TEMA III

OPTIMIZAREA PROCESELOR ECONOMICE UTILIZÂND PROGRAMAREA LINIARĂ

CURS 9. Dualitatea în programarea liniară

Cuprins

În principiu, oricărui **program liniar** i se asociază un altul numit **dualul** său şi, în esenţă, **teoria dualităţii** studiază relaţiile dintre cele două programe, dar şi interpretările acestora, în analiza economică.

Reamintim că o restricţie a unui program liniar s-a numit:

- **concordantă**, dacă este o **inegalitate** de tipul ≤ într-o problemă de **maximizare,** sau ≥ într-o problemă de **minimizare;**

- **neconcordantă**, dacă este o inegalitate de tipul ≥ într-o problemă de **maximizare** sau ≤ într-o problemă de **minimizare**.

Restricţiile inegalităţi nu fac obiectul acestei clasificări.

Un program liniar în formă canonică este un program în care toate restricţiile sunt inegalităţi concordante şi toate variabilele sale respectă condiţia de nenegativitate.

Orice program liniar poate fi adus la o formă canonică fie de maximizare fie de minimizare prin operaţii care nu alterează nici soluţiile admisibile şi nici pe cele optime.

1 Dualul unui program liniar

Fie un program liniar (P) cu ***m*** **restricţii şi** ***n*** **variabile** $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Pentru maxima generalitate vom presupune că, pe lângă variabile ce pot lua numai valori **nenegative** (≥ 0) există şi variabile ce pot lua numai valori **nepozitive** (≤ 0) precum şi variabile **fără restricţie de semn**, care pot lua orice valoare reală.

Asociem programului **(P)** un nou program liniar **(Q)** numit **programul dual**, după regulile I-IV de mai jos. În raport cu programul dual (Q), programul (P) se va numi **programul primal**.

I. Dacă în (P) funcţia obiectiv se **maximizează** (se **minimizează**), în programul (Q) funcţia obiectiv se **minimizează** (se **maximizează**).

II. **Restricţiei** de **rang** ***i*** din programul primal (P) îi corespunde în (Q) o **variabilă** $u_i \quad i = 1, \cdots, m$. Dacă restricţia de rang *i* este o **inegalitate concordantă** (o **inegalitate neconcordantă**, respectiv o **egalitate**) variabila duală u_i este **nenegativă** (**nepozitivă**, respectiv **fără restricţie de semn**).

III. **Variabilei** x_j din programul primal (P) îi corespunde în dualul (Q) **restricţia** de rang *j*, *j* = 1,.., *n*.

- membrul stâng al restricţiei duale este combinaţia $u_1 a_{1j} + u_2 a_{2j} + \cdots + u_m a_{mj}$ în care $a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj}$ sunt coeficienţii variabilei x_j din toate restricţiile programului (P);

- membrul drept este coeficientul c_j pe care variabila x_j îl are în funcţia obiectiv din (P);

- dacă variabila x_j este **nenegativă** (**nepozitivă**, respectiv **fără restricţie de semn**) restricţia duală asociată este o **inegalitate concordantă** (**inegalitate neconcordantă**, respectiv **egalitate**)

IV. Funcţia obiectiv a programului dual (Q) este $g = u_1 b_1 + u_2 b_2 + \cdots + u_m b_m$ unde $b_1, b_2, \cdots, b_m$ sunt **termenii liberi** ai restricţiilor din programul primal (P).

Prin urmare programul dual are atâtea variabile (restricţii) câte restricţii (variabile) are programul primal.

Exemplul 1 Construcţia dualului unui program liniar poate fi schematizată astfel:

Programul primal   Programul dual

$$(P)\left\{\begin{array}{lcl} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 6x_4 \geq 12 & \leftrightarrow & u_1 \geq 0 \\ x_1 + 4x_2 \quad + x_4 = 6 & \leftrightarrow & u_2 \ frs \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 \leq 8 & \leftrightarrow & u_3 \leq 0 \\ x_1 \geq 0 & \leftrightarrow & 3u_1 + u_2 + 2u_3 \leq 10 \\ x_2 \leq 0 & \leftrightarrow & -u_1 + 4u_2 + 3u_3 \geq 7 \\ x_3 \geq 0 & \leftrightarrow & 2u_1 \quad + 5u_3 \leq 2 \\ x_4 \text{ frs} & \leftrightarrow & 6u_1 + u_2 - u_3 = 4 \\ (\min)\ f = 10x_1 + 7_2 + 2x_3 + 4x_4 & & (\max) g = 12u_1 + 6u_2 + 8u_3 \end{array}\right\}(Q)$$

Din construcţia prezentată rezultă următoarea concluzie importantă:

„Dualul programului dual este programul primal”.

Referitor la acest fapt, vom spune că dualitatea liniară are proprietatea de **simetrie**. Din această cauză, fiind dat un program liniar (P) şi dualul său (Q), vom spune că **(P;Q)** este un **cuplu de programe liniare în dualitate,** fără a mai specifica în mod expres care problemă este primala şi care duala.

