AT1 - PROBLEMĂ REZOLVATĂ

OVIDIU VEGHEŞ

octombrie 2015

1.3. **Probleme. 1.3.9 Exerciţiu** În spaţiul vectorial $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ se consideră vectorii

$$v_1 = (0,1,-1), v_2 = (1,-1,1), v_3 = (1,1,-1), v_4 = (1,1,2), v_5 = (2,0,1)$$

şi subspaţiile $\mathbb{X}_1 = \text{span}_{\mathbb{R}}(\{v_1, v_2, v_3\})$ şi $\mathbb{X}_2 = \text{span}_{\mathbb{R}}(\{v_4, v_5\})$. Să se determine:
a) câte o bază pentru $\mathbb{X}_1$ şi $\mathbb{X}_2$;
b) subspaţiul $\mathbb{Y} = \mathbb{X}_1 \cap \mathbb{X}_2$ şi dimensiunea sa;
c) subspaţiul $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2$ şi dimensiunea sa.
d) Să se verifice teorema dimesiunii a lui Grassmann.

Soluţie. i) În spaţiul vectorial real $\mathbb{R}^3$ considerăm reperul canonic $E = (e_1, e_2, e_3)$, unde

$$e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1).$$

a) $\text{rang}\left[[v_1]_E, [v_2]_E, [v_3]_E\right] = \text{rang}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 2$. Deoarece numărul de vectori este 3 ($\neq 2$) vectorii v_1, v_2, v_3 sunt liniar dependenţi. Numărul maxim de vectori liniar independenţi este 2. Mulţimea $\{v_1, v_2\}$ este liniar independentă deoarece $\text{rang}\left[[v_1]_E, [v_2]_E\right] = \text{rang}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 2$ =numărul de vectori.

Observăm că $v_3 = 2v_1 + v_2$. Fie $v \in \mathbb{X}_1$ arbitrar. Există $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât $v = \varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \varepsilon_3 v_3$. Atunci $v = (\varepsilon_1 + 2\varepsilon_3) v_1 + (\varepsilon_2 + \varepsilon_3) v_2 \in \text{span}_{\mathbb{R}}(\{v_1, v_2\})$. Rezultă după un scurt raţionament că $\mathbb{X}_1 = \text{span}_{\mathbb{R}}(\{v_1, v_2\})$. Am arătat că $\{v_1, v_2\}$ este o mulţime de generatori pentru $\mathbb{X}_1$.

Raţionamentul precedent justifică faptul că (v_1, v_2) este un reper în $\mathbb{X}_1$ şi $\boxed{\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{X}_1 = 2}$.

$\{v_4, v_5\}$ este o mulţime de vectori liniar independentă deoarece

$$\text{rang}\left[[v_4]_E, [v_5]_E\right] = \text{rang}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 2 = \text{numărul de vectori.}$$

$\{v_4, v_5\}$ este o mulţime de generatori pentru $\mathbb{X}_2$, deaorece $\mathbb{X}_2 = \text{span}_{\mathbb{R}}(\{v_4, v_5\})$. Raţionamentul precedent justifică faptul că (v_4, v_5) este un reper în $\mathbb{X}_2$ şi $\boxed{\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{X}_2 = 2}$.

Raţionamentul s-a bazat pe consecinţa teoremei rangului ce permite recunoaşterea unei mulţimi liniar independente şi pe definiţia unei mulţimi de generatori ai unui spaţiu vectorial.

