

Generarea variabilelor neuniforme

Curs 7

December 4, 2023

Generarea unor variabile discrete

1. Probe Bernoulli

Fie A un eveniment aleator observabil cu probabilitatea de realizare constantă $p = P(A) > 0$. În urma unui experiment fie se realizează A , fie se realizează evenimentul contrar lui A , \bar{A} . Un astfel de experiment se numește *probă Bernoulli*. Presupunem că atunci când se realizează A are loc un *succes*, iar când se realizează \bar{A} are loc un *eșec*.

Asociem unei probe Bernoulli variabila aleatoare Z a.î $Z = 1$ în caz de succes și $Z = 0$ în caz de eșec:

$$Z : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix} \quad (1)$$

unde $q = 1 - p$. Observăm că

$$E[Z] = p, \quad \text{Var}[Z] = pq = p(1 - p).$$

Funcția de repartiție a variabilei Z este:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x < 0 \\ q & \text{dacă } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$$

De aici rezultă următorul algoritm de generare a variabilei aleatoare Z prin metoda inversă, cazul discret.

Algoritm Bernoulli

Intrare: p

P1: Se generează $U \sim U(0, 1)$;

P2: Dacă $U \leq q$ atunci $Z = 0$, altfel $Z = 1$;

Ieșire: Variabila aleatoare Z .

2. Repartiția binomială

Fie X o variabilă aleatoare discretă, $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0, 1]$. Atunci X are o repartiție binomială $Binom(n, p)$ dacă

$X =$ nr. de succese în n probe Bernoulli independente

Observăm că:

$$X = \sum_{i=1}^n Z_i, \quad (2)$$

unde Z_i , $i = 1, \dots, n$ sunt variabile Bernoulli independente.

Observăm că:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

Adică $P(X = x)$ este termenul general al dezvoltării binomului $(p + q)^n$ de unde derivă și denumirea de repartiție binomială.

Funcția caracteristică a variabilei binomiale este:

$$\varphi_X(t) = E[e^{itX}] = E[e^{it \sum_{j=1}^n Z_j}] = (q + pe^{it})^n.$$

de unde rezultă că:

$$E[X] = np, \quad \text{Var}[X] = npq$$

Din (2) rezultă următorul algoritm de generare a variabilei X :

Algoritm Binom1

Intrare: n, p

P1: $i = 1, X = 0$;

P2: Se generează $Z_i \sim \text{Bern}(p)$, $X := X + Z_i$;

P3: Dacă $i = n$ stop, altfel $i := i + 1$, mergi la P2;

Ieșire: Variabila aleatoare X .

O altă metodă de generare a variabilei binomiale rezultă din *teorema limită centrală*: pentru $n \rightarrow \infty$ variabila:

$$W_n = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$$

este repartizată normal $N(0, 1)$. De aici se deduce următorul algoritm pentru n mare:

Algoritm Binom2

Intrare: n, p

P1: Se generează $W \sim N(0, 1)$;

P2: Se ia $X =$ cel mai apropiat nr. întreg de $np + W\sqrt{npq}$;

Ieșire: Variabila aleatoare X .

3. Repartiția Pascal

Fie X o variabilă aleatoare discretă, $k \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0, 1]$. Atunci X are repartiția $Pascal(k, p)$ dacă:

$X =$ nr. de eșecuri până la apariția a k succese dintr-un șir oarecare de probe Bernoulli independente.

Observație

$$P(X = x) = \binom{x + k - 1}{k - 1} p^k q^x$$

este termenul general al dezvoltării în serie al expresiei $p^k(1 - q)^{-k}$ (de aceea repartiția Pascal se mai numește și repartiția binomială cu exponent negativ).

