武汉理工大学研究生考试试卷（A 卷）

2024 ~2025 学年 1 学期 矩阵论(学硕) 课程 2024 年 12 月 28 日

（请在答题本上作答，不必抄题，但须标明题目序号）

一．**填空题**（每小题 3 分，共 15 分）

（1）设$x=\begin{bmatrix}4i\\-3i\\12\\0\end{bmatrix}$, 其中$i^2=-1$, 则范数$\|x\|_1=$____，$\|x\|_\infty=$____.

（2）设矩阵$A=\begin{bmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{bmatrix}$, 则$A^5-3A^4+2A^3-A^2+4A-4E=$____.

（3）λ -矩阵$A(\lambda)=\begin{bmatrix}-\lambda+1&\lambda^2&\lambda\\\lambda&\lambda&-\lambda\\\lambda^2+1&\lambda^2&-\lambda^2\end{bmatrix}$的 Smith 标准形为_____.

（4）矩阵$A=\begin{bmatrix}0&4&1\\1&1&1\\0&3&2\end{bmatrix}$的 QR 分解为_____.

（5）设向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$与向量组$B:\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$均为 4 维线性空间$V$的两组基，且$\alpha_1=\beta_3-2\alpha_2,\alpha_2=\beta_4-2\alpha_3,\beta_1=\alpha_3-2\beta_2,\beta_2=\alpha_4-2\beta_3$，则由基$A$到基$B$的过渡矩阵为_______.

二．（15 分）设$A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-3&-3&3\\-2&-2&2\end{bmatrix}$.

（1）求A的行列式因子，不变因子，初等因子;

（2）求A的 Jordan 标准形和$\lambda E-A$的 Smith 标准形;

（3）求A的最小多项式.

三.（15 分）设T为 4 维线性空间V上的线性变换，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为$V$的一组基，$T$在该基下的矩阵为$A=\begin{bmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{bmatrix}$.

（1）求T在基$\beta_1=\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_4,\beta_2=\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4,\beta_3=\alpha_3+\alpha_4,\beta_4=\alpha_4$下的矩阵;

（2）求T的核空间$\ker T$的一组基和维数.

四.（15 分）已知微分方程组

$$\begin{cases}\frac{dx(t)}{dt}=Ax(t)\\ x(0)=x_0\end{cases}，\text{其中}A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ -4 & 0 & 3\end{bmatrix},\quad x_0=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

（1）求$e^{At}, \cos A$;

（2）求微分方程组的解.

五.（15 分）设$\mathbb{R}^{2\times 2}$的子集$W=\left\{A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}; a_{11}+a_{22}=0, a_{12}-a_{21}=0\right\}$.

对于任意的$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}\in W$，定义内积

$$(A,B)=\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}(i+j)a_{ij}b_{ij}.$$

（1）证明W为子空间;

（2）求W的正交补$W^{\perp}$一组标准正交基.

六.（25 分）设$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$。

（1）求A的满秩分解;

（2）求A的广义逆A^{+};

（3）利用广义逆判断方程组$Ax=b$的相容性;

（4）求$Ax=b$的最小二乘解;

（5）求$Ax=b$的极小范数最小二乘解.