

# ALGEBRĂ LINIARĂ - RECOMANDARI PENTRU EXAMEN

AN UNIVERSITAR 2016-2017

*Ianuarie 2017*

## 1. RESTRICȚII PRIVIND EXAMENUL SCRIS

Condiții de intrare, desfășurare și finalizare a examenului de algebră liniară:

- (1) Prezentarea cu **8 foi A4 capsate, albe, nescrise și instrumente de scris** în sala de examen la data și ora stabilită.
- (2) Legitimarea cu **buletinul/cartea de identitate** sau **pașaportul** atât la intrarea în sala de examen, cât și la fiecare solicitare a cadrelor didactice supraveghetoare.
- (3) Respectarea disciplinei de examen, a colegilor și a cadrelor didactice.

Se interzice în timpul examenului:

- (1) Folosirea telefoanelor mobile sau a oricăror alte dispozitive de comunicare.
- (2) Folosirea însemnărilor personale, a cărților, caietelor, notițelor, xerox-urilor sau a fișelor de sinteză.
- (3) Folosirea oricăror dispozitive electronice de calcul.
- (4) Deranjarea colegilor, indiferent de motiv.
- (5) Rezolvarea altor probleme în afara celor indicate pe propriul bilet de examen.

Chesiuni conexe:

- (1) Eventualele contestații se fac în scris la secretariatul facultății și vor fi analizate doar dacă sunt depuse în termen.

## 2. STRUCTURA SUBIECTELOR DE EXAMEN

Subiecte fundamentale. 5 aplicații numerice privind: i) spații vectoriale, repere și modificarea coordonatelor unui vector la schimbarea reperelor, tehnica de pivotare descrisă în lema schimbului; ii) aducerea funcționalelor pătratice reale la forma canonică și stabilirea naturii acestora; iii) sisteme de ecuații diferențiale liniare de ordinul întâi (SEDL1), omogene, cu coeficienți constanți; iv) produs scalar, spații euclidiene, lungimea unui vector și unghiul a doi vectori; v) repere ortogonale/ortonormale în spații euclidiene și metoda de ortonormalizare Gram-Schmidt, proiecția ortogonală a unui vector pe un subspațiu vectorial și complementul ortogonal al unui subspațiu vectorial.

Subiecte tehnice. 2 aplicații numerice compatibile cu unele din următoarele patru teme: i) operații cu subspații vectoriale, teorema dimensiunii a lui Grassmann, suma directă a două subspații vectoriale și construirea suplementului direct al unui subspațiu vectorial; ii) nucleul, imaginea unui operator liniar și teorema dimensiunii, vectori, valori proprii asociate unui endomorfism, endomorfisme diagonalizabile și jordanizabile; iii) funcționale liniare, dual algebric al unui spațiu vectorial, reprezentare matricială; iv) operatori liniari pe spații euclidiene, operatori liniari adjuncți, tipuri de operatori liniari pe spații euclidiene.

Subiecte exploratorii. 2 întrebări sau aplicații teoretice din toată materia. Se vor prezenta toate noțiunile implicate în tratarea fiecărui exercițiu precum și conexiunile dintre ele. La fiecare aplicație teoretică se va urmări pe de o parte amploarea temei, iar pe de altă

parte curgerea raționamentului de la ipoteze spre concluzii. Se recomandă pregătirea cu prioritate a unor teme ca: a) operații cu subspații vectoriale și teorema dimensiunii a lui Grassmann, b) suma directă a două subspații vectoriale și construirea suplimentului direct al unui subspațiu vectorial, c) rangul și defectul unui operator liniar, teorema dimensiunii privind operatorii liniari, d) operatori de proiecție (oblică), e) reprezentarea matriceală a operatorilor, funcționalelor biliniare (sesquiliniare) și modificarea matricei de reprezentare la schimbarea reperelor, f) vectori și valori proprii, proprietăți, g) funcționale liniare și calcule în spațiul dual algebric, h) inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz și teorema lui Pitagora, i) repere ortogonale, repere ortonormate, metoda de ortonormalizare Gram-Schmidt, j) operatori liniari adjuncți și proprietăți, k) diferite tipuri de operatori liniari pe spații euclidiene, l) polinoame de matrice, polinom caracteristic, teorema Hamilton-Cayley, consecințe.

Punctajul maxim îl va obține soluția corectă, completă și justificată.

### 3. UN SET EXEMPLIFICATIV DE SUBIECTE

1. În spațiul vectorial  $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  se consideră  $B = (b_1 = (1, 2), b_2 = (2, -1))$  și vectorul  $x = (0, 3)$ . Să se determine  $[x]_B$  vectorul coordonatelor lui  $x$  în reperul  $B$  folosind tehnica de pivotare.

2. Se consideră funcționala pătratică definită pe  $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ ,

$$V(x) = 3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 - 8x_3x_1, \text{ unde } x = (x_1, x_2, x_3).$$

Determinați o formă canonică a funcționalei pătratice și precizați natura ei.

3. Să se determine soluția generală a sistemului de ecuații diferențiale liniare

$$\begin{cases} y'(x) = 13y(x) + 25z(x) \\ z'(x) = -y(x) + 23z(x) \end{cases}, \text{ unde } x \in \mathbb{R}.$$

4. În spațiul vectorial  $C_{\mathbb{R}}([0, 1])$ , al funcțiilor continue reale definite pe intervalul  $[0, 1]$ , dotat cu produsul scalar  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ , să se calculeze unghiul vectorilor  $f(x) = 2x$  și  $g(x) = 2x - 1$ .

5. Se consideră subspațiul  $\mathbb{X} = \text{span}\{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, -1)\}$  în  $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ . Să se găsească o bază ortonormată pentru  $\mathbb{X}$  (folosind procedura Gram-Schmidt) și pentru  $\mathbb{X}^\perp$ .

6. În spațiul vectorial  $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  se consideră mulțimile

$$\mathbb{X}_1 = \{(\alpha - \beta, 5\beta, -\alpha + 2\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \text{ și } \mathbb{X}_2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid 2a - 3b + c = 0\}.$$

Arătați că  $\mathbb{X}_1$  și  $\mathbb{X}_2$  sunt subspații vectoriale și să se determine dimensiunea lor. Determinați o bază a subspațiului vectorial  $Y = \mathbb{X}_1 \cap \mathbb{X}_2$ .

7. Să se arate că  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_3$  este o funcțională liniară, să se determine  $\dim_{\mathbb{R}} \ker f$ , precum și matricea funcționalei în reperul

$$B = ((1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)).$$

8. Demonstrați într-un spațiu euclidian echivalența condițiilor:

- i)  $w^* \in \mathbb{W}$  și  $\langle x - w^*, v \rangle = 0, \forall v \in \mathbb{W}$ ;
- ii)  $w^* \in \mathbb{W}$  și  $\|x - w^*\| = \min_{y \in \mathbb{W}} \|x - y\|$ ;

pentru  $\mathbb{W}$  subspațiu și  $x$  vector arbitrar fixat în spațiul euclidian.

9. Polinoame de matrice. Teorema Hamilton-Cayley (cu demonstrație). Consecințe.