BAREM DE ACORDARE A NOTELOR

<u>Problema 1</u>

- prima iterație ....0,4 p
- doua iterație ....0,4 p
- vectorul coordonatelor ....0,2 p

<u>Problema 2</u>

- scrierea matricei funcționalei ....0,2 p
- calcularea minorilor Δ_1, Δ_2, Δ_3 ....0,3 p
- scrierea formei canonice ....0,3 p
- natura funcționalei ....0,2 p

<u>Problema 3</u>

- condiția proiecția aparține subspațiului ....0,2 p
- formarea sistemului din condițiile de ortogonalitate pe o bază ....0,3 p
- rezolvarea sistemului ....0,3 p
- scrierea vectorului de proiecție ....0,2 p

<u>Problema 4</u>

- calcularea valorilor proprii ale matricei sistemului ....0,2 p
- determinarea matricei Jordan ....0,2 p
- determinarea matricei de trecere ....0,2 p
- rezolvarea SDEL1 în forma Jordan ....0,2 p
- determinarea soluției generale a SEDL1 dat ....0,2 p

<u>Problema 5</u>

- formarea ecuației cu necunoscuta <x,y> ....0,5 p
- rezolvarea ecuației ....0,5 p

<u>Problema 6</u>

- definiția sumei directe ....0,2 p
- X_1, X_2 subspații ....0,2 p
- calcul sumă X_1, X_2 ....0,25 p
- calcul intersecție X_1, X_2 ....0,25 p
- justificarea egalității cerute ....0,1 p

<u>Problema 7</u>

- definiția ....0,5 p
- demonstrația relației ....0,5 p

<u>Problema 8</u>

- determinarea matricei funcționalei în reperul canonic ....0,2 p
- determinarea matricei de trecere la noul reper ....0,2 p
- determinarea matricei funcționalei în noul reper ....0,4 p
- forma algebrică în noul reper ....0,2 p

<u>Problema 9</u>

- definiția cerută de punctul a) ....0,2 p
- relațiile verificate de vectorii proprii ....0,2 p
- relația verificată de operatorii adjuncți/autoadjuncți/ortogonali ....0,4 p
- finalizarea demonstrației ....0,2 p

Observații: 1. Rezolvări echivalente şi corecte primesc punctajul echivalent.
2. Pentru abordări parțiale sau calcule parțial corecte se acordă o parte din punctaj. Definițiile greşite sau incomplete nu beneficiază de punctaj parțial.
3. Punctajul maxim îl obține soluția corectă, completă şi justificată.

Varianta A

Problema 1

$E=\left(e_1=(1,0)^T, e_2=(0,1)^T\right)$ reper canonic.

reper	b_1	b_2	x
e_1	0	-1	3
e_2	2	1	-1
b_2	0	1	-3
e_2	2	0	2
b_2	0	1	-3
b_1	1	0	1

0,4 p

0,4 p

$B=(b_1,b_2)$ reper şi $x_B=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ 0,2 p

Problema 3

$B=\left(b_1=(2,1,0)^T, b_2=(1,0,1)^T\right)$ reper în subsp. X.

$\Pr_X(v)=\alpha b_1+\beta b_2\in X$. 0,2 p

0,3 p 0,3 p

$\begin{cases}\langle v-\Pr_X(v),b_1\rangle=0\\ \langle v-\Pr_X(v),b_2\rangle=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5\alpha+2\beta=4\\2\alpha+2\beta=0\end{cases},\ \begin{cases}\alpha=4/3\\ \beta=-4/3\end{cases}$

$\Pr_X(v)=\alpha b_1+\beta b_2=\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right)^T$. 0,2 p

Problema 5 $\langle 2x+y,3y-x\rangle=0$

$6\langle x,y\rangle-2\|x\|^2+3\|y\|^2-\langle y,x\rangle=0\Rightarrow\langle x,y\rangle=\frac{-1}{5}$

0,5 p 0,5 p

Problema 6

0,2 p

$X_1\oplus X_2=\{v\in V\mid \exists! x\in X_1, y\in X_2\ a.\hat{i}.\ v=x+y\}$.

$X_1=span(B_1)$, $X_2=span(B_2)$ subsp., iar 0,2 p

$B_1=\left(b_1=(1,0,-1)^T, b_2=(-1,2,2)^T\right)$ şi

$B_2=\left(b_3=(-3,-3,1)^T\right)$ repere în X_1 şi X_2.

