CURS 1. INTRODUCTIV

A. Ce este Cercetarea Operaţională?

Dacă la începutul deceniului patru al secolului trecut, termenul „**Cercetare Operaţională**”(abreviat **CO**) era necunoscut, astăzi el desemnează un **domeniu activ de cercetare ştiinţifică** – atât teoretică cât şi aplicativă – dar şi o **disciplină universitară** importantă.

CO are ca obiect de studiu problemele de optimizare rezultate din modelarea matematică a unor fenomene şi procese din domeniul economic, ştiinţific, tehnic sau militar. Este o definiţie simplă fără pretenţia de exhaustivitate, dar mai uşor de acceptat de către începători cu condiţia explicării unor termeni ca **problemă de optimizare** sau **modelare matematică**.

CO reprezintă (vezi **R. Ackoff , M. Sasieni**, Fundamentals of Operations Research,1968.):

1. aplicarea *metodelor ştiinţifice*
2. de către o *echipă multidisciplinară*
3. la studiul problemelor legate de *conducerea sistemelor* organizate, cu *scopul obţinerii unor rezultate* care să servească cât mai bine *interesele organizaţiei* în ansamblu.

În esenţă, o **problemă de optimizare este o problemă de alegere**. Ea presupune dată o colecţie de entităţi denumite generic **soluţii admisibile** (sau **variante, scenarii**) Soluţiile pot fi comparate între ele şi clasificate prin intermediul unui **criteriu de apreciere** (de **performanţă**). În acest context se pune problema de a găsi soluţia cea mai bine apreciată, numită şi **soluţia optimă** a problemei.

Exemplul 1. Printre dreptunghiurile cu acelaşi perimetru, să se determine acela care are cea mai mare arie.

Evident, soluţiile acestei probleme sunt dreptunghiurile al căror perimetru este egal cu o valoare dată. Aceste dreptunghiuri sunt comparate între ele prin intermediul **ariei** care joacă rolul de **criteriu de performanţă.**

Să notăm cu ***p*** perimetrul dreptunghiurilor dintre care urmează să alegem pe cel cu aria maximă.Un asemenea dreptunghi este perfect caracterizat de dimensiunile sale: lungimea ***L*** şi lăţimea ***l***.

Prin ipoteză:

$$2L + 2l = p \quad \text{cu} \quad L \geq 0\,, l \geq 0$$

din care putem extrage, de exemplu: $L = \frac{1}{2}p - l$. Ca urmare, orice dreptunghi din mulţimea considerată poate fi caracterizat printr-o singură dimensiune, de exemplu ***l***, cu condiţia ca :

$$L = \tfrac{1}{2}p - l \geq 0 \Rightarrow l \leq \tfrac{1}{2}p$$

În concluzie, dreptunghiurile din mulţimea cărora trebuie să facem alegerea pot fi identificate cu acele "lăţimi" *l* care satisfac condiţia:

$$0 \leq l \leq \tfrac{1}{2}p \tag{1.1}$$

Aria unui asemenea dreptunghi este dată de relaţia:

$$L \cdot l = (\tfrac{1}{2}p - l) \cdot l = -l^2 + \tfrac{1}{2}pl \underset{def}{=} A(l) \tag{1.2}$$

Astfel, problema determinării dreptunghiului cu perimetrul *p* a cărui arie să fie maximă este echivalentă cu problema găsirii acelei valori numerice ***l**** care satisface condiţia (1.1) şi care dă funcţiei A(*l*) din (1.2) cea mai mare valoare. Sintetizăm această "traducere" a problemei originale prin notaţia:

$$\begin{cases} \max \quad A(l) = -l^2 + \tfrac{1}{2}pl \\ (\text{cu conditia}) \quad 0 \leq l \leq \tfrac{1}{2}p \end{cases} \tag{1.3}$$

Vom spune că **(1.3) este modelul matematic al problemei din exemplul 1**.

Pentru rezolvarea problemei, observăm că funcţia de gradul doi A(*l*) are un maxim în $l^* = \frac{1}{4}p \in [0, \frac{1}{2}p]$ cu valoarea $A(l^*) = \frac{1}{16}p^2$. Deoarece $L^* = \frac{1}{2}p - l^* = \frac{1}{4}p = l^*$ conchidem că dreptunghiul de arie maximă şi cu perimetrul dat este un **patrat**.

Recapitulând, soluţiile modelului (1.3) sunt numerele *l* care satisfac condiţia (1.1). Aceste valori sunt comparate şi clasificate prin intermediul funcţiei A(*l*) din (1.2). Soluţia optimă $l^* = \frac{1}{4} p$ este soluţia care oferă funcţiei A(*l*) – numită şi **funcţia obiectiv** – cea mai mare valoare posibilă.

