ALGEBRĂ - TEST UNIC

OVIDIU VEGHEŞ

ianuarie 2017

Activitate de verificare automată a cunostintelor din unitatile de invatare 1,2 si 3 cu ajutorul platformei eLearning. Sunt vizate 2 obiective: pregatirea examenului final şi verificarea cunoştinţelor. Parcurgerea testului se face printr-o singura incercare. Testul nu poate fi reluat, indiferent de motiv.

Conţinutul aceastei foi se tipăreşte (sau se copiază cu mâna) pe o foaie de hârtie albă. El reprezintă anexa ce conţine informaţii necesare rezolvării testului. Se efectuează toate calculele privind cerinţele indicate în dreptul fiecărui exerciţiu înainte de începerea testului. Durata estimată de efectuare a tuturor acestor calcule este estimată la 2 ore. Este recomandat ca o bună parte dintre acestea să fie efectuate înainte de deschiderea formularelor de testare online. Trebuie reţinut că testul unic este individual şi nu este repetabil. În timpul rezolvării folosiţi notiţele, unităţile de învăţare şi ori ce material îl consideraţi necesar. Timpul de completare a răspunsurilor la cele 18 chestiuni ale testului este limitat la 60 minute.

Testul unic va fi disponibil între 12 ianuarie 2017 ora 19 şi 14 ianuarie 2017 ora 15.

== == ==

În spaţiul vectorial real $\mathbb{R}^n$, cu $n \in \mathbb{N}$, considerăm un subspaţiu vectorial $\mathbb{W}$. Notăm cu

$$w^*_{\max} = \max\{w_1 + \ldots + w_n \mid w \in \mathbb{W} \text{ cu } \|w\|_\infty = 1\} \tag{1.1}$$

unde $\|(w_1,\ldots,w_n)\|_\infty = \max\{|w_1|,\ldots,|w_n|\}$ este norma cubică a vectorului $w = (w_1,\ldots,w_n)$.

În spaţiul vectorial real $\mathbb{R}^3$ se consideră vectorii

$$v_1 = (3,-1,0), v_2 = (-1,1,1), v_3 = (-1,3,4), v_4 = (1,1,2), v_5 = (2,0,1). \tag{1.2}$$

Fie $\mathbb{X}_1 = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(\{v_1,v_2,v_3\})$, $\mathbb{X}_2 = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(\{v_4,v_5\})$, $\mathbb{Y}_1 = \mathbb{X}_1 \cap \mathbb{X}_2$ şi $\mathbb{Y}_2 = \mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2$. Să se determine $\mathbb{Y}_1$, $\mathbb{Y}_2$ şi să se verifice teorema dimensiunii a lui Grassmann.

Se consideră endomorfismul $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definit prin

$$\begin{gathered} T(x_1,x_2,x_3) = (y_1,y_2,y_3), \text{ unde} \\ \begin{cases} y_1 = -2x_1 - x_2 + 5x_3 \\ y_2 = x_1 + x_2 \\ y_3 = -3x_1 - x_2 + 6x_3 \end{cases}, \forall (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \end{gathered} \tag{1.3}$$

şi $A = [T]_E^E$ matricea de reprezentare a sa în perechea de repere E, E, unde $E = (e_1,e_2,e_3)$ este reperul canonic din spaţiul vectorial real $\mathbb{R}^3$. Să se determine forma Jordan a endomorfismului T şi să se verifice legătura cu între matricea A şi matricea Jordan.

Se dă funcţionala pătratică $\sigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\sigma(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4ax_1x_2 - 4ax_2x_3 - 8ax_3x_1, \tag{1.4}$$

unde a este un parametru real. Să se studieze natura funcţionalei pătratice (discuţie pentru $\operatorname{sgn}\sigma = (n_-, n_0, n_+)$ în funcţie de valorile parametrului a).