$X_1+X_2=span(B_1\cup B_2)\overset{\det C=-1}{=}\mathbf{R}^3$ 0,25 p 0,1 p $X_1\oplus X_2=\mathbf{R}^3$

$\dim X_1+\dim X_2=\dim\mathbf{R}^3$ 0,25 p

Problema 9

a) $\langle U(x),y\rangle=\langle x,U^*(y)\rangle, \forall x,y\in V$. 0,2 p

b) $F(x)=\lambda x$, $F^*(x)=\mu x$, $x\neq 0$. 0,2 p

$\langle\lambda x,x\rangle=\langle x,\mu x\rangle\Rightarrow$ 0,4 p

$\Rightarrow(\lambda-\overline{\mu})\langle x,x\rangle=0\Rightarrow\lambda=\overline{\mu}$. 0,2 p

Problema 2

$V(x)=x_E^T A x_E$, $A=\begin{pmatrix}3&0&-2\\0&-1&1\\-2&1&0\end{pmatrix}$ 0,2 p

$\Delta_0=1,\Delta_1=3,\Delta_2=-3,\Delta_3=1$ 0,3 p

$V(x)=x_F^T A x_F=\sum_{k=1}^{3}\frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}y_k^2=\frac{1}{3}y_1^2-y_2^2-3y_3^2$

V este nedefinită. 0,3 p

0,2 p

Problema 4 $J=C^{-1}AC$, $\det(A-\lambda I_2)=0$

$A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&3\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}\lambda_1=2&1\\0&\lambda_2=2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$,

0,2 p+0,2 p 0,2 p

$\begin{cases}w_1'=2w_1+w_2\\w_2'=2w_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}w_1(x)=(c_2x+c_1)e^{2x}\\w_2(x)=c_2e^{2x}\end{cases}$ 0,2 p

$\begin{pmatrix}y(x)\\z(x)\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}w_1(x)\\w_2(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(c_2x+c_1)e^{2x}\\(c_2x+c_1+c_2)e^{2x}\end{pmatrix}$. 0,2 p

Problema 7 $\ker f=\{x\in X\mid f(x)=0_Y\}$ 0,5 p

$d+r=n$ (teorema dimensiunii)

$(d+r)^2=n^2=d^2+r^2\Rightarrow 2rd=0$, cu $d\neq 0$

Deci $r=0$. Avem $d=\dim\ker f$, $r=\dim\operatorname{Im} f$. 0,5 p

Problema 8 $V(x)=x_E^T A x_E$, $V(x)=x_G^T B x_G$,

0,2 p $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-2&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}$, $\det C=4\neq 0$

0,2 p

0,4 p

$B=C^TAC$, $B=\begin{pmatrix}3&1&-3\\1&3&3\\-3&3&1\end{pmatrix}$, $x_G=(y_1,y_2,y_3)^T$

$V(x)=3y_1^2+3y_2^2+y_3^2+2y_1y_2-6y_1y_3+6y_2y_3$. 0,2 p

Varianta B

Problema 1

$E=\left(e_1=(1,0)^T, e_2=(0,1)^T\right)$ reper canonic.

reper	b_1	b_2	x
e_1	0	2	-4
e_2	3	-1	5
b_2	0	1	-2
e_2	3	0	3
b_2	0	1	-2
b_1	1	0	1

0,4 p

0,4 p

$B=(b_1,b_2)$ reper şi $x_B=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ 0,2 p

Problema 3

$B=\left(b_1=(1,0,2)^T, b_2=(0,1,1)^T\right)$ reper în subsp. X.

$\Pr_X(v)=\alpha b_1+\beta b_2\in X$. 0,2 p

0,3 p 0,3 p

$$\begin{cases}\langle v-\Pr_X(v), b_1\rangle=0\\ \langle v-\Pr_X(v), b_2\rangle=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5\alpha+2\beta=-2\\ 2\alpha+2\beta=1\end{cases},\ \begin{cases}\alpha=-1\\ \beta=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

$\Pr_X(v)=\alpha b_1+\beta b_2=\left(-1,\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2}\right)^T$. 0,2 p

Problema 5 $\langle 2y-3x, x+4y\rangle=0$

$$2\langle y,x\rangle-3\|x\|^2+8\|y\|^2-12\langle x,y\rangle=0\Rightarrow\langle x,y\rangle=\frac{1}{2}$$

0,5 p 0,5 p

Problema 6

0,2 p

$X_1\oplus X_2=\{v\in V\mid \exists!\, x\in X_1, y\in X_2\ a.\hat{\imath}.\, v=x+y\}$.