2 Invarianţa la dualitate a formei canonice

Duala unei forme canonice de maximizare (minimizare) este o formă canonică de minimizare (maximizare).

Afirmaţia rezultă din schema:

$$(P)\left\{\begin{array}{lcl} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \cdots, m & \leftrightarrow & u_i \geq 0 \quad i = 1, \cdots, m \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, \cdots, n & \leftrightarrow & \sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij} \geq c_j \quad j = 1, \cdots, n \\ (\max)\ f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & (\min)\ g = \sum_{i=1}^{m} u_i b_i \end{array}\right\}(Q)$$

Formă canonică de maximizare   Formă canonică de minimizare

Matricial, un cuplu de probleme în dualitate, în formă canonică se scrie:

$$(P)\begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0 \\ (\max)\, f = cx \end{cases} \qquad\qquad (Q)\begin{cases} uA \ge c \\ u \ge 0 \\ (\min)\, g = ub \end{cases}$$

cu convenţiile notaţionale:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \;;\quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \text{ coloană} \;;\quad c = \begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \text{ linie}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ coloană} \;;\quad u = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_m \end{bmatrix} \text{ linie}$$

Exemplul 2 Programele liniare:

$$(P_1)\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 150 \\ \quad\quad\;\; x_2 \le \;\; 20 \\ 8x_1 + 5x_2 \le 300 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \\ (\max)\, f = 50x_1 + 40x_2 \end{cases} \qquad\qquad (P_2)\begin{cases} 3u_1 \qquad\quad 8u_3 \ge 50 \\ 5u_1 + u_2 + 5u_3 \ge 40 \\ u_1 \ge 0, u_2 \ge 0, u_3 \ge 0 \\ (\min)\, g = 150u_1 + 20u_2 + 300u_3 \end{cases}$$

în care (P_1) este modelul firmei de calculatoare din introducere, iar (P_2) este dualul său constituie un cuplu de programe în dualitate , în formă canonică.

Observaţie : **forma standard nu se conservă prin trecere la programul dual**. Afirmaţia rezultă din schema:

$$(P)\left\{\begin{array}{llcll} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i & i = 1,\cdots,m & \leftrightarrow & u_i \text{ **frs**} & i = 1,\cdots,m \\ x_j \ge 0 & j = 1,\cdots,n & \leftrightarrow & \sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij} \ge c_j & j = 1,\cdots,n \\ (\max)\, f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & (\min)\, g = \sum_{i=1}^{m} u_i b_i & \end{array}\right\}(Q)$$

formă standard de maximizare — programul dual nu este în formă standard!

Matricial avem

Programul în formă standard de maximizare $(P)\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ (\max) f = cx \end{cases}$ are dualul $(Q)\begin{cases} uA \geq c \\ u\ \textbf{frs} \\ (\min) g = ub \end{cases}$

Analog, programul în formă standard de minimizare $(P)\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ (\min) f = cx \end{cases}$ are dualul $(Q)\begin{cases} uA \leq c \\ u\ \textbf{frs} \\ (\max) g = ub \end{cases}$.

Important de reţinut : **operaţiile prin care un program liniar este adus la o formă canonică (de maximizare sau de minimizare) nu alterează construcţia programului dual. Acesta este motivul pentru care forma canonică constituie cadrul natural de prezentare a teoriei dualităţii liniare.**

Exemplul 3 Pentru ilustrare, să considerăm programul liniar:

$$(P)\begin{cases} (\max) f = x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \quad 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = \ \ 30 \\ \quad 2x_1 + \ \ x_2 + 5x_3 \geq \ \ 50 \\ \quad -x_1 + 6x_2 + 9x_3 \leq 200 \\ x_1 \geq 0 \,,\, x_2 \leq 0 \,,\, x_3 \ \text{frs} \end{cases}$$

al cărui dual este programul:

$$(Q)\begin{cases} (\min) g = 30u_1 + 50u_2 + 200u_3 \\ \quad 4u_1 + 2u_2 - \ u_3 \geq \ \ 1 \\ \quad -3u_1 + \ \ u_2 + 6u_3 \leq \ \ 2 \\ \quad 2u_1 + 5u_2 + 9u_3 = -1 \\ u_1 \ \text{frs} \,,\, u_2 \leq 0 \,,\, u_3 \geq 0 \end{cases}$$

Vom transforma acum (P) într-un program echivalent (P′), în formă canonică de minimizare, al cărui dual (Q′) vom arăta că este echivalent cu (Q). Pentru aceasta:

- înlocuim funcţia obiectiv $f = x_1 + 2x_2 - x_3$ cu funcţia opusă $f' = -f = -x_1 - 2x_2 + x_3$ pe care o vom minimiza;
- înlocuim egalitatea $4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 30$ cu inegalităţile de sens contrar:

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq 30 \Leftrightarrow -4x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geq -30 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geq 30 \end{cases}$$

