CURS 12-13

Problema de transport. Formulare şi rezolvare

Cuprins

1 Tipuri speciale de programe liniare

Până acum problema programării liniare a fost studiată în cea mai generală formă. Prezenta secţiune se constituie ca o introducere în studiul unor cazuri particulare importante. Ca urmare, pentru rezolvarea acestor probleme, au fost elaborate **versiuni ale algoritmului simplex**, special concepute în vederea exploatării structurii lor particulare, versiuni care au condus la importante reduceri ale efortului de calcul.

Cea mai cunoscută problemă de programare liniară cu structură specială este problema de transport.Ea a fost formulată şi studiată, chiar mai înainte de apariţia algoritmului simplex, de către HITCHCOCK (1941), KOOPMANS (1942) în SUA şi independent de către TOLSTOI (1930) şi KANTOROVICI (1939) în Rusia.

2 Problema de transport. Enunţ şi model matematic

Un produs omogen este disponibil la **furnizorii** $F_1, F_2, \cdots, F_m$ în cantităţile $a_1, a_2, \cdots, a_m$ (> 0) şi solicitat (pentru consum sau prelucrare) de către **consumatorii** $C_1, C_2, \cdots, C_n$ în cantităţile $b_1, b_2, \cdots, b_n$ (> 0). Se cunoaşte **costul** c_{ij} **> 0 al transportării unei unităţi** de produs de la furnizorul F_i la consumatorul C_j pentru toţi $i = 1, \cdots, m$ şi $j = 1, \cdots, n$.

Se pune problema satisfacerii cererilor,în punctele de consum la **cel mai mic cost total de transport**.

În mod constant vom presupune că problema de transport astfel formulată este **echilibrată**, aceasta însemnând că:

$$\textbf{oferta totală} = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = \textbf{cererea totală} \qquad (1)$$

Din enunţ rezultă că orice furnizor poate aproviziona orice consumator, bineînţeles în limita disponibilului său. Prin urmare există $m \cdot n$ **rute** posibile $F_i \rightarrow C_j$ pentru transportarea produsului de la furnizori la consumatori, rute evidenţiate în figura 1.

Introducând variabilele:

$x_{ij} =$ cantitatea de produs livrată de furnizorul F_i consumatorului C_j $\quad i = 1, \cdots, m$; $j = 1, \cdots, n$

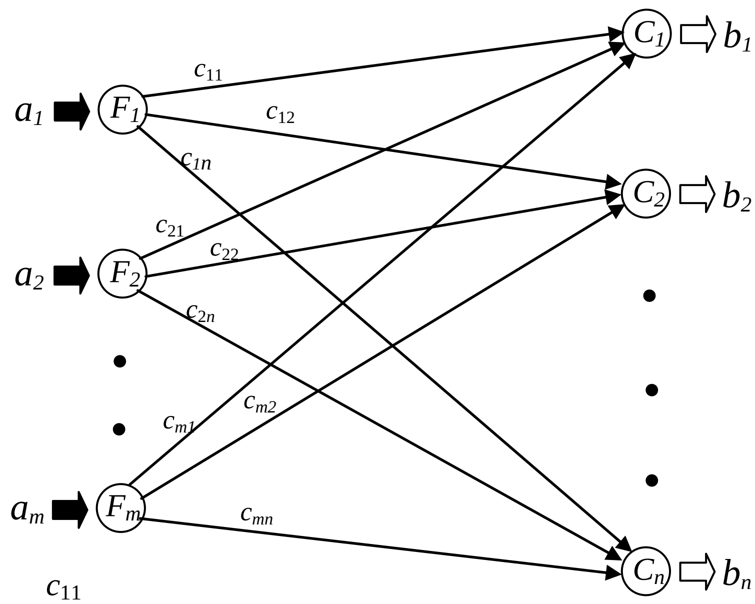

Figura 1

putem scrie următorul model matematic pentru problema de transport echilibrată:

$$
(PTE) \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i = 1, \cdots, m & (2) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = 1, \cdots, n & (3) \\ x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \cdots, m\,;\ j = 1, \cdots, n & (4) \\ (\min) z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} & (5) \end{cases}
$$

Ecuaţiile (2) arată că, pentru fiecare furnizor F_i ,suma cantităţilor livrate consumatorilor este egală cu disponibilul său a_i.
Ecuaţiile (3) arată că, pentru fiecare consumator C_j, totalul cantităţilor primite de la furnizori este egală cu cererea sa b_j.
Condiţiile de nenegativitate (4) rezultă din semnificaţia variabilelor x_{ij}. Un $x_{ij} = 0$ înseamnă că furnizorul F_i nu livrează nimic consumatorului C_j.
Costul transportării cantităţii x_{ij} de la F_i la C_j este egal cu $c_{ij} x_{ij}$ astfel că suma (5) este expresia costului total al transporturilor efectuate.
Egalităţile din (2) şi (3) sunt consecinţa directă a condiţiei de echilibru (1).

Evident, (PTE) este o problemă de programare liniară în formă standard cu $m \cdot n$ variabile şi $m+n$ restricţii.

Exemplul 1 Patru şantiere de construcţii C_1 , C_2 , C_3 , C_4 se aprovizionează cu ciment de la trei depozite F_1 , F_2 , F_3. Cantităţile de ciment (în tone) disponibile în depozite, cele solicitate de şantiere precum şi costurile unitare de transport (per tonă) sunt date în tabelul 7.1.

	C_1	C_2	C_3	C_4	Disponibil
F_1	3	2	8	1	**120**
F_2	1	5	**4**	5	250
F_3	6	7	3	4	400
Cerere	150	**200**	240	180	770

Disponibilul depozitului F_1

Costul transportării unei tone de ciment de la F_2 la C_3

Cererea şantierului C_2

Tabelul 1

Se pune problema de a stabili în ce mod vor fi distribuite cele 770 t de ciment (adică cine pe cine aprovizionează şi cu cât!) astfel încât costul total al transporturilor efectuate să fie minim.