***

Studiul problemelor de optimizare practice înseamnă, pe lângă formularea unor modele matematice adecvate, şi **elaborarea unor metode de rezolvare** a acestora adică elaborarea de proceduri de găsire a soluţiilor optime.

O dată obţinută soluţia optimă este necesar ca aceasta să fie interpretată şi comparată cu realitatea modelată. Într-adevăr, un model este în general o reprezentare aproximativă a realităţii şi analiza poate să pună în evidenţă necesitatea introducerii unor noi elemente în modelul iniţial, pentru a-l apropia şi mmai mult de procesul modelat.Însă, modificarea modelului poate implica schimbări în soluţia optimă, schimbări care necesită o reinterpretare a rezultatelor.Acest proces de ameliorare continuă până când se obţine o soluţie satisfăcătoare ce poate fi implementată în cadrul procesului care a generat problema de optimizare. În rezumat, **metoda generală de studiu a CO** poate fi schematizată astfel:

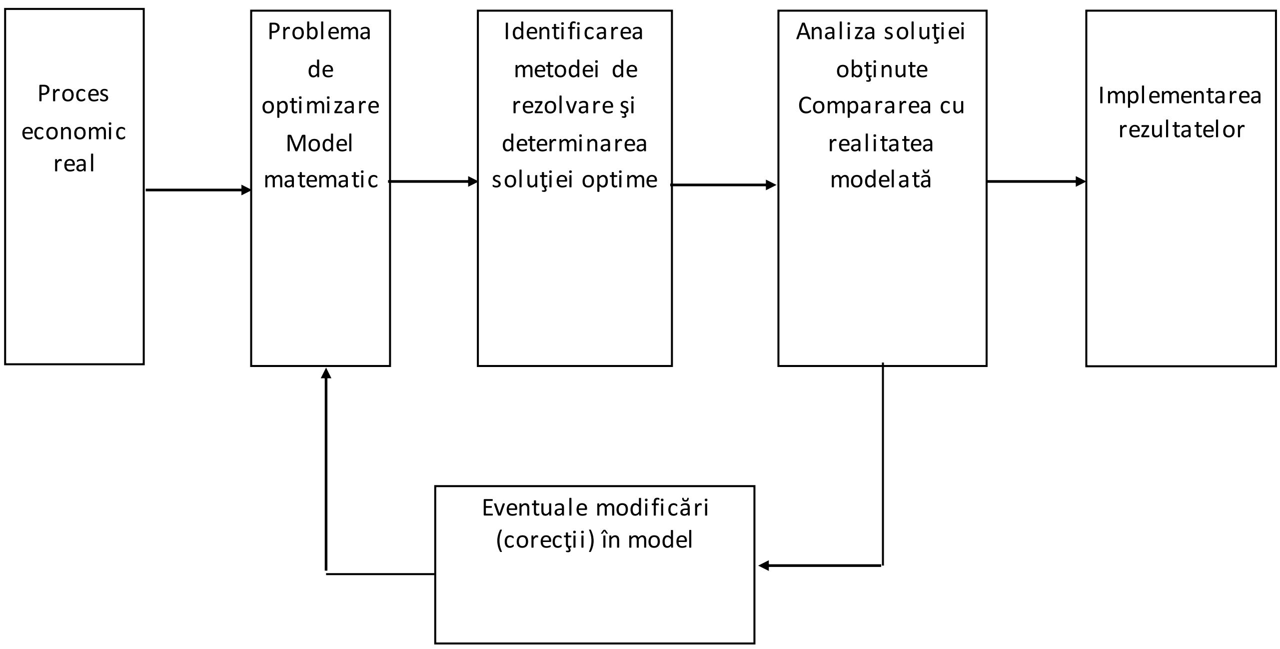

Figura 1

În cadrul acestui curs vom aborda cu precădere următoarele chestiuni:

- **modelarea** unor procese economice reprezentative;
- **descrierea unor metode de rezolvare** a unor probleme de optimizare;
- **interpretarea economică** a soluţiilor optime obţinute.

***

Formalizarea unor procese reale conduce de regulă la modele matematice de dimensiuni suficient de mari pentru a face imposibilă rezolvarea lor manuală, oricât de puternice ar fi metodele de soluţionare.Acesta este şi motivul pentru care metodele CO au apărut , s-au perfecţionat şi s-au diversificat în strânsă legătură cu dezvoltarea şi perfecţionarea mijloacelor automate de calcul.

B. Scurt istoric

Termenul **Cercetare Operaţională** este traducerea originalului englez **Operational Research**. Multe ţări europene au preluat acelaşi original: *Recherche Operationelle* în Franţa, *Ricerca Operativa* în Italia. America a optat pentru varianta **Operations Research** (≡ Cercetarea Operaţiilor) preluată în Rusia (Исследование Операций) şi în Germania.