- înlocuim inegalitatea $-x_1 + 6x_2 + 9x_3 \leq 200$ cu inegalitatea de sens contrar:

$$x_1 - 6x_2 - 9x_3 \geq -200$$

- înlocuim $x_2 = -x_2'$ cu $x_2' \geq 0$ şi $x_3 = x_3^+ - x_3^-$ cu $x_3^+ \geq 0, x_3^- \geq 0$

Mai jos este dat programul (P′) împreună cu dualul său (Q′)

$$(P')\left\{\begin{array}{lcc} (\min)\ f' = -x_1 + 2x_2' + x_3^+ - x_3^- & & (\max)\ g' = -30u_1^+ + 30u_1^- + 50u_2' - 200u_3 \\ -4x_1 - 3x_2' - 2x_3^+ + 2x_3^- \geq -30 & \leftrightarrow & u_1^+ \geq 0 \\ 4x_1 + 3x_2' + 2x_3^+ - 2x_3^- \geq 30 & \leftrightarrow & u_1^- \geq 0 \\ 2x_1 - x_2' + 5x_3^+ - 5x_3^- \geq 50 & \leftrightarrow & u_2' \geq 0 \\ x_1 + 6x_2' - 9x_3^+ + 9x_3^- \leq -200 & \leftrightarrow & u_3 \geq 0 \\ x_1 \geq 0 & \leftrightarrow & -4u_1^+ + 4u_1^- + 2u_2' + u_3 \leq -1 \\ x_2' \geq 0 & \leftrightarrow & -3u_1^+ + 3u_1^- - u_2' + 6u_3 \leq 2 \\ x_3^+ \geq 0 & \leftrightarrow & -2u_1^+ + 2u_1^- + 5u_2' - 9u_3 \leq 1 \\ x_3^- \geq 0 & \leftrightarrow & 2u_1^+ - 2u_1^- - 5u_2' + 9u_3 \leq -1 \end{array}\right\}(Q')$$

Efectuând substituţiile:

$$u_1^+ - u_1^- = u_1 \Rightarrow u_1 \text{ frs}$$
$$u_2' = -u_2 \Rightarrow u_2 \leq 0$$

programul (Q′) se rescrie:

$$(Q')\left\{\begin{array}{l} (\max)\ g' = -30u_1 - 50u_2 - 200u_3 \\ -4u_1 - 2u_2 + u_3 \leq -1 \\ -3u_1 + u_2 + 6u_3 \leq 2 \\ -2u_1 - 5u_2 - 9u_3 \leq 1 \\ 2u_1 + 5u_2 + 9u_3 \leq -1 \\ u_1 \text{ frs },\ u_2 \leq 0, u_3 \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow (Q)\left\{\begin{array}{l} (\min)\ g = 30u_1 + 50u_2 + 200u_3 \\ 4u_1 + 2u_2 - u_3 \geq 1 \\ -3u_1 + u_2 + 6u_3 \leq 2 \\ 2u_1 + 5u_2 + 9u_3 = -1 \\ u_1 \text{ frs },\ u_2 \leq 0,\ u_3 \geq 0 \end{array}\right.$$

3 Principalele rezultate ale dualităţii liniare

Teorema 1 Fie **(P)** un program liniar în care funcţia obiectiv f se **maximizează** şi fie **(Q)** dualul său, în care funcţia obiectiv g se **minimizează**. Presupunem că programele (P) şi (Q) sunt **compatibile** şi fie $\overline{x}$ respectiv $\overline{u}$ o soluţie **admisibilă oarecare** a programului (P), respectiv a programului (Q). Atunci:

i) $f(\overline{x}) \le g(\overline{u})$

ii) Dacă $f(\overline{x}) = g(\overline{u})$ atunci $\overline{x}$ şi $\overline{u}$ sunt **soluţii optime** ale programelor (P) respectiv (Q).

Demonstraţie.i) Putem presupune că (P) şi (Q) sunt forme canonice:

$$(P)\begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0 \\ (\max) f = cx \end{cases} \qquad\qquad (Q)\begin{cases} uA \ge c \\ u \ge 0 \\ (\min) g = ub \end{cases}$$

Prin ipoteză: $\begin{cases} A\overline{x} \le b \\ \overline{x} \ge 0 \end{cases}$ şi $\begin{cases} \overline{u}A \ge c \\ \overline{u} \ge 0 \end{cases}$

Atunci: $\begin{cases} A\overline{x} \le b \\ \overline{u} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \overline{u}A\overline{x} \le \overline{u}b$; $\begin{cases} \overline{u}A \ge c \\ \overline{x} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \overline{u}A\overline{x} \ge c\overline{x}$

Rezultă: $c\overline{x} \le \overline{u}A\overline{x} \le \overline{u}b$ şi deci: $f(\overline{x}) \le g(\overline{u})$.

ii) Dacă $c\overline{x} = \overline{u}b$ şi $\overline{x}$ nu ar fi soluţia optimă a programului (P) ar exista o soluţie admisibilă $\overline{x}'$ a lui (P) mai bună decât $\overline{x}$ în sensul că $c\overline{x}' > c\overline{x}$. Ar rezulta că $c\overline{x}' > \overline{u}b \Leftrightarrow f(\overline{x}') > g(\overline{u})$ contrar celor demonstrate mai înainte.

