CURSUL 2- BIS
ELEMENTE DE TEORIA GRAFURILOR. OPTIMIZĂRI ÎN REŢELE DE TRANSPORT ŞI DISTRIBUŢIE
EXEMPLE NUMERICE

3.2 Problema drumului de valoare minimă (Shortest Path Problem). Algoritmul lui Dijkstra

Procedurile cunnoscute de căutare a drumurilor de valoare minimă rezolvă problema P(*s*), unele fiind capabile să rezolve şi cazul mai general în care ponderile arcelor permise pot fi şi negative.Pentru cazul mai simplu al ponderilor nenegative în totalitate, algoritmul lui DIJKSTRA, 1959, pare a fi cel mai adecvat.

NOTATII

1) Pe parcursul derulării procedurii, nodurile grafului G se impart în două categorii:

- Noduri **cercetate**: un nod *i* se consideră cercetat în momentul în care algoritmul "a găsit" un drum de valoare minimă de la nodul de plecare *s* la nodul *i*;
- Noduri **necercetate**.

La start, singurul nod cercetat este nodul de plecare *s*; toate celelalte noduri sunt declarate necercetate.

2) Să considerăm un nod cercetat *i*. Dintre toate nodurile *j* necercetate şi vecine cu *i* (adică există arcul permis (*i*,*j*)) reţinem pe acela pentru care valoarea $c(i, j)$ este cea mai mică. Nodul reţinut se declară **nod candidat asociat nodului cercetat** *i*. (candidat la... dobândirea calităţii de nod cercetat!) Este posibil ca pentru acelaşi nod cercetat să existe mai mulţi candidaţi sau să nu existe nici unul după cum este posibil ca acelaşi nod necercetat să „candideze" din partea mai multor noduri cercetate!

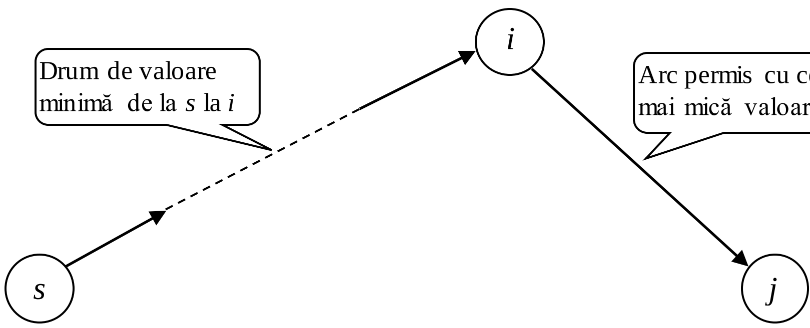

Figura 3.5

În figura 3.5 este vizualizat un nod **cercetat** *i* împreună cu un **candidat** al său *j*. Nodul *i* fiind presupus cercetat, aceasta înseamnă că, în etapele anterioare, algoritmul a găsit un drum λ de valoare minimă de la *s* la *i*. Acest drum, completat cu arcul (*i*,*j*), reprezintă un drum de la nodul *s* la nodul (necercetat) *j* pe care îl vom numi **drumul asociat candidatului** *j* şi a cărui valoare este $c(\lambda) + c(i, j)$.

Ca urmare a faptului că un nod necercetat poate să candideze din partea mai multor noduri cercetate este posibil ca el să aibe mai multe drumuri asociate!

Algoritmul lui DIJKSTRA

Start: Nodul de plecare se declară nod cercetat şi toate celelalte noduri din graf se declară necercetare.

Pasul iterativ: Pentru fiecare nod cercetat *i* se identifică candidatul sau candidaţii asociaţi lui *i* şi se calculează valorile drumurilor asociate acestor candidaţi. Nodul candidat *j* al cărui drum asociat are cea mai mică valoare va fi declarat nod cercetat. Teoria ne asigură că drumul asociat lui *j* este un drum de valoare minimă de la *s* la *j*. Se reia pasul iterativ.

Algoritmul se opreşte în momentul în care:

- Nu mai există noduri candidate:

sau

- Nodul de destinaţie *t* a fost declarat nod cercetat.

Exemplul 3.3:

În graful din figura 3.6 valorile numerice înscrise pe muchii reprezintă distanţe. Se cere determinarea celui mai scurt drum de la nodul O la nodul T. Atenţie: absenţa orientărilor vrea să însemne că orice muchie poate fi parcursă în ambele sensuri (deci graful are 11 muchii şi 22 arce permise). Aplicăm algoritmul lui Dijkstra.

