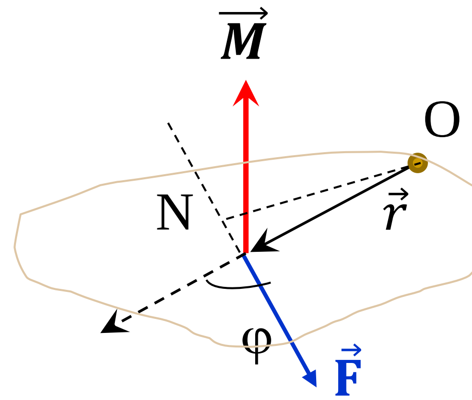
MECANICA NEWTONIANĂ

ALTE MĂRIMI FIZICE

- momentul forţei
  - Definiția momentului forței
  - Condiția de echilibru
- momentul cinetic
  - Teorema variației momentului cinetic
  - Teorema conservării momentului cinetic
- momentul de inerţie
  - Expresia momentului cinetic și al energiei cinetice la rotație

MOMENTUL FORŢEI



În mişcarea circulară, ne aşteptăm ca lucrul mecanic să fie ***ceva*** înmulţit cu unghiul parcurs

L= *ceva* ·Δθ → **Ceva-ul = r · F · sin φ**

Momentul forţei este un **VECTOR având MODULUL**

$\left|\vec{M}\right| = \mathbf{r \cdot F \cdot \sin \sphericalangle(\vec{r}, \vec{F})}$ **(N·m)**

$\vec{r}$-vectorul de poziție al originii forței în raport cu polul de rotație O

Dar $\mathbf{r \cdot \sin \sphericalangle\left(\vec{r}, \vec{F}\right) = ON}$

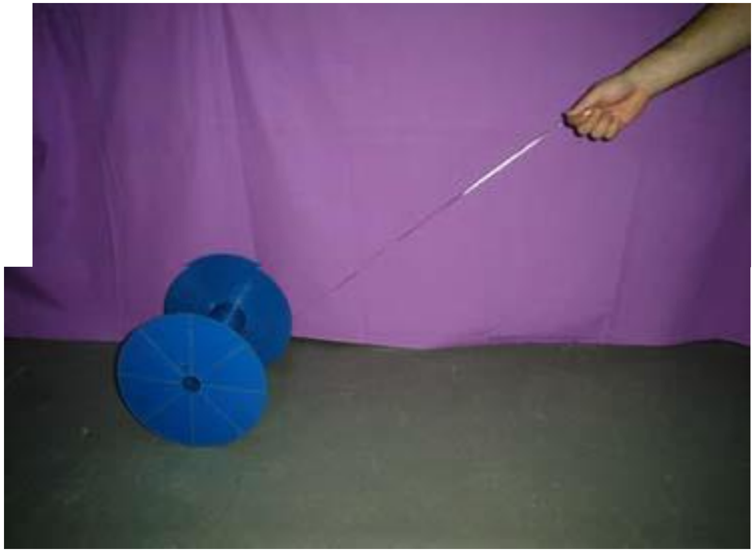
$\left|\vec{M}\right| = \mathbf{ON \cdot F}$

ON = brațul forței
= distanța (perpendiculară) de la polul de rotație la direcția forței

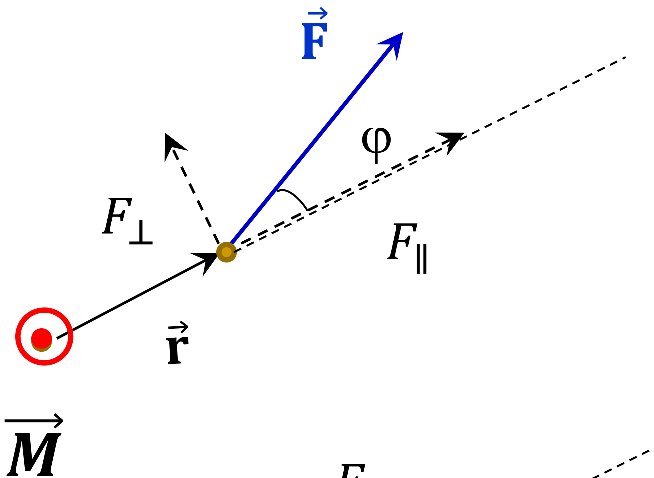
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(yF_z - zF_y\right)\vec{i} + \left(zF_x - xF_z\right)\vec{j} + \left(xF_y - yF_x\right)\vec{k}$$

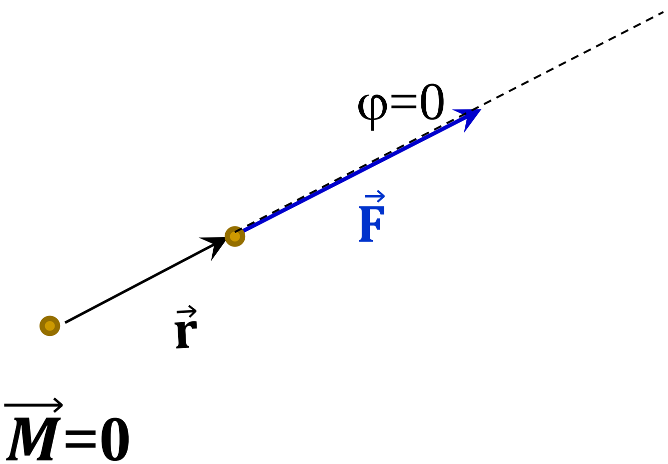
UN CORP ESTE ÎN ECHILIBRU DACĂ REZULTANTA TUTUROR FORŢELOR CARE ACŢIONEAZĂ ASUPRA LUI ESTE NULĂ ŞI, DE ASEMENEA, REZULTANTA TUTUROR MOMENTELOR FORŢELOR ESTE NULĂ.

