2.2. Modele ARMA – Modele staționare liniare pentru Analiza Seriilor de Timp

Un proces autoregresiv (AR) este un proces unde valoarea curentă a lui y este influențată de propriile valori din trecut şi de o perturbație ε_t. Variabila aleatoare ε_t este numită şi **inovație**, deoarece reprezintă partea nepredictibilă a valorilor variabilei y_t, date fiind valorile anterioare $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots$.

Un proces de medie mobilă (MA) este un proces unde valoarea curentă (contemporană) a lui y este influențată atât de valoarea contemporană cât şi de valorile din trecut ale termenului inovație ε_t.

AR(1): $y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$

MA(1): $y_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$

AR(p): $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$

MA(q): $y_t = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q}$

Vom folosi modele de medie zero. Acestea reprezintă abateri ale seriei de la medie. De exemplu, dacă o serie are media μ şi urmează un proces AR(1), atunci relația

$(y_t - \mu) = \phi(y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t$ este echivalentă cu relația $y_t = (1-\phi)\mu + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$

Astfel, constantele pot include mediile. În general, vom lucra cu modele de medie zero, deoarece este uşor să se adauge mediile sau trendurile deterministe.

Procese liniare

Considerăm un model simplu, modelul autoregresiv definit prin:

$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$, $t = 2,3,\dots,n$,

unde parametrul ϕ este o constantă cu proprietatea că $|\phi| < 1$, iar ε_t reprezintă un şir de variabile aleatoare necorelate, fiecare cu media 0 şi varianța σ^2.

Pentru a vedea dacă există o serie y_t care verifică relația de mai sus, vom scrie modelul cu ajutorul operatorului lag. Vom avea $y_t - \phi y_{t-1} = \varepsilon_t$, deci $(1-\phi L)y_t = \varepsilon_t$.

Inversând formal această relație obținem soluția:

$$y_t = (1-\phi L)^{-1}\varepsilon_t = (1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \cdots)\varepsilon_t = \varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\phi^k\varepsilon_{t-k}$$

Teorema de descompunere a lui Wold

Orice proces stochastic slab staționar şi absolut nedeterminist ($y_t - \mu$) poate fi reprezentat ca o combinație liniară (sau filtru liniar) de variabile aleatoare necorelate.

$$y_t - \mu = \varepsilon_t + \psi_1\varepsilon_{t-1} + \psi_2\varepsilon_{t-2} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\varepsilon_{t-j} \text{ cu } \psi_0 = 1 \text{ şi } \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j^2 < \infty.$$

$\{\varepsilon_t\}$ este un proces de zgomot alb (white noise), adică un şir de variabile aleatoare independente, identic distribuite, cu media 0 şi varianța σ^2. Acesta se notează sub forma $\varepsilon_t \sim WN(0,\sigma^2)$.

<u>Modelul de medie mobilă de ordinul întâi, MA(1)</u> Este de forma:

$y_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$

θ este orice constantă, iar $\{\varepsilon_t\}$ este un proces de zgomot alb, deci $\varepsilon_t \sim WN(0,\sigma^2)$.

Cerințe: Să se determine media, varianța, autocovarianțele şi funcția de autocorelație ale lui y_t.

Media lui y_t este: $E(y_t) = E(\varepsilon_t) + \theta E(\varepsilon_{t-1}) = 0$.

Varianța lui y_t este:

$Var(y_t) = \gamma_0 = E(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})^2 = E(\varepsilon_t^2 + 2\theta\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} + \theta^2\varepsilon_t^2) = (1+\theta^2)\sigma^2$.

Autocovarianța la lag-ul 1 este:

$\gamma_1 = \mathrm{cov}(y_t, y_{t-1}) = E(y_t y_{t-1}) = E(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-2}) =$

$= E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-1}^2 + \theta\varepsilon_t\varepsilon_{t-2} + \theta^2\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2}) = \theta\sigma^2$

Autocovarianța la lag-ul 2 este:

$\gamma_2 = \mathrm{cov}(y_t, y_{t-2}) = E(y_t y_{t-2}) = E(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-2} + \theta\varepsilon_{t-3}) =$

$E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-2} + \theta\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2} + \theta\varepsilon_t\varepsilon_{t-3} + \theta^2\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-3}) = 0$.

Rezultă că autocovarianțele de lag $k > 1$ sunt zero: $\gamma_k = 0$.

Un proces MA(1) este staționar, indiferent de valoarea lui θ, deoarece media şi autocovarianțele nu sunt funcții de timp.

Funcția de autocorelație (ACF) a unui proces MA(1) este:

$\rho_0 = 1$; $\rho_1 = \dfrac{\gamma_1}{\gamma_0} = \dfrac{\theta\sigma^2}{(1+\theta^2)\sigma^2} = \dfrac{\theta}{1+\theta^2}$; $\rho_k = 0$, $k > 1$.

$$\gamma_k = \begin{cases} (1+\theta^2)\sigma^2, & k=0 \\ \theta\sigma^2, & k=1 \\ 0, & k>1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \rho_k = \begin{cases} 1, & k=0 \\ \dfrac{\theta}{1+\theta^2}, & k=1 \\ 0, & k>1 \end{cases}$$

Observație: Un şoc într-un proces MA(1) afectează y_t numai în două momente de timp.

Memoria procesului MA(1) este doar de o perioadă. Procesul MA se numeşte de memorie scurtă.

Autocorelația de ordin *k* poate fi reprezentată grafic ca o funcție de *k*, rezultând corelograma procesului. Pentru valori diferite ale lui θ se obțin valori diferite ale lui ρ_1.

Dacă θ este pozitiv, rezultă ρ_1 pozitiv. Dacă θ este negativ, rezultă ρ_1 negativ.

Cea mai mare valoare pentru ρ_1 este 0,5 şi apare când $\theta = 1$.

Cea mai mică valoare a lui ρ_1 este $-0{,}5$. Această valoare apare dacă $\theta = -1$. Pentru orice valoare a lui ρ_1 între $-0{,}5$ şi $0{,}5$, există două valori ale lui θ care ar putea produce acea autocorelație. Aceasta se întâmplă deoarece valoarea $\rho_1 = \dfrac{\theta}{1+\theta^2}$ rămâne neschimbată dacă se înlocuieşte θ prin $1/\theta$. În acest mod rezultă că întotdeauna se pot găsi două procese MA(1) care au aceeaşi funcție de autocorelație. Se impune condiția de inversabilitate pentru a ne asigura că există un model MA unic, pentru o ACF dată.

Inversabilitatea procesului MA(1)

Dacă folosim operatorul de întârziere, sau operatorul lag, L, vom putea scrie modelul MA(1):

$y_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$ sub forma $y_t = (1+\theta L)\varepsilon_t$.

Procesul MA este inversabil când rădăcina **polinomului de medie mobilă** $\Theta(L) = 1 + \theta L = 0$ se află în afara cercului unitate, adică avem $|1/\theta| > 1$. Aceasta implică condiția pentru parametru: $-1 < \theta < 1$.