Observaţie: Din teorema 1 rezultă în particular că dacă (P) şi (Q) sunt programe compatibile atunci ambele au optim finit şi $(\max) f \le (\min) g$. În fapt, avem chiar egalitate, aşa cum arată următoarea:

Teorema 2 (teorema fundamentală a dualităţii) Orice cuplu de programe liniare în dualitate se găseşte în una şi numai în una din următoarele trei situaţii:

I) Ambele programe sunt compatibile. **Atunci ambele programe au soluţii optime şi valorile optime ale funcţiilor obiectiv coincid.**

II) Numai unul dintre programe este compatibil celălalt fiind incompatibil. **Atunci programul compatibil are optim infinit.**

III) **Ambele programe sunt incompatibile**.

Teorema 3 Fie (P) un program liniar în formă standard cu optim finit, dat împreună cu dualul său (Q)

$$(P)\begin{cases} Ax = b \\ x \ge 0 \\ (\max) f = cx \end{cases} \qquad (Q)\begin{cases} uA \ge c \\ u \ \textbf{frs} \\ (\min) g = ub \end{cases}$$

şi fie **B** o bază admisibilă a lui (P) a cărei soluţie asociată $x^* = x(B)$ este optimă. Atunci vectorul:

$$u^* = c^B B^{-1}$$

este o **soluţie optimă a programului dual (Q).**

Demonstraţie: Teorema 3 va fi o consecinţă a teoremei 1 dacă demonstrăm că:

i) u^* este o soluţie a problemei (Q) adică $u^* A \ge c$;
ii) $f(x^*) = g(u^*)$

În notaţiile introduse în secţiunile precedente avem:

i) $u^* A - c = u^*[B, S] - [c^B, c^S] = [u^* B - c^B, u^* S - c^S] = [c^B - c^B, c^B B^{-1} S - c^S] = [0, \bar{c}] \ge 0$ deoarece B este o bază optimă;
ii) $f(x^*) = cx^* = c^B B^{-1} b = u^* b = g(u^*)$

Soluţia optimă $u^* = c^B B^{-1}$ a programului dual (Q) se poate citi din tabelul simplex optim al programului primal (P) fiind formată din mărimile:

$$z_j = c^B \overline{A}^j = \sum_{i \in I} c_i \overline{a}_{ij}$$

corespunzătoare coloanelor A^j care au format baza unitară de start (după cum se ştie deja, coloanele $\overline{A}^j$ corespunzătoare coloanelor A^j din baza unitară de start formează inversa B^{-1} a bazei optime.

În continuare fie un cuplu (P;Q) de programe liniare în dualitate. Se ştie că fiecărei variabile din (P) sau din (Q) îi corespunde o restricţie în cealaltă problemă.

DEFINITIE. Ecartul unei restricţii este diferenţa dintre cei doi membri ai săi.

Evident, dacă restricţia este o egalitate ecartul său este zero în orice soluţie a programului din care face parte restricţia.

Vom nota cu $\mathcal{S}$(P,Q) ansamblul relaţiilor de forma:

VARIABILĂ din (P) sau din (Q)	×	ECARTUL restricţiei asociate în duală	=	0

cu convenţia de a nu include în sistem relaţiile în care ecartul este identic zero. Relaţiile din sistemul $\mathcal{S}$(P,Q) se numesc **relaţii de complementaritate**.

Exemplul 4 Pentru cuplul de probleme în dualitate:

$$(P)\left\{\begin{array}{lcl} x_1 \quad\quad + 3x_3 \le 20 & \leftrightarrow & u_1 \ge 0 \\ 2x_1 + x_2 \quad\quad \ge 35 & \leftrightarrow & u_2 \le 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 30 & \leftrightarrow & u_3 \text{ frs} \\ x_1 \ge 0 & \leftrightarrow & u_1 + 2u_2 + 3u_3 \ge 8 \\ x_2 \ge 0 & \leftrightarrow & u_2 - u_3 \ge -6 \\ x_3 \ge 0 & \leftrightarrow & 3u_1 \quad + 2u_3 \ge 7 \\ (\max) f = 8x_1 - 6x_2 + 7x_3 & & (\min) g = 20u_1 + 35u_2 + 30u_3 \end{array}\right\}(Q)$$

sistemul relaţiilor de complementaritate este format din egalităţile:

$$\mathcal{S}(\mathrm{P,Q})\begin{cases} u_1(\ x_1 + \quad 3x_3 - 20) = 0 & (1) \\ u_2(2x_1 + \ x_2 \quad - 35) = 0 & (2) \\ x_1(\ u_1 + 2u_2 + 3u_3 - 8) = 0 & (3) \\ x_2(\quad u_2 - \ u_3 + 6) = 0 & (4) \\ x_3(3u_1 \quad + 2u_3 - 7) = 0 & (5) \end{cases}$$

Relaţia $u_3(3x_1 - x_2 + 2x_3 - 30) = 0$ a fost exclusă deoarece ecartul din paranteză este identic zero!

