武汉理工大学研究生考试试卷（A 卷）

2024–2025 学年 1 学期　矩阵论(学硕) 课程　2024 年 12 月 28 日

一、填空题

1 $x=(4i,-3i,12,0)^T$，由范数定义可得：

$$||x||_1=\sum_{k=1}^{4}|x_k|=4+3+12+0=19$$
$$||x||_\infty=\max\ |x_k|=\max\{4,3,12,0\}=12$$

2 先写出$Smith$标准型：

$$\lambda I_3-A=\begin{bmatrix}\lambda+1&-1&0\\4&\lambda-3&0\\-1&0&\lambda-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&\lambda+1&0\\3-\lambda&4&0\\0&-1&\lambda-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&\lambda+1&0\\0&(\lambda-1)^2&0\\0&-1&\lambda-2\end{bmatrix}\to$$
$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&(\lambda-1)^2&0\\0&-1&\lambda-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-(\lambda-2)\\0&(\lambda-1)^2&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&(\lambda-1)^2(\lambda-2)\end{bmatrix}.$$

于是可以得到A的极小多项式$m_A(\lambda)=d_3=(\lambda-1)^2(\lambda-2)=\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2$，所以根据$Caley$-$Hamilton$定理，有$A^3-4A^2+5A-2E=\mathbf{0}$.

因此对$A^5-3A^4+2A^3-A^2+4A-4E$利用上式进行带余多项式除法可简化计算：

$$\begin{aligned}A^5-3A^4+2A^3-A^2+4A-4E&=(A^3-4A^2+5A-2E)(A^2+A+2E)+(A-2E)\\&=\mathbf{0}(A^2+A+2E)+(A-2E)=\mathbf{0}+(A-2E)=A-2E\end{aligned}$$

所以原式$A^5-3A^4+2A^3-A^2+4A-4E=A-2E$

即本题所求等于$A-2E=\begin{bmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&1&0\\-4&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$.

3

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}-\lambda+1&\lambda^2&\lambda\\\lambda&\lambda&-\lambda\\\lambda^2+1&\lambda^2&-\lambda^2\end{bmatrix}$$

$$A(\lambda)\to\begin{bmatrix}-\lambda+1&\lambda^2&\lambda\\1&\lambda^2+\lambda&0\\\lambda^2+1&\lambda^2&-\lambda^2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&\lambda^2&\lambda\\1&\lambda^2+\lambda&0\\1&\lambda^2&-\lambda^2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&\lambda^2&\lambda\\0&\lambda&-\lambda\\0&0&-(\lambda^2+\lambda)\end{bmatrix}$$
$$\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\lambda&-\lambda\\0&0&-(\lambda^2+\lambda)\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda^2+\lambda\end{bmatrix}=diag\{1,\lambda,\lambda^2+\lambda\}.$$

4 由已知$A=\begin{bmatrix}0&4&1\\1&1&1\\0&3&2\end{bmatrix}$，记$\alpha_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}4\\1\\3\end{bmatrix}$，$\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$.

利用*Gram-Schmidt*正交化方法可得到一组正交基$\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$，和其对应的标准单位正交基$\{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\}$.

取$\beta_1=\alpha_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$，则$\gamma_1=\frac{\beta_1}{||\beta_1||}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$.

取$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{||\beta_1||^2}\beta_1=\begin{bmatrix}4\\1\\3\end{bmatrix}-\frac{1}{1}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\0\\3\end{bmatrix}$，则$\gamma_2=\frac{\beta_2}{||\beta_2||}=\begin{bmatrix}0.8\\0\\0.6\end{bmatrix}$.

取$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{||\beta_1||^2}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{||\beta_2||^2}\beta_2=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}-\frac{1}{1}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}-\frac{10}{25}\begin{bmatrix}4\\0\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.6\\0\\0.8\end{bmatrix}$，则$\gamma_3=\frac{\beta_3}{||\beta_3||}=\begin{bmatrix}-0.6\\0\\0.8\end{bmatrix}$.

根据QR分解定理$A=QR=\begin{bmatrix}\gamma_1&\gamma_2&\gamma_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}||\beta_1||&(\alpha_2,\gamma_1)&(\alpha_3,\gamma_1)\\0&||\beta_2||&(\alpha_3,\gamma_2)\\0&0&||\beta_3||\end{bmatrix}$，所以将求得的正交基$\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$及其对应的标准单位正交基$\{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\}$带入上述公式即可。

$$A=\begin{bmatrix}0&4&1\\1&1&1\\0&3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0.8&-06\\1&0&0\\0&0.6&0.8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&5&2\\0&0&1\end{bmatrix}$$

5 将β_i用α_i线性表示出来即可。

由$\alpha_1=\beta_3-2\alpha_2$，知$\beta_3=\alpha_1+2\alpha_2$.

由$\alpha_2=\beta_4-2\alpha_3$，知$\beta_4=\alpha_2+2\alpha_3$.

由$\beta_2=\alpha_4-2\beta_3$，知$\beta_2=\alpha_4-2\beta_3=\alpha_4-2(\alpha_1+2\alpha_2)=-2\alpha_1-4\alpha_2+\alpha_4$.