Procesul este inversabil dacă rădăcina ecuației $\Theta(z) = 1 + \theta z = 0$ este în afara cercului unitate, adică avem $|z| > 1$ sau echivalent, $|\theta| < 1$.

Reprezentarea procesului MA(1) sub forma unui proces AR(∞).

Fie procesul $y_t = (1+\theta L)\varepsilon_t$.

Considerăm reprezentarea autoregresivă $y_t = \pi_1 y_{t-1} + \pi_2 y_{t-2} + \pi_3 y_{t-3} + \cdots + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$.

Pentru a obține o reprezentare autoregresivă convergentă trebuie impusă condiția $|\theta| < 1$. Aceasta reprezintă **condiția de inversabilitate** a polinomului de medie mobilă $\Theta(L) = (1+\theta L)$.

$(1 - \pi_1 L - \pi_2 L^2 - \pi_3 L^3 - \cdots)y_t = \varepsilon_t$. Ponderile π_j se calculează din identitatea:

$(1 - \pi_1 L - \pi_2 L^2 - \pi_3 L^3 - \cdots)(1+\theta L) = 1$. Prin identificarea coeficienților lui L^j, se obțin ponderile π_j. Aceste ponderi converg dacă $|\theta| < 1$. Rezultă că un proces stochastic staționar autoregresiv infinit pentru y_t poate fi rescris ca o sumă ponderată a unui proces zgomot alb şi deci, ca un proces de medie mobilă. Oricărui model de medii mobile îi corespunde o reprezentare prin filtru liniar cu un număr finit de ponderi.

O condiție necesară ca un proces MA să fie reprezentat ca un proces AR(∞) este ca procesul MA să fie inversabil. Reprezentarea MA este convenabilă pentru a calcula varianțele şi covarianțele seriei. Reprezentarea AR este convenabilă pentru a face previziuni cu privire la serie.

Modelul de medie mobilă de ordinul doi, MA(2)

Fie $\theta_1, \theta_2 \in R$, cu $\theta_2 \neq 0$ şi fie $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$, zgomot alb. Atunci procesul

$y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2}$

se spune că este un proces de medie mobilă de ordinul 2 şi se notează MA(2).

Cerințe: Să se determine media, varianța, autocovarianțele şi funcția de autocorelație ale lui y_t.

Pentru un proces MA(2), se obțin următoarele valori:

$$E(y_t) = E(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2}) = E(\varepsilon_t) + \theta_1 E(\varepsilon_{t-1}) + \theta_2 E(\varepsilon_{t-2}) = 0$$

$$\gamma_0 = Var(y_t) = E(y_t^2) = E(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2})^2 = \ldots = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma^2$$

$$\gamma_1 = Cov(y_t, y_{t-1}) = E(y_t y_{t-1}) = E(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-2} + \theta_2 \varepsilon_{t-3}) = (\theta_1 + \theta_1 \theta_2)\sigma^2$$

$$\gamma_2 = Cov(y_t, y_{t-2}) = E(y_t y_{t-2}) = E(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-2} + \theta_1 \varepsilon_{t-3} + \theta_2 \varepsilon_{t-4}) = \theta_2 \sigma^2$$

$$\gamma_3 = Cov(y_t, y_{t-3}) = E(y_t y_{t-3}) = 0$$

$$\gamma_k = \begin{cases} (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma^2, & k = 0 \\ (\theta_1 + \theta_1 \theta_2)\sigma^2, & k = 1 \\ \theta_2 \sigma^2, & k = 2 \\ 0, & k > 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \rho_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ (\theta_1 + \theta_1 \theta_2)/(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2), & k = 1 \\ \theta_2 /(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2), & k = 2 \\ 0, & k > 2 \end{cases}$$

Cu ajutorul operatorului lag L, vom scrie modelul sub forma $y_t = (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2)\varepsilon_t = \Theta(L)\varepsilon_t$, unde $\Theta(L) = (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2)$ este polinomul de medie mobilă de ordinul doi.

Notăm cu λ_1, λ_2 rădăcinile ecuației $P(\lambda) = (\lambda^2 + \theta_1 \lambda + \theta_2) = 0$. Polinomul de medie mobilă poate fi factorizat, astfel încât obținem ecuația $\Theta(z) = (1 + \theta_1 z + \theta_2 z^2) = (1 - \lambda_1 z)(1 - \lambda_2 z) = 0$.

Condiția de inversabilitate este îndeplinită dacă rădăcinile λ_1, λ_2 satisfac condițiile $|\lambda_1| < 1$ şi $|\lambda_2| < 1$, ceea ce este echivalent cu $|z_1| > 1$ şi $|z_2| > 1$.

Cei doi parametri θ_1 şi θ_2 ai modelului satisfac următoarele condiții:

$\theta_1 + \theta_2 > -1$, $\theta_2 - \theta_1 > -1$ şi $|\theta_2| < 1$.

Reprezentarea procesului MA(2) sub forma unui proces AR(∞). Fie $y_t = (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2)\varepsilon_t$.

Considerăm reprezentarea $y_t = \pi_1 y_{t-1} + \pi_2 y_{t-2} + \pi_3 y_{t-3} + \cdots + \varepsilon_t$, cu $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$. O formă echivalentă este $(1 - \pi_1 L - \pi_2 L^2 - \pi_3 L^3 - \cdots)y_t = \varepsilon_t$. Ponderile π_j se calculează din identitatea $(1 - \pi_1 L - \pi_2 L^2 - \pi_3 L^3 - \cdots)(1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2) = 1$. Prin identificarea coeficienților lui L^j, se obțin ponderile: $\pi_1 = \theta_1$, $\pi_2 = -\theta_1 \pi_1 + \theta_2 = \theta_2 - \theta_1^2$, rezultând $\pi_j = -\theta_1 \pi_{j-1} - \theta_2 \pi_{j-2}$, pentru $j > 2$.

Modelul de medie mobilă de ordinul q, notat MA(q):

Fie $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_q \in R$, cu $\theta_q \neq 0$ şi fie $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$, zgomot alb. Atunci procesul

$y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$

se spune că este un proces de medie mobilă de ordinul q şi se notează MA(q).

Putem rescrie sub forma: $y_t = \Theta(L)\varepsilon_t$, unde

$\Theta(L) = (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q)$ este polinomul de medie mobilă de ordinul q.

Un proces MA este staționar deoarece orice două elemente y_t şi y_s reprezintă aceeaşi funcție de vectorii $(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \cdots, \varepsilon_{t-q})$ şi $(\varepsilon_s, \varepsilon_{s-1} \cdots, \varepsilon_{s-q})$ care sunt identic distribuiți.

Ne interesează un proces MA inversabil. Când un proces este inversabil, înseamnă că este posibil să se exprime valoarea curentă a variabilei y_t cu ajutorul şocului curent ε_t şi al valorilor ei întârziate $y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots$. Atunci, se spune că modelul are o reprezentare autoregresivă. În acest fel se pot asocia evenimente din prezent cu ce s-a întâmplat în trecut.