Soluţie:

Start Nodul de plecare O este declarat cercetat; celelalte şase noduri ale grafului sunt declarate necercetate.

Iteraţia 1

Singurul nod cercetat O are trei vecini A,B,C dintre care, cel mai apropiat, este A. Nodul A va fi unicul candidat asociat nodului cercetat O. Declarăm cercetat nodul A; drumul cel mai scurt de la O la A se reduce la arcul OA. Reţinem arcul OA pentru graful $G^*(O)$ al drumurilor de valoare minimă cu origina în O.

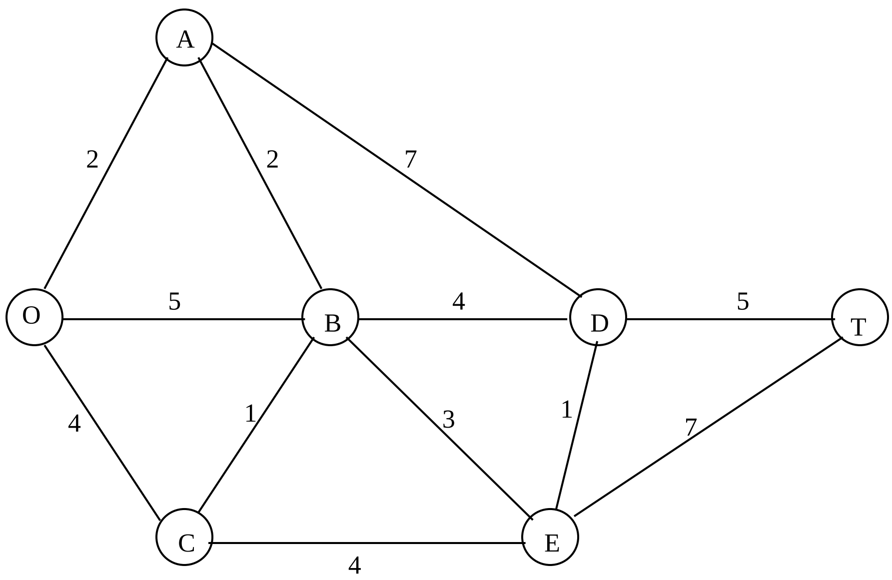

Figura 3.6

Iteraţia 2 Avem două noduri cercetate O şi A.

- Vecinii necercetaţi ai lui O sunt nodurile B şi C; deoarece este mai apropiat de O, nodul C este nodul candidat asociat – în această iteraţie – nodului O.Drumul asociat lui C se reduce la arcul OC şi are valoarea 4.

- Vecinii necercetaţi ai lui A sunt B şi D; candidat va fi nodul mai apropiat B. Drumul asociat nodului B se obţine „prelungind” drumul de valoare minimă de la O la A – găsit la iteraţia 1 – cu arcul AB ; lungimea drumului este egală cu 2 + 2 = 4.
- Avem două noduri candidate C şi B ale căror drumuri asociate au aceeaşi lungime 4. Le declarăm pe amândouă ca fiind noduri cercetate. Conform teoriei, drumurile asociate sunt cele mai scurte drumuri către ele.

Iteraţia 3 În acest moment nodurile O, A, B şi C sunt cercetate.

- Nodul O nu mai are vecini necercetaţi.
- Nodul A are un singur vecin necercetat, nodul D, care va fi şi candidatul său. Drumul asociat are lungimea 2 + 2 = 4 iar ultimul său arc component este AD.
- Vecinii necercetaţi ai lui B sunt D şi E; candidatul lui B va fi nodul mai apropiat E. Drumul minim până la B are lungimea 4 (iteraţia 2) astfel că drumul asociat candidatului E va avea lungimea 4 + 3 = 7 (s-a adăugat lungimea ultimului arc BE).
- E va candida şi din partea lui C ca unic vecin necercetat şi ca urmare va avea un al doilea drum asociat, obţinut prelungind drumul minim până la C (în fapt, arcul OC) cu arcul CE. Lungimea noului drum este 4 + 4 = 8.
- Comparăm lungimile drumurilor asociate construite. Cel mai scurt se termină în E, înainte de a ajunge în E trece prin B şi are lungimea 7. În consecinţă declarăm E nod cercetat şi reţinem arcul BE ca ultim arc pe drumul cel mai scurt către E.