Dem:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^k x^k + \dots \\ \left(\frac{1}{1+x}\right)^{(r)} &= \sum_{k=r}^{\infty} (-1)^k k(k-1)\dots(k-r+1)x^{k-r} = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{r+j} \frac{(r+j)!}{j!} x^j\end{aligned}\quad (3)$$

Dar

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(r)} = \frac{(-1)^r r!}{(1+x)^{r+1}} \quad (4)$$

Din (3) și (4) rezultă că:

$$\frac{(-1)^r r!}{(1+x)^{r+1}} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{r+j} \frac{(r+j)!}{j!} x^j$$

Notând $r + 1$ cu n avem:

$$(1+x)^{-n} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{n+j-1}{j} x^j \quad (5)$$

Notând

$$(-1)^j \binom{n+j-1}{j} = \binom{-n}{j}$$

avem următoarea dezvoltare în serie a binomului cu exponent întreg negativ:

$$(1+x)^{-n} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-n}{j} x^j.$$

Acum aplicăm (5) pentru $p^k(1-q)^{-k}$:

$$p^k(1-q)^{-k} = p^k \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{k+j-1}{j} (-q)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{k+j-1}{j} p^k q^j.$$

Observăm că termenul j al acestei dezvoltări în serie este tocmai funcția de probabilitate a unei variabile $Pascal(k, p)$, calculată în punctul j .

Repartiția *Pascal* este stabilă și:

$$E[X] = \frac{kq}{p}, \quad Var[X] = \frac{kq}{p^2}$$

Din definiție rezultă următorul algoritm de generare al unei variabile *Pascal*:

Algoritm Pascal

Intrare: $k, p, j=0$.

P1: Se generează $Y \sim Bernoulli(p)$;

P2: Dacă $Y = 0$ atunci $X := X + 1$, altfel $j := j + 1$;

P3: Dacă $j=k$ stop, altfel mergi la P1.

Ieșire: Variabila aleatoare X .

4. Repartiția geometrică

Este un caz particular de repartiție *Pascal*: $k = 1$. Atunci funcția de probabilitate devine pentru $k = 1$:

$$P(X = x) = pq^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

care este termenul unei progresii geometrice (de aici provine și denumirea acestei distribuții). Observăm că:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=0}^x pq^i = 1 - q^{x+1}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

și

$$E[X] = \frac{q}{p}, \quad \text{Var}[X] = \frac{q}{p^2}.$$

Simularea variabilei geometrice se poate realiza fie prin aplicarea algoritmului de generare a variabilei Pascal, fie prin metoda inversă astfel:

Algoritm Geometrică

Intrare: $p, q = 1 - p;$

P1: Se generează $U \sim U(0, 1);$

P2: $X := \left\lceil \frac{\log U}{\log q} \right\rceil - 1.$

Ieșire: Variabila aleatoare $X.$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a lui $a.$

5. Repartiția hipergeometrică

Considerăm următorul experiment aleator: fie o urnă care conține A bile albe și B bile negre, cu $A + B = N$. Presupunem că se realizează n extrageri, fără întoarcerea bilei extrase în urnă. Atunci:

$X =$ numărul de bile albe extrase

este o variabilă *hipergeometrică*.

Fie E_A evenimentul care constă în extragerea unei bile albe, iar E_B evenimentul care constă în extragerea unei bile negre. Atunci la prima extragere avem:

$$p = P(E_A) = \frac{A}{N}, \quad P(E_B) = \frac{B}{N}$$

Probabilitățile de extragere a unei bile albe sau negre la a doua extragere sunt condiționate de rezultatele primei extrageri:

$$P(E_A|E_A) = \frac{A-1}{N-1}, \quad P(E_A|E_B) = \frac{A}{N-1}$$

$$P(E_B|E_A) = \frac{B}{N-1}, \quad P(E_B|E_B) = \frac{B-1}{N-1}$$

La fiecare extragere compoziția urnei se modifică și probabilitatea de a extrage o bilă albă sau neagră depinde de extragerile anterioare.

Variabila hipergeometrică se notează cu $H(N, p, n)$ cu $0 < p < 1$, $n < N$. Atunci A poate fi considerat cel mai apropiat nr. întreg de Np , $B = N - A$. Probabilitatea ca în extrageri succesive fără întoarcere să se extragă x bile albe este:

$$P(X = x) = \frac{\binom{A}{x} \binom{B}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad 0 \leq x \leq n, \quad n < N. \quad (7)$$

Media și dispersia variabilei hipergeometrice sunt:

$$E[X] = np, \quad \text{Var}[X] = np(1-p) \frac{N-n}{N-1}$$

Din definiție rezultă următorul algoritm de generare a variabilei hipergeometrice:

Algoritm Hipergeometrică

Intrare: $A, B, n, N = A + B, p = A/N, j := 0, X := 0;$

P1: Se generează $U \sim U(0,1);$

P2: Dacă $U < p$ (s-a extras o bilă albă) atunci mergi la P3, altfel (s-a extras o bilă neagră) mergi la P4;

P3: $X := X + 1, S := 1,$ mergi la P5;

P4: $S = 0;$

P5: $N := N - 1, A := A - S, p := \frac{A}{N};$

P6: Dacă $j = n$ stop, altfel mergi la P1.