b) $\mathbb{X}_1 \cap \mathbb{X}_2 = \left\{v \in \mathbb{R}^3 \mid v \in \mathbb{X}_1 \text{ şi } v \in \mathbb{X}_2\right\} = \left\{v \in \mathbb{R}^3 \mid v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \alpha_4 v_4 + \alpha_5 v_5,\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{R}\right\}.$
Egalitatea vectorială $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \alpha_4 v_4 + \alpha_5 v_5$ exprimată în reperul E înseamnă

$$\alpha_1 [v_1]_E + \alpha_2 [v_2]_E = \alpha_4 [v_4]_E + \alpha_5 [v_5]_E.$$

Suntem conduşi la sistemul

$$\begin{cases} \alpha_2 - \alpha_4 - 2\alpha_5 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_4 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_4 - \alpha_5 = 0 \end{cases}$$

ce are soluţia $\alpha_1 = \frac{4}{3}t, \alpha_2 = \frac{5}{3}t, \alpha_4 = -\frac{1}{3}t, \alpha_5 = t$, cu $t \in \mathbb{R}$. Notăm $v_0 = \frac{4}{3}v_1 + \frac{5}{3}v_2 = -\frac{1}{3}v_4 + v_5 = \left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Obţinem $\mathbb{Y} = \mathbb{X}_1 \cap \mathbb{X}_2 = \text{span}_{\mathbb{R}}(\{v_0\})$ şi $\boxed{\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{X}_1 \cap \mathbb{X}_2) = 1}$ deoarece v_0 nu este vectorul nul.

c) $\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2 = \text{span}_{\mathbb{R}}(\{v_1, v_2\}) + \text{span}_{\mathbb{R}}(\{v_4, v_5\}) = \text{span}_{\mathbb{R}}(\{v_1, v_2, v_4, v_5\})$.

$\text{rang}\left[[v_1]_E, [v_2]_E, [v_4]_E, [v_5]_E\right] = \text{rang}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 3$. Căutăm o dependenţă liniară a vectorilor v_1, v_2, v_4, v_5. Relaţia

$$\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_4 v_4 + \beta_5 v_5 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} \beta_2 + \beta_4 + 2\beta_5 & = 0 \\ \beta_1 - \beta_2 + \beta_4 & = 0 \\ -\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_4 + \beta_5 & = 0 \end{cases}.$$

Soluţia $\beta_1 = -\frac{4}{3}\beta_5, \beta_2 = -\frac{5}{3}\beta_5, \beta_4 = -\frac{1}{3}\beta_5$ scoate în evidenţă dependenţa

$$v_5 = \frac{4}{3}v_1 + \frac{5}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_4.$$

Deoarece

$$\operatorname{rang}\left[[v_1]_E, [v_2]_E, [v_4]_E\right] = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{\det=-3}{=} 3 = \text{numărul de vectori.}$$

rezultă $\{v_1, v_2, v_4\}$ este o mulţime de vectori liniar independentă. Fie $v \in \mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2$ arbitrar. Există ε_1, ε_2, ε_4, $\varepsilon_5 \in \mathbb{R}$ astfel încât $C = \varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \varepsilon_4 v_4 + \varepsilon_5 v_5$. Atunci

$$C = \left(\varepsilon_1 + \tfrac{4}{3}\varepsilon_5\right) v_1 + \left(\varepsilon_2 + \tfrac{5}{3}\varepsilon_5\right) v_2 + \left(\varepsilon_4 + \tfrac{1}{3}\varepsilon_5\right) v_4 \in \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\left(\{v_1, v_2, v_4\}\right).$$

Rezultă $\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2 = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(\{v_1, v_2, v_4\})$. Am arătat că $\{v_1, v_2, v_4\}$ este o mulţime de generatori pentru $\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2$. Raţionamentul precedent justifică faptul că (v_1, v_2, v_4) este un reper în $\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2$ şi $\boxed{\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2) = 3}$.

Mai mult, $F = (v_1, v_2, v_4)$ este un reper şi în $\mathbb{R}^3$, şi deci $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2 = \mathbb{R}^3$.

d) Constatăm că teorema dimensiunii a lui Grassmann

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2) = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{X}_1 + \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{X}_2 - \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{X}_1 \cap \mathbb{X}_2).$$

este verificată $(3 = 2 + 2 - 1)$. ∎