Exemplul 5 Pentru **cuplul de probleme în dualitate în formă canonică**:

$$(P)\begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0 \\ (\max) f = cx \end{cases} \qquad\qquad (Q)\begin{cases} uA \ge c \\ u \ge 0 \\ (\min) g = ub \end{cases}$$

sistemul $\mathcal{S}$(P,Q) are forma matricială:

$$\begin{cases} u(Ax - b) = 0 \\ (uA - c)x = 0 \end{cases}$$

Exemplul 6 Pentru cuplul:

$$(P)\begin{cases} Ax = b \\ x \ge 0 \\ (\max) f = cx \end{cases} \qquad\qquad (Q)\begin{cases} uA \ge c \\ u \ \mathbf{frs} \\ (\min) g = ub \end{cases}$$

în care (P) este o formă standard, sistemul $\mathcal{S}$(P,Q) se reduce la:

$$(uA-c)x=0$$

Cu aceste pregătiri putem enunţa:

Teorema 4 (Teorema ecarturilor complementare) Fie (P,Q) un cuplu de programe liniare în dualitate şi fie $\mathcal{S}$(P,Q) sistemul relaţiilor de complementaritate. Atunci, un cuplu de soluţii **admisibile** $(\overline{x},\overline{u})$ ale programelor (P) respectiv (Q) este un cuplu de soluţii **optime** ale celor două programe, dacă şi numai dacă $\overline{x}$ şi $\overline{u}$ verifică sistemul $\mathcal{S}$(P,Q).

Demonstraţie: Fără a restrânge generalitatea putem presupune că (P) şi (Q) sunt forme canonice:

$$(P)\begin{cases} Ax\le b\\ x\ge 0\\ (\max) f=cx\end{cases} \qquad\qquad (Q)\begin{cases} uA\ge c\\ u\ge 0\\ (\min) g=ub\end{cases}$$

(aceasta deoarece, orice program liniar poate fi transformat într-o formă canonică echivalentă). Sistemul $\mathcal{S}$(P,Q) se compune din relaţiile matriciale:

$$\begin{cases} u(Ax-b)=0\\ (uA-c)x=0\end{cases}$$

$\Rightarrow$ Presupunem că $\overline{x}$ şi $\overline{u}$ sunt soluţii optime ale programelor (P) respectiv (Q). Probăm că $\overline{x}$ şi $\overline{u}$ satisfac sistemul $\mathcal{S}$(P,Q).
Fie $\alpha=\overline{u}(b-A\overline{x})$ şi $\beta=(\overline{u}A-c)\overline{x}$ .Evident $\alpha\ge 0,\beta\ge 0$ deoarece $\overline{x}$ şi $\overline{u}$ sunt soluţii admisibile ale celor două programe. Atunci:

$$\alpha+\beta=\overline{u}b-\overline{u}A\overline{x}+\overline{u}A\overline{x}-c\overline{x}=\overline{u}b-c\overline{x}=0$$

deoarece, în baza teoremei fundamentale a dualităţii, optimele $c\overline{x}$ şi $\overline{u}b$ ale celor două programe coincid!
Din $\alpha+\beta=0$ şi $\alpha\ge 0,\beta\ge 0$ rezultă $\alpha=\beta=0$ ceeace înseamnă că $\overline{x}$ şi $\overline{u}$ satisfac $\mathcal{S}$(P,Q).

$\Leftarrow$ Presupunem că $\overline{x}$ şi $\overline{u}$ sunt soluţii admisibile ale programelor (P) respectiv (Q) care satisfac sistemul $\mathcal{S}$(P,Q). Din $\overline{u}(b-A\overline{x})=0$ şi $(\overline{u}A-c)\overline{x}=0$ rezultă $c\overline{x}=\overline{u}A\overline{x}=\overline{u}b$ şi în baza teoremei 1 soluţiile $\overline{x}$ şi $\overline{u}$ sunt într-adevăr optime.

Foarte important: teorema ecarturilor complementare ne permite să determinăm soluţia optimă a unui program liniar dacă ştim soluţia optimă a dualului său. Altfel spus, **rezolvarea unui program liniar este echivalentă cu rezolvarea dualului său.**

Exemplul 7 Considerăm cuplul de programe în dualitate din exemplul 3. Vom determina soluţia optimă a programului (P) ştiind că dualul (Q) are soluţia optimă $u_1^* = 0$, $u_2^* = -2$, $u_3^* = 4$ .Introducem u^* în relaţiile (1) – (5) din sistemul $\mathcal{S}$(P,Q):

(1) → nu dă nimic (în sensul că paranteza poate avea orice valoare!)
(2) → **la optim** $2x_1 + x_2 - 35 = 0$ deoarece $u_2^* = -2 \neq 0$
(3) → nu dă nimic;
(4) → nu dă nimic;
(5) → **la optim** $x_3 = 0$ deoarece $3u_1^* + 2u_3^* - 7 = 1 \neq 0$

Prin urmare, soluţia optimă a programului (P) trebuie să verifice relaţiile:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 35 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

rezultate din analiza întreprinsă, precum şi restricţia egalitate din (P):

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 30$$

Rezolvând sistemul format se găseşte $x_1^* = 13$, $x_2^* = 9$, $x_3^* = 0$.