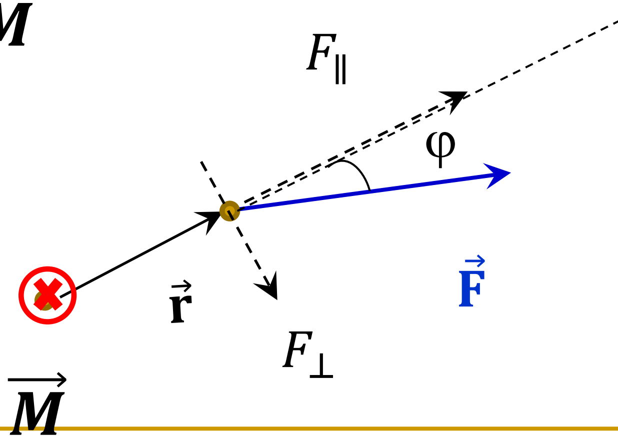
EXPERIMENTARIUM



Cum trag și cum se rotește!







MOMENTUL CINETIC

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \quad = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt}$$

pentru că $\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = 0$

adică $\vec{v} \times (m \cdot \vec{v}) = 0$

$$\vec{\mathcal{L}} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad \textbf{(J·s)}$$

$\vec{r}$ vectorul de poziție al corpului

$\vec{p}=m\vec{v}$ impulsul corpului

$$\vec{M} = \frac{d\vec{\mathcal{L}}}{dt}$$

Teorema variației momentului cinetic:
Momentul forței este egal cu rata de variație a momentului cinetic $\vec{\mathcal{L}}$ al sistemului.

TEOREMA CONSERVĂRII MOMENTULUI CINETIC

Ori de câte ori, într-un sistem izolat, momentul forţei este nul, momentul cinetic este constant, adică se conservă.

$$\vec{M} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\vec{\mathcal{L}}}{dt} = 0 \qquad \Rightarrow \vec{\mathcal{L}} = \text{constant}$$

Ex. În cazul mişcării Pământului în jurul Soarelui, forţa de interacţiune Pământ– Soare este dirijată de-a lungul liniei Pământ – Soare, unghiul $\varphi = 0$, şi momentul forţei este nul, iar momentul cinetic este constant.

Momentul cinetic https://www.surendranath.org/GPA/Dynamics/AMUV/AMUV.html
https://www.surendranath.org/GPA/Dynamics/AngMom/AngMom.html

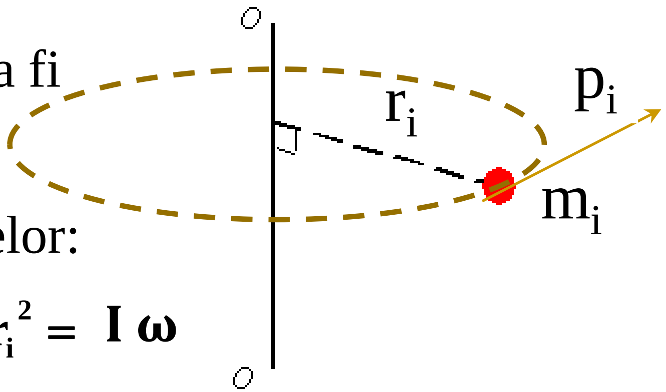
MOMENTUL DE INERŢIE

În mişcarea de rotaţie a unui corp rigid, **momentul de inerţie, I,** joacă un rol similar masei în mişcarea de translaţie.

La rotaţia unui **corp rigid** în jurul unei axe verticale (O-O de exemplu), **fiecare părticică** (moleculă, de pildă) de masă $\mathbf{m_i}$ descrie **un cerc orizontal** cu centrul plasat pe axa de rotaţie şi raza $\mathbf{r_i}$.

Momentul cinetic al fiecărei părticele de masă m_i va fi

$$\mathcal{L}_i = r_i \cdot p_i = m_i v_i r_i$$



Momentul cinetic total va fi suma tuturor momentelor:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i r_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \omega r_i . r_i = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \cdot \omega = \omega \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = I\,\omega$$

$$\mathcal{L} = I\,\omega$$

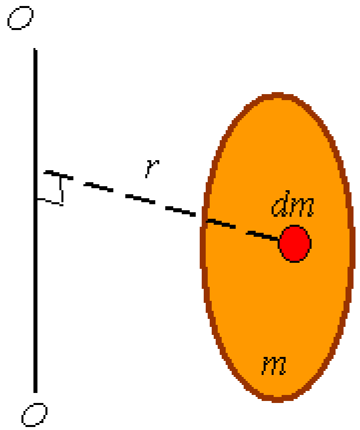
Energia cinetică de rotaţie a corpului rigid:

$$E_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \cdot \omega^2 \cdot r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \frac{I\omega^2}{2}$$

