Varianta A

Subiectul I (3 puncte)

(**1.pct.**) a) În spațiul vectorial $(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$, se consideră vectorul $x = (3,-1)$ şi reperul $B = (b_1 = (0,2), b_2 = (-1,1))$. Folosind tehnica de pivotare să se determine matricea $[x]_B$ a coordonatelor vectorului x în reperul B.

(**1.pct.**) b) Se consideră funcționala pătratică definită pe $(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$,

$$V(x) = 3x_1^2 - x_2^2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3, \text{ unde } x = (x_1, x_2, x_3).$$

Folosind metoda lui Iacobi determinați o formă canonică a funcționalei pătratice şi precizați natura ei.

(**1.pct.**) c) În spațiul euclidian $(X, \mathbf{R}, \langle .,. \rangle)$ se consideră x şi y doi vectori de lungime (normă) unu. Considerând că vectorii $v = 2x + y$ şi $w = 3y - x$ sunt ortogonali, să se calculeze $\langle x, y \rangle$.

Subiectul II (2 puncte)

(**1.pct.**) a) Să consideră funcționala liniară $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$, $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2$. Să se determine $\dim_{\mathbf{R}} \ker f$, precum şi matricea funcționalei în reperul $B = ((1,0,0,0), (1,1,0,0), (1,1,1,0), (1,1,1,1))$.

(**1.pct.**) b) Să se determine soluția generală a sistemului de ecuații diferențiale liniare

$$\begin{cases} y'(x) = z(x) \\ z'(x) = -12y(x) + 8z(x) \end{cases}, \text{ unde } x \in \mathbf{R}.$$

Subiectul III (2 puncte)

(**1.pct.**) a) Să se verifice că $X_1 \oplus X_2 = \mathbf{R}^3$, unde

$$X_1 = \{(\alpha - \beta, 2\beta, -\alpha + 2\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbf{R}\} \text{ şi } X_2 = \{(a,b,c) \in \mathbf{R}^3 \mid a - b = 0, b + 3c = 0\}.$$

(**1.pct.**) b) Se consideră subspațiul $\mathbf{X} = span(\{(2,1,0), (1,0,1)\})$ în $(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$. Să se găsească o bază ortonormată pentru $\mathbf{X}$ (folosind procedura Gram-Schmidt) şi proiecția ortogonală a vectorului $v = (1,1,0)$ pe $\mathbf{X}$.

Subiectul IV (2 puncte)

(**1.pct.**) a) Enunțați proprietățile aplicației de reprezentare a unui operator prin matrice asociate (legătura dintre operațiile cu operatori liniari şi operațiile cu matricele corespunzătoare lor) şi evidențiați consecințele lor.

(**1.pct.**) b) Să se verifice că într-un spațiu euclidian avem

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right), \quad \forall x, y \text{ vectori}.$$

Varianta B

Subiectul I (3 puncte)

(**1.pct.**) a) În spațiul vectorial $(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$, se consideră vectorul $x = (-4,5)$ şi reperul $B = (b_1 = (0,3), b_2 = (2,-1))$. Folosind tehnica de pivotare să se determine matricea $[x]_B$ a coordonatelor vectorului x în reperul B.

(**1.pct.**) b) Se consideră funcționala pătratică definită pe $(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$,

$$V(x) = -x_1^2 + 4x_1x_2 - 6x_2x_3 \text{, unde } x = (x_1, x_2, x_3).$$

Folosind metoda lui Iacobi determinați o formă canonică a funcționalei pătratice şi precizați natura ei.

(**1.pct.**) c) În spațiul euclidian $(X, \mathbf{R}, \langle .,. \rangle)$ se consideră x şi y doi vectori de lungime (normă) unu. Considerând că vectorii $v = 2y - 3x$ şi $w = x + 4y$ sunt ortogonali, să se calculeze $\langle x, y \rangle$.

Subiectul II (2 puncte)

(**1.pct.**) a) Să consideră funcționala liniară $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$, $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_3$. Să se determine $\dim_{\mathbf{R}} \ker f$, precum şi matricea funcționalei în reperul $B = ((1,0,0,0), (1,1,0,0), (1,1,1,0), (1,1,1,1))$.

(**1.pct.**) b) Să se determine soluția generală a sistemului de ecuații diferențiale liniare

$$\begin{cases} y'(x) = z(x) \\ z'(x) = -6y(x) - 5z(x) \end{cases}, \text{ unde } x \in \mathbf{R}.$$

Subiectul III (2 puncte)

(**1.pct.**) a) Să se verifice că $X_1 \oplus X_2 = \mathbf{R}^3$, unde

$$X_1 = \{(2\alpha + \beta, -\alpha + 3\beta, \alpha + 2\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbf{R}\} \text{ şi } X_2 = \{(a,b,c) \in \mathbf{R}^3 \mid a - b = 0, b - c = 0\}.$$

(**1.pct.**) b) Se consideră subspațiul $\mathbf{X} = span(\{(1,0,2), (0,1,1)\})$ în $(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$. Să se găsească o bază ortonormată pentru $\mathbf{X}$ (folosind procedura Gram-Schmidt) şi proiecția ortogonală a vectorului $v = (1,1,0)$ pe $\mathbf{X}$.

Subiectul IV (2 puncte)

(**1.pct.**) a) Demonstrați invarianța polinomului caracterictic la schimbarea reperelor.

(**1.pct.**) b) Demonstrați că pe un spațiu euclidian (real)

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}\left(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right), \quad \forall x, y \text{ vectori},$$

defineşte o funcțională biliniară simetrică.