4 Interpretarea economică a problemei duale

Să considerăm un cuplu de programe liniare în dualitate în formă canonică:

$$(P)\left\{\begin{array}{lll} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad i = 1,\cdots,m & \leftrightarrow & u_i \ge 0 \\ x_j \ge 0 \qquad j = 1,\cdots,n & \leftrightarrow & \sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij} \ge c_j \\ (\max) f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & (\min) g = \sum_{i=1}^{m} u_i b_i \end{array}\right\}(Q)$$

Presupunem că (P) modelează activitatea unui sistem de producţie în care *m* **resurse** $R_1, R_2, \cdots, R_m$ (forţă de muncă, capacităţi de producţie, materii prime, servicii, bani etc) disponibile în cantităţile limitate $b_1, b_2, \cdots, b_m$ sunt transformate în *n* **bunuri** $G_1, G_2, \cdots, G_n$. Sistemul realizează un **venit** din vânzarea bunurilor $G_1, G_2, \cdots, G_n$ la **preţurile** $c_1, c_2, \cdots, c_n$ .Transformarea resurselor R_i în bunurile G_j este descrisă de **matricea consumurilor unitare** $\lfloor a_{ij} \rfloor$ $i = 1,\cdots,m \quad j = 1,\cdots,n$.

Programul (P) formalizează cerinţa de a determina în ce cantităţi vor fi produse bunurile din resursele existente astfel încât sistemul să obţină cel mai mare venit.

În acest context se pune problema determinării unui **conţinut economic coerent** pentru problema duală (Q).
Fie:

$f^* \equiv$ venitul maxim posibil de obţinut din resursele date;

$x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^* \equiv$ cantităţile de bunuri care realizează venitul maxim f^*.

$x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$ este deci **soluţia optimă** a programului (P) iar f^* este **optimul** acestui program. Avem relaţia:

$$f^* = c_1 x_1^* + c_2 x_2^* + \cdots + c_n x_n^* \tag{1}$$

Deoarece venitul maxim f^* rezultă **în exclusivitate** din transformarea resurselor în bunuri (se presupune că tot ceeace se produce se şi vinde!) rezultă **în mod logic** că fiecare resursă are un anumit **aport (contribuţie)** la formarea lui f^*. În evaluarea acestor contribuţii vom folosi aceleaşi **ipoteze de liniaritate** care ne-au condus la programul liniar (P) şi anume:

- aportul unei resurse la formarea venitului maxim poate fi exprimat prin **orice număr real nenegativ**;
- acest aport este **direct proporţional** cu cantitatea de resursă disponibilă;
- aporturile diferitelor resurse sunt independente între ele astfel că venitul maxim este **suma** aporturilor individuale.

În acest context, notăm cu $u_1^*, u_2^*, \cdots, u_m^*$ aportul a câte o unitate din resursele $R_1, R_2, \cdots, R_m$ la formarea venitului maxim f^*. Ipotezele de liniaritate sus amintite implică:

$$u_1^* \geq 0 \,,\, u_2^* \geq 0 \,, \cdots, u_m^* \geq 0 \tag{2}$$

$$f^* = u_1^* b_1 + u_2^* b_2 + \cdots + u_m^* b_m \tag{3}$$

La producerea unei unităţi din bunul G_j se folosesc cantităţile $a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj}$ din resursele $R_1, R_2, \cdots, R_m$. Aportul acestor cantităţi la venitul f^* este dat de expresia: $u_1^* a_{1j} + u_2^* a_{2j} + \cdots + u_m^* a_{mj}$. Pe de altă parte, o dată produsă şi vândută, o unitate din bunul G_j contribuie la f^* cu preţul său c_j. Deoarece f^* rezultă numai din transformarea resurselor în bunuri şi vânzarea acestora este logic ca

$$u_1^* a_{1j} + u_2^* a_{2j} + \cdots + u_m^* a_{mj} \geq c_j \tag{4}$$

Relaţiile (1) – (4) coroborate cu teorema fundamentală a dualităţii arată că aporturile unitare $u_1^*, u_2^*, \cdots, u_m^*$ ale resurselor $R_1, R_2, \cdots, R_m$ la formarea venitului maxim f^* constituie soluţia optimă a programului dual (Q).

Deoarece aportul unitar al unei resurse este exprimat în unităţi monetare/unitatea de resursă urmează că acest aport este practic un **preţ** ataşat resursei respective. Totuşi, acest aport unitar nu reflectă valoarea intrinsecă a resursei respective şi ca urmare nu trebuie identificat cu preţul real al resursei. El cuantifică **importanţa** resursei în contextul dat, context caracterizat prin:

- resurse disponibile în cantităţi limitate;
- „tehnologie liniară" de transformare a resurselor în bunuri;
- preţuri determinate pentru bunurile produse şi vândute.

