Set de subiecte : varianta A

Subiectul I (3 puncte)

(**1.pct.**) a) În spațiul vectorial $(\mathbf{R}^2,\mathbf{R})$, se consideră vectorul $x=(-16,10)$ şi reperul $B=(b_1=(-4,3),b_2=(12,-7))$. Folosind tehnica de pivotare să se determine matricea $[x]_B$ a coordonatelor vectorului x în reperul B.

(**1.pct.**) b) Se consideră funcționala pătratică definită pe $(\mathbf{R}^3,\mathbf{R})$,

$$V(x)=-x_1^2+x_2^2+2x_3^2-2x_1x_3+2x_2x_3,\text{ unde } x=(x_1,x_2,x_3).$$

Folosind metoda lui Iacobi determinați o formă canonică a funcționalei pătratice şi precizați natura ei.

(**1.pct.**) c) În spațiul vectorial $C_{\mathbf{R}}([0,1])$, al funcțiilor continue reale definite pe intervalul $[0,1]$, dotat cu produsul scalar $\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(t)g(t)dt$, să se calculeze $\langle f,g\rangle$ şi $\cos\angle(f,g)$ pentru $f(x)=x^4$ şi $g(x)=-4x$.

Subiectul II (2 puncte)

(**1.pct.**) a) Fie operatorul liniar $U:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$,

$$U(x)=(-2x_1-2x_2+x_3,-2x_1+x_2-2x_3,x_1-2x_2-2x_3),\ \forall x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3.$$

Aflați valorile proprii ale operatorului şi subspațiile proprii asociate acestora.

(**1.pct.**) b) Să se determine soluția generală a sistemului de ecuații diferențiale liniare

$$\begin{cases} y'(x)=-2y(x)+3z(x) \\ z'(x)=3y(x)-2z(x) \end{cases},\text{ unde } x\in\mathbf{R}.$$

Subiectul III (2 puncte)

(**1.pct.**) a) Se consideră subspațiul $\mathbf{X}=span(\{(1,0,1),(0,1,1),(1,2,3)\})$ în $(\mathbf{R}^3,\mathbf{R})$. Să se găsească o bază ortonormată pentru $\mathbf{X}$ (folosind procedura Gram-Schmidt) şi pentru $\mathbf{X}^{\perp}$.

(**1.pct.**) b) Să se definească adjunctul unui operator liniar în contextul spațiilor unitare. Enunțati principalele trei proprietăți ale adjunctului unui operator liniar.

Subiectul IV (2 puncte)

(**1.pct.**) a) Definiți acoperirea liniară a unei mulțimi de vectori. Arătați, în spațiul vectorial (V,K), că dacă X_1, X_2 sunt două subspații vectoriale, atunci: $X_1+X_2=span_K(X_1\cup X_2)$.

(**1.pct.**) b) Să se verifice că într-un spațiu euclidian avem

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right),\quad \forall x,y \text{ vectori}.$$

Precizări:

1) Punctajul maxim îl obține soluția corectă, completă şi cu toate justificările necesare, într-o redactare clară şi uşor lizibilă.
2) În timpul examenului este interzisă a) folosirea materiale ajutătoare; b) utilizarea tehnicii electronice (telefoane mobile, tablete grafice, ...); c) deranjarea bunei desfăşurări a examenului şi comunicarea cu colegii.

<u>Set de subiecte : varianta B</u>

Subiectul I (3 puncte)

(**1.pct.**) a) În spațiul vectorial $(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$, se consideră vectorul $x = (-6,7)$ şi reperul $B = (b_1 = (2,1), b_2 = (4,-3))$. Folosind tehnica de pivotare să se determine matricea $[x]_B$ a coordonatelor vectorului x în reperul B.

(**1.pct.**) b) Se consideră funcționala pătratică definită pe $(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$,

$$V(x) = 2x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3, \text{ unde } x = (x_1, x_2, x_3).$$

Folosind metoda lui Iacobi determinați o formă canonică a funcționalei pătratice şi precizați natura ei.

(**1.pct.**) c) În spațiul vectorial $C_{\mathbf{R}}([0,1])$, al funcțiilor continue reale definite pe intervalul $[0,1]$, dotat cu produsul scalar $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$, să se calculeze $\langle f, g\rangle$ şi $\cos\angle(f,g)$ pentru $f(x) = -x^3$ şi $g(x) = 2x^2$.