Iteraţia 4

La acest stadiu al derulării algoritmului sunt declarate cercetate nodurile O,A,B,C şi E.Sunt cunoscute valorile minimale ale drumurilor da la O către A,B,C şi E. Sunt reţinute deasemenea „ultimele” arce ale drumurilor minimale; după cum vom vedea cunoaştera acestor arce va fi suficientă pentru reconstituirea drumurilor minimale din O către orice alt nod al grafului!

D este singurul nod candidat, asociat însă la numai puţin de trei noduri deja cercetate A,B şi E.Este clar că D va fi următorul nod declarat cercetat; rămâne să stabilim lungimea drumului minimal de la O la D şi ultimul său arc! Algoritmul ia în considerare trei drumuri de la O la D:

- drumul minim de la O la A, prelungit cu arcul AD; lungime: 2 + 7 = 9;
- drumul minim de la O la B, prelungit cu arcul BD; lungime: 4 + 4 = 8;
- drumul minim de la O la E, prelungit cu arcul ED; lungime: 7 + 1 = 8;

În concluzie, cele mai scurte drumuri de la O la D au lungimea 8 şi înainte de a ajunge în D trec, fie prin B fie prin E!

Iteraţia 5 Nodul T candidează:

- o dată din partea lui D - drumul asociat va avea lungimea 8 + 5 = 13;
- altă dată din partea lui E - drumul asociat va avea lungimea 7 + 7 = 14.

Prin urmare, cel mai scurt drum de la O la T va avea lungimea 13 iar ultimul său arc va fi DT.

Deoarece am „atins” nodul T algoritmul se opreşte.În cazul de faţă toate nodurile grafului au fost cercetate aşa încât algoritmul a găsit şi toate drumurile minimale cu origina în O!

Consideraţiile de mai sus au fost sintetizate în tabelul 3.1

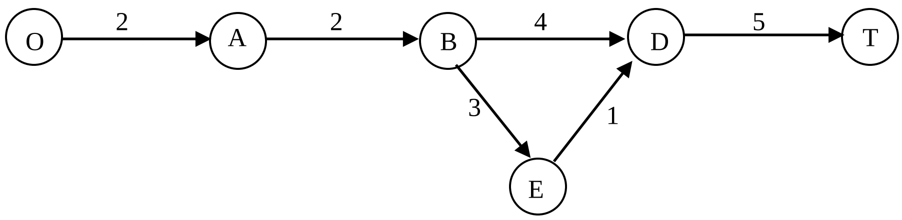

Figura 3.7

Determinarea efectivă a nodurilor prin care trece drumul cel mai scurt de la O la T sau la oricare alt nod se face din aproape în aproape „de la sfârşit către începutul drumului” folosind arcele reţinute pe parcurs.

Există două drumuri optime indicate în figura 3.7:

În fapt, algoritmul a determinat drumurile de valoare minimă de la O la toate celelalte noduri – vezi figura 3.8.