Varianta C

Subiectul I (3 puncte)

(**1.pct.**) a) În spațiul vectorial $(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$, se consideră vectorul $x = (-3,10)$ şi reperul $B = (b_1 = (0,-4), b_2 = (3,2))$.
Folosind tehnica de pivotare să se determine matricea $[x]_B$ a coordonatelor vectorului x în reperul B.

(**1.pct.**) b) Se consideră funcționala pătratică definită pe $(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$,

$$V(x) = 5x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_3, \text{ unde } x = (x_1, x_2, x_3).$$

Folosind metoda lui Iacobi determinați o formă canonică a funcționalei pătratice şi precizați natura ei.

(**1.pct.**) c) În spațiul euclidian $(X, \mathbf{R}, \langle .,. \rangle)$ se consideră x şi y doi vectori de lungime (normă) unu. Considerând că vectorii $v = 3y - 5x$ şi $w = 2x - 4y$ sunt ortogonali, să se calculeze $\langle x, y \rangle$.

Subiectul II (2 puncte)

(**1.pct.**) a) Să consideră funcționala liniară $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$, $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 + x_3$. Să se determine $\dim_{\mathbf{R}} \ker f$, precum şi matricea funcționalei în reperul $B = ((1,0,0,0), (1,1,0,0), (1,1,1,0), (1,1,1,1))$.

(**1.pct.**) b) Să se determine soluția generală a sistemului de ecuații diferențiale liniare

$$\begin{cases} y'(x) = z(x) \\ z'(x) = 4y(x) + 3z(x) \end{cases}, \text{ unde } x \in \mathbf{R}.$$

Subiectul III (2 puncte)

(**1.pct.**) a) Să se verifice că $X_1 \oplus X_2 = \mathbf{R}^3$, unde

$$X_1 = \{(3\alpha - 2\beta, \alpha + \beta, -2\alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbf{R}\} \text{ şi } X_2 = \{(a,b,c) \in \mathbf{R}^3 \mid a - 3c = 0, b + 3c = 0\}.$$

(**1.pct.**) b) Se consideră subspațiul $\mathbf{X} = span(\{(1,1,0), (2,0,1)\})$ în $(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$. Să se găsească o bază ortonormată pentru $\mathbf{X}$ (folosind procedura Gram-Schmidt) şi proiecția ortogonală a vectorului $v = (1,1,0)$ pe $\mathbf{X}$.

Subiectul IV (2 puncte)

(**1.pct.**) a) Enunțați proprietățile operatorilor liniari şi evidențiați consecințele lor.

(**1.pct.**) b) Demonstrați că pe un spațiu euclidian (real)

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right), \quad \forall x, y \text{ vectori},$$

defineşte o funcțională biliniară simetrică.

Varianta D

Subiectul I (3 puncte)

(**1.pct.**) a) În spaţiul vectorial $(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$, se consideră vectorul $x = (8,-1)$ şi reperul $B = (b_1 = (0,-5), b_2 = (4,2))$. Folosind tehnica de pivotare să se determine matricea $[x]_B$ a coordonatelor vectorului x în reperul B.

(**1.pct.**) b) Se consideră funcţionala pătratică definită pe $(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$,

$$V(x) = -3x_1^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3, \text{ unde } x = (x_1, x_2, x_3).$$

Folosind metoda lui Iacobi determinaţi o formă canonică a funcţionalei pătratice şi precizaţi natura ei.

(**1.pct.**) c) În spaţiul euclidian $(X, \mathbf{R}, \langle .,. \rangle)$ se consideră x şi y doi vectori de lungime (normă) unu. Considerând că vectorii $v = 5y - 4x$ şi $w = 3x - 2y$ sunt ortogonali, să se calculeze $\langle x, y \rangle$.

Subiectul II (2 puncte)

(**1.pct.**) a) Să consideră funcţionala liniară $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$, $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3 + x_4$. Să se determine $\dim_{\mathbf{R}} \ker f$, precum şi matricea funcţionalei în reperul $B = ((1,0,0,0), (1,1,0,0), (1,1,1,0), (1,1,1,1))$.

(**1.pct.**) b) Să se determine soluţia generală a sistemului de ecuaţii diferenţiale liniare

$$\begin{cases} y'(x) = z(x) \\ z'(x) = -6y(x) + 5z(x) \end{cases}, \text{ unde } x \in \mathbf{R}.$$

Subiectul III (2 puncte)

(**1.pct.**) a) Să se verifice că $X_1 \oplus X_2 = \mathbf{R}^3$, unde

$$X_1 = \{(-\alpha + 3\beta, 2\alpha - \beta, 3\alpha + \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbf{R}\} \text{ şi } X_2 = \{(a,b,c) \in \mathbf{R}^3 \mid a - c = 0, b + c = 0\}.$$

(**1.pct.**) b) Se consideră subspaţiul $\mathbf{X} = span(\{(1,3,0), (0,-1,1)\})$ în $(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$. Să se găsească o bază ortonormată pentru $\mathbf{X}$ (folosind procedura Gram-Schmidt) şi proiecţia ortogonală a vectorului $v = (1,1,0)$ pe $\mathbf{X}$.

Subiectul IV (2 puncte)

(**1.pct.**) a) Demonstraţi că o mulţime de vectori proprii, ai unui endomorfism liniar, corespunzători la valori proprii distincte este liniar independentă.

(**1.pct.**) b) Să se verifice că într-un spaţiu unitar avem

$$\|x + iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Im}\langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \text{ vectori}.$$