Procese inversabile

Un proces MA(q) nu este unic determinat prin funcţia sa de autocorelaţie. În scopul obţinerii unei relaţii unice între procesele de MA şi ACF, Box şi Jenkins au introdus condiţia de inversabilitate. Aceasta este utilă pentru procedurile de estimare când un proces MA(q) va fi estimat din funcţia de autocorelaţie empirică.

Procesul MA(q), $y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$, cu $\theta_q \neq 0$, se spune că este inversabil dacă toate rădăcinile $z_1, z_2, ..., z_q \in$ C, ale ecuaţiei $\Theta(z) = (1 + \theta_1 z + \theta_2 z^2 + \cdots + \theta_q z^q) = 0$ se află în afara cercului unitate, adică avem $|z_i| > 1$, pentru $1 \le i \le q$.

Condiţia de inversabilitate pentru un model MA(q): Un model, **MA(q) este inversabil** dacă cele q rădăcini ale ecuaţiei caracteristice $\Theta(z) = (1 + \theta_1 z + \theta_2 z^2 + \cdots + \theta_q z^q) = 0$ se află în afara cercului unitate ($|z| > 1$). În acest caz se spune că polinomul $\Theta(z)$ este inversabil iar procesul MA(q) poate fi scris ca un proces AR(∞), în mod unic. Condiţia de inversabilitate poate fi formulată alternativ pentru $[\Theta(L)]^{-1} y_t = \varepsilon_t$.

Dacă avem $y_t = \prod_{i=1}^{q} (1 - \lambda_i L) \varepsilon_t$, unde λ_i sunt rădăcinile ecuaţiei

$$P(\lambda) = \lambda^q + \theta_1 \lambda^{q-1} + \theta_2 \lambda^{q-2} \cdots + \theta_{q-1} \lambda + \theta_q = 0,$$

atunci condiţia ca polinomul să fie inversabil, este ca $|\lambda_i| < 1$ pentru toţi $i = 1, 2, ..., q$.

Exprimarea modelului MA ca un model AR(∞) arată, în mod evident, că există o legătură directă între valoarea curentă a lui y_t şi toate valorile sale anterioare.

Notăm că inversabilitatea nu are influenţă asupra stationarităţii unui proces. *Toate procesele de medie mobilă cu coeficienţi finiţi sunt staţionare*. Dacă un proces ARMA este stationar sau nu, aceasta depinde numai de componenta AR a modelului.

Un proces MA(q) cu coeficienţi finiţi este totdeauna staţionar, deoarece parametrii unui proces MA finit verifică totdeauna condiţiile de staţionaritate.

Modele autoregresive (Auto Regressive - AR)

Modelele autoregresive sunt modele de regresie în care este explicată o variabilă prin trecutul său. Valoarea curentă y_t este exprimată ca o combinaţie liniară, finită, de valorile sale din trecut şi un şoc aleator ε_t.

Seriile autoregresive prezintă o importanţă deosebită din mai multe motive:

1. Aceste serii au o interpretare naturală – următoarea valoare observată este o perturbaţie a unei funcţii simple a celor mai recente observaţii.
2. Parametrii acestor serii sunt uşor de estimat. În acest scop pot fi folosite pachetele de regresie standard.
3. Predicţiile pentru aceste serii sunt uşor de efectuat, folosindu-se pachetele de regresie standard.

Modelul autoregresiv de ordinul unu, AR(1).

Cel mai smplu model autoregresiv, modelul AR(1), este de forma

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t, \; t = 2, 3, \ldots, n,$$

unde seria $\{\varepsilon_t\}$ este zgomot alb cu media zero şi varianţa σ_ε^2. Acest model are forma unui model de regresie liniară simplă, în care y_t este variabila explicată iar y_{t-1} este variabila explicativă. Condiţionat de y_{t-1}, avem:

$$E(y_t \mid y_{t-1}) = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} \text{ şi } Var(y_t \mid y_{t-1}) = Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2.$$

În descompunerea lui y_t, termenul întârziat ϕy_{t-1} este partea memorizată iar termenul ε_t este **inovaţia**. Este important de menţionat că y_t depinde de tot trecutul său, dar memoria ansamblului trecutului este transmisă în totalitate prin observaţia precedentă y_{t-1}. Deoarece o observaţie nu depinde de trecut decât prin intermediul observaţiei precedente, se poate arăta că, în acest model, toţi coeficienţii de autocorelaţie parţială de ordin $k > 1$ sunt nuli.

După substituții succesive găsim că $y_t = \varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\phi^k \varepsilon_{t-k}$. Această serie converge dacă $|\phi|<1$, deoarece $\sum|\phi|^{2k} < \infty$. Limita seriei este staționară şi satisface relația $y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$. Astfel, dacă $|\phi|<1$, atunci există o soluție staționară a ecuației $y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$.

Reținem: Un proces AR(1) **este staționar** dacă $|\phi|<1$ şi **nestaționar** dacă $\phi = 1$.

Folosim operatorul de întârziere *L* pentru a scrie **polinomul autoregresiv** al lui y_t:

$\Phi(L) = (1-\phi L)$.

Modelul AR(1) poate fi scris ca $(1-\phi L)y_t = \varepsilon_t$.

Dacă $|\phi|<1$ şi $(1-\phi L)$ este inversabil, procesul y_t se poate scrie sub forma:

$$y_t = (1-\phi L)^{-1}\varepsilon_t = (1+\phi L + \phi^2 L^2 + \cdots)\varepsilon_t = \varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\phi^k \varepsilon_{t-k}$$

Un proces AR(1) este totdeauna inversabil când parametrul modelului îndeplineşte condiția $|\phi|<1$. Spunem că rădăcina polinomului este $1/\phi$ deoarece $\Phi(z)=0$ când $z = 1/\phi$.

Din reprezentarea lui y_t prin filtu liniar, se pot calcula momentele lui y_t folosind sumele infinite.

Media este: $E(y_t) = \sum_{k=0}^{\infty}\phi^k E(\varepsilon_{t-k}) = 0$,

Varianța este $Var(y_t) = \sum_{k=0}^{\infty}\phi^{2k} Var(\varepsilon_{t-k}) = \dfrac{\sigma^2}{1-\phi^2}$ dacă $|\phi|<1$.

Deci, dacă $|\phi|<1$, media şi varianța sunt **constante**, condiții necesare pentru staționaritate.

Un proces AR(1) este staționar dacă rădăcina polinomului autoregresiv $\Phi(z) = (1-\phi z)$ este mai mare decât 1, în modul. Această condiție este echivalentă cu condiția că rădăcina ecuației $(\lambda - \phi) = 0$ este $|\phi|<1$.

• **Funcția de Autocorelație** pentru un proces AR(1):

Înmulțim ambii membri ai relației $y_t - \phi y_{t-1} = \varepsilon_t$ cu y_{t-k} şi apoi aplicăm operatorul de medie.