Va trebui să găsim sistemul de valori numerice $x^* = (x_{ij}^*)$ $i=1,2,3$ $j=1,2,3,4$ reprezentând cantităţile ce vor fi transportate pe cele $3 \cdot 4 = 12$ rute posibile astfel încât:

- disponibilele furnizorilor să fie epuizate:

$$\begin{aligned} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} &= 120 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} &= 250 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} &= 400 \end{aligned} \qquad (2')$$

- cererile consumatorilor să fie acoperite:

$$\begin{aligned} x_{11}+x_{21}+x_{31} &= 150 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32} &= 200 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33} &= 240 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34} &= 180 \end{aligned} \qquad (3')$$

- valorile să fie nenegative:

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1,2,3 \quad j = 1,2,3,4 \tag{4'}$$

- costul total al transportului să fie minim:

$$\begin{aligned} z = 3x_{11} + 2x_{12} + 8x_{13} + 1 \cdot x_{14} + 1 \cdot x_{21} + 5x_{22} + 4x_{23} + 5x_{24} + \\ + 6x_{31} + 7x_{32} + 3x_{33} + 4x_{34} \to \min \end{aligned} \tag{5'}$$

În tabelul 2 a fost pusă în evidenţă **matricea tehnologică** a programului rezultat:

	A^{11}	A^{12}	A^{13}	A^{14}	A^{21}	A^{22}	A^{23}	A^{24}	A^{31}	A^{32}	A^{33}	A^{34}
i = 1	1	1	1	1								
2					1	1	1	1				
3									1	1	1	1
j = 1	1				1				1			
2		1				1				1		
3			1				1				1	
4				1				1				1

A^{ij} = coloana coeficienţilor variabilei x_{ij} în restricţiile (2') şi (3')

Tabelul 2

3 Caracterul special al problemei de transport

Din modelul general (2) – (5) al problemei de transport echilibrate (PTE) rezultă următoarele concluzii (pentru ilustrare vezi exemplul 1)

- PTE este un **program liniar compatibil**; de exemplu, sistemul de valori numerice:

$$x_{ij} = {a_i \cdot b_j}/{S} \quad i = 1, \cdots, m \quad j = 1, \cdots, n \text{ unde } S = a_1 + \cdots + a_m = b_1 + \cdots + b_n$$

este o soluţie admisibilă. Mai mult, **PTE are întotdeauna optim finit**.

- **matricea tehnologică A se compune numai din 0 şi 1.** Fiecare variabilă x_{ij} **nu apare decât în două ecuaţii:** în ecuaţia i din (2) şi în ecuaţia j din (3). Astfel, fiecare coloană A^{ij} din A are numai două componente nenule ambele egale cu 1. În concluzie din cele $(m+n) \cdot mn$ componente ale matricii A numai $2mn$ sunt nenule, astfel că **densitatea elementelor nenule este** $\frac{2}{m+n}$ (de exemplu pentru o PTE cu 5 furnizori şi 20 de consumatori, densitatea elementelor nenule este $\frac{2}{5+20} \cdot 100 = 8\%$)

- din cauza condiţiei de echilibru (1), suma ecuaţiilor din (2) este egală cu suma ecuaţiilor din (3). Atunci oricare dintre aceste $m+n$ ecuaţii este consecinţa liniară a celorlalte şi ca urmare poate fi omisă. Se constată uşor că cele rămase sunt liniar independente astfel că **rangul matricii A este** $m+n-1$. Se demonstrează că **orice determinant extras din A are una din valorile 1 , 0 sau -1.**

- o consecinţă imediată a proprietăţii precedente este faptul că în **orice soluţie de bază a PTE există $m+n-1$ variabile bazice**. Valorile acestora rezultă în mod unic anulând variabilele nebazice şi rezolvând sistemul rămas. Calcularea valorilor variabilelor bazice nu necesită decât operaţii de adunare şi scădere. În consecinţă, **dacă ofertele a_i şi cererile b_j sunt exprimate prin numere întregi, atunci orice soluţie de bază a PTE va avea componentele întregi şi în particular PTE va avea o soluţie optimă întreagă.**

Algoritmul de rezolvare a PTE care va fi descris în secţiunile următoare este o versiune a algoritmului simplex, adaptată la specificul acestei probleme.

În notaţiile introduse, un ansamblu de valori numerice $x=(x_{ij})\quad i=1,\cdots,m\quad j=1,\cdots,n$ care satisface (2), (3), (4) se va numi **program admisibil de transport** şi va fi înscris într-un tabel cu *m* rânduri corespunzătoare furnizorilor şi *n* coloane corespunzătoare consumatorilor.
În acord cu teoria generală a algoritmului simplex, pentru rezolvarea PTE, avem nevoie de un **program de transport iniţial** care să fie o **soluţie de bază**. Acest program va fi modificat în mai multe etape (iteraţii) în scopul micşorării costului aferent până la determinarea programului cu cel mai mic cost.

4 Construirea unei soluţii iniţiale a PTE

Următorul procedeu general construieşte un program de transport $\bar{x}=(\bar{x}_{ij})$ pentru PTE care se dovedeşte a fi o soluţie admisibilă de bază.

START Se ordonează într-un **şir**, într-un fel oarecare, toate cele $m\cdot n$ rute de transport. Toate aceste rute se declară **neblocate**.
Conţinutul unei iteraţii:

1) Fie (F_k,C_l) **prima rută neblocată** din şir. Pe această rută se va transporta cantitatea (vom spune că s-a făcut **alocarea**):

$$\bar{x}_{kl}=\min\{a_k\ ,b_l\}$$

unde

$a_k\equiv$disponibilul **curent** al furnizorului F_k

$b_l\equiv$cererea **curentă** (neacoperită) a consumatorului C_l

Mărimea $\bar{x}_{kl}$ se înscrie în tabel în celula (F_k,C_l). Ruta (F_k,C_l) se declară **blocată**.

2) Se **actualizează** disponibilul lui F_k şi cererea lui C_l:

$$a_k \leftarrow a_k - \bar{x}_{kl} \quad ; \quad b_l \leftarrow b_l - \bar{x}_{kl}$$

3) după actualizare sunt posibile trei situaţii:

3.1) $a_k = 0$ dar $b_l > 0$. Se vor bloca toate rutele încă neblocate cu origina în F_k (aceste rute nu mai pot fi folosite deoarece disponibilul lui F_k a fost epuizat!) Astfel, în tabelul soluţiei care se construieşte, rândul corespunzător furnizorului F_k este în întregime blocat.

