CURSUL 2
ELEMENTE DE TEORIA GRAFURILOR.
OPTIMIZĂRI ÎN REŢELE DE TRANSPORT ŞI DISTRIBUŢIE
EXEMPLE NUMERICE

3.1. Arbori maximali de valoare minimă: Algoritmul Kruskal[1)]

Fie $G = (V, E)$ un graf conex cu $n = |V|$ şi cu muchiile valorizate $v(e) \geq 0$, $e \in E$.

Etapa de iniţializare:
Din mulţimea muchiilor E se alege o muchie e_1 cu valoarea $v(e_1)$ cea mai mică. Dacă există mai multe muchii cu aceeaşi valoare se alege una dintre acestea. Fie Y mulţimea muchiilor alese. Iniţial $Y = \{e_1\}$ şi $|Y| = 1$.

Etapa iterativă:
Din mulţimea muchiilor $E - Y$ se alege o muchie e_i cu valoarea $v(e_i)$ cea mai mică, pentru care $Y \cup \{e_i\}$ nu conţine un ciclu. Se ia $Y \cup \{e_i\} \rightarrow Y$ şi $|Y| + 1 \rightarrow |Y|$.

Etapa iterativă se repetă până când sunt alese n-1 muchii. $H = (V, Y)$ este arborele de acoperire de valoare minimă.
Arborele de valoare minimă $H = (V, Y)$ este determinat de muchiile alese. În cazul în care există mai multe muchii de valori egale, arborele de valoare minimă nu este, în general, unic. Este preferabil, în aceste situaţii, să fie determinaţi toţi arborii de valoare minimă şi dintre aceştia un manager (decident) să îl aleagă pe cel mai convenabil corespunzător unui alt criteriu economic.
Algoritmul Kruskal este foarte simplu. El intră în categoria algoritmilor de tip "greedy" (lacom) deoarece la fiecare pas al algoritmului se alege cea mai bună variantă. Totuşi, acest algoritm din ştiinţa managementului produce întotdeauna soluţia optimă.
Algoritmul Kruskal poate fi utilizat şi pentru determinarea *arborilor de acoperire de valoare maximă*, prin înlocuirea, în algoritm: *"se alege muchia cu valoarea cea mai mică"* cu *"se alege muchia cu valoarea cea mai mare"*.

Exemplul 3.1: ***Problema sistemului de comunicaţii***

Într-un oraş se studiază posibilitatea ca principalele instituţii să fie conectate într-un sistem printr-o reţea de telecomunicaţii. Schema tuturor legăturilor posibile, precum şi costul executării acestor legături între şase dintre instituţiile oraşului sunt indicate în graful din figura 3.1. Valorile indicate pe arce reprezintă costurile (în unităţi monetare) asociate realizării legăturilor dintre instituţii. Să se determine modul în care vor fi interconectate cele şase instituţii astfel încât costul realizării sistemului de telecomunicaţii să fie minim.

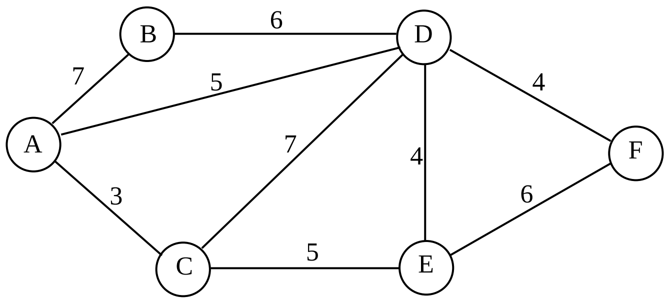
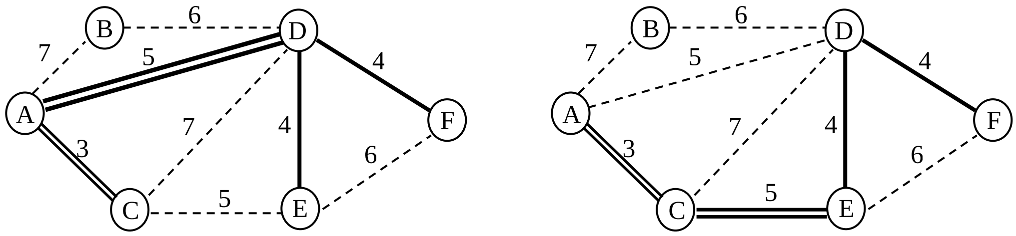