$y_t y_{t-k} - \phi y_{t-1} y_{t-k} = \varepsilon_t y_{t-k}$

$E(y_t y_{t-k}) - \phi E(y_{t-1} y_{t-k}) = E(\varepsilon_t y_{t-k})$

$\gamma_k - \phi\gamma_{k-1} = E(\varepsilon_t y_{t-k})$

Pentru $k = 0$ obținem:

$E(\varepsilon_t y_t) = E(\varepsilon_t(\varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + \cdots)) = E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2$.

Pentru $k > 0$ obținem:

$E(\varepsilon_t y_{t-k}) = E(\varepsilon_t(\varepsilon_{t-k} + \phi\varepsilon_{t-k-1} + \phi^2\varepsilon_{t-k-2} + \cdots)) = 0$.

Rezultă că avem:

$\gamma_0 - \phi\gamma_{-1} = \sigma_\varepsilon^2 = \gamma_0 - \phi\gamma_1$

$\gamma_k - \phi\gamma_{k-1} = 0$ pentru $k = 1,2,\ldots$

Pentru $k=1$ obținem $\gamma_1 = \phi\gamma_0$ şi înlocuim în penultima ecuație. Rezultă $\gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2/(1-\phi^2)$.

Avem relația de recurență $\gamma_k = \phi\gamma_{k-1}$, iar prin împărțitea la γ_0 rezultă că ACF este:

$\rho_k = \phi\rho_{k-1} = \phi^2\rho_{k-2} = \cdots = \phi^k, \forall k \Rightarrow$ **ACF descreşte geometric cu k**.

Funcția de autocorelație a unui proces AR(1) slab staționar începe de la 1 şi se diminuează în progresie geometrică, cu rata ϕ. Valoarea lui y_t depinde de valorile din trecut şi intensitatea acestei dependențe scade cu timpul. În consecință, un şoc într-un proces AR(1) afectează toate observațiile viitoare cu un efect descrescător. Coeficienții de autocorelație converg la zero dacă seria este staționară. Corelograma va arăta o descreştere exponențială cu valori pozitive dacă ϕ este pozitiv şi o descreştere sinusoidală (cu oscilații negativ-pozitiv) dacă ϕ este negativ. Dacă ϕ este pozitiv, valorile adiacente sunt pozitiv corelate, iar dacă

ϕ este negativ, valorile adiacente sunt negativ corelate. Ambele descreşteri sunt lente dacă valoarea lui ϕ este apropiată de 1 sau de -1. Cu cât este mai mare valoarea lui ϕ, cu atât este mai puternică corelația din proces.

Observație: Situația $|\phi|>1$ (comportament exploziv) este considerată foarte rar în economie.

• **Funcția de Autocorelație parțială** pentru un proces AR(1)

Reamintim că PACF satisface

$\phi_{11} = \rho_1$ şi $\phi_{22} = (\rho_2 - \rho_1^2)/(1-\rho_1^2)$.

Aici avem: $\phi_{11} = \phi$ şi $\phi_{22} = (\phi^2 - \phi^2)/(1-\phi^2) = 0$, $\phi_{kk} = 0$ pentru $k > 1$.

Pentru un model AR(1):

• **ACF scade treptat la zero**

• **PACF se anulează după lag-ul 1**

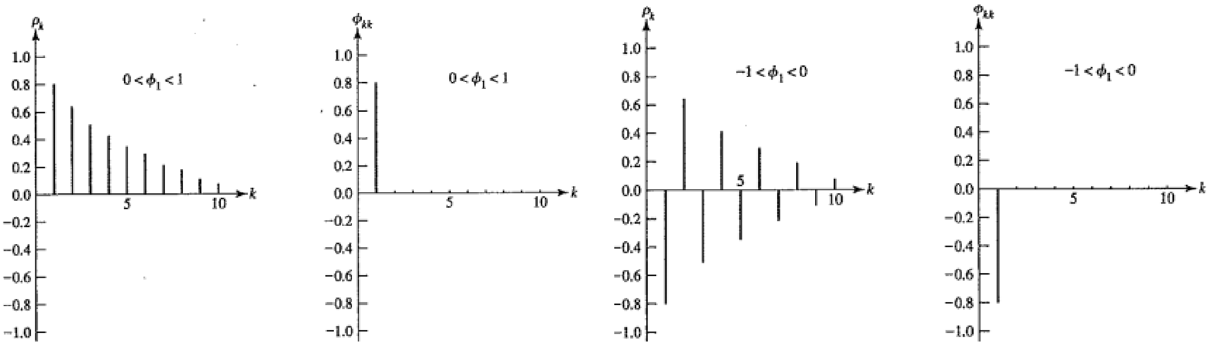

Fig.1. Funcțiile ACF si PACF pentru un process AR(1)

<u>**Modelul autoregresiv de ordinul 2, AR(2)**</u>

Modelul AR(2) poate fi scris în mai multe moduri echivalente:

$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$

$y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} = \varepsilon_t$

$(1-\phi_1 L - \phi_2 L^2) y_t = \varepsilon_t$

$\Phi(L) y_t = \varepsilon_t$, unde $\Phi(L) = (1-\phi_1 L - \phi_2 L^2)$ este polinomul autoregresiv al procesului AR(2).

Cerințe:

1) Să se determine relația dintre parametrii modelului astfel încât procesul să fie staționar.
2) Să se calculeze media şi varianța procesului AR(2).
3) Să se determine ACF şi PACF pentru un proces AR(2).
4) Să se scrie şi să se rezolve sistemul de ecuații Yule-Walker.

Procesul AR(2) este staționar iar polinomul $\Phi(L) = (1-\phi_1 L - \phi_2 L^2)$ este inversabil dacă rădăcinile ecuației $\Phi(z) = (1-\phi_1 z - \phi_2 z^2) = (1-\lambda_1 z)(1-\lambda_2 z) = 0$ se află în afara cercului unitate, adică $|z_1|>1$ şi $|z_2|>1$ sau rădăcinile ecuației $P(\lambda) = \lambda^2 - \phi_1 \lambda - \phi_2 = 0$ se află în interiorul cercului unitate, adică $|\lambda_1|<1$ şi $|\lambda_2|<1$.

Pentru ca ultimele două condiții să fie îndeplinite trebuie ca cei doi parametri ai modelului să satisfacă următoarele condiții: $\phi_1 + \phi_2 < 1$, $\phi_2 - \phi_1 < 1$ şi $|\phi_2| < 1$.

Dacă rădăcinile ecuației caracteristice sunt reale, ele se obțin prin relațiile: $\lambda_{1,2} = (\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2})/2$.

Dacă rădăcinile ecuației caracteristice sunt numere complexe conjugate, ele se obțin prin relațiile:

$\lambda_1 = a + bi$, $\lambda_2 = a - bi$, $a = \phi_1/2$, $b = (\sqrt{-\phi_1^2 - 4\phi_2})/2$, deci $\lambda_{1,2} = (\phi_1 \pm i\sqrt{-\phi_1^2 - 4\phi_2})/2$.