$$E_c = \frac{I\omega^2}{2}$$

MOMENTUL DE INERŢIE

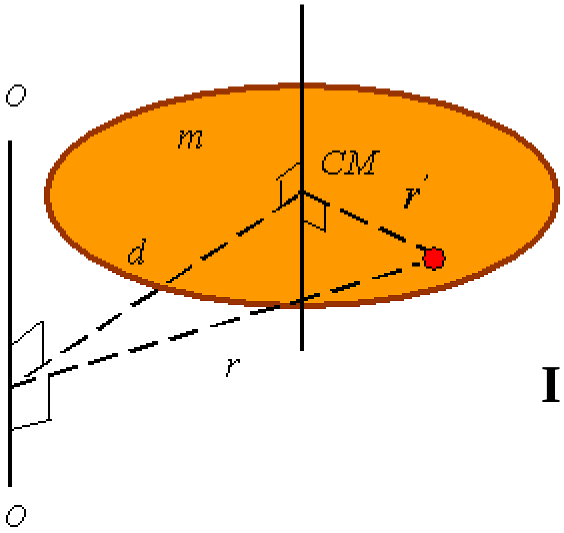
Momentul de inerţie pentru **corpul rigid** de masă m faţă de axa O-O



$$\mathbf{I = \int_m r^2 dm}$$

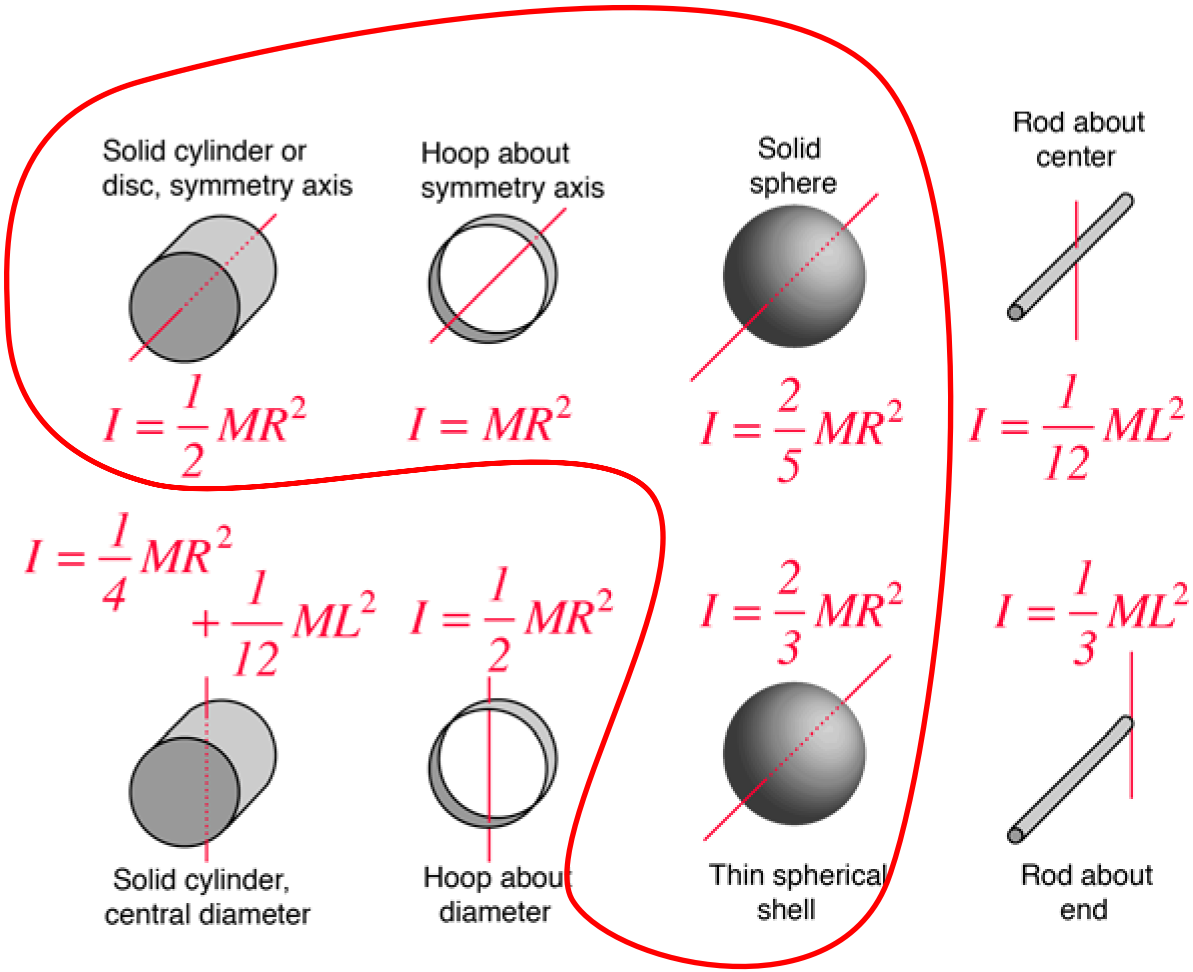
$$\mathbf{I = \int_V r^2 \rho \, dV}$$

Momentul de inerţie faţă de orice axă se poate calcula cu ajutorul momentului de inerţie faţă de axa paralelă cu aceasta dusă prin **centrul de masă**