由$\beta_1=\alpha_3-2\beta_2$，知$\beta_1=\alpha_3-2\beta_2=\alpha_3-2(-2\alpha_1-4\alpha_2+\alpha_4)=4\alpha_1+8\alpha_2+\alpha_3-2\alpha_4$.

将上述线性关系用矩阵形式表示即得过渡矩阵：

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{bmatrix}4&-2&1&0\\8&-4&2&1\\1&0&0&2\\-2&1&0&0\end{bmatrix}$$

二、

解：只需求出Smith标准型，其它均可由Smith标准型得到。

$$\lambda E-A\to\begin{bmatrix}\lambda-1&-1&1\\3&\lambda+3&-3\\2&2&\lambda-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&\lambda-1\\-3&\lambda+3&3\\\lambda-2&2&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&\lambda-1\\0&\lambda&3\lambda\\0&\lambda&-\lambda^2+3\lambda\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\lambda&3\lambda\\0&\lambda&-\lambda^2+3\lambda\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda^2\end{bmatrix}=diag\{1,\lambda,\lambda^2\}.$$

由Smith标准型知特征值为$\lambda=0$（三重），行列式因子为：$D_1=1,D_2=\lambda,D_3=\lambda^3$，不变因子为：$d_1=1,d_2=\lambda,d_3=\lambda^2$，初等因子为$\lambda,\lambda^2$。

因此Jordan标准型为$\begin{bmatrix}0&&\\&0&1\\&0&0\end{bmatrix}=diag\left\{0,\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\right\}.$

显然极小多项式$m_A(\lambda)=d_3=\lambda^2.$

三、

解：（1）由已知可直接写出过渡矩阵P，其中P满足$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)P$，由于P为下三角阵因此容易得到其逆$P^{-1}$

$$P=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\0&-1&1&0\\1&-1&1&1\end{bmatrix},P^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\2&1&1&0\\-1&0&-1&1\end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\2&1&1&0\\-1&0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\0&-1&1&0\\1&-1&1&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&2&1\\1&2&5&5\\2&4&10&10\\0&-4&-6&-8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\0&-1&1&0\\1&-1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-3&3&1\\2&-8&10&5\\4&-16&20&10\\0&10&-14&-8\end{bmatrix}$$

（2）$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 5 & 5\\ 2 & -2 & 1 & -2\end{bmatrix}$， $\mathrm{rankA}=2$，所以$dim\ \mathrm{Im}T=2$，根据维数定理，$dim\ \mathrm{Ker}T=n-dim\ \mathrm{Im}T=4-2=2.$

注意到A的第一二列可以线性表示第三四列，所以可写出核空间的基为$\{\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_4,\ 4\alpha_1+3\alpha_2-2\alpha_3\}.$

四、

解：（1）先求出Smith标准型以得到极小多项式，再利用待定系数法计算即可。

$$\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda+1 & 0 & -1\\ -1 & \lambda-2 & 0\\ 4 & 0 & \lambda-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & \lambda+1\\ 0 & \lambda-2 & -1\\ 3-\lambda & 0 & 4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & \lambda+1\\ 0 & \lambda-2 & -1\\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2\end{bmatrix}$$
$$\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-2 & -1\\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda-2)\end{bmatrix}.$$

所以不难看出极小多项式$m_A(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$，$\deg\ m_A(\lambda)$=3，所以待定系数的最高次为$3-1=2$次。设$f(\lambda)=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2$。记$e^{t\lambda}=g(\lambda)$.

考虑$m_A(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$，特征值分别为$\lambda=1$（两重），$\lambda=2$（一重），带入$f(\lambda)$得：

$$f(1)=a_0+a_1+a_2=g(1)=e^t$$

$$f'(1)=a_1+2a_2=g'(1)=te^t$$

$$f(2)=a_0+2a_1+4a_2=g(2)=e^{2t}$$

解上述方程组得到系数:

$$a_0=e^{2t}-2te^t$$

$$a_1=-2e^{2t}+(2+3t)e^t$$

$$a_2=e^{2t}-(1+t)e^t$$

$$
\begin{aligned}
e^{tA} &= f(A) = a_0E + a_1A + a_2A^2 \\
&= (e^{2t} - 2te^t)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} + \left(-2e^{2t} + (2+3t)e^t\right)\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\1 & 2 & 0\\-4 & 0 & 3\end{bmatrix} \\
&+ \left(e^{2t} - (1+t)e^t\right)\begin{bmatrix}-3 & 0 & 2\\1 & 4 & 1\\-8 & 0 & 5\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}-(1-2t)e^t & 0 & te^t\\ -e^{2t} + (1+2t)e^t & e^{2t} & e^{2t} - (1+t)e^t\\ -4te^t & 0 & (2t+1)e^t\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