Calcularea autocorelațiilor unui proces AR(2)

Înmulțim ecuația $y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} = \varepsilon_t$ prin y_{t-k}, după care aplicăm operatorul de medie şi împărțim prin varianța γ_0, a lui y_t. Rezultă următoarele relații:

$y_t y_{t-k} - \phi_1 y_{t-1} y_{t-k} - \phi_2 y_{t-2} y_{t-k} = \varepsilon_t y_{t-k}$

$E(y_t y_{t-k}) - \phi_1 E(y_{t-1} y_{t-k}) - \phi_2 E(y_{t-2} y_{t-k}) = E(\varepsilon_t y_{t-k})$

$\frac{E(y_t y_{t-k})}{\gamma_0} - \phi_1 \frac{E(y_{t-1} y_{t-k})}{\gamma_0} - \phi_2 \frac{E(y_{t-2} y_{t-k})}{\gamma_0} = \frac{E(\varepsilon_t y_{t-k})}{\gamma_0}$.

Pentru $k = 0$ obținem: $E(\varepsilon_t y_t) = \sigma^2$. Avem $\gamma_0 - \phi_1 \gamma_1 - \phi_2 \gamma_2 = \sigma^2 \Rightarrow \gamma_0 (1 - \phi_1 \rho_1 - \phi_2 \rho_2) = \sigma^2$.

Pentru $k > 0$ obținem: $E(\varepsilon_t y_{t-k}) = 0$.

Deoarece $E(\varepsilon_t y_{t-k}) = E(y_t) = 0$ pentru toți t și $k > 0$, obținem **ecuațiile Yule-Walker**:

$\rho_k - \phi_1 \rho_{k-1} - \phi_2 \rho_{k-2} = 0$ pentru $k > 0$.

Determinarea funcției ACF a unui model AR(2):

$k = 1 \Rightarrow \rho_1 - \phi_1 \rho_0 - \phi_2 \rho_1 = 0 \Rightarrow \rho_1 (1 - \phi_2) = \phi_1 \Rightarrow \rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}$

$k = 2 \Rightarrow \rho_2 - \phi_1 \rho_1 - \phi_2 \rho_0 = 0 \Rightarrow \rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \Rightarrow \rho_2 = \frac{\phi_1^2}{1 - \phi_2} + \phi_2$

$k > 2 \Rightarrow \rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2}$.

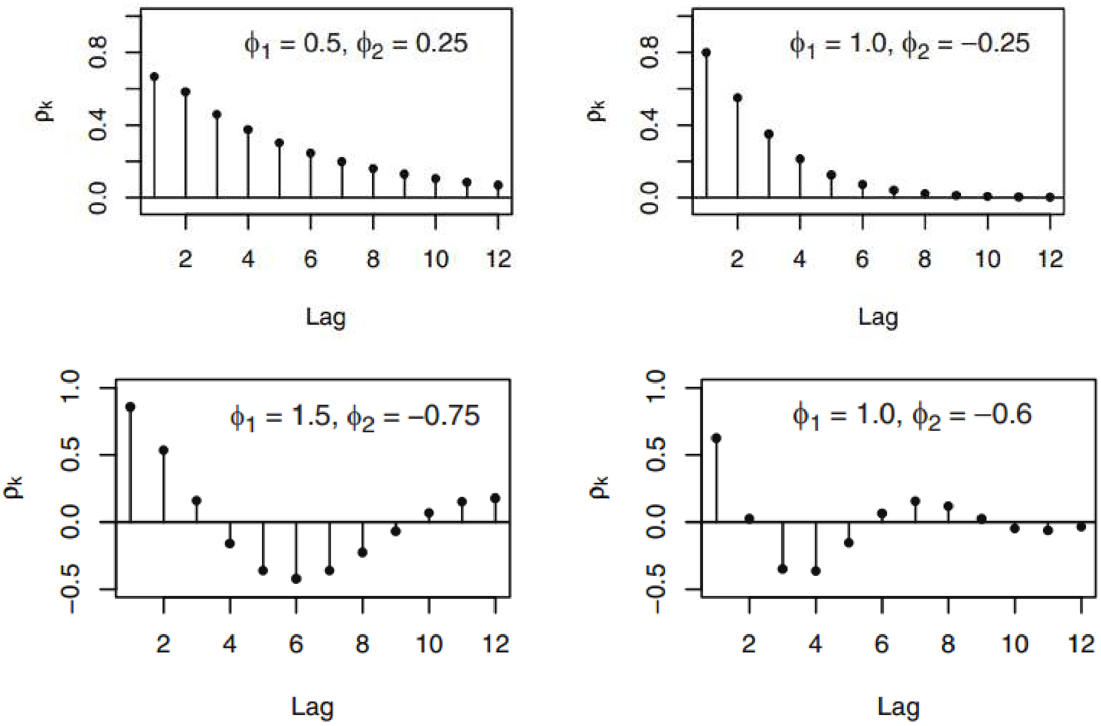

Fig. 2. ACF pentru modele AR(2)

Modul în care se comportă funcția ACF pentru diferite valori ale coeficienților ϕ_1 și ϕ_2, ai modelului AR(2), poate fi studiat prin observarea soluției ecuației $\gamma_k - \phi_1 \gamma_{k-1} - \phi_2 \gamma_{k-2} = 0$, pentru k=1,2,..., adică $\rho_k = A_1 \lambda_1^k + A_2 \lambda_2^k$, k=0,1,2,..., unde A_1 și A_2 sunt constante care se pot determina din condițiile inițiale $\rho_0 = 1$ și $\rho_{-1} = \rho_1$.

Dacă rădăcinile λ_1 și λ_2 sunt egale, adică $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, atunci $\rho_k = (A_1 + A_2 k)\lambda^k$, k=0,1,2,.... Aceste ecuații arată că ACF a unui model AR(2) va descrește exponențial când $k \to \infty$.

Dacă rădăcinile λ_1 și λ_2 sunt numere complexe conjugate, ACF va fi o funcție sinusoidală descrescătoare.

Determinarea funcției PACF a unui model AR(2):

Scriem ecuațiile Yule-Walker: $\begin{cases} \rho_1 = \phi_1 + \rho_1 \phi_2 \\ \rho_2 = \rho_1 \phi_1 + \phi_2 \end{cases}$ sau sub forma $\begin{cases} \phi_1 + \rho_1 \phi_2 = \rho_1 \\ \rho_1 \phi_1 + \phi_2 = \rho_2 \end{cases}$

Coeficienții de autocorelație parțială sunt:

$$\phi_{11} = \rho_1 , \quad \phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2} \neq 0 , \quad \phi_{kk} = 0 \text{ pentru } k > 2 .$$

Problemă: Se consideră modelul $y_t = 0{,}6\, y_{t-1} - 0{,}08\, y_{t-2} + \varepsilon_t$

Să se verifice dacă este îndeplinită condiția de staționaritate.