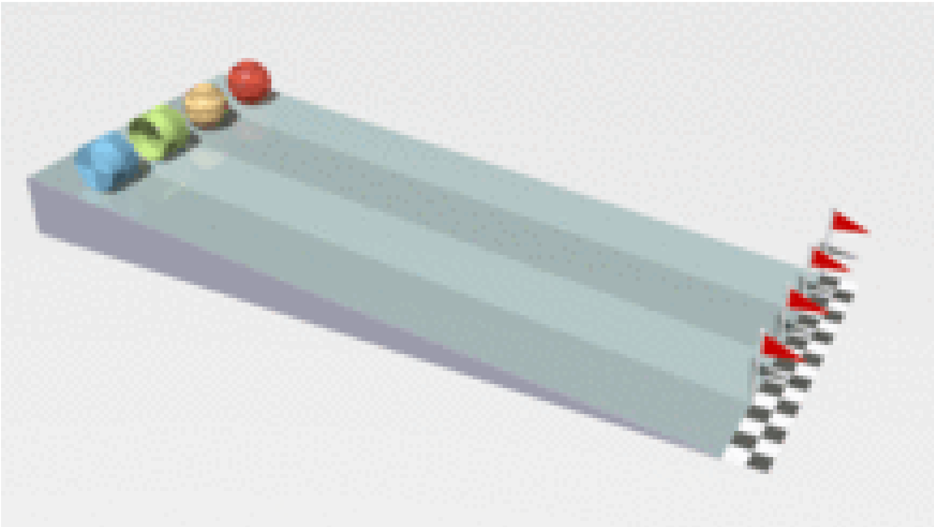
$$\mathbf{I = I_{CM} + md^2}$$

MOMENTUL DE INERŢIE



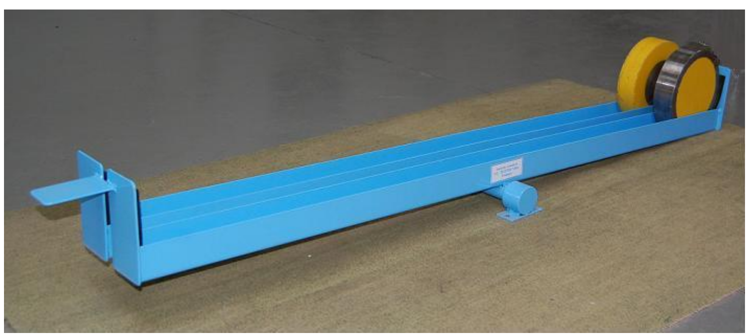
$$1 > \frac{2}{3} > \frac{1}{2} > \frac{2}{5}$$

MOMENTUL DE INERȚIE



- sferă goală,
- sferă plină,
- cilindru gol
- cilindru plin.

EXPERIMENTARIUM



$$I = \int_V r^2 \rho \, dV$$

EXPERIMENTARIUM moment cinetic

$$\mathbf{L} = I\,\omega$$

$$I = \int_V r^2 \rho \, dV$$

EXPERIMENTARIUM transferul energiei cinetice de rotație

Momentele forței de frecare și al greutății conduc la variația momentului cinetic. Creșterea energiei potențiale gravitaționale se datorează scăderii energiei cinetice de rotație.

CENTRUL DE MASĂ

Reprezintă acel punct în care **ar putea fi** concentrată întreaga masă a unui sistem oarecare de corpuri (n).

$\mathbf{m_i}$ - masa corpului **i** şi $\vec{\mathbf{r}}_\mathbf{i}$ vectorul său de poziţie faţă de un sistem oarecare de referinţă .

Să aplicăm acum sistemului, o forţă externă $\vec{\mathbf{F}}$.

Întregul sistem (de masă $\mathbf{M} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{m_i}$) va căpăta accelerația $\vec{\mathbf{a}}$.

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

$\vec{\mathbf{F}}_\mathbf{i}$ forța totală ce acționează asupra corpului de masă $\mathbf{m_i}$ accelerația $\vec{\mathbf{a}}_\mathbf{i}$

În conformitate cu principiul al doilea al lui Newton $\begin{cases} \vec{\mathbf{F}} = \mathbf{M} \cdot \vec{\mathbf{a}} \\ \vec{\mathbf{F}}_\mathbf{i} = \mathbf{m_i} \cdot \vec{\mathbf{a}}_\mathbf{i} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} m_i \vec{a}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}\right)$$

Centrul de masă

$$\vec{a} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}\right)$$

Vectorul de poziţie al unui punct: ***centrul de masă***

$$X = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad Y = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad Z = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

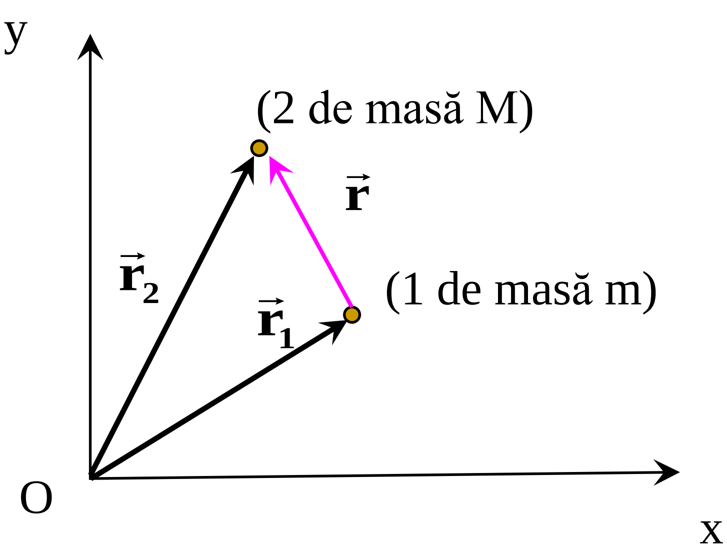
$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad \vec{v}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Forțele interne, exercitate între corpurile sistemului, **nu pot schimba starea** (de repaus sau de mișcare uniformă) **a CENTRULUI de MASĂ atâta timp cât forța externă este zero.**

Miscarea centrului de masa a unui obiect https://www.surendranath.org/GPA/Dynamics/CM/CM.html

