Estimări folosind numere aleatoare

Fie U o variabilă aleatoare uniformă pe $[0,1]$, cu densitatea de repartiție $f(x)$ și funcția de repartiție $F(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in [0,1] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad , \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0 \\ x, & \text{dacă } x \in [0,1] \\ 1, & \text{dacă } x > 1 \end{cases} \quad .$$

- Evaluarea integralelor
  - Fie $g(x)$ o funcție, presupunem că dorim să estimăm

    $$\theta = \int_0^1 g(x)dx$$

    Dacă $U \sim U(0,1)$, atunci $g(U)$ este o variabilă aleatoare, iar media ei este:

    $$E[g(U)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)f(u)du = \int_0^1 g(u)du = \theta$$

- - Dacă $U_1, U_2, ..., U_k \sim U(0,1)$, iid, atunci conform legii numerelor mari, cu probabilitate 1:

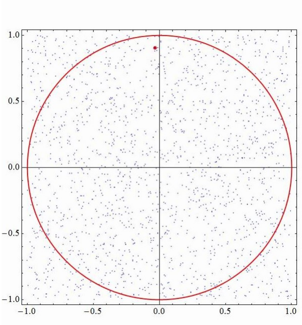
$$\sum_{i=1}^{k} \frac{g(U_i)}{k} \to E[g(U)] = \theta$$

  Deci $\sum_{i=1}^{k} \frac{g(U_i)}{k}$ este un estimator pentru θ.

Algoritm Integrală

- Intrare: k, mare; g;
- S=0;
- Pentru i=1 la k
  - Se generează $U \sim U(0,1)$, $S = S + g(U)$;
- $S = S/k$;
- Ieșire: S aproximare a lui θ.

- Estimarea lui π



- - Dacă (X, Y) este un punct aleator în pătratul de arie 4:

$$P\{(X, Y) \text{ în cerc}\} = P\{X^2 + Y^2 \leq 1\} = \frac{\text{aria cercului}}{\text{aria patratului}} = \frac{\pi}{4}$$

  - Dacă se generează foarte multe puncte în pătratul de arie 4, probabilitatea ca un punct să fie în cerc este:

$$P\{(X, Y) \text{ în cerc}\} = \frac{\text{nr. puncte din cerc}}{\text{nr. total de puncte generate}}$$

  - Deci π este aproximat de

$$4 * \text{nr. puncte din cerc}/\text{nr. total de puncte generate}$$

  - Pentru generarea punctelor aleatoare din pătratul de arie 2 se generază perechi de forma (X, Y) unde $X, Y \sim U(-1, 1)$ independente.
  - X și Y se generează astfel: $U_1, U_2 \sim U(0, 1)$ independente, atunci $X = 2U_1 - 1$, $Y = 2U_2 - 1$.

Algoritm Estimarea lui Pi

- Intrare: k,mare;
- $nr_{total} = 0$; $nr_{cerc} = 0$;
- Pentru i=1 la k
  - Se generează $U_1, U_2 \sim U(0,1)$, $X = 2 * U_1 - 1$, $Y = 2 * U_2 - 1$, $nr_{total} = nr_{total} + 1$;
  - Dacă $X^2 + Y^2 \leq 1$, $nr_{cerc} = nr_{cerc} + 1$;
- $P = 4 * nr_{cerc} / nr_{total}$;
- Ieșire: P aproximare a lui π.