Avem $\phi_1 = 0{,}6$ și $\phi_2 = -0{,}08$

$$\Phi(L) = (1-\phi_1 L - \phi_2 L^2) \Rightarrow \Phi(z) = (1-\phi_1 z - \phi_2 z^2) = (1-\lambda_1 z)(1-\lambda_2 z) = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \phi_1 \lambda - \phi_2 = 0 \Rightarrow P(\lambda) = \lambda^2 - 0{,}6\lambda + 0{,}08 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0{,}4 \text{ și } \lambda_2 = 0{,}2 \Rightarrow |\lambda_1| < 1 \text{ și } |\lambda_2| < 1 .$$

Rezultă $z_1 = 1/\lambda_1 = 1/0{,}4 = 2{,}5$ și $z_2 = 1/\lambda_2 = 1/0{,}2 = 5$, deci $|z_1| > 1$ și $|z_2| > 1$.

Condiția de staționaritate este îndeplinită.

Problemă: Se consideră modelul $y_t = 1{,}5\, y_{t-1} - 0{,}75\, y_{t-2} + \varepsilon_t$

a) Verificați dacă este îndeplinită condiția de staționaritate.

b) Calculați ACF și reprezentați corelograma asociată.

c) Calculați PACF și reprezentați corelograma corespunzătoare.

a) Avem $\phi_1 = 1{,}5$ și $\phi_2 = -0{,}75$

$$\Phi(L) = (1-\phi_1 L - \phi_2 L^2) \Rightarrow \Phi(z) = (1-\phi_1 z - \phi_2 z^2) = (1-\lambda_1 z)(1-\lambda_2 z) = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \phi_1 \lambda - \phi_2 = 0 \Rightarrow P(\lambda) = \lambda^2 - 1{,}5\lambda + 0{,}75 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = a + bi = 0{,}75 + 0{,}43i \text{ și } \lambda_2 = a - bi = 0{,}75 - 0{,}43i \Rightarrow |\lambda| = R = \sqrt{a^2+b^2} = 0{,}8645$$

Condiția de staționaritate este îndeplinită.

b) ACF: $\rho_1 = 0{,}8571$; $\rho_2 = 0{,}5357$; $\rho_3 = 0{,}1607$; $\rho_4 = -0{,}1607$; $\rho_5 = -0{,}3616$

c) PACF: $\phi_{11} = \rho_1 = 0{,}8571$; $\phi_{22} = -0{,}75$; $\phi_{kk} = 0$ pentru $k > 2$

Modelul autoregresiv de ordinul p, AR(p)

Un proces stochastic cu valori reale y_t se spune că este un proces autoregresiv de ordinul *p* și se notează prin AR(p) dacă există $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_p \in \mathrm{R}$, cu $\phi_p \neq 0$ și un proces al erorilor zgomot alb ε_t, astfel încât

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t , \quad t \in Z .$$

Observăm că valoarea unui proces AR(p) la momentul *t* este regresată în raport cu *p* valori ale sale din trecut plus un şoc aleator.

Folosind operatorul lag $\Phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p$ această relație se poate scrie sub forma

$$\Phi(L) y_t = y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} - \cdots - \phi_p y_{t-p} = \varepsilon_t \text{ sau } \Phi(L) y_t = \varepsilon_t .$$

Modelul $\Phi(L) y_t = \varepsilon_t$ conține $p+2$ parametri necunoscuți $\mu_y, \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p, \sigma_\varepsilon^2$, care în practică vor fi estimați din date. Se definește polinomul caracteristic ataşat unui proces AR(p) prin relația:

$$P(z) = z^p - \phi_1 z^{p-1} - \phi_2 z^{p-2} - \cdots - \phi_p .$$

Între polinomul caracteristic al procesului și polinomul lag autoregresiv utilizat pentru definirea procesului există relația: $P(z) = z^p \Phi(1/z)$.

În general, **polinomul autoregresiv** $\Phi(L)$ **este inversabil** dacă toate rădăcinile z, ale ecuației $\Phi(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \cdots - \phi_p z^p = 0$ sunt mai mari decât unu în valoare absolută. Comparând cu polinomul $P(\lambda) = (\lambda^p - \phi_1 \lambda^{p-1} - \phi_2 \lambda^{p-2} - \cdots - \phi_p) = 0$ este logic că toate rădăcinile z ar trebui să se găsească în afara cercului unitate deoarece ele sunt inversele valorilor proprii corespunzătoare λ, sau $z = 1/\lambda$.

În timp ce un proces MA(q) este în mod automat staționar, un proces AR(p) nu este.

Teoremă (Condiția de staționaritate): Ecuația $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$ are o soluție staționară dacă toate rădăcinile ecuației $\Phi(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \cdots - \phi_p z^p = 0$ sunt în afara cercului unitate.

Observație. Dacă z este rădăcină a ecuației $\Phi(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \cdots - \phi_p z^p = 0$, unde puterile crescătoare ale lui z sunt asociate cu indici crescători ai coeficienților, atunci $\lambda = 1/z$ este o rădăcină a ecuației $P(\lambda) = \lambda^p - \phi_1 \lambda^{p-1} - \phi_2 \lambda^{p-2} - \cdots - \phi_p = 0$.

Calcularea autocorelațiilor unui proces AR(p) . Ecuațiile Yule-Walker

$$\begin{cases} \rho_1 = \phi_1 + \rho_1 \phi_2 + \cdots + \rho_{p-1}\phi_p \\ \rho_2 = \rho_1 \phi_1 + \phi_2 + \cdots + \rho_{p-2}\phi_p \\ \vdots \\ \rho_p = \rho_{p-1}\phi_1 + \rho_{p-2}\phi_2 + \cdots + \phi_p \end{cases}$$

Funcțiile ACF şi PACF pot fi obținute rezolvând sistemul de **ecuații Yule-Walker**. Aceste ecuații exprimă coeficienții de autocorelație ρ_k sub forma unor funcții de coeficienții autoregresivi ϕ_i.

Definim matricea coeficienților liniari de autocorelație prin $R(p)$, vectorul parametrilor modelului prin ϕ şi vectorul coeficienților de autocorelație prin ρ. Sistemul de ecuații Yule-Walker poate fi scris în formă matriceală ca $R(p) \cdot \phi = \rho$. Această ecuație matriceală oferă un estimator al coeficienților $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_p$, înlocuind autocorelațiile ρ_k prin valorile empirice $\widehat{\rho}_k$, corespunzătoare.

Dacă matricea $R(p)$ este inversabilă, parametrii $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_p$, ai modelului, vor fi estimați prin relația: $\phi = R^{-1}(p) \cdot \rho$. Se observă că parametrii modelului pot fi estimați în funcție de primii p coeficienți de autocorelație. Componenta k din vectorul ϕ, al parametrilor modelului, este notată prin ϕ_{kk} şi reprezintă coeficientul de autocorelație parțială de ordinul *k*.

Se poate afla coeficientul ϕ_{kk} aplicând regula lui Cramer:

$\phi_{kk} = \rho_{kk} = \dfrac{|R^*(p)|}{|R(p)|}$, $R^*(p)$ fiind matricea $R(p)$ cu ultima coloană înlocuită prin vectorul ρ.

Din definiția lui ϕ_{kk} rezultă funcțiile de autocorelație parțială ale proceselor AR.

PACF a procesului AR(1) este: $\phi_{11} = \rho_1 = \phi$ şi $\phi_{kk} = 0$ pentru $k > 1$.