3.2) $b_l = 0$ dar $a_k > 0$.Se vor bloca toate rutele încă neblocate cu destinaţia C_l (pe motiv că cererea lui C_l a fost acoperită!) În acest caz coloana consumatorului C_l este blocată în întregime.

3.3) $a_k = b_l = 0$. Acest caz apare atunci când, la pasul 1:

disponibilul curent al furnizorului F_k = cererea curentă a consumatorului C_l

Dacă este aşa, vom bloca după dorinţă, fie rândul furnizorului F_k fie coloana consumatorului C_l **dar nu pe amândouă!**
Dacă mai rămân rute neblocate se reia pasul 1, altminteri **STOP**.

După fiecare alocare, în tabelul în care se înscriu componentele soluţiei $\bar{x}$ ce se construieşte, se blochează **în întregime** fie un **rând** (≡furnizorul implicat în alocare şi-a epuizat stocul disponibil) fie o **coloană** (≡prin alocarea făcută consumatorul implicat şi-a acoperit întreaga cerere) **dar nu amândouă**. Cum în total sunt $m+n$ rânduri şi coloane rezultă că în final vor fi folosite **exact** $m+n-1$ rute din cele $m \cdot n$ disponibile. Este posibil ca pe unele din rutele alese alocarea să fie egală cu **zero** şi asta se întâmplă ori de câte ori apare situaţia 3.3). În continuare, rutele (F_i, C_j) **efectiv** folosite la transport $(\equiv \bar{x}_{ij} > 0)$ se vor numi **rute ocupate**. Soluţia construită se va zice **nedegenerată** dacă numărul rutelor ocupate este exact $m+n-1$, altminteri vom zice că soluţia este **degenerată.**

Metodele efective de construire a unui program de transport diferă prin modul de ordonare a rutelor. Astfel:

- în **metoda colţului de Nord -Vest** rutele sunt ordonate **lexicografic**:

$$(F_1,C_1), (F_1,C_2), \cdots\cdots, (F_1,C_n), (F_2,C_1), \cdots\cdots, (F_2,C_n), \cdots\cdots, (F_m,C_n)$$

- în **metoda costului (unitar) de transport minim** rutele sunt examinate **în ordinea crescătoare** a costurilor unitare de transport.

Exemplul 2 Se va considera problema de transport echilibrată din exemplul 1. Prin metoda colţului de N-V se obţine programul de transport **nedegenerat** – cu 6 = 3 + 4 – 1 rute ocupate – dat în tabelul 3. Metoda este foarte simplă însă produce soluţii în general „scumpe” deoarece nu ţine cont de costurile unitare de transport.

Atenţie: numerele înscrise în paranteze indică **ordinea** în care s-au făcut alocările; cu ajutorul lor cititorul va putea reconstitui „în dinamică” modul în care a fost construită soluţia!

(1) **120**	*	*	*
(2) **30**	(3) **200**	(4) **20**	*
*	*	(5) **220**	(6) **180**

3×120 =	360
1× 30 =	30
5×200 =	1000
4× 20 =	80
3×220 =	660
4×180 =	720
Cost total =	2850 u.m.

Tabelul 3

Prin metoda costului minim se obţine soluţia din tabelul 4 de asemeni nedegenerată.

	*	*	(2) **120**
(1) **150**	(5) **100**		*
*	(6) **100**	(3) **240**	(4) **60**

1×150 =	150
1×120 =	120
3×240 =	720
4× 60 =	240
5×100 =	500
7×100 =	700
Cost total =	2430 u.m.

Tabelul 4

Următorul procedeu dă rezultate excelente în sensul că generează o soluţie foarte apropiată de soluţia optimă!

Metoda diferenţelor maxime (Vogel) La **START** toate rutele se declară **neblocate**.
Conţinutul unei iteraţii:

1) Pe fiecare rând sau coloană – din tabelul soluţiei care se construieşte – în care mai există măcar **două** rute neblocate se face diferenţa dintre **cel mai mic cost „neblocat”** şi **cel imediat superior „tot neblocat”**, cu menţiunea că dacă costul neblocat minim **nu este unic** diferenţa se va lua egală cu **zero**!

2) Se identifică rândul sau coloana cu **cea mai mare diferenţă** (în valoare absolută). Dacă diferenţa maximă nu este unică are prioritate rândul sau coloana cu cel mai mic cost „neblocat”.

3) Pe rândul sau coloana aleasă se face o alocare pe ruta de **cost (neblocat) minim** după care se fac actualizările corespunzătoare şi se blochează rutele ce nu mai pot fi folosite, conform instrucţiunilor din procedeul general.

În caz că a rămas un singur rând sau o singură coloană cu mai mult de două rute neblocate, ultimele alocări sunt **unic determinate** şi se vor face în rutele neblocate rămase. **STOP**.

Altminteri, se reiau paşii descrişi mai sus în cadrul unei noi iteraţii.

Exemplul 3 Se consideră problema de transport echilibrată cu datele din tabelul 5:

	C_1	C_2	C_3	C_4	Disponibil
F_1	3	7	6	4	510
F_2	2	4	3	2	230
F_3	4	3	8	5	360
Cerere	310	370	200	220	1100

Tabelul 5

Vom determina o soluţie prin metoda diferenţelor maxime. Calculele sunt sintetizate în următoarele tabele. Pentru determinarea rutei în care se face prima alocare vezi tabelul 6.1

					Diferenţe pe rânduri
	3	7	6	4	**1 = 4 – 3**
	2	4	3	2	**0 = 2 – 2**
	4	3	8	5	**1 = 4 - 3**
Diferenţe pe coloane	**1 = 3 - 2**	**1 = 4 - 3**	**3 = 6 - 3**	**2 = 4 - 2**	

⇨

		*	
		200 (1)	
		*	

Tabelul 6.1

Cea mai mare diferenţă se găseşte în coloana 3. Conform instrucţiunilor metodei, prima alocare se va face pe cea mai ieftină rută din coloana 3, adică pe ruta (F_2 , C_3). După alocare blocăm şi celelalte rute ale coloanei 3 deoarece ele nu mai pot fi folosite în alocările ulterioare, cererea consumatorului C_3 fiind acoperită în totalitate! Refacem diferenţele în rândurile şi coloanele rămase.