Prin urmare, dacă în aceste elemente intervin schimbări este posibil ca şi aporturile resurselor să se modifice, măcar că „fizic", resursele au rămas aceleaşi. Iată motivul pentru care în literatura de specialitate, aceste aporturi unitare se numesc **preţuri umbră** sau **evaluări obiectiv determinate**.
Relaţia (3) arată că venitul maxim f^* depinde **liniar** – în anumite limite totuşi – de cantităţile disponibile $b_1, b_2, \cdots, b_m$ de resurse prin intermediul aporturilor unitare $u_1^*, u_2^*, \cdots, u_m^*$**.** Atunci relaţia:

$$\frac{\partial f}{\partial b_i} = u_i^* \quad i = 1, \cdots, m$$

arată că o creştere cu o unitate a disponibilului actual al resursei R_i implică o creştere a venitului maxim cu valoarea u_i^*.

Consideraţiile precedente se pot dezvolta şi în contexte mai generale. Să presupunem că într-o problemă de planificare a producţiei resursa R_i reprezintă o anumită categorie de forţă de muncă care trebuie utilizată **în întregime**. Restricţia care formalizează această cerinţă va fi o **egalitate** şi ca urmare, variabila duală asociată u_i va putea lua **orice valoare reală**. Dacă valoarea optimă u_i^* este **negativă** aceasta va însemna că cerinţa utilizării integrale a resursei R_i este **„excesivă",** o eventuală creştere a disponibilului ei având efect negativ asupra obiectivului maximizării venitului. Din contră, o **relaxare** a cerinţei, adică admiterea posibilităţii folosirii **parţiale** a resursei în cauză, poate duce la rezultate mai bune!

Funcţionarea **optimală** a sistemului de producţie modelat de programul liniar (P) poate fi descrisă alternativ prin următoarea situaţie de **„echilibru"**.
Presupunem date următoarele **„propuneri"**:

- o combinaţie $x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*$ de cantităţi de bunuri ce ar putea fi produse din disponibilele $b_1, b_2, \cdots, b_m$ de resurse, aceasta însemnând:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \le b_i & i = 1, \cdots, m \\ x_j^* \ge 0 & j = 1, \cdots, n \end{cases}$$

- un sistem de evaluări unitare $u_1^*, u_2^*, \cdots, u_m^*$ ale resurselor cu proprietatea că preţul fiecărui bun este acoperit de evaluarea resurselor încorporate într-o unitate din bunul respectiv:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} u_i^* a_{ij} \geq c_j & j = 1, \cdots, n \\ u_i^* \geq 0 & i = 1, \cdots, m \end{cases}$$

Presupunem că au loc implicaţiile:

I) dacă evaluarea unitară a unei resurse R_i este **pozitivă** atunci resursa este **integral** utilizată în producerea bunurilor, în cantităţile specificate:

$$u_i^* > 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i$$

II) dacă resursa R_i este **excedentară**, în sensul că disponibilul depăşeşte necesarul pentru producerea cantităţilor specificate de bunuri atunci evaluarea resursei este **zero**, altfel spus, resursa este „**gratuită**”:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < b_i \quad \Rightarrow \quad u_i^* = 0$$

III) dacă bunul G_j se produce **efectiv** atunci evaluarea resurselor încorporate într-o unitate este egală cu preţul bunului:

$$x_j^* > 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} u_i^* a_{ij} = c_j$$

IV) dacă evaluarea resurselor încorporate într-o unitate din bunul G_j depăşeşte preţul bunului atunci G_j este propus a **nu se produce**:

$$\sum_{i=1}^{m} u_i^* a_{ij} > c_j \quad \Rightarrow \quad x_j^* = 0$$

Este evidentă îndeplinirea relaţiilor de complementaritate din teorema ecarturilor complementare:

$$u_i^* (b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*) = 0 \quad i = 1, \cdots, m$$

$$(\sum_{i=1}^{m} u_i^* a_{ij} - c_j) x_j^* = 0 \quad j = 1, \cdots, n$$

care atestă că $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$ constituie combinaţia în care bunurile ar trebui produse pentru ca venitul să fie maxim.

6 Probleme propuse

1. Scrieţi dualele următoarelor programe liniare

a) $\begin{cases} (\max) f = 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 10x_4 + 8x_5 \\ -x_1 \quad + 2x_3 + 3x_4 - x_5 \geq 10 \\ 4x_1 + 7x_2 - 3x_3 + x_4 + 5x_5 \leq 30 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + 4x_5 = 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ ; } x_3, x_4 \geq 0 \text{ ; } x_5 \text{ frs} \end{cases}$ b) $\begin{cases} (\max) f = 4x_1 + 5x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 15 \\ x_1 + 7x_2 \leq 21 \\ 3x_1 - x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} (\min) f = x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$

2. Se consideră un program liniar (P) împreună cu dualul său (Q). Fie u_1 variabila din (Q) asociată primei restricţii din (P). Dacă în soluţia optimă a dualului(Q), u_1 are o valoare **negativă** care din următoarele afirmaţii – referitoare la prima restricţie din (P) – este **întotdeauna** adevărată?

a) este o inegalitate neconcordantă;
b) este o inegalitate concordantă;
c) este o egalitate;
d) este o egalitate sau o inegalitate concordantă;
e) este o egalitate sau o inegalitate neconcordantă.