$X_1=span(B_1)$, $X_2=span(B_2)$ subsp., iar 0,2 p

$B_1=\left(b_1=(2,-1,1)^T, b_2=(1,3,2)^T\right)$ şi

$B_2=\left(b_3=(1,1,1)^T\right)$ repere în X_1 şi X_2.

$X_1+X_2=span(B_1\cup B_2)\overset{\det C=-1}{=}\mathbf{R}^3$ 0,25 p 0,1 p $X_1\oplus X_2=\mathbf{R}^3$

$\dim X_1+\dim X_2=\dim\mathbf{R}^3$ 0,25 p

Problema 9

a) $\langle U(x),y\rangle=\langle x,U(y)\rangle, \forall x,y\in V$. 0,2 p

b) $F(x)=\lambda x$, $x\neq 0$, $F^*(y)=\mu y$, $y\neq 0$. 0,2 p

$\langle\lambda x,y\rangle=\langle x,\mu y\rangle\Rightarrow$ 0,4 p

$\Rightarrow(\lambda-\overline{\mu})\langle x,y\rangle=0\Rightarrow\langle x,y\rangle=0$. 0,2 p

Problema 2

$V(x)=x_E^T A x_E$, $A=\begin{pmatrix}-1&2&0\\2&0&-3\\0&-3&0\end{pmatrix}$ 0,2 p

$\Delta_0=1, \Delta_1=-1, \Delta_2=-4, \Delta_3=9$ 0,3 p

$V(x)=x_F^T A x_F=\sum\limits_{k=1}^{3}\dfrac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}y_k^2=-y_1^2+\dfrac{1}{4}y_2^2-\dfrac{4}{9}y_3^2$

V este nedefinită. 0,3 p

0,2 p

Problema 4 $J=C^{-1}AC$, $\det(A-\lambda I_2)=0$

$A=\begin{pmatrix}5&-1\\9&-1\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}\lambda_1=2&1\\0&\lambda_2=2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&0\\3&-1\end{pmatrix}$,

0,2 p+0,2 p 0,2 p

$$\begin{cases}w_1'=2w_1+w_2\\ w_2'=2w_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}w_1(x)=(c_2x+c_1)e^{2x}\\ w_2(x)=c_2e^{2x}\end{cases}$$ 0,2 p

$$\begin{pmatrix}y(x)\\z(x)\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}w_1(x)\\w_2(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(c_2x+c_1)e^{2x}\\(3c_2x+3c_1-c_2)e^{2x}\end{pmatrix}.$$ 0,2 p

Problema 7 $\operatorname{Im} f=\{y\in Y\mid \exists x\in X, f(x)=y\}$ 0,5 p

$d+r=n$ (teorema dimensiunii)

$(d+r)^2=n^2=d^2+r^2\Rightarrow 2rd=0$, cu $r\neq 0$

Deci $d=0$. Avem $d=\dim\ker f$, $r=\dim\operatorname{Im} f$. 0,5 p

Problema 8 $V(x)=x_E^T A x_E$, $V(x)=x_G^T B x_G$,

0,2 p $A=\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0&1&2\\-1&1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$, $\det C=-2\neq 0$

0,2 p

0,4 p

$B=C^TAC$, $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&-4\\0&-4&-10\end{pmatrix}$, $x_G=(y_1,y_2,y_3)^T$

$V(x)=2y_1^2-y_2^2-10y_3^2-8y_2y_3$. 0,2 p

Varianta C

Problema 1

$E=\left(e_1=(1,0)^T, e_2=(0,1)^T\right)$ reper canonic.

reper	b_1	b_2	x
e_1	0	3	-3
e_2	-4	2	10
b_2	0	1	-1
e_2	-4	0	12
b_2	0	1	-1
b_1	1	0	-3

0,4 p

0,4 p

$B=(b_1,b_2)$ reper şi $x_B=\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$ 0,2 p

Problema 2

$V(x)=x_E^T A x_E$, $A=\begin{pmatrix}5&0&1\\0&-1&0\\1&0&-3\end{pmatrix}$ 0,2 p

$\Delta_0=1, \Delta_1=5, \Delta_2=-5, \Delta_3=16$ 0,3 p

$V(x)=x_F^T A x_F=\sum_{k=1}^{3}\frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}y_k^2=\frac{1}{5}y_1^2-y_2^2-\frac{5}{16}y_3^2$

V este nedefinită. 0,3 p

0,2 p

Problema 3

$B=\left(b_1=(1,1,0)^T, b_2=(2,0,1)^T\right)$ reper în subsp. X.