Ieșire: Variabila aleatoare X .

6. Repartiția Poisson

Variabila aleatoare discretă $X \in \mathbb{N}$ are repartiția $Poisson(\lambda)$, $\lambda > 0$, dacă:

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \quad (8)$$

Funcția caracteristică a variabilei $Poisson(\lambda)$ este:

$$\varphi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

De aici rezultă că:

$$E[X] = \lambda, \quad Var[X] = \lambda.$$

Repartiția $Poisson(\lambda)$ este folosită pentru a modela numărul de evenimente care apar într-un interval de timp. Parametrul λ reprezintă numărul mediu de evenimente dintr-un anumit interval de timp.

Lemă

Dacă E_1, E_2, \dots sunt variabile aleatoare repartizate $\text{Exp}(1)$ și X este cel mai mic întreg astfel încât

$$\sum_{i=1}^{X+1} E_i > \lambda \quad (9)$$

atunci variabila X este repartizată $\text{Poisson}(\lambda)$.

Dem:

Din condiția care se pune asupra lui X rezultă că dacă $X = k$, atunci are loc $\sum_{i=1}^{k+1} E_i > \lambda$ și nu are loc $\sum_{i=1}^k E_i > \lambda$. Prin urmare:

$$P(X = k) = P\left(\sum_{i=1}^{k+1} E_i > \lambda\right) - P\left(\sum_{i=1}^k E_i > \lambda\right) = \int_{\lambda}^{\infty} f_{k+1}(y) dy - \int_{\lambda}^{\infty} f_k(y) dy$$

unde $f_k(y)$ este densitatea unei variabile aleatoare *Erlang*(k).

Rezultă că:

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \int_{\lambda}^{\infty} \left[\frac{1}{k!} y^k e^{-y} - \frac{1}{(k-1)!} y^{k-1} e^{-y} \right] dy = \\ &= \frac{1}{k!} \left[\int_{\lambda}^{\infty} y^k e^{-y} dy - k \int_{\lambda}^{\infty} y^{k-1} e^{-y} dy \right]. \end{aligned}$$

Dacă integrăm prin părți prima integrală obținem:

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \frac{1}{k!} \left[\lambda^k e^{-\lambda} + k \int_{\lambda}^{\infty} y^{k-1} e^{-y} dy - k \int_{\lambda}^{\infty} y^{k-1} e^{-y} dy \right] \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

Ținând cont că variabilele E_i sunt exponențiale $Exp(1)$ și ele pot fi generate prin metoda inversă cu ajutorul relației $E_i = -\log U_i$, unde $U_i \sim U(0, 1)$, atunci condiția (9) se scrie:

$$\prod_{i=1}^{X+1} U_i < e^{-\lambda}$$

și rezultă următorul algoritm de generare a unei variabile $Poisson(\lambda)$:

Algoritm Poisson1

Intrare: λ , $i := 0$, $P = 1$;

P1: Se generează $U \sim U(0, 1)$, $i := i + 1$, $P := P * U$;

P2: Dacă $P \geq e^{-\lambda}$ atunci mergi la P1, altfel mergi la P3;

P3: $X := i - 1$.

Ieșire: Variabila aleatoare X .

O altă metodă de generare pentru o variabilă $Poisson(\lambda)$ se bazează pe următoarea proprietate a variabilei $Poisson(\lambda)$: dacă $Y \sim Poisson(\lambda)$ cu $\lambda = np$ și $n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$, atunci $Y \sim Binom(n, p)$.

Acest lucru se poate demonstra folosind funcția caracteristică a celor două repartiții.

Algoritm Poisson2

Intrare: λ , se alege $p \approx 0$, de exemplu $p = 0.001$;

P1: Se determină $n =$ cel mai apropiat întreg de λ/p ;

P2: Se generează $X \sim Binom(n, p)$;

Ieșire: Variabila aleatoare X .