Subiectul II (2 puncte)

(**1.pct.**) a) Fie operatorul liniar $U : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$,

$$U(x) = (2x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_1 - x_2 + 2x_3, -x_1 + 2x_2 + 2x_3),\ \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3.$$

Aflați valorile proprii ale operatorului şi subspațiile proprii asociate acestora.

(**1.pct.**) b) Să se determine soluția generală a sistemului de ecuații diferențiale liniare

$$\begin{cases} y'(x) = -3y(x) + z(x) \\ z'(x) = y(x) - 3z(x) \end{cases}, \text{ unde } x \in \mathbf{R}.$$

Subiectul III (2 puncte)

(**1.pct.**) a) Se consideră subspațiul $\mathbf{X} = span(\{(2,0,1), (0,1,2), (2,-1,-1)\})$ în $(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$. Să se găsească o bază ortonormată pentru $\mathbf{X}$ (folosind procedura Gram-Schmidt) şi pentru $\mathbf{X}^{\perp}$.

(**1.pct.**) b) Să se definească endomorfismul autoadjunct în contextul spațiilor unitare. Enunțati principalele trei proprietăți ale endomorfismelor autoadjuncte.

Subiectul IV (2 puncte)

(**1.pct.**) a) Enunțați teorema dimensiunii a lui Grassmann. Arătați, în spațiul vectorial (V, K), că dacă X_1, X_2, X_3 sunt subspații vectoriale în V astfel încât $V = X_1 + X_2 + X_3$ şi $\dim_K V = \dim_K X_1 + \dim_K X_2 + \dim_K X_3$, atunci:

$$X_i \cap (X_j + X_k) = \{0_V\} \text{ pentru } i, j, k \in \{1,2,3\} \text{ cu } i \neq j \neq k \neq i.$$

(**1.pct.**) b) Demonstrați că pe un spațiu euclidian (real)

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}\left(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right),\ \forall x, y \text{ vectori},$$

defineşte o funcțională biliniară simetrică.

Precizări:

1) Punctajul maxim îl obține soluția corectă, completă şi cu toate justificările necesare, într-o redactare clară şi uşor lizibilă.
2) În timpul examenului este interzisă a) folosirea materiale ajutătoare; b) utilizarea tehnicii electronice (telefoane mobile, tablete grafice, ...); c) deranjarea bunei desfăşurări a examenului şi comunicarea cu colegii.

<u>Set de subiecte : varianta C</u>

Subiectul I (3 puncte)

(**1.pct.**) a) În spațiul vectorial $(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$, se consideră vectorul $x = (21, -7)$ şi reperul $B = (b_1 = (-3,5), b_2 = (9,-8))$. Folosind tehnica de pivotare să se determine matricea $[x]_B$ a coordonatelor vectorului x în reperul B.

(**1.pct.**) b) Se consideră funcționala pătratică definită pe $(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$,

$$V(x) = -3x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3, \text{ unde } x = (x_1, x_2, x_3).$$

Folosind metoda lui Iacobi determinați o formă canonică a funcționalei pătratice şi precizați natura ei.

(**1.pct.**) c) În spațiul vectorial $C_{\mathbf{R}}([0,1])$, al funcțiilor continue reale definite pe intervalul $[0,1]$, dotat cu produsul scalar $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$, să se calculeze $\langle f, g\rangle$ şi $\cos\angle(f, g)$ pentru $f(x) = 2x$ şi $g(x) = x^3$.

Subiectul II (2 puncte)

(**1.pct.**) a) Fie operatorul liniar $U : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$,

$$U(x) = (-x_1 + 2x_2 + 2x_3, 2x_1 - x_2 + 2x_3, 2x_1 + 2x_2 - x_3), \ \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3.$$

Aflați valorile proprii ale operatorului şi subspațiile proprii asociate acestora.

(**1.pct.**) b) Să se determine soluția generală a sistemului de ecuații diferențiale liniare

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) - 3z(x) \\ z'(x) = -2y(x) + 2z(x) \end{cases}, \text{ unde } x \in \mathbf{R}.$$

Subiectul III (2 puncte)

(**1.pct.**) a) Se consideră subspațiul $\mathbf{X} = span(\{(1,0,2),(0,1,-1),(1,-1,3)\})$ în $(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$. Să se găsească o bază ortonormată pentru $\mathbf{X}$ (folosind procedura Gram-Schmidt) şi pentru $\mathbf{X}^\perp$.

(**1.pct.**) b) Să se definească endomorfismul ortogonal (unitar) în contextul spațiilor unitare. Enunțati principalele trei proprietăți ale endomorfismelor ortogonale (unitare).