3. Să se scrie dualele următoarelor programe liniare:

a) $\begin{cases} (\min) f = 5x_1 - 6x_2 \\ -x_1 \geq 3 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (\max) f = 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} (\min) f = x_1 + x_2 \\ 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ -2x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 + 4x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$

Utilizând metoda grafică sau algoritmul simplex să se rezolve cuplurile de probleme obţinute. Să se compare valorile funcţiilor obiectiv în soluţiile optime atunci când acestea există.

4. Se dă programul liniar:

$$(P) \begin{cases} (\min) g = 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 4 \\ x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Se notează cu V numărul vârfurilor mulţimii soluţiilor admisibile ale programului dual (Q) şi cu u^* soluţia optimă a lui (Q). Atunci:

a) $V = 4$, $u^* = \left(\frac{11}{5}, \frac{18}{5}\right)$; b) $V = 4$, $u^* = \left(\frac{9}{8}, \frac{3}{8}\right)$; c) $V = 3$, $u^* = \left(\frac{11}{5}, \frac{18}{5}\right)$; d) $V = 3$, $u^* = \left(\frac{9}{8}, \frac{3}{8}\right)$;

e) $V = 5$, $u^* = \left(\frac{9}{8}, \frac{3}{8}\right)$.

5. a) Ce particularitate prezintă un program liniar în al cărui dual variabilele nu au restricţie de semn?
b) Ce particularitate are un program liniar dacă programul dual asociat este în forma standard?
c) Ce se poate spune despre un program liniar al cărui dual are optim infinit?
d) Ce se poate spune despre un program liniar al cărui dual este un program incompatibil?
e) Ce se poate spune despre un program liniar al cărui dual are optim finit?

6. a) Scrieţi dualul (Q) asociat programului liniar:

$$(P)\begin{cases} (\max)\ f = x_1 + x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ -2x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

b) Se dau următoarele cupluri de soluţii **admisibile** pentru cuplul de programe în dualitate (P,Q):

$$\begin{cases} x = (3\,,\,\tfrac{3}{2}) \\ u = (\tfrac{1}{4}\,,\,0\,,\,\tfrac{1}{4}) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = (\tfrac{7}{3}\,,\,\tfrac{5}{3}) \\ u = (1\,,1\,,1) \end{cases}$$

Care dintre ele este un cuplu de soluţii optime?

7. Scrieţi dualul (Q) asociat programului liniar:

$$(P)\begin{cases} (\min)\ f = 2x_1 + x_2 \\ 3x_1 + x_2 \ge 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ x_1 + 2x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Care dintre următoarele două cupluri de vectori este un cuplu de soluţii optime ale celor două programe?

$$\begin{cases} x = (\frac{4}{5}, \frac{4}{5}) \\ u = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = (\frac{3}{5}, \frac{6}{5}) \\ u = (\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 0) \end{cases}$$

8. Se consideră programul liniar:

$$(P)\begin{cases} (\max) f = 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 \le 30 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 \le 22 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

împreună cu dualul său (Q) în care variabilele u_1, u_2 sunt asociate primei respectiv celei de a doua restricţii din (P). Fie $x^\bullet = (x_1^\bullet, x_2^\bullet, x_3^\bullet)$ şi $u^\bullet = (u_1^\bullet, u_2^\bullet)$ soluţiile optime ale celor două programe.

Dacă $x_2^\bullet > 0$ şi $u_1^\bullet = 3$ atunci valoarea maximă a funcţiei obiectiv *f* este:

a) 216; b) 76 ; c) 164 ; d) 52 ; e) 112

9. Se consideră programul liniar:

$$(P)\begin{cases} (\max) f = 50x_1 + 40x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \le 150 \\ x_2 \le 20 \\ 8x_1 + 5x_2 \le 300 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Fie u_1, u_2, u_3 variabilele programului dual.Ştiind că în soluţia optimă a programului dual avem $u_1>0$ şi $u_3>0$, valoarea maximă a funcţiei obiectiv din (P) este:

a) 1980 ; b) 1890 ; c) 2120 ; d) 2080 ; e) 2020

10. Se consideră următoarea problemă de maximizare a venitului unei firme cu trei activităţi care utilizează trei resurse:

$$\begin{cases} (\max) f = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 100 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 100 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 120 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1,2,3 \end{cases}$$

Se ştie că baza optimă B este formată din coloanele A^3 , A^1 , A^2 ale matricii tehnologice şi că:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} \end{bmatrix}$$

Dacă disponibilul actual al resursei R_3 – care trebuie consumată în întregime - **scade** cu o unitate atunci venitul maxim al firmei:

a) creşte cu $\frac{1}{10}$; b) creşte cu $\frac{1}{5}$; c) scade cu $\frac{1}{5}$; d) nu se modifică ; e) scade cu $\frac{1}{10}$.