Figura 3.1

Soluţie:
Pentru rezolvarea acestei probleme se aplică algoritmul Kruskal. Muchia cu cel mai mic cost este $[A, C]$ cu $v[A, C] = 3$ u.m.. Aceasta este prima alegere. În continuare, pot fi alese muchiile $[D, E]$ şi $[D, F]$, fiecare având costul de 4 u.m.. Pentru că fiecare din aceste muchii nu formează ciclu cu muchia $[A, C]$ şi nici toate cele trei muchii nu formează ciclu, se alege a doua oară şi a treia oară câte una din muchiile $[D, E]$ şi $[D, F]$. Muchiile

[1)] J. B. Kruskal, *On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem*, Proceedings of the American Mathematical Society 7, 48-50, 1956.

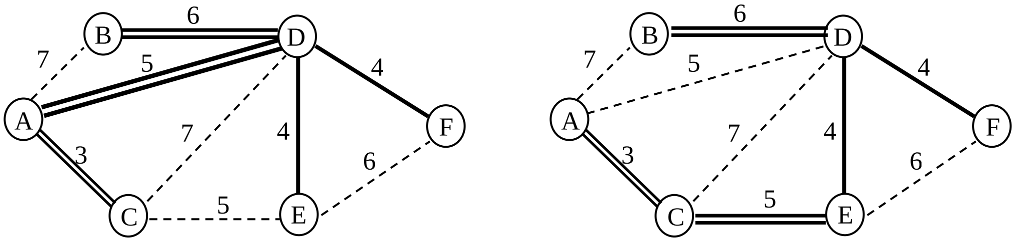
[A, D] şi [C, E] cu costul v[A, D] = v[C, E] = 5 u.m. pot fi alese, în continuare. Se alege una din muchii, cealaltă formează un ciclu. Deci, pot exista două variante conform figurilor 3.2.a) şi 3.2.b) prin alegerea fie a muchiei [A, D] fie a muchiei [C, E].



a) H_1 b) H_2

Figura 3.2

Următoarea alegere este fie muchia [E, F] fie muchia [B, D] ambele având costul v[E, F] = v[B, D] = 6 u.m.. Dar, muchia [E, F] formează ciclu în ambii arbori parţiali împreună cu muchiile [D, E] şi [D, F]. În acest caz, se alege muchia [B, D] în ambii arbori parţiali.



a) H_1 b) H_2

Figura 3.3

Rezultă două soluţii optime, deci doi arbori de valoare minimă prezentaţi în figura 3.3, cu $v(H_1) = v(H_2) = 22$. Alegerea între aceşti arbori va avea în vedere şi alte considerente economice pe lângă costul instalării sistemului de telecomunicaţii.

Exemplul 3.2: *Problema modernizării reţelei de drumuri*

Prefectura judeţului X şi-a fixat ca obiectiv modernizarea reţelei drumurilor care leagă localităţile judeţului conform grafului din figura 4.6. Pe fiecare muchie este înscrisă valoarea numerică în u.m. a costului modernizării tronsonului respectiv. În prima etapă se caută să se modernizeze numai unele drumuri astfel încât fiecare localitate să fie conectată la cel puţin un drum modernizat şi costul întregii operaţii de modernizare (parţială) să fie minim.

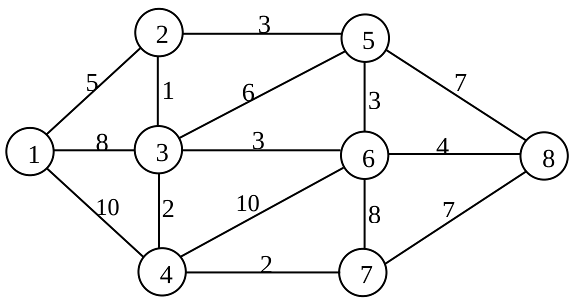


Figura 3.4

Rezolvarea problemei se reduce la determinarea unui arbore de valoare minimă.

TEMĂ: Aplicaţi algoritmul Kruskal pentru determinarea variantei optime de modernizare a drumurilor.