Serii numerice

Fie $(a_n)_n$ un șir de numere reale și s_n suma primilor n termeni ai șirului a_n.

(1) $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ $\qquad s_n \to$ șirul sumelor parțiale

Def: Perechea $(a_n, s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s.n. serie cu termenul general a_n și se notează $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sau $\sum_{n\geq 1} a_n$

Notăm cu $s = \lim_{n\to\infty} s_n$

Def: Spunem că $\sum_{n\geq 1} a_n$ e convergentă dacă și numai dacă șirul sumelor parțiale s_n e convergent.

Dacă $\lim_{n\to\infty} s_n$ există și este finită at. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e conv.

Dacă $\lim_{n\to\infty} s_n$ nu există sau este infinită at. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e divergentă (sau nu este convergentă).

Exemple: Să se studieze conv. seriilor:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ $\qquad$ ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a q^{n-1}$, $a, q \in \mathbb{R}$.

Soluție i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \dots + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+n}$ e conv. și are suma $s = 1$.

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a q^{n-1}$ $s_n = \sum_{k=1}^{n} a q^{k-1} = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}$

$= a(1+q+q^2+\dots+q^{n-1}) = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

$\lim s_n = \lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = \begin{cases} \frac{a}{1-q} & \text{, dacă } |q|<1 \\ \infty & \text{, dacă } |q|>1 \text{ și } a>0 \\ -\infty & \text{, dacă } |q|>1 \text{ și } a<0 \end{cases}$

Dacă $q=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a$ $s_n = n \to \infty$

$q=-1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a\cdot(-1)^{n-1}$ $s_n = a - a + a - a + \dots + (-1)^{n-1} a$

$s_{2m} = 0$

$s_{2m+1} = a$

$\Rightarrow s_n$ nu are limită.

$\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^{n-1}$ conv. pt. $|q|<1$; diverg. pt. $|q| \geq 1$

s.n. seria geometrică.

Teoremă (cond. necesară de convergență)

Dacă $\sum_{n\geq 1} a_n$ este convergentă at. termenul său general $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

! Reciproca nu este adevărată (există serii al căror termen general tinde la 0, dar care nu sunt convergente).

!! 1° Dacă termenul general al unei serii $a_n \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ at. $\sum_{n\geq 1} a_n$ div.

2°. Dacă termenul general al unei serii $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ at. trebuie să studiem natura seriei, ea putând fi conv. sau div.

Teoremă (Cond. nec. și suf. pt. conv. unei serii).

Criteriul general de convergență al lui Cauchy

Seria cu termenul general a_n: $\sum_{n\geq 1} a_n$ este convergentă d.d. șirul sumelor parțiale $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ este fundamental.

Ex: • $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergentă (vezi ex. ii) de la șir fundam.)

•• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ conv. (vezi ex i) de la șir fundam.)

Exerciții pt. seminar

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^r}$, $r \geq 2$, $x \in \mathbb{R}$. conv.

•• $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n!}{3^n}$ conv.