ANEXĂ : MASA REDUSĂ

PROBLEMA CELOR 2 CORPURI: Mişcarea relativă a două corpuri ce acţionează unul asupra celuilalt poate fi descrisă reducând studiul numai la masa redusă (m_r) a celor două corpuri analizând distanţa relativă dintre corpuri.



$$\vec{F}_{21} = m\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} \qquad \vec{F}_{12} = M\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{12}} = -\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{21}} = \vec{\mathbf{F}}$$

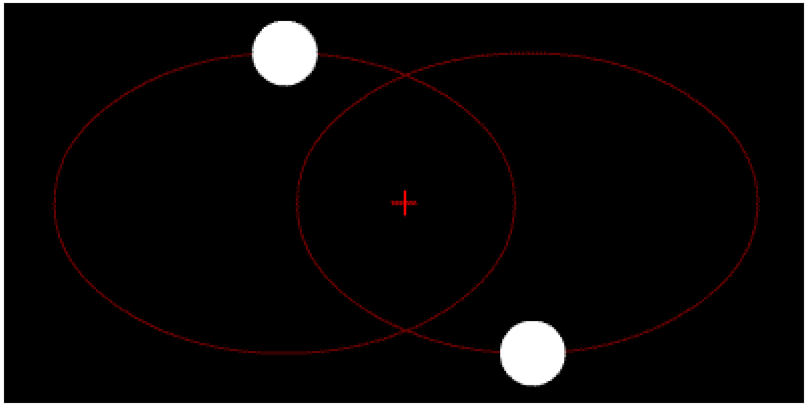
$$\frac{d^2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{dt^2} = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)\cdot\vec{F} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)\cdot\vec{F}$$

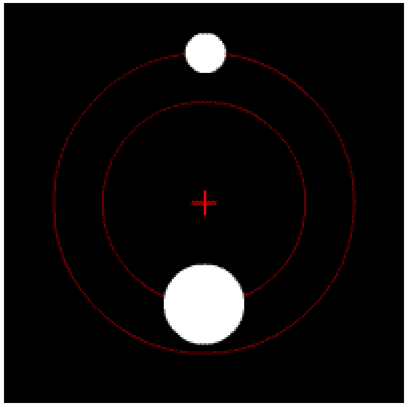
$$\mathbf{m_r}\cdot\frac{\mathbf{d^2\vec{r}}}{\mathbf{dt^2}} = \vec{\mathbf{F}}$$

$$\frac{1}{m_r} = \frac{1}{m} + \frac{1}{M}$$ sau $$\mathbf{m_r} = \frac{\mathbf{mM}}{\mathbf{m+M}} = \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{1+\frac{m}{M}}}$$

OBS. Mișcarea a două corpuri unul față de celălalt are loc întotdeauna într-un plan.

MIŞCAREA UNEI PLANETE ÎN CÂMP GRAVITAŢIONAL





https://en.wikipedia.org/wiki/Two-body_problem#/media/File:Orbit5.gif

Stânga: 2 corpuri cu mase similare orbitând CENTRUL DE MASĂ extern ambelor corpuri—tipic stelelor binare.

Dreapta: 2 corpuri cu mase puțin diferite orbitând CENTRUL DE MASĂ. Ex. sistemul Pluto–Charon (in care CM este extern ambelor corpuri); sistemul Pământ-Lună—în care CM este în interiorul corpolui cu masa mai mare.

MIŞCAREA UNEI PLANETE ÎN CÂMP GRAVITAȚIONAL

a) deoarece nu există (în univers) *numai* corpurile **m** şi **M** , influenţa altor corpuri se consideră neglijabilă în modelul de bază (cel mai simplu);

b) întrucât avem de-a face cu mişcarea lui m *relativ* la M , ar trebui să folosim *masa redusă* a sistemului (m, M), dar , dacă **M >> m**, atunci pentru că m / M devine neglijabil; $m_r = \frac{m}{1+\frac{m}{M}} \cong m$

$M_{Soare} \cong 335.000 \cdot M_{Pământ}$, , $R_{Soare} \cong 109 \cdot R_{Pământ}$

c) avem de-a face cu mişcarea lui m şi M în jurul **centrului lor de masă,** dar, **m << M**, poziţia centrului de masă este aproape în acelaşi punct cu **centrul lui M**.

$$\vec{R}_{CM} = \frac{m\vec{r_1} + M\vec{r_2}}{m+M} = \frac{\frac{m}{M}\vec{r_1} + \vec{r_2}}{\frac{m}{M}+1} \cong \vec{r_2}$$

⇒ PROBLEMA CLASICĂ DE MIȘCARE ÎN CÂMP CENTRAL DE FORȚE- aflarea poziției r a unui corp care se mișcă datorită unei forțe centrale F, fie în funcție de timpul t fie în funcție de unghiul φ față de centrul de forță și o axă arbitrară .

simulări de sisteme solare https://phet.colorado.edu/en/simulation/gravity-and-orbits

MIŞCAREA UNEI PLANETE ÎN CÂMP GRAVITAŢIONAL

Energia totală **E** a sistemului (Planetă-Soare) se conservă

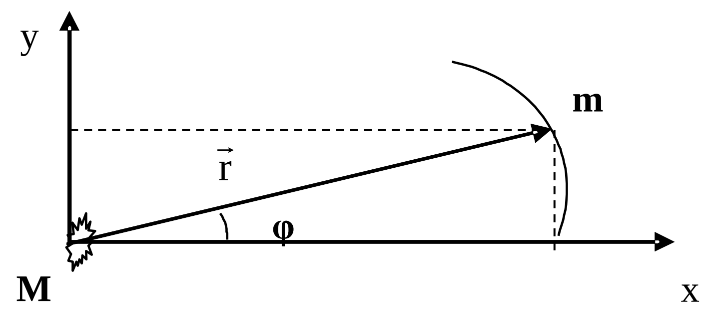
$$\mathbf{E} = \mathbf{E_c} + \mathbf{E_p}$$

$$E_c = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]$$

$$\mathbf{E_c} = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]$$

$$\mathbf{E_p} = -\mathbf{K}\frac{\mathbf{Mm}}{\mathbf{r}}$$

cum la orice moment de timp
x = r·cos φ iar
y = r·sinφ
cu **r = r(t)** şi **φ=φ(t)**