$\Pr_X(v)=\alpha b_1+\beta b_2\in X$. 0,2 p

0,3 p 0,3 p

$\begin{cases}\langle v-\Pr_X(v), b_1\rangle=0\\ \langle v-\Pr_X(v), b_2\rangle=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\alpha+2\beta=0\\2\alpha+5\beta=-5\end{cases},\begin{cases}\alpha=5/3\\\beta=-5/3\end{cases}$

$\Pr_X(v)=\alpha b_1+\beta b_2=\left(-\frac{5}{3},\frac{5}{3},-\frac{5}{3}\right)^T$. 0,2 p

Problema 4 $J=C^{-1}AC$, $\det(A-\lambda I_2)=0$

$A=\begin{pmatrix}1&-1\\9&7\end{pmatrix}, J=\begin{pmatrix}\lambda_1=4&1\\0&\lambda_2=4\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&0\\-3&-1\end{pmatrix}$

0,2 p+0,2 p 0,2 p

$\begin{cases}w_1'=4w_1+w_2\\w_2'=4w_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}w_1(x)=(c_2x+c_1)e^{4x}\\w_2(x)=c_2e^{4x}\end{cases}$ 0,2 p

$\begin{pmatrix}y(x)\\z(x)\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}w_1(x)\\w_2(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(c_2x+c_1)e^{4x}\\(-3c_2x-3c_1-c_2)e^{4x}\end{pmatrix}$. 0,2 p

Problema 5 $\langle 3y-5x, 2x-4y\rangle=0$

$6\langle y,x\rangle-10\|x\|^2-12\|y\|^2+20\langle x,y\rangle=0\Rightarrow\langle x,y\rangle=\frac{11}{13}$

0,5 p 0,5 p

Problema 7

$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y), \forall\alpha,\beta,\forall x,y$ 0,5 p

$d+r=n$ (teorema dimensiunii)

$(d+r)^2=n^2=d^2+r^2\Rightarrow 2rd=0$, cu $d\neq 0\neq r$

Contradicţie. Avem $d=\dim\ker f$, $r=\dim\operatorname{Im} f$. 0,5 p

Problema 6

0,2 p

$X_1\oplus X_2=\{v\in V\mid \exists! x\in X_1, y\in X_2\ a.î. v=x+y\}$.

$X_1=span(B_1)$, $X_2=span(B_2)$ subsp., iar 0,2 p

$B_1=\left(b_1=(3,1,-2)^T, b_2=(-2,1,0)^T\right)$ şi

$B_2=\left(b_3=(3,-3,1)^T\right)$ repere în X_1 şi X_2.

$X_1+X_2=span(B_1\cup B_2)\overset{\det C=-1}{=}\mathbf{R}^3$ 0,25 p 0,1 p $\underset{X_1\oplus X_2=\mathbf{R}^3}{}$

$\dim X_1+\dim X_2=\dim\mathbf{R}^3$ 0,25 p

Problema 8 $V(x)=x_E^T A x_E$, $V(x)=x_G^T B x_G$,

0,2 p $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-2\\0&-2&-1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&1&0\\1&2&-1\end{pmatrix}$, $\det C=-7\neq 0$ 0,2 p

0,4 p

$B=C^TAC$, $B=\begin{pmatrix}6&-2&1\\-2&-10&4\\1&4&3\end{pmatrix}, x_G=(y_1,y_2,y_3)^T$

$V(x)=6y_1^2-10y_2^2+3y_3^2-4y_1y_2+2y_1y_3+8y_2y_3$. 0,2 p

Problema 9

a) $\langle U(x),U(y)\rangle=\langle x,y\rangle,\forall x,y\in V$. 0,2 p

b) $F(x)=\lambda x$, $x\neq 0$. 0,2 p

$\langle\lambda x,\lambda x\rangle=\langle x,x\rangle\Rightarrow$ 0,4 p

$\Rightarrow(\lambda\bar{\lambda}-1)\langle x,x\rangle=0\Rightarrow|\lambda|=1$. 0,2 p

Varianta D

Problema 1

$E=\left(e_1=(1,0)^T, e_2=(0,1)^T\right)$ reper canonic.

reper	b_1	b_2	x
e_1	0	4	8
e_2	-5	2	-1
b_2	0	1	2
e_2	-5	0	-5
b_2	0	1	2
b_1	1	0	1

0,4 p

0,4 p

$B=(b_1,b_2)$ reper şi $x_B=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 0,2 p

Problema 2

$V(x)=x_E^TAx_E$, $A=\begin{pmatrix}-3&-1&0\\-1&0&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}$ 0,2 p

$\Delta_0=1,\Delta_1=-3,\Delta_2=-1,\Delta_3=12$ 0,3 p

$V(x)=x_F^TAx_F=\sum_{k=1}^{3}\frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}y_k^2=-\frac{1}{3}y_1^2+3y_2^2-\frac{1}{12}y_3^2$

V este nedefinită. 0,3 p

0,2 p

Problema 3

$B=\left(b_1=(1,3,0)^T, b_2=(0,-1,1)^T\right)$ reper în subsp. X.