În tabelele 6.2 şi 6.3 se arată cum şi unde au fost făcute următoarele două alocări.Asteriscurile indică rutele blocate; costurile asociate acestor rute ne mai fiind luate în considerare în evaluarea diferenţelor!

					Diferenţe pe rânduri
	3	7	*	4	**1 = 4 – 3**
	2	4	*	2	**0 = 2 – 2**
	4	3	*	5	**1 = 4 - 3**
Diferenţe pe coloane	**1 = 3 - 2**	**1 = 4 - 3**	**-**	**2 = 4 - 2**	

⇨

		*	
*	*	200 (1)	**30** (2)
		*	

Tabelul 6.2

					Diferenţe pe rânduri
	3	7	*	4	**1 = 4 – 3**
	*	*	*	*	**-**
	4	3	*	5	**1 = 4 - 3**
Diferenţe pe coloane	**1 = 4 - 3**	**4 = 7 - 3**	**-**	**1 = 5 – 4**	

⇨

		*	
‘	*	200 (1)	30 (2)
*	**360** (3)	*	*

Tabelul 6.3

Ultimele trei alocări se fac obligatoriu în cele trei rute neblocate din rândul 1 – vezi tabelul 6.4

3	7	*	4
*	*	*	*
*	*	*	*

⇨

310 (4)	**10** (5)	*	**190** (6)
		200 (1)	30 (2)
*	360 (3)	*	*

Tabelul 6.4

A rezultat o soluţie nedegenerată cu un cost total de 3500u.m. Prin metoda costului unitar minim s-ar fi obţinut soluţia

80 $^{(3)}$	10 $^{(6)}$	200 $^{(5)}$	220 $^{(4)}$
230 $^{(1)}$			
	360 $^{(2)}$		

Tabelul 7

cu un cost mai mare, de 3930u.m.

Pentru problema din exemplul 1 metoda diferenţelor maxime conduce la soluţia găsită prin metoda costului minim.

5 Algoritm de rezolvare a problemei de transport echilibrate

START Se presupune cunoscută o **soluţie admisibilă de bază** $\bar{x} = (\bar{x}_{ij})$, determinată cu una dintre metodele descrise. **Presupunem că soluţia** $\bar{x}$ **este nedegenerată adică are exact** $m+n-1$ **componente nenule.**
Conţinutul unei iteraţii:

I) Testarea optimalităţii soluţiei curente

I.1) se asociază furnizorilor $F_1, \cdots, F_m$ variabilele $u_1, \cdots, u_m$. Se asociază consumatorilor $C_1, \cdots, C_n$ variabilele $v_1, \cdots, v_n$.

I.2) se asociază fiecărei rute (F_i, C_j) ocupate $(\Leftrightarrow \bar{x}_{ij} > 0)$ ecuaţia $u_i + v_j = c_{ij}$.

I.3) se determină o soluţie particulară a sistemului construit (de exemplu, se dă valoarea 0 uneia dintre variabile, de regulă celei care apare de cele mai multe ori în sistem)

I.4) pentru rutele neocupate $(\Leftrightarrow \bar{x}_{ij} = 0)$ se calculează mărimile:

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$$

I.5) test de optimalitate: dacă toţi $\Delta_{ij} \le 0$ **soluţia curentă este optimă**, altfel spus costul total de transport asociat este cel mai mic posibil. **STOP**
În caz contrar se trece la:

II) Construirea unui program de transport mai bun, adică cu un cost total de transport mai mic

II.1) se identifică ruta (F_{i_0}, C_{j_0}) cu proprietatea

$$\Delta_{i_0 j_0} = \max \Delta_{ij}$$

(evident $\Delta_{i_0 j_0} > 0$)

II.2) în tabelul soluţiei curente se construieşte **ciclul** rutei (F_{i_0}, C_{j_0}). Acesta este un **drum închis care începe şi sfârşeşte în celula (F_{i_0}, C_{j_0}) şi care, în rest, coteşte în unghi drept numai prin celule ocupate**

II.3) se marchează alternativ cu **+** şi **−** colţurile ciclului începând cu **+** în celula (F_{i_0}, C_{j_0})

II.4) se calculează minimul θ al valorilor $\bar{x}_{ij}$ situate în colţurile marcate cu **−** (clar $\theta > 0$**)**

II.5) se construieşte o nouă soluţie de bază a PTE astfel:

- se adună θ la valorile $\bar{x}_{ij}$ situate în colţurile ciclului marcate cu **+** ;
- se scade θ din valorile $\bar{x}_{ij}$ situate în colţurile ciclului marcate cu **−**;
- toate celelalte componente ale soluţiei curente $\bar{x}$, nesituate în colţurile ciclului, nu se modifică.

Atenţie: în caz că noua soluţie este degenerată se aplică „tehnica de perturbare" care va fi explicată în secţiunea 6.

Se revine la pasul I) în cadrul unei noi iteraţii.

Observaţii şi precizări

- Nedegenerarea soluţiilor testate de algoritmul descris mai sus este **esenţială**! **Într-adevăr, dacă toate soluţiile cercetate sunt nedegenerate, algoritmul se opreşte într-un număr finit de iteraţii (conform teoriei generale a algoritmului simplex!).**

- Ca urmare a ipotezei de nedegenerare, sistemul liniar construit în pasul I.2) are $m+n-1$ ecuaţii şi $m+n$ variabile. El are o infinitate de soluţii.