PACF a procesului AR(2) este: $\phi_{11} = \rho_1$, $\phi_{22} = (\rho_2 - \rho_1^2)/(1 - \rho_1^2) \neq 0$ şi $\phi_{kk} = 0$ pentru $k > 2$.

PACF a procesului AR(p) este: $\phi_{11} = \rho_1$, $\phi_{22} \neq 0$, ..., $\phi_{pp} \neq 0$ şi $\phi_{kk} = 0$ pentru $k > p$.

Coeficienții de autocorelație parțială, de ordin mai mare decât ordinul procesului autoregresiv în cauză, sunt zero, deoarece nu există o corelație directă între y_t şi y_{t-k} pentru $k > p$. Aceasta este o caracteristică foarte utilă a PACF, care poate ajuta în procesul de identificare a ordinului *p*, al unui model AR(p). Folosim faptul că $\widehat{\phi}_{pp} \approx \phi_{pp} \neq 0$, în timp ce pentru $k > p$, ar trebui să aibă valori foarte apropiate de zero adică $\widehat{\phi}_{kk} \approx \phi_{kk} = 0$.

Reținem că un proces autoregresiv poate fi descris prin două funcții:

i) o funcție ACF infinită, reprezentată sau printr-o combinație de exponențiale sau de funcții sinusoidale, care descresc la zero. ACF descreşte la zero exponențial când rădăcinile polinomului $\Phi(L) = 0$ sunt reale şi descreşte cu fluctuații sinusoidale când acestea sunt complexe.

ii) o funcție PACF care ia valoarea zero pentru lag-uri mai mari decât ordinul procesului, adică $\phi_{kk} = 0, \forall k > p$.

PACF pentru un proces de medie mobilă Pentru procesele MA funcțiile PACF au expresii complicate.

Se poate observa că ACF pentru un model AR are aceeaşi formă cu PACF pentru un model MA şi că ACF pentru un model MA are aceeaşi formă cu PACF pentru un model AR.

Pentru un proces AR(p) avem ACF infinită, în timp ce PACF devine zero după lag-ul *p*. Pentru un proces MA(q), ACF devine zero după lag-ul *q*, în timp ce PACF descreşte asimptotic către zero.

Modele autoregresive de medie mobilă (Auto Regressive Moving Average - ARMA(p,q))

Un model de tip ARMA(p,q) are o componentă de tip autoregresiv şi o componentă de tip medie mobilă. Componenta autoregresivă se justifică prin faptul că variabilele economice au în evoluţie un puternic caracter inerţial iar componenta de medie mobilă este efectul unor evenimente neaşteptate, nepredictibile, asupra unei variabile economice.
Modelul ARMA este cel mai indicat model pentru a se realiza predicţii în economie.
Fie procesul ε_t zgomot alb, $p,q \geq 0$ numere întregi şi coeficienţii $\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_p,\theta_1,\theta_2,\cdots.\theta_q \in$R.
Un proces stochastic Y_t cu valori reale este un proces autoregresiv de medie mobilă de ordin p,q şi se notează ARMA(p,q) dacă satisface o ecuaţie de forma:
$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$.
Putem rescrie această ecuaţie folosind operatorul lag, polinomul autoregresiv de ordin p şi polinomul de medie mobilă de ordin q:
$\Phi(L) y_t = \Theta(L)\varepsilon_t$, $\qquad\qquad \varepsilon_t \sim WN(0,\sigma_\varepsilon^2)$
Modelul este staţionar dacă componenta AR este staţionară, adică rădăcinile ecuaţiei $\Phi(z) = 0$ sunt în afara cercului unitate. Pentru un model ARMA(p,q) avem condiţia necesară $\sum_{i=1}^{p} \phi_i < 1$.
Modelul ARMA este inversabil dacă componenta MA este inversabilă, adică rădăcinile ecuaţiei $\Theta(z) = 0$ sunt în afara cercului unitate. Caracteristicile unui proces ARMA vor fi o combinaţie a celor de la componentele AR şi MA.
ACF descreşte la zero când decalajul tinde la infinit, scăzând exponenţial când rădăcinile ecuaţiei $\Phi(z) = 0$ sunt reale şi cu fluctuaţii când acestea sunt complexe; PACF descreşte la zero, exponenţial când rădăcinile ecuaţiei $\Theta(z) = 0$ sunt reale şi cu fluctuaţii când acestea sunt complexe. Obţinerea celor două funcţii necesită calcule algebrice complicate.
Funcţia ACF (singură), poate face distincţia dintre un proces AR pur şi un proces MA pur.
Funcţia PACF este utilă pentru a distinge un proces AR(p) de un proces ARMA(p,q). Astfel, un proces AR(p) are o ACF descrescătoare geometric şi o PACF care se anulează după p laguri, în timp ce un proces ARMA(p,q) are ambele funcţii ACF şi PACF descrescătoare geometric.
Clasa de procese ARMA este folosită pentru a modela procese stochastice staţionare.

Modele ARMA(1,1)
Fie $\{y_t\}$ un proces stochastic de tip ARMA(1,1). $\quad y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$
a) Să se scrie modelul cu ajutorul operatorului de decalaj L. $y_t - \phi y_{t-1} = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1} \Rightarrow (1-\phi L) y_t = (1+\theta L)\varepsilon_t$
b) Să se determine autocovarianţele procesului, apoi să se determine autocorelaţiile procesului.
Am obţinut exprimarea cu ajutorul filtrului liniar: $y_t = \varepsilon_t + (\phi+\theta)\varepsilon_{t-1} + \phi(\phi+\theta)\varepsilon_{t-2} + \phi^2(\phi+\theta)\varepsilon_{t-3} + \cdots$
Obţinem: $E(\varepsilon_t y_t) = E(\varepsilon_t(\varepsilon_t + (\phi+\theta)\varepsilon_{t-1} + \phi(\phi+\theta)\varepsilon_{t-2} + \phi^2(\phi+\theta)\varepsilon_{t-3} + \cdots)) = \sigma^2$
$E(\varepsilon_{t-1} y_t) = E(\varepsilon_{t-1}(\varepsilon_t + (\phi+\theta)\varepsilon_{t-1} + \phi(\phi+\theta)\varepsilon_{t-2} + \phi^2(\phi+\theta)\varepsilon_{t-3} + \cdots)) = (\phi+\theta)\sigma^2$
$y_{t-1} = \varepsilon_{t-1} + (\phi+\theta)\varepsilon_{t-2} + \phi(\phi+\theta)\varepsilon_{t-3} + \phi^2(\phi+\theta)\varepsilon_{t-4} + \cdots$
$E(\varepsilon_t y_{t-1}) = E(\varepsilon_t(\varepsilon_{t-1} + (\phi+\theta)\varepsilon_{t-2} + \phi(\phi+\theta)\varepsilon_{t-3} + \phi^2(\phi+\theta)\varepsilon_{t-4} + \cdots)) = 0$
$E(\varepsilon_{t-1} y_{t-1}) = E(\varepsilon_{t-1}(\varepsilon_{t-1} + (\phi+\theta)\varepsilon_{t-2} + \phi(\phi+\theta)\varepsilon_{t-3} + \phi^2(\phi+\theta)\varepsilon_{t-4} + \cdots)) = \sigma^2 \quad \Rightarrow \quad E(\varepsilon_{t-1} y_{t-2}) = 0$
Relaţia $y_t - \phi y_{t-1} = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$ o înmulţim cu $y_{t-k} \quad \Rightarrow \quad y_t\, y_{t-k} - \phi\, y_{t-1}\, y_{t-k} = \varepsilon_t\, y_{t-k} + \theta\, \varepsilon_{t-1}\, y_{t-k}$
Aplicăm operatorul de medie:
$E(y_t\, y_{t-k}) - \phi E(y_{t-1}\, y_{t-k}) = E(\varepsilon_t\, y_{t-k}) + \theta E(\varepsilon_{t-1}\, y_{t-k})$
$\gamma_k - \phi \gamma_{k-1} = E(\varepsilon_t\, y_{t-k}) + \theta E(\varepsilon_{t-1}\, y_{t-k})$
Pentru k=0 obţinem: $\quad \gamma_0 - \phi\gamma_1 = E(\varepsilon_t\, y_t) + \theta E(\varepsilon_{t-1}\, y_t)$
$\gamma_0 - \phi\gamma_1 = \sigma^2 + \theta(\phi+\theta)\sigma^2 = (1+\theta(\phi+\theta))\sigma^2$
Pentru k=1 obţinem:
$\gamma_1 - \phi\gamma_0 = E(\varepsilon_t\, y_{t-1}) + \theta E(\varepsilon_{t-1}\, y_{t-1})$