类似地重复上述操作，可计算出cosA。记$cos\lambda = h(\lambda)$，带入$f(\lambda)$得：

$$f(1) = a_0 + a_1 + a_2 = h(1)cos1$$

$$f'(1) = a_1 + 2a_2 = h'(1) = -sin1$$

$$f(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2 = h(2) = cos2$$

解上述方程组得到系数:

$$a_0 = cos2 + 2sin1$$

$$a_1 = -2cos2 + 2cos1 - 3sin1$$

$$a_2 = cos2 - cos1 + sin1$$

$$
\begin{aligned}
cosA &= f(A) = a_0E + a_1A + a_2A^2 \\
&= (cos2 + 2sin1)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} + (-2cos2 + 2cos1 - 3sin1)\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\1 & 2 & 0\\-4 & 0 & 3\end{bmatrix} \\
&+ (cos2 - cos1 + sin1)\begin{bmatrix}-3 & 0 & 2\\1 & 4 & 1\\-8 & 0 & 5\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}cos1 + 2sin1 & 0 & -sin1\\ -cos2 + cos1 - 2sin1 & cos2 & cos2 - cos1 + sin1\\ 4sin1 & 0 & cos1 - 2sin1\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

（2）由于齐次方程组通解为$x(t)=e^{A(t-t_0)x(t_0)}$由$t_0=0$代入得$x(t)=e^{At}x(0)$：

$$x(t)=e^{At}x(0)=\begin{bmatrix}-(1-2t)e^t & 0 & te^t\\ -e^{2t}+(1+2t)e^t & e^{2t} & e^{2t}-(1+t)e^t\\ -4te^t & 0 & (2t+1)e^t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}(1-t)e^t\\ e^{2t}+te^t\\ (1-2t)e^t\end{bmatrix}$$

五、

解：（1）显然.

（2）题目中定义了内积运算$(A,B)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(i+j)a_{ij}b_{ij}$，展开即$(A,B)=2a_{11}b_{11}+3a_{12}b_{12}+3a_{21}b_{21}+4a_{22}b_{22}$.

由于$W=\left\{A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix};\, a_{11}+a_{22}=0,\, a_{12}-a_{21}=0\right\}$，所以$\forall A\in W, a_{11}=-a_{22}$, $a_{12}=a_{21}$.于是不妨取$\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right\}$为W的一组基，记作$\{M,N\}$。

取$X=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\in W^{\perp}$，由正交补定义有$\forall\alpha\in W,\beta\in W^{\perp},(\alpha,\beta)=0$.因此，$(X,M)=(X,N)=0$:

$$2a-4d=0,\ b+c=0$$

不妨取$X_1=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, X_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$

$$||X_1||^2=2\times 2^2+4\times 1^2=12$$
$$||X_2||^2=3\times 1^2+3\times 1^2=6$$

于是，W 的正交补 $W^{\perp}$ 的一组标准正交基为：

$$\left\{\frac{X_1}{||X_1||},\frac{X_2}{||X_2||}\right\}=\left\{\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\right\}$$

六、（25 分）

解：（1）注意到矩阵A前两列线性无关，且显然可以线性表示后两列，因此rankA=2。

利用矩阵乘法的右乘有$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = BC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$

即得满秩分解A=BC，其中：

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

（2）由于A为3×4阶矩阵，所以Moore-Penrose广义逆A^+应为4×3阶矩阵，直接带入公式即可。

$$\begin{aligned} A^+ &= C^H(CC^H)^{-1}(BB^H)^{-1}B^H \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{22} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{22} \begin{bmatrix} -4 & 1 & 7 \\ 7 & 1 & -4 \\ 7 & 1 & -4 \\ -4 & 1 & 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$A^+ = \frac{1}{22} \begin{bmatrix} -4 & 1 & 7 \\ 7 & 1 & -4 \\ 7 & 1 & -4 \\ -4 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

（3）相容性即验证AA^+b是否与b相等即可。

$$AA^+ = \frac{1}{22} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 1 & 7 \\ 7 & 1 & -4 \\ 7 & 1 & -4 \\ -4 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{22} \begin{bmatrix} 20 & 6 & -2 \\ 6 & 4 & 6 \\ -2 & 6 & 20 \end{bmatrix}$$

$$AA^+b = \frac{1}{22} \begin{bmatrix} 20 & 6 & -2 \\ 6 & 4 & 6 \\ -2 & 6 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = b$$

显然，方程组 $Ax = b$ 的相容性不相容。

（5）极小范数最小二乘解为$x^* = A^+b$。

$$x^* = A^+b = \frac{1}{22}\begin{bmatrix} -4 & 1 & 7 \\ 7 & 1 & -4 \\ 7 & 1 & -4 \\ -4 & 1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

（4）最小二乘解为$x = A^+b + (E - A^+A)y$，其中$y \in \mathbf{R^4}$。

$$A^+A = \frac{1}{22}\begin{bmatrix} -4 & 1 & 7 \\ 7 & 1 & -4 \\ 7 & 1 & -4 \\ -4 & 1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E - A^+A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

取$y = \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix}^T$，代入$(E - A^+A)y$得：

$$(E - A^+A)y = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-d \\ b-c \\ c-b \\ d-a \end{bmatrix}$$

$$= (a-d)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + (b-c)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

由于y是任意的，因此$(E - A^+A)y = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, (c_1, c_2 \in \mathbf{R})$

综上，最小二乘解为$x = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, (c_1, c_2 \in \mathbf{R}).$