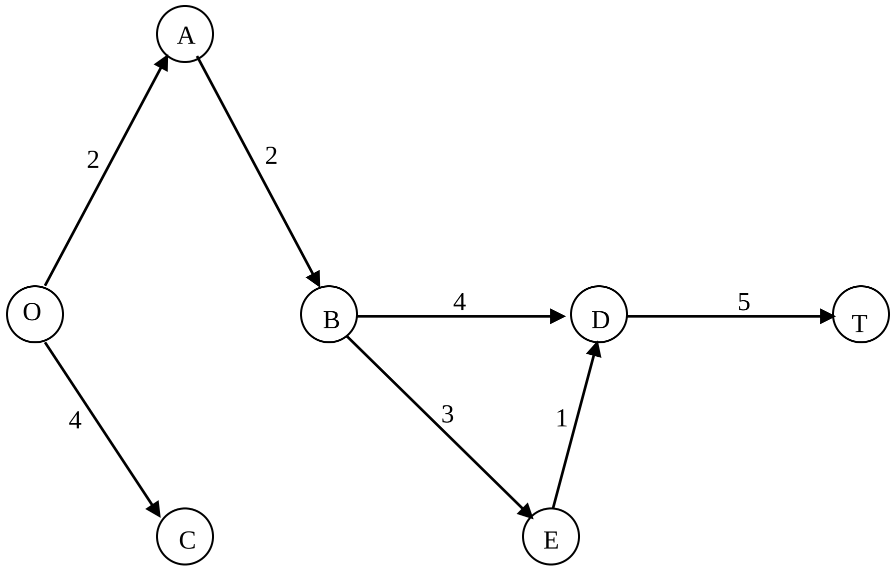

Figura 3.8

Tabelul 3.1

Iteraţia	**Noduri cercetate cu vecini necercetaţi**	**Noduri (necercetate) candidate**	**Valoarea drumului asociat**	**Care nod a fost declarat cercetat**	**Valoarea minimă a drumului către nodul declarat cercetat**	**Ultimul arc pe drumul de valoare minimă**
1	O	A	2	A	2	OA
2	O	C	4	C	4	OC
	A	B	2+2=4	B	4	AB
3	A	D	2+7=9			
	B	E	4+3=7	E	7	BE
	C	E	4+4=8			
4	A	D	2+7=9			
	B	D	4+4=8	D	8	BD
	E	D	7+1=8	D	8	ED
5	D	T	8+5=13	T	13	DT
	E	T	7+7=14			

Exemplul 3.4 - TEMĂ:

1) Utilizând algoritmul lui Dijkstra determinaţi cele mai scurte drumuri de la nodul A la celelalte noduri ale grafului din figura 3.9

2) Ce modificări intervin în graful $G^*(A)$ al drumurilor de lungime minimă dacă muchiile {I, G} şi {D, J} nu pot fi parcurse decât de la I la G, respectiv de la D la J?

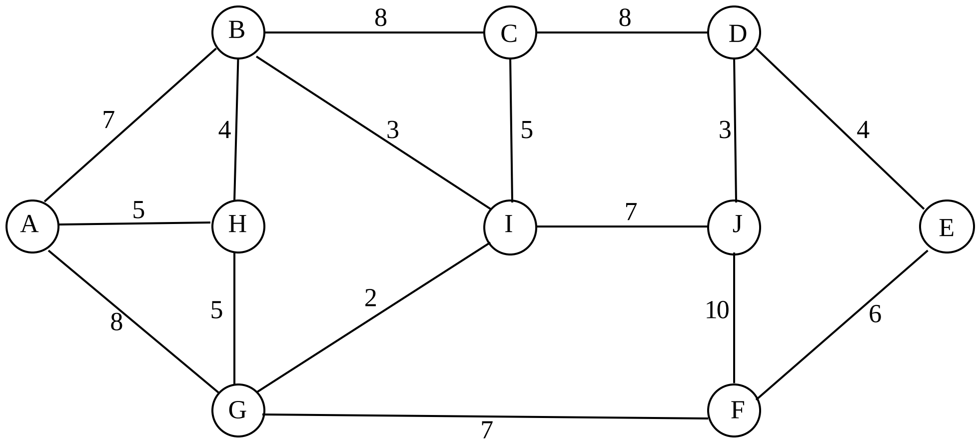

Figura 3.9

Exemplul 3.5 - TEMĂ:

1. În reţeaua din figura 3.10, valorile numerice înscrise pe muchii reprezintă costuri de deplasare valabile în ambele sensuri de parcurgere. Aplicaţi riguros algoritmul lui Dijkstra pentru determinarea drumului de la nodul O la nodul T cu cel mai mic cost.

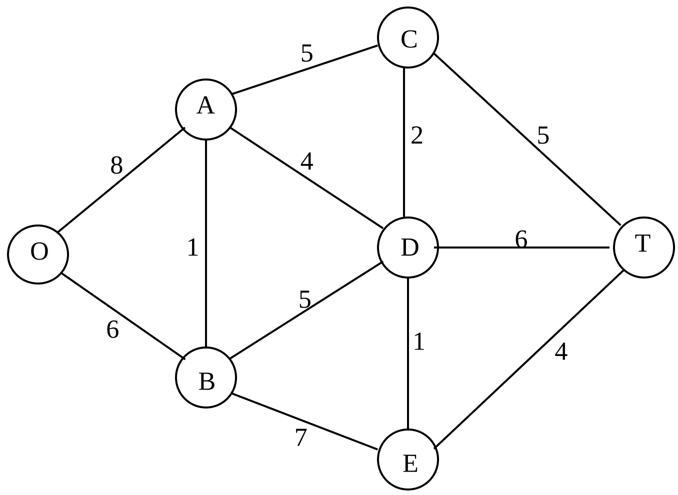

Figura 3.10