$\Pr_X(v)=\alpha b_1+\beta b_2\in X$. 0,2 p

$\begin{cases}\langle v-\Pr_X(v),b_1\rangle=0\\ \langle v-\Pr_X(v),b_2\rangle=0\end{cases}$ 0,3 p $\Leftrightarrow\begin{cases}10\alpha-3\beta=9\\-3\alpha+2\beta=-3\end{cases}$, $\begin{cases}\alpha=\frac{9}{11}\\ \beta=\frac{-3}{11}\end{cases}$ 0,3 p

$\Pr_X(v)=\alpha b_1+\beta b_2=\left(\frac{9}{11},\frac{30}{11},-\frac{3}{11}\right)^T$. 0,2 p

Problema 4

$J=C^{-1}AC$, $\det(A-\lambda I_2)=0$

$A=\begin{pmatrix}-1&-4\\1&3\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}\lambda_1=1&1\\0&\lambda_2=1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2&1\\1&0\end{pmatrix}$,

0,2 p+0,2 p 0,2 p

$\begin{cases}w_1'=w_1+w_2\\w_2'=w_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}w_1(x)=(c_2x+c_1)e^x\\w_2(x)=c_2e^x\end{cases}$ 0,2 p

$\begin{pmatrix}y(x)\\z(x)\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}w_1(x)\\w_2(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-2c_2x-2c_1+c_2)e^x\\(c_2x+c_1)e^x\end{pmatrix}$. 0,2 p

Problema 5

$\langle 5y-4x,3x-2y\rangle=0$

$15\langle y,x\rangle-10\|y\|^2-12\|x\|^2+8\langle x,y\rangle=0\Rightarrow\langle x,y\rangle=\frac{22}{23}$

0,5 p 0,5 p

Problema 6

$X_1\oplus X_2=\{v\in V\mid\exists! x\in X_1, y\in X_2\ a.\hat{\imath}.v=x+y\}$. 0,2 p

$X_1=span(B_1)$, $X_2=span(B_2)$ subsp., iar 0,2 p

$B_1=\left(b_1=(-1,2,3)^T, b_2=(3,-1,1)^T\right)$ şi

$B_2=\left(b_3=(1,-1,1)^T\right)$ repere în X_1 şi X_2.

$X_1+X_2=span(B_1\cup B_2)\overset{\det C=-10}{=}\mathbf{R}^3$ 0,25 p $\underset{X_1\oplus X_2=\mathbf{R}^3}{}$ 0,1 p

0,25 p

Problema 7

$f(0)=0$ şi t.dimensiunii 0,5 p

$d+r=n$ (teorema dimensiunii)

$(d+r)^2=n^2=d^2+r^2\Rightarrow 2rd=0$. Deci $d=0$

sau $r=0$. Avem $d=\dim\ker f$, $r=\dim\operatorname{Im} f$. 0,5 p

Problema 8

$V(x)=x_E^TAx_E$, $V(x)=x_G^TBx_G$,

0,2 p $A=\begin{pmatrix}-1&0&-2\\0&-2&0\\-2&0&2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2&1&-1\\-1&0&2\\0&-1&1\end{pmatrix}$, $\det C=4\neq0$

0,2 p

$B=C^TAC$, 0,4 p $B=\begin{pmatrix}-6&2&2\\2&5&-5\\2&-5&-3\end{pmatrix}$, $x_G=(y_1,y_2,y_3)^T$

$V(x)=-6y_1^2+5y_2^2-3y_3^2+4y_1y_2+4y_1y_3-10y_2y_3$ 0,2 p

.

Problema 9

a) $\langle U(x),U(y)\rangle=\langle x,y\rangle,\forall x,y\in V$. 0,2 p

b) $F(x)=\lambda x$, $F^*(x)=\lambda x$, $x\neq0$. 0,2 p

$\langle\lambda x,x\rangle=\langle x,\lambda x\rangle\Rightarrow$ 0,4 p

$\Rightarrow(\lambda-\bar{\lambda})\langle x,x\rangle=0\Rightarrow\lambda=\bar{\lambda}$. 0,2 p