Momentul cinetic $\mathcal{L}$, de asemenea, se conservă

$$\vec{\mathcal{L}} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\mathcal{L} = I\,\omega$$

$$\mathcal{L} = \mathbf{mr^2}\frac{\mathbf{d\varphi}}{\mathbf{dt}}$$

ecuaţie diferentială
in **φ** şi **t**

Energia totală **E** constantă şi momentul cinetic $\mathcal{L}$ constant duc la ecuaţie diferenţială în **r** şi **t**

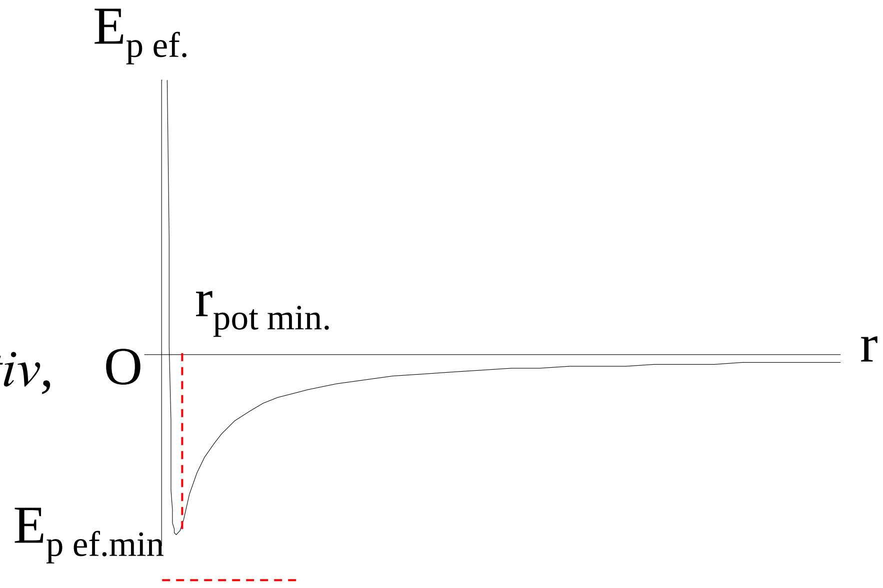
⟹ **ecuaţie diferenţială în r şi φ a cărei soluţie reprezintă ecuaţia traiectoriei**

MIŞCAREA UNEI PLANETE ÎN CÂMP GRAVITAŢIONAL

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{2}}\left(\frac{\mathbf{dr}}{\mathbf{dt}}\right)^{\mathbf{2}} + \frac{\boldsymbol{\mathcal{L}^2}}{\mathbf{2mr^2}} - \mathbf{K}\frac{\mathbf{Mm}}{\mathbf{r}}$$

$$E_{cf} = \frac{\mathcal{L}^2}{2mr^2}$$ *energie centrifugală.*

$$\left(E_p\right)_{ef} = \frac{\mathcal{L}^2}{2mr^2} - K\frac{Mm}{r}$$ *potenţial efectiv,*



$$\frac{d\left(E_p\right)_{ef}}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(E_p\right)_{ef\ min} = -\frac{K^2M^2m^3}{2\mathcal{L}^2}$$

pentru $r_{pot\ min} = \dfrac{\mathcal{L}^2}{KMm^2}$

MIŞCAREA UNEI PLANETE ÎN CÂMP GRAVITAŢIONAL

E = const.↔energia totală a Planetei m în câmpul gravitațional al Soarelui M

$\mathcal{L}$ = const. ↔ momentul cinetic al Planetei m (relativ la centrul de masă al sistemului)