- Se demonstrează că mărimile Δ_{ij} calculate în pasul I.4) nu depind de soluţia particulară aleasă în pasul precedent.Conform teoriei generale a algoritmului simplex (adaptată la specificul PTE!) valorile Δ_{ij} **sunt de fapt costurile reduse asociate variabilelor nebazice (≡ rutelor neocupate!) din soluţia testată.** Ele au următoarea interpretare economică prin care se justifică testul de optimalitate din pasul I.5

Fie $F_i \to C_j$ o rută **neocupată** $(\equiv \bar{x}_{ij} = 0)$.Valoarea Δ_{ij} asociată arată cu cât creşte sau descreşte costul total aferent soluţiei curente $\bar{x}$ în cazul în care aceasta se modifică în scopul folosirii rutei $F_i \to C_j$ .Mai precis, **dacă $\Delta_{ij} > 0$, modificarea soluţiei $\bar{x}$ în scopul transportării unei unităţi de produs de la F_i la C_j duce la scăderea costului total cu valoarea Δ_{ij}. Dacă $\Delta_{ij} < 0$,aceeaşi modificare conduce la creşterea costului total cu valoarea $-\Delta_{ij}$. Evident dacă $\Delta_{ij} = 0$ utilizarea rutei $F_i \to C_j$ nu antrenează nici o schimbare în costul total.**

- Se poate arăta că dacă soluţia curentă este nedegenerată atunci ciclul construit la pasul II.2 **există** şi este **unic.** El are un număr **par** de colţuri.

- Noua soluţie construită în pasul II.5 şi notată $\overline{x}'$ este mai bună decât soluţia anterioară $\overline{x}$ deoarece se poate arăta că:

$$f(\overline{x}') = f(\overline{x}) - \theta \cdot \Delta_{i_0 j_0} < f(\overline{x})$$

Exemplul 4 Vom determina soluţia optimă a problemei de transport din exemplul 1 plecând de la soluţia construită prin metoda costului minim (exemplul 2, tabelul 4)

Iteraţia 1

Soluţia curentă
Costul total asociat = 2430

			120
150	100		
	100	240	60

Tabelul 8

$\Rightarrow$

Sistemul ecuaţiilor $u_i+v_j = c_{ij}$ asociate rutelor (F_i , C_j) ocupate

	v_1	v_2	v_3	v_4
u_1				$u_1 + v_4 = 1$
u_2	$u_2 + v_1 = 1$	$u_2 + v_2 = 5$		
u_3		$u_3 + v_2 = 7$	$u_3 + v_3 = 3$	$u_3 + v_4 = 4$

Tabelul 8.1

Comentarii: soluţia curentă este înscrisă în tabelul 8, identic cu tabelul 4 .Pentru cercetarea optimalităţii acestei soluţii am introdus variabilele u_1, u_2, u_3 corespunzătoare celor trei furnizori şi variabilele v_1, v_2, v_3, v_4 corespunzătoare consumatorilor. Fiecărei rute (F_i, C_j) ocupate în soluţie i s-a asociat ecuaţia $u_i + v_j = c_{ij}$ (vezi tabelul 8.1)

Determinăm o soluţie particulară a sistemului construit dând valoarea 0 variabilei u_3 (care apare de cele mai multe ori) – vezi figura 2

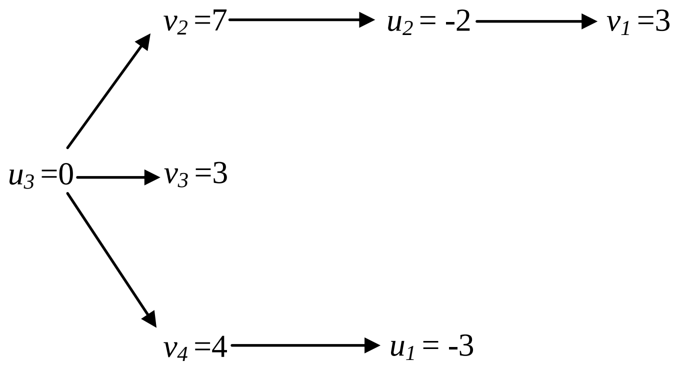

Figura 2

Valorile Δ_{ij} sunt calculate în tabelul 2 – asteriscurile indică rutele ocupate în soluţia curentă. Se găseşte $\Delta_{12} = 2 > 0$ şi ca urmare testul de optimalitate nu este îndeplinit. În tabelul alăturat 8.3 – identic cu tabelele 4 şi 8 - este vizualizat ciclul rutei (F_1, C_2)

	$v_1 = 3$	$v_2 = 7$	$v_3 = 3$	$v_4 = 4$
$u_1 = -3$	-3	2	-8	*
$u_2 = -2$	*	*	-3	-3
$u_3 = 0$	-3	*	*	*

Tabelul 8.2

$\Rightarrow$

	+		− **120**
150	100		
	− **100**	240	+ **60**

Tabelul 8.3

Colţurile ciclului au fost marcate alternativ cu **+** şi **−** începând cu **+** în celula (F_1, C_2). În continuare se determină minimul valorilor înscrise în celulele marcate cu **−**

$$\theta = \min\{\bar{x}_{14} = 120\,,\ \bar{x}_{32} = 100\} = 100$$

şi se construieşte o nouă soluţie a problemei de transport date (vezi tabelele 9 şi 9.1).

	0 + 100		**120 – 100**
150	100		
	100 - 100	240	**60 +100**

Tabelul 9

Noua soluţie este nedegenerată. Costul total asociat $= f(\bar{x}) - \theta \cdot \Delta_{12} = 2430 - 100 \cdot 2 = 2230$ u.m.

Iteraţia 2

Soluţia curentă
Costul total asociat = 2230

	100		20
150	100		
		240	160

Tabelul 9.1

⇒

Sistemul ecuaţiilor $u_i + v_j = c_{ij}$ asociate rutelor (F_i, C_j) ocupate

	v_1	v_2	v_3	v_4
u_1		$u_1 + v_2 = 2$		$u_1 + v_4 = 1$
u_2	$u_2 + v_1 = 1$	$u_2 + v_2 = 5$		
u_3			$u_3 + v_3 = 3$	$u_3 + v_4 = 4$

Tabelul 9.2

O soluţie particulară a sistemului afişat în tabelul 9.2 este dată în figura 3:

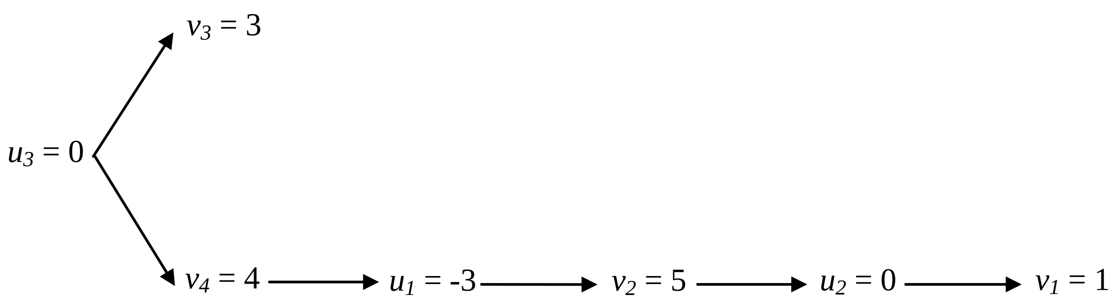

Figura 3

În tabelul 9.3 sunt calculate mărimile $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ asociate rutelor nefolosite în soluţia curentă.

	$v_1 = 1$	$v_2 = 5$	$v_3 = 3$	$v_4 = 4$
$u_1 = -3$	-5	*	-8	*
$u_2 = 0$	*	*	-1	-1
$u_3 = 0$	-5	-2	*	*

Deoarece $\Delta_{ij} \leq 0$
STOP: soluţia curentă este optimă!

Tabelul 9.3

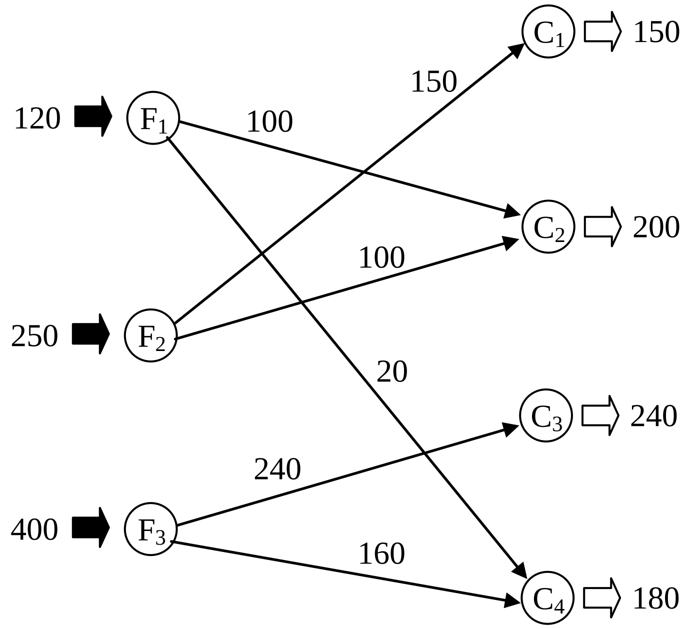

Figura 4

În figura 4 sunt puse în evidenţă cele şase rute folosite în soluţia optimă pentru transportarea cimentului de la depozite la şantiere precum şi cantităţile transportate.
După cum era şi de aşteptat, soluţia iniţială, generată prin metoda costului unitar de transport minim, a fost foarte bună: într-o singură iteraţie s-a găsit soluţia optimă!

6 Tratarea soluţiilor degenerate

Algoritmul descris funcţionează corect numai dacă soluţia (de bază) iniţială şi soluţiile (de bază) cercetate pe parcurs sunt nedegenerate. Foarte des însă, în rezolvarea problemelor de transport, apar soluţii degenerate. Ce facem într-o asemenea situaţie ? Vom proceda în felul următor:

În momentul apariţiei unei soluţii de bază degenerate vom perturba uşor datele problemei aşa încât soluţia în cauză să capete componentele nenule care îi lipsesc. După determinarea soluţiei optime a problemei perturbate, eliminăm perturbaţiile obţinând soluţia optimă a problemei originale.

O soluţie de bază degenerată nu poate apare decât în două situaţii:

I) **La construirea unei soluţii iniţiale** când, la efectuarea unei alocări pe o rută, să zicem pe ruta (F_k, C_l), se întâmplă ca:

disponibilul **curent** al furnizorului F_k = cererea **curentă** a consumatorului C_l (*)

În acest caz vom mări cu un $\varepsilon > 0$ foarte mic fie disponibilul lui F_k fie cererea lui C_l . Să presupunem că am „perturbat” disponibilul lui F_k Este clar că în urma acestei operaţii problema de transport s-a „dezechilibrat”! Pentru reechilibrare vom adăuga acelaşi $\varepsilon > 0$ la cererea unuia dintre consumatorii care n-au primit întreaga cantitate cerută, dar altul decât C_l !
Efectuăm alocarea pe ruta (F_k, C_l) precum şi celelalte alocări care urmează. Dacă situaţia (*) nu mai apare va rezulta o **soluţie nedegenerată a problemei perturbate** cu o componentă **nenulă** egală cu ε. După aplicarea algoritmului de optimizare se va face $\varepsilon = 0$.

Exemplul 5 Determinăm o soluţie iniţială prin metoda colţului de N-V pentru problema de transport echilibrată cu datele din tabelul 10.

	C_1	C_2	C_3	Disponibil
F_1	2	5	1	200
F_2	4	3	3	150
Necesar	100	100	150	350

Tabelul 10

La a doua alocare, pe ruta (F_1, C_2) avem sitaţia 3 semnalată în secţiunea 4 şi renotată aici cu (∗):

disponibilul curent al lui F_1 = cererea lui C_2 = 100

După alocare ar trebui blocate atât rândul F_1 cât şi coloana C_2; blocând numai coloana C_2 şi continuând alocările se obţine soluţia din tabelul 11.

(1) **100**	(2) **100**	(3) **0**
*	*	(4) **150**

Tabelul 11

Conform teoriei, aceasta este o soluţie de bază a problemei date însă degenerată deoarece are numai trei componente nenule în loc de 4 = 2 + 3 – 1. Înlocuind zeroul din ruta (F_1, C_3) cu un ε>0 foarte mic se obţine o soluţie nedegenerată.

100	**100**	**ε**
		150

Tabelul 11.1

dar pentru problema cu datele perturbate:

	C_1	C_2	C_3	Disponibil
F_1	2	5	1	200+ε
F_2	4	3	3	150
Necesar	100	100	150+ε	350+ε

Tabelul 10.1

Am aplicat acestei soluţii algoritmul de optimizare:

	$v_1=2$	$v_2 = 5$	$v_3 = 1$
$u_1= 0$	100	100 −	ε +
$u_2= 2$		+	150 −

Tabelul 11.2

$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$

*	*	*
0	4	*

Tabelul 11.3

	$v_1=2$	$v_2 = 5$	$v_3 = 1$
$u_1= 0$	− 100		+ 100 + ε
$u_2= 2$	+	100	− 50

Tabelul 12

$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$

*	- 4	*
0	*	*

Tabelul 12.1

50		150 +ε
50	100	

Tabelul 13

Soluţia din tabelul 12 este optimă (pentru problema perturbată!). Deoarece în tabelul 12.1 avem $\Delta_{21} = 0$ problema perturbată mai are o soluţie optimă de bază, indicată în tabelul 13. Luând $\varepsilon = 0$ se obţin două soluţii optime de bază x^1 şi x^2 pentru problema originală, ambele nedegenerate – vezi tabelele 14 şi 15

$\boldsymbol{x^1}$

100		100
	100	50

Tabelul 14

$\boldsymbol{x^2}$

50		150
50	100	

Tabelul 15

În acord cu teoria generală a programării liniare, problema de transport dată are o infinitate de soluţii

100 - 50α		100 +50α
50α	100	50 - 50α

Tabelul 16

75		125
25	100	25

Tabelul 16.1

optime de forma **(1-α)*x*¹ + α*x*²** cu $0 \le \alpha \le 1$. Componentele soluţiei optime generale sunt date în tabelul 16 Pentru α = 0 sau 1 regăsim soluţiile de bază x^1 respectiv x^2. Pentru $0 < \alpha < 1$ soluţiile corespunzătoare nu mai sunt soluţii de bază – acestea au cinci componente nenule, cu una mai mult decât soluţiile de bază!! În tabelul 16.1 este dată soluţia optimă nebazică corespunzătoare lui α = ½.

Degenerarea poate apare şi în cursul aplicării algoritmului de optimizare, atunci când:

II) la pasul II.4), minimul θ al mărimilor înscrise în colţurile circuitului marcate cu – nu este unic

Exemplul 6 Să presupunem că în rezolvarea unei probleme de transport echilibrate s-a ajuns la soluţia dată în tabelul. Se ştie că soluţia nu este optimă şi că o soluţie mai bună va rezulta din ciclul rutei $(F_2\,,\,C_3)$ – vezi tabelul 17.1.

	80		40
100	40		
		50	30

Tabelul 17

	80		40
100	40		
		50	30

Tabelul 17.1

Se observă că $\theta = \min\left\{ x_{14} = 40\,,\, x_{22} = 40\,,\, x_{33} = 50 \right\} = 40$ **nu este unic** astfel că, după redistribuirea lui $\theta = 40$ pe colţurile ciclului, rezultă soluţia **degenerată** din tabelul 18 căreia nu i se mai poate aplica algoritmul de optimizare!

	120		
100		40	
		10	70

Tabelul 18

Pentru evitarea acestei situaţii, în tabelul 17 vom modifica puţin una dintre valorile „egale cu 40”. De exemplu „perturbăm” $x_{22} = 40 + \varepsilon$ cu ε > 0 foarte mic. Aceasta revine la a mări cu ε atât disponibilul furnizorului F_2 cât şi cererea consumatorului C_2 – vezi tabelul 17.2

	80		40
100	40+ε		
		50	30

Tabelul 17.2

	80		40
100	40+ε		
		50	30

Tabelul 17.3

Reluăm algoritmul de optimizare cu pasul II.4) însă pentru problema perturbată! (vezi tabelul 17c). De această dată, minimul θ va fi unic: $\theta = \min\left\{ x_{14} = 40\,,\, x_{22} = 40 + \varepsilon\,,\, x_{33} = 50 \right\} = 40$ şi după redistribuirea sa se obţine – **pentru problema perturbată !**– soluţia **nedegenerată**:

	120		
100	ε	40	
		10	70

Tabelul 18.1

căreia i se poate aplica algoritmul de optimizare. La terminare se va face ε = 0.

Probleme propuse

Pentru problemele de transport echilibrate de mai jos:

i) Determinaţi soluţii iniţiale prin metodele descrise (metoda colţului de NV, metoda costului unitar de transport minim, metoda diferenţelor maxime sau alte metode...);

ii) Determinaţi soluţia optimă plecând de la cea mai bună soluţie găsită la i).

iii) Vizualizaţi rutele folosite în soluţia optimă ca în figura 4.

Mare atenţie la rezolvarea situaţiilor de degenerare!

1.

Furnizori	Consumatori			Disponibil
	C_1	**C_2**	**C_3**	
F_1	5	7	12	35
F_2	11	6	9	45
F_3	14	10	2	50
Cerere	50	40	30	130

Tabelul 19

2.

Furnizori	Consumatori						Disponibil
	C_1	**C_2**	**C_3**	**C_4**	**C_5**	**C6**	
F_1	30	27	15	42	25	10	2200
F_2	20	22	20	17	12	22	2000
F_3	25	14	10	24	34	8	1000
F_4	18	25	28	30	30	28	1300
Cerere	1200	800	700	1300	1000	1500	6500

Tabelul 20

3.

Furnizori	Consumatori					Disponibil
	C_1	**C_2**	**C_3**	**C_4**	**C_5**	
F_1	15	21	27	3	22	100
F_2	18	16	25	12	29	60
F_3	6	5	11	4	6	50
F_4	21	7	19	14	9	40
Cerere	10	30	120	40	50	250

Tabelul 21

4.

Furnizori	Consumatori					Disponibil
	C_1	**C_2**	**C_3**	**C_4**	**C_5**	
F_1	3	1	7	2	4	40
F_2	3	2	1	4	1	30
F_3	1	1	4	1	2	50
F_4	3	7	5	6	6	30
Cerere	20	30	30	20	50	150

Tabelul 22

5.

Furnizori	Consumatori						Disponibil
	C_1	**C_2**	**C_3**	**C_4**	**C_5**	**C6**	
F_1	9	12	9	6	9	10	500
F_2	7	3	7	7	5	5	600
F_3	6	5	9	11	3	11	200
F_4	6	8	11	2	2	10	900
Cerere	400	400	600	200	400	200	2200

Tabelul 23

Ilustrări practice ale problemei de transport

Un prim obiectiv al secţiunii este acela de a arăta cum se soluţionează o serie de situaţii speciale ce pot apare în studiul problemelor de transport şi care amintesc de reoptimizarea din programarea liniară generală: **modificări în structura ofertei sau a cererii, blocarea unor rute, maximizarea profitului rezultat din activitatea de transport** etc

Al doilea obiectiv vizează problemele de transport **neechilibrate**. Nu întotdeauna, condiţia de echilibru (1) din secţiunea 2

$$\text{oferta totală} = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = \text{cererea totală}$$

este îndeplinită. Dacă oferta totală > cererea totală, problema de transport are în mod clar soluţii. Reducerea la o problemă echilibrată se face prin introducerea unui „consumator fictiv” a cărui cerere este egală cu excesul de ofertă. Pe „rutele” ce leagă furnizorii reali de consumatorul fictiv, costurile unitare de transport se iau egale cu zero. În mod logic, cantităţile „livrate” de (unii) furnizori consumatorului fictiv se interpretează drept cantităţi rămase în stoc.
Dacă din contră, oferta totală < cererea totală, lucrurile sunt ceva mai delicate. În primul rând problema de transport – aşa cum a fost ea formulată în secţiunea 7.2 – nu mai are soluţii! S-ar putea pune problema repartizării – la cel mai mic cost de transport – a ofertei totale insuficiente către consumatori, numai că unii s-ar putea să primească întreaga cantitate solicitată sau „pe aproape” în timp ce alţii s-ar putea să primească foarte puţin sau chiar nimic! Se ridică aici o chestiune principială: cum ar trebui făcută repartizarea ofertei totale insuficiente astfel încât „penuria” să fie suportată **echitabil** de către toţi consumatorii!

În al treilea rând, dorim să semnalăm, prin câteva exemple, faptul că practica economică furnizează numeroase **situaţii care nu implică un transport în sensul propriu al cuvântului dar care pot fi modelate ca probleme de transport.**

Exemplul 1 Se consideră problema de transport echilibrată cu datele din tabelul 1

	C_1	C_2	C_3	Disponibil
F_1	2	5	3	50
F_2	4	8	3	150
F_3	7	9	5	150
Cerere	100	150	100	350

Tabelul 1

i) să se determine programul de transport care minimizează costul total.
ii) cum se modifică programul şi costul total dacă cel puţin 50% din cererea consumatorului C_1 trebuie asigurată de furnizorul F_3.
iii) cum se modifică programul şi costul total de la i) dacă ruta $F_2 \rightarrow C_3$ nu mai poate fi utilizată.

Soluţie. i) Metoda diferenţelor maxime furnizează direct următoarea soluţie optimă de bază, nedegenerată:

	C_1	C_2	C_3
F_1		50	
F_2	100		50
F_3		100	50

Tabelul 2

Problema mai are o soluţie optimă de bază, de astă dată degenerată – vezi tabelul 3:

	C_1	C_2	C_3
F_1	50		
F_2	50		100
F_3		150	

Tabelul 3

Costul total de transport are valoarea minimă de 1950 u.m.

ii) Diminuăm cererea consumatorului C_1 şi disponibilul furnizorului F_3 cu $100 \cdot \frac{50}{100} = 50$ unităţi. Rezultă o nouă problemă de transport cu datele din tabelul 4

	C_1	C_2	C_3	Disponibil
F_1	2	5	3	50
F_2	4	8	3	150
F_3	7	9	5	100
Cerere	50	150	100	300

Tabelul 4

şi cu soluţia optimă degenerată

	C_1	C_2	C_3
F_1		50	
F_2	50		100
F_3		100	

Tabelul 5

al cărei cost total este de 1650 u.m.Adăugând şi cele 50 unităţi deja programate pe ruta $F_3 \to C_1$ obţinem programul de transport afişat în tabelul 6

	C_1	C_2	C_3
F_1		50	
F_2	50		100
F_3	50	100	

Tabelul 6

al cărui cost este de 1650 + 7·50 = 2000 u.m.

iii) Remarcăm faptul că ruta $F_2 \rightarrow C_3$ este folosită în ambele soluţii optime ale problemei date (în soluţia x' din tabelul 8.2 avem $x'_{23} = 50$ iar în soluţia x'' din tabelul 8.3, $x''_{23} = 100$) Blocarea rutei se va face schimbând valoarea actuală 3 a costului unitar de transport c_{23} pe această rută cu o valoare M, **foarte mare**, care să oblige algoritmul de optimizare să caute soluţii mai ieftine.
Datele problemei modificate sunt în tabelul 7

	C_1	C_2	C_3	Disponibil
F_1	2	5	3	50
F_2	4	8	M	150
F_3	7	9	5	150
Cerere	100	150	100	350

Tabelul 7

Este clar că orice soluţie a problemei originale este o soluţie şi pentru problema modificată, diferenţa apărând la cost.
În consecinţă vom pleca de la soluţia optimă nedegenerată a problemei originale (tabelul 2) şi vom recalcula mărimile Δ_{ij}.

	$v_1 = 9 - M$	$v_2 = 9$	$v_3 = 5$
$u_1 = -4$		50	
$u_2 = M - 5$	100		50
$u_3 = 0$		100	50

Tabelul 8

⇨

$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$

3 - M	*	- 2
*	M - 4	*
2 - M	*	*

Tabelul 8.1

Deoarece M este foarte mare, $\Delta_{22} = M - 4 > 0$ (celelalte diferenţe sunt negative). Utilizând ciclul rutei (F_2 , C_2) se ajunge la soluţia optimă din tabelul 9:

	C_1	C_2	C_3
F_1		50	
F_2	100	50	
F_3		50	100

Tabelul 9

cu costul total de 2000 u.m. şi în care ruta $F_2 \rightarrow C_3$ nu mai este folosită.

Observaţie finală: compararea costurilor diferitelor soluţii obţinute confirmă ideea că orice constrângere asupra rutelor potenţiale de transport sau asupra cantităţilor transportate conduce, în general, la creşterea costului total!