为$x^* = A^+b$。

$$x^* = A^+b = \frac{1}{22}\begin{bmatrix} -2 & 6 & -1 & 5 \\ -2 & 6 & -1 & 5 \\ 8 & -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

（4）最小二乘解为$x = A^+b + (E - A^+A)y$，其中$y \in \mathbf{R^3}$。

$$A^+A = \frac{1}{22}\begin{bmatrix} -2 & 6 & -1 & 5 \\ -2 & 6 & -1 & 5 \\ 8 & -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$E - A^+A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

取$y = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T$，代入$(E - A^+A)y$得：

$$(E - A^+A)y = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-b \\ b-a \\ 0 \end{bmatrix} = (a-b)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

由于y是任意的，因此$(E - A^+A)y = c\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, (c \in \mathbf{R})$.

综上，最小二乘解为$x = \dfrac{1}{11}\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, (c \in \mathbf{R}).$