α ($\mathcal{L}$) -*parametrul* orbitei

ε($\mathcal{L}$, E) - *excentricitatea* orbitei

$$\alpha = r_{pot\ min}$$

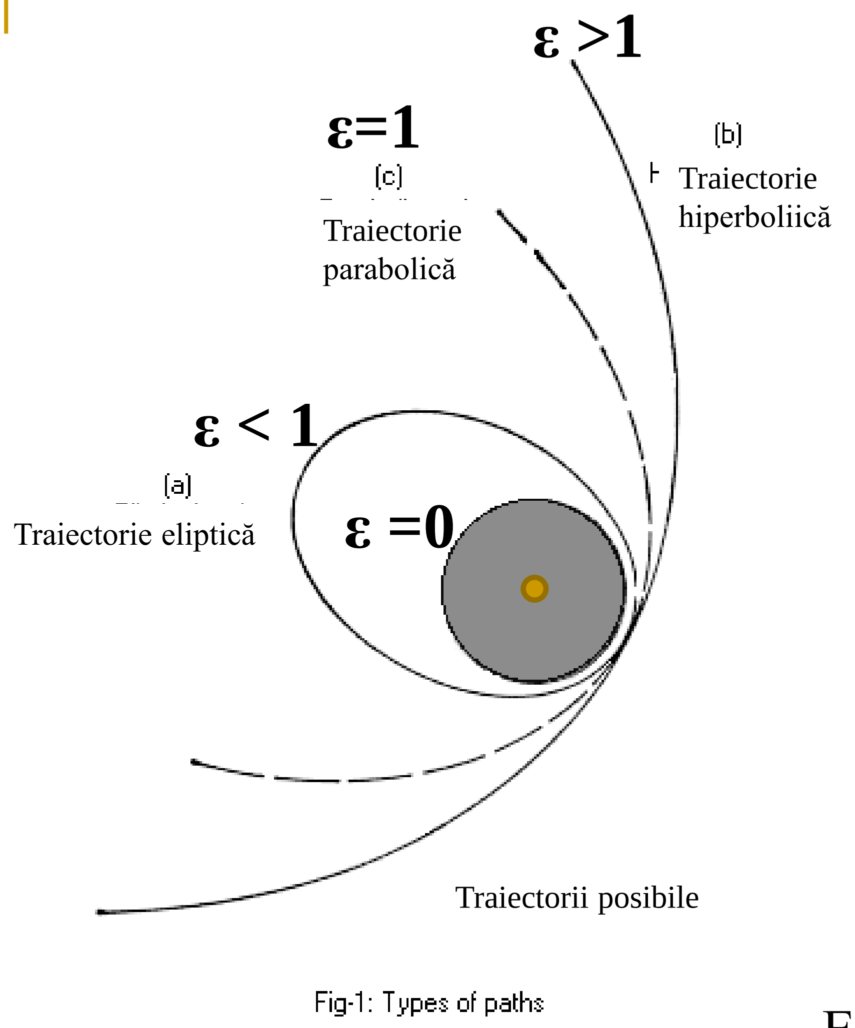
$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{E}{\left(E_p\right)_{ef\ \ min}}}$$

Ecuația traiectoriei Planetei de masă **m**:

$$r = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon \cdot \cos\varphi}$$

ecuația unei *conice* în coordonate polare (r, φ)

MIŞCAREA UNEI PLANETE ÎN CÂMP GRAVITAŢIONAL



$$r = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon \cdot \cos\varphi}$$

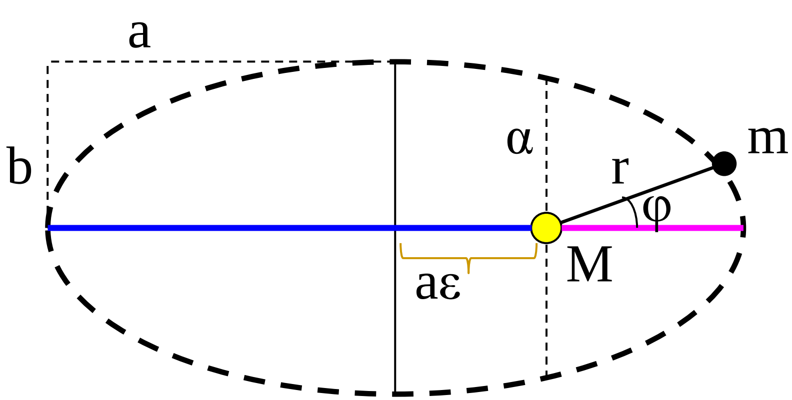
ecuaţia traiectoriei Planetei **m;**
ecuaţia unei conice, cu α ($\mathcal{L}$) *parametrul*,
respectiv, $\varepsilon(\mathcal{L}, \mathbf{E})$ *excentricitatea* orbitei

Excentricitatea orbitei Pământului este în acest moment 0,0167.

MIŞCAREA UNEI PLANETE ÎN CÂMP GRAVITAŢIONAL

$E < 0$ ⟶ excentricitatea, $\varepsilon < 1$, iar traiectoria lui m este o **elipsă**.

Aşadar, numai dacă **energia totală** a corpului de masă **m** este **negativă**, **traiectoria** lui **este închisă**, cu corpul de masă **M** într-unul din **focare**.



Semiaxa mare a elipsei: $a = \dfrac{\alpha}{1-\varepsilon^2}$

Semiaxa mică a elipsei este media geometrica r_{rmin} și r_{rmax} : $b = \dfrac{\alpha}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$

Energia totală a corpului de masă m este minimă și excentricitatea ε=0 dacă traiectoria este circulară

$$r = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon \cdot \cos\varphi}$$

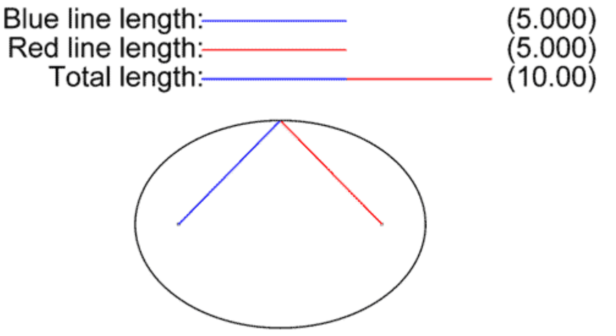
Unitatea astronomică este definită ca lungimea semiaxei mari a oribitei Pământului în jurul Soarelui. Este egală cu aprox. 150 milioane km și
este folosită în exprimarea distanțelor din interiorul și vecinătatea Sistemului Solar.