$\gamma_1 - \phi\gamma_0 = 0 + \theta\sigma^2 \Rightarrow \ \gamma_1 = \phi\gamma_0 + \theta\sigma^2$

Înlocuim în ecuația obținută pentru k=0 și obținem:

$\gamma_0 - \phi(\phi\gamma_0 + \theta\sigma^2) = (1 + \theta(\phi + \theta))\sigma^2$

$(1 - \phi^2)\gamma_0 = (1 + \phi\theta + \theta(\phi + \theta))\sigma^2 = (1 + 2\phi\theta + \theta^2)\sigma^2 \quad \Rightarrow \quad \gamma_0 = \dfrac{1 + 2\phi\theta + \theta^2}{1 - \phi^2}\sigma^2$

Dar $\gamma_1 = \phi\gamma_0 + \theta\sigma^2 = \dfrac{\phi + 2\phi^2\theta + \phi\theta^2 + \theta - \phi^2\theta}{1 - \phi^2}\sigma^2$

$$\gamma_1 = \frac{\phi + \theta + \phi^2\theta + \phi\theta^2}{1 - \phi^2}\sigma^2 = \frac{(\phi + \theta)(1 + \phi\theta)}{1 - \phi^2}\sigma^2$$

Pentru k=2 obținem: $\gamma_2 - \phi\gamma_1 = E(\varepsilon_t\, y_{t-2}) + \theta E(\varepsilon_{t-1}\, y_{t-2}) = 0$

Pentru $k \geq 2$ avem $\gamma_k = \phi\gamma_{k-1}$

Determinăm ACF $\quad \rho_1 = \dfrac{\gamma_1}{\gamma_0} = \dfrac{(\phi + \theta)(1 + \phi\theta)}{1 + 2\phi\theta + \theta^2}$

Pentru $k \geq 2$ avem $\rho_k = \phi\rho_{k-1}$. Mărimea lui ρ_1 depinde atât de ϕ cât și de θ.

Dacă $0 < \phi < 1$, convergența este directă. Dacă $-1 < \phi < 0$, autocorelațiile vor oscila.

Funcția ACF a unui model ARMA(1,1) este similară cu cea a unui proces AR(1), fiind o descreștere exponențială. Diferența este că descreșterea începe de la ρ_1 și nu de la $\rho_0 = 1$ ca în cazul AR(1).

Funcția PACF pentru un model ARMA(1,1) se comportă ca în cazul MA(1), după valoarea inițială $\phi_{11} = \rho_1$ urmează o descreștere exponențială.

$\phi_{22} = \dfrac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$, $\phi_{kk} = \dfrac{\rho_k - \sum_{j=1}^{k-1}\phi_{k-1,j}\rho_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1}\phi_{k-1,j}\rho_j}$, unde $\phi_{kj} = \phi_{k-1,j} - \phi_{kk}\phi_{k-1,k-j}$, $j = 1,2,3,...,k-1$.

Exemplu: $y_t = \phi\, y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta\,\varepsilon_{t-1}$

$y_t = -0{,}7\, y_{t-1} + \varepsilon_t - 0{,}7\,\varepsilon_{t-1} \Rightarrow \phi = -0{,}7$ și $\theta = -0{,}7$

a) Să se calculeze ACF:

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{(\phi + \theta)(1 + \phi\theta)}{1 + 2\phi\theta + \theta^2} \Rightarrow \ \rho_1 = \frac{(-0{,}7 - 0{,}7\theta)(1 + 0{,}49)}{1 + 2(0{,}49) + 0{,}49} = -0{,}8445$$

Pentru $k \geq 2$ avem $\rho_k = \phi\rho_{k-1}$

$\rho_2 = \phi\rho_1 = (-0{,}7)(-0{,}8445) = 0{,}591$

$\rho_3 = \phi\rho_2 = -0{,}414$; $\rho_4 = 0{,}290$; $\rho_5 = -0{,}203$; $\rho_6 = 0{,}142$, $\rho_7 = -0{,}099$; $\rho_8 = 0{,}07$

b) Să se calculeze PACF:

$\phi_{11} = \rho_1 = -0{,}8445$

$$\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \frac{0{,}591 - (-0{,}8445)^2}{1 - (-0{,}8445)^2} = -0{,}426$$

Pentru a determina ϕ_{33}, calculăm $\phi_{21} = \phi_{11} - \phi_{22}\phi_{11} = -1{,}204$

$$\phi_{33} = \frac{\rho_3 - \sum_{j=1}^{2}\phi_{2j}\rho_{3-j}}{1 - \sum_{j=1}^{2}\phi_{2j}\rho_j} = \frac{(-0{,}414) - (-1{,}204)(0{,}591) - (-0{,}426)(-0{,}8445)}{1 - (-1{,}204)(-0{,}8445) - (-0{,}426)(0{,}591)} = -0{,}262$$

$$\phi_{44} = \frac{\rho_4 - \sum_{j=1}^{3}\phi_{3j}\rho_{4-j}}{1 - \sum_{j=1}^{3}\phi_{3j}\rho_j} = -0{,}173$$

unde $\phi_{3j} = \phi_{2j} - \phi_{33}\phi_{2,2-j} \Rightarrow \ \phi_{31} = -1{,}315$; $\phi_{32} = -0{,}74$;

$\phi_{55} = -0{,}117$; $\phi_{66} = -0{,}081$; $\phi_{77} = -0{,}056$; $\phi_{88} = -0{,}039$