SEMINAR săptămâna 2: Metoda lui Gauss

0.1 SARCINI

Ce începe cu ,,puteţi" este opţional. Restul este ,,recomandat cu căldură".

• Puteţi citi despre mai multe despre Gauss, unul dintre cei mai importanî matematicieni, supranumit *Prinţul matematicii.*

• Puteţi citi teoria din cartea scrisă împreună cu dl. Dăianu (vezi Bibliografia pe CV): pag. 21-25. O să o discutăm şi vineri la curs.

• De citit exemplele rezolvate din cartea amintită mai sus:
exemplul 1, pag. 22 şi exemplul 2, pag. 23

• De citit exerciţiile rezolvate 1 (pag. 29) şi 2 (pag. 32)

• De lucrat exerciţiile 17 (pag. 44) şi 20 (pag. 45)

• În plus, puteţi citi exerciţiile rezolvate mai jos, apoi rezolva exerciţiile propuse.

• În fine, rezolvaţi şi încărcaţi pe CV exerciţiul pe care îl aveţi lăsat temă pe CV.

0.2 EXERCIŢII REZOLVATE

1. Rezolvaţi sistemul de mai jos folosind metoda lui Gauss.

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \\ 5x - y = 3 \end{cases}$$

Soluţie: Ne folosim de faptul că în prima ecuaţie coeficientul lui x este nenul (şi anume 1) pentru a face 0 coeficientul lui x în ultimele două ecuaţii. Din ecuaţia 2 scădem ecuaţia 1 înmulţită cu 2, iar din ecuaţia 3 scădem ecuaţia 1 înmulţită cu 5. Obţinem următorul sistem, echivalent cu cel iniţial:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ -3y + 5z = 0 \\ -6y + 10z = -2 \end{cases}$$

Se cam vede deja că ultimele două ecuaţii se bat cap în cap, dar un algoritm presupune parcurgerea unor paşi, deci vom face abstracţie de cele observate.
Ne folosim de faptul că în ecuaţia a doua coeficientul lui y este nenul. Îl alegem pe acest coeficient, -3, drept pivot şi ne folosim de el pentru a face coeficientul lui

y din ecuaţia a treia 0. Din ecuaţia 3 scădem 3cuaţia 2 înmulţită cu 2. Obţinem sistemul, echivalent,

$$\begin{cases} x + \ y - \ 2z = \ 1 \\ \quad - 3y + \ 5z = \ 0 \\ \qquad\qquad 0 = -2 \end{cases}$$

Analizând ultima ecuaţie a acestui sistem, vedem că ea nu este îndeplinită niciodată, deci sistemul este incompatibil.

Aşa se va întâmpla mereu în cazul unui sistem incompatibil: vom obţine o ecuaţie de forma $0 = \alpha$, unde α este un număr real nenul.

Întregul demers de mai sus putea fi exprimat prin operaţii la nivelul matricei extinse astfel:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & 10 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Traducem înapoi ultima matrice (forma scară a matricei extinse a sistemului) în termeni de sistem şi vedem că sistemul obţinut este incompatibil.

2. Rezolvaţi sistemul de mai jos folosind metoda lui Gauss.

$$\begin{cases} 2x + \ y - \ z = 1 \\ 4x + 2y - \ z = 2 \\ 6x + 3y + 2z = 3 \end{cases}$$

Soluţie: Vom lucra cu matricea extinsă a sistemului, $\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right)$.

Alegem pivot numărul 2 de pe linia 1, coloana 1 şi ne folosim de el pentru a produce 0-uri sub el (ca atunci când intenţionăm să dezvoltăm un determinant după prima coloană). Scădem din linia 2 linia 1 înmulţită cu 2, apoi scădem din linia 3 linia 1 înmulţită cu 3. Obţinem:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{2} & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right).$$

De obicei continuăm prin a lua drept pivot elementul depe linia 2, coloana 2, numai că de astă dată el este 0, deci nu poate fi pivot. Nu putem nici schimba cu vreo linie mai de jos pentru că şi elementul de pe linia 3, coloana 2, este 0. Aşadar, pe coloana 2 nu avem pivot. Pivotul nostru va fi acel 1 de pe linia 2, coloana 3. Continuăm reducerea la forma scară a matricei extinse de la acel 1. Scădem din linia 3, linia 2 înmulţită cu 5. Obţinem

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Am obţinut forma scară a matricei $\overline{A}$. Pivoţi am avut pe coloanele 1 şi 3, corespunzătoare necunoscutelor x şi z. Asta înseamnă că acestea pot fi alese necunoscute principale şi determinate în funcţie de necunoscuta secundară y. Vedem mai bine acest lucru rezolvând sistemul rezultat:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ \qquad\qquad z = 0 \\ \qquad\qquad 0 = 0 \end{cases}$$

Din ecuaţia a doua obţinem (nu foarte greu) $z = 0$. Notând $y = \alpha$, obţinem $x = \dfrac{1-\alpha}{2}$, deci mulţimea soluţiilor sistemului este

$$\mathscr{S} = \left\{ \left(\frac{1-\alpha}{2},\ \alpha,\ 0 \right) \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. Rezolvaţi sistemul de mai jos folosind metoda lui Gauss.

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 5x + 6y = 2 \\ 3x + 4y = -11 \end{cases}$$

Soluţie: Scădem din linia 2 linia 1 înmulţită cu 5, apoi din linia 3, linia 1 înmulţită cu 3. Obţinem $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & -11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -13 \\ 0 & -2 & -20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -13 \\ 0 & 0 & -\frac{27}{2} \end{array}\right)$, adică sistemul $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ \quad -4y = -13 \\ \qquad 0 = -20 \end{cases}$ Ultima ecuaţie arată că sistemul este incompatibil.

4. Rezolvaţi sistemul de mai jos folosind metoda lui Gauss.

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$$

Soluţie: Scădem din linia 2, linia 1 înmulţită cu 2 şi obţinem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \end{array}\right)$$

şi am ajuns rapid la forma scară a metricei sistemului. Avem de rezolvat sistemul

$$\begin{cases} x + \ y + \ z = 3 \\ \quad - 3y - 3z = -6 \end{cases}$$

Notând $z = \alpha$, din ecuaţia a doua obţinem $y = 2 - \alpha$, apoi din prima ecuaţie, $x = 1$. Aşadar, mulţimea soluţiilor este $\mathscr{S} = \{(1, 2-\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

5. Calculaţi rangul matricei $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 7 & -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$.

Soluţie: Adunăm la linia 2 linia 1 înmulţită cu $-\frac{1}{2}$, iar la linia 3, linia 1 înmulţită cu $-\frac{3}{2}$. Obţinem că

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -2 & \frac{11}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -2 & \boxed{\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 3$$ (numărul de pivoţi).

0.3 EXERCIŢII PROPUSE

1. Rezolvaţi sistemul de mai jos folosind metoda lui Gauss.

$$\begin{cases} z = 1 \\ 2y - z = 2 \\ 3x - y - z = 3 \end{cases}$$

2. Rezolvaţi sistemul de mai jos folosind metoda lui Gauss.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ 4x - 7y + 9z = 8 \end{cases}$$

3. Rezolvaţi sistemul de mai jos folosind metoda lui Gauss.

$$\begin