Subiectul IV (2 puncte)

(**1.pct.**) a) Enunțați teorema de caracterizare a sumei directe. Arătați, în spațiul vectorial (V, K), că dacă X_1, X_2 sunt două subspații vectoriale, X_1' este suplementul direct al lui $X_1 \cap X_2$ în X_1, X_2' este suplementul direct al lui $X_1 \cap X_2$ în X_2, atunci: $X_1' \cap X_2 = X_1 \cap X_2' = \{0_V\}$.

(**1.pct.**) b) Demonstrați că pe un spațiu euclidian (real)

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right), \ \forall x, y \text{ vectori},$$

defineşte o funcțională biliniară simetrică.

Precizări:

1) Punctajul maxim îl obține soluția corectă, completă şi cu toate justificările necesare, într-o redactare clară şi uşor lizibilă.
2) În timpul examenului este interzisă a) folosirea materiale ajutătoare; b) utilizarea tehnicii electronice (telefoane mobile, tablete grafice, ...); c) deranjarea bunei desfăşurări a examenului şi comunicarea cu colegii.

<u>Set de subiecte : varianta D</u>

Subiectul I (3 puncte)

(**1.pct.**) a) În spațiul vectorial $(\mathbf{R}^2,\mathbf{R})$, se consideră vectorul $x=(25,-6)$ şi reperul $B=(b_1=(5,12),b_2=(-10,-2))$. Folosind tehnica de pivotare să se determine matricea $[x]_B$ a coordonatelor vectorului x în reperul B.

(**1.pct.**) b) Se consideră funcționala pătratică definită pe $(\mathbf{R}^3,\mathbf{R})$,

$$V(x)=-2x_1^2+x_3^2+6x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3\text{, unde } x=(x_1,x_2,x_3).$$

Folosind metoda lui Iacobi determinați o formă canonică a funcționalei pătratice şi precizați natura ei.

(**1.pct.**) c) În spațiul vectorial $C_{\mathbf{R}}([0,1])$, al funcțiilor continue reale definite pe intervalul $[0,1]$, dotat cu produsul scalar $\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(t)g(t)dt$, să se calculeze $\langle f,g\rangle$ şi $\cos\angle(f,g)$ pentru $f(x)=-x^2$ şi $g(x)=3x$.

Subiectul II (2 puncte)

(**1.pct.**) a) Fie operatorul liniar $U:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$,

$$U(x)=(-x_1+3x_2+3x_3,3x_1-x_2+3x_3,3x_1+3x_2-x_3),\ \forall x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3.$$

Aflați valorile proprii ale operatorului şi subspațiile proprii asociate acestora.

(**1.pct.**) b) Să se determine soluția generală a sistemului de ecuații diferențiale liniare

$$\begin{cases} y'(x)=y(x)+4z(x) \\ z'(x)=3y(x)+2z(x)\end{cases}\text{, unde } x\in\mathbf{R}.$$

Subiectul III (2 puncte)

(**1.pct.**) a) Se consideră subspațiul $\mathbf{X}=span(\{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,-1)\})$ în $(\mathbf{R}^3,\mathbf{R})$. Să se găsească o bază ortonormată pentru $\mathbf{X}$ (folosind procedura Gram-Schmidt) şi pentru $\mathbf{X}^{\perp}$.

(**1.pct.**) b) Să se definească operatorul de proiecție ortogonală în contextul spațiilor euclidiene. Enunțati principalele trei proprietăți ale operatorilor de proiecție ortogonală.

Subiectul IV (2 puncte)

(**1.pct.**) a) Definiți suma directă a unor subspații vectoriale. Arătați, în spațiul vectorial (V,K), că dacă X_1,X_2 sunt două subspații vectoriale, X_1' este suplementul direct al lui $X_1\cap X_2$ în X_1, X_2' este suplementul direct al lui $X_1\cap X_2$ în X_2, atunci: $(X_1'+X_2')\cap(X_1\cap X_2)=\{0_V\}$.

(**1.pct.**) b) Să se verifice că într-un spațiu unitar avem

$$\|x+iy\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2+2\operatorname{Im}\langle x,y\rangle,\quad \forall x,y\text{ vectori}.$$

Precizări:

1) Punctajul maxim îl obține soluția corectă, completă şi cu toate justificările necesare, într-o redactare clară şi uşor lizibilă.
2) În timpul examenului este interzisă a) folosirea materiale ajutătoare; b) utilizarea tehnicii electronice (telefoane mobile, tablete grafice, ...); c) deranjarea bunei desfăşurări a examenului şi comunicarea cu colegii.