Pericentru $\xRightarrow{\cos\varphi=1} r_{min} = \dfrac{\alpha}{1+\varepsilon} = a - a\varepsilon$ (periheliu 147 mil. km)

Apocentru $\xRightarrow{\cos\varphi=-1} r_{max} = \dfrac{\alpha}{1-\varepsilon} = a + a\varepsilon$ (afeliu 152 mil.km)

MIŞCAREA UNEI PLANETE ÎN CÂMP GRAVITAŢIONAL

E < 0 (ε < 1)



Legile lui Kepler

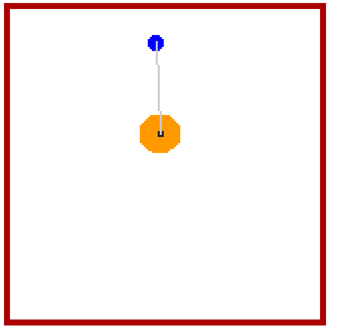
•**Prima lege a lui Kepler**: *traiectoria planetelor în jurul Soarelui este o elipsă cu Soarele în unul din focare*

•**Legea a doua a lui Kepler**: *în intervale de timp egale, raza vectoare a un mobil parcuge arii egale*

(rezultă din conservarea momentului cinetic $\frac{dA}{dt} = \frac{\mathcal{L}}{2m} = const$).

•**A treia lege a lui Kepler**: *pătratele perioadelor de revoluţie sunt proporţionale cu cuburile semiaxelor mari*

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{KM} a^3$$



ilustrarea legilor lui Kepler https://www.surendranath.org/GPA/Dynamics/Kepler01/Kepler01.html

MIŞCAREA UNEI PLANETE ÎN CÂMP GRAVITAŢIONAL

E = 0 ⟹ excentricitatea ε =1, traiectoria lui m este o **parabolă**

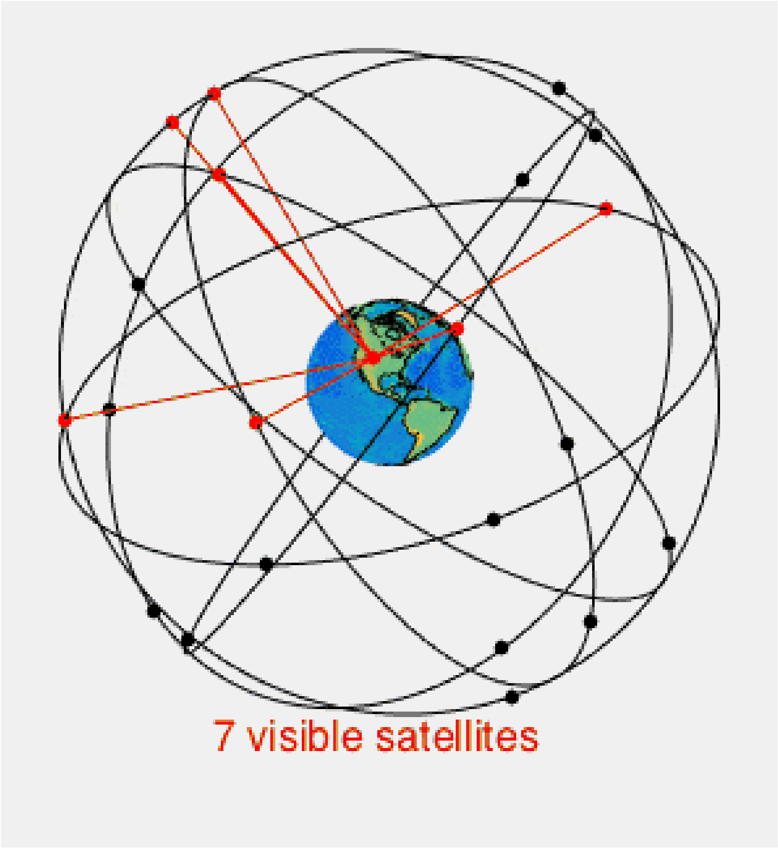
Viteza de scăpare din câmpul gravitațional al corpului de masă M este viteza la care suma dintre energia cinetică și cea potențială a unui obiect este zero.

$$K\frac{mM}{r} = \frac{mv_s^2}{2} \Rightarrow v_s = \sqrt{\frac{2KM}{r}}$$

La suprafața Pământului, viteza de scăpare este aproximativ 11,2 km/s.

E > 0 ⟹ excentricitatea ε>1, traiectoria lui meste infinită şi este o **hiperbolă**.

MIŞCAREA SATELIȚILOR ÎN CÂMP GRAVITAȚIONAL



Simularea unui sistem de 24 sateliți GPS în mișscare. De observat că numărul sateliților receptionați într-un anumit punct de pe suprafața Pământului se schimbă în timp. Punctul din acest exemplu este în Golden, Colorado, SUA (39°44′49″N 105°12′39″W / 39.7469°N 105.2108°W). https://en.wikipedia.org/wiki/Global_Positioning_System#/media/File:GPS24goldenSML.gif

In ceea ce priveste electronii dintr-un atom aceștia sunt sunt deseori descriși ca „orbitând” nucleul său, asemenea abordării lui Niels Bohr (aceasta fiind sursa termenului „orbital”). Cu toate acestea, electronii nu orbitează de fapt nucleele în sensul clasic, iar mecanica cuantică este necesară pentru orice înțelegere utilă a comportamentului real al electronului

MECANICA NEWTONIANĂ

14. Momentul forței; Condițiile de echilibru;
15. Momentul cinetic;
16. Teorema conservării momentului cinetic; Exemple;
17. Momentul de inerție; Momentul cinetic și energia cinetică ca funcție de momentul de inerție;
18. Centrul de masă;
19. Traiectorii posibile în mişcarea unei planete în câmp gravitaţional;
20. Legile lui Kepler;
21. Condiția și Viteza de scăpare din câmpul gravitațional ;