Studiul unor probleme de optimizare şi încercări de modelare matematică pot fi identificate din cele mai vechi timpuri. Totuşi, începutul activităţii denumite astăzi CO, a fost atribuit serviciilor militare engleze în preajma declanşării celui de **al doilea război mondial**.Efortul de război a necesitat alocarea urgentă a unor resurse limitate în diferite operaţii militare într-un mod cât mai profitabil. De aceea conducerea militară engleză şi apoi cea americană au mobilizat un mare număr de oameni de ştiinţă (matematicieni şi fizicieni în special) care să se ocupe de rezolvarea acestor probleme. În esenţă acestora li s-a cerut să facă **cercetare** asupra **operaţiilor militare**(termenul Operational Research apare pentru prima dată în **1938** şi este datorat unui înalt oficial englez). Aceste grupuri mixte de militari şi civili au fost primele echipe de CO, eforturile lor fiind decisive în câştigarea bătăliei aerului în Anglia (este vorba de amplasarea eficientă a staţiilor radar pentru descoperirea din timp a atacurilor avioanelor inamice), în bătălia Atlanticului de Nord (organizarea şi apărarea convoaielor de aprovizionare care traversau oceanul, contra submarinelor germane) sau în campania americană din Pacific contra Japoniei.

Dezvoltarea economică explozivă de după război a făcut ca problemele de conducere cauzate de creşterea complexităţii activităţii economice să nu mai poată fi rezolvate cu mijloacele tradiţionale bazate pe experienţă şi fler. Pentru mulţi specialişti care lucraseră în echipele CO din timpul războiului a devenit foarte repede evident faptul că noile probleme „din viaţa civilă” semănau până la identitate cu cele cu care se confruntaseră în război.

Acesta a fost momentul în care CO şi-a făcut intrarea în industrie,comerţ, administraţie, afaceri etc.Deja în anii ’50, CO avea statut şi dezvoltare de sine stătătoare în Anglia şi America.

Încheiem această secţiune prin a aminti că facultatea noastră **CSIE a fost prima facultate din ţară care a introdus în programa de învăţământ disciplina CO în 1969**. Unele elemente erau predate chiar mai înainte de această dată în cadrul unui curs intitulat **calcul economic**.

C. O schemă generală de construire a unui model matematic pentru o problemă de optimizare din domeniul economic

În orice problemă de optimizare rezultată din modelarea unui proces economic întâlnim două categorii de mărimi (exemplificările sunt luate din problemele de planificare a activităţii de producţie; altele vor fi date în secţiunile următoare):

- **Mărimi constante**: preţuri, profituri, costuri, cantităţi disponibile de resurse etc. Bineînţeles că şi aceste mărimi se pot schimba de la o perioadă la alta; important este faptul că pe un interval de timp convenabil ales ele pot fi considerate constante!
- **Mărimi variabile** ca de exemplu**:** cantităţi de bunuri ce urmează a fi produse într-o anumită perioadă.

În principiu, mărimile variabile urmează a fi astfel determinate încât să satisfacă un anumit **criteriu de performanţă** cum ar fi: maximizarea venitului (a profitului) sau minimizarea costurilor de producţie.

Orice proces economic se desfăşoară în anumite **condiţii limitative** ca de exemplu: încadrarea consumurilor de resurse în disponibilele date sau realizarea unui anumit nivel minimal al profitului. Identificarea corectă a acestor condiţii determină nemijlocit calitatea modelului şi de aici şi calitatea soluţiei optime.

În elaborarea modelului matematic pentru o problemă de optimizare practică se recomandă parcurgerea următoarelor **etape**:

1. **Identificarea mărimilor variabile**:acestea vor deveni **variabilele de decizie** ale modelului;
2. **Identificarea condiţiilor limitative** ce caracterizează procesul modelat şi formalizarea lor în relaţii matematice – inegalităţi şi / sau egalităţi – denumite **restricţii**;
3. **Precizarea criteriului de performanţă** şi formalizarea lui într-o funcţie de variabilele de decizie, numită **funcţia obiectiv**;
4. **Precizarea condiţiilor explicite impuse mărimilor variabile**, ca de exemplu: să ia numai valori **reale nenegative** sau numai valori **întregi** etc.

Odată modelul construit, problema de optimizare originală capătă urmatoarea formulare:

Să se determine valorile variabilelor de decizie care satisfac restricţiile şi condiţiile explicite impuse variabilelor şi care oferă funcţiei obiectiv valoarea maximă sau minimă, după caz.

În acest context, soluţiile admisibile ale problemei originale se identifică cu acele seturi de valori numerice acordate variabilelor de decizie care satisfac restricţiile şi condiţiile explicite. Soluţia optimă va fi acea soluţie admisibilă care oferă funcţiei obiectiv cea mai mare sau cea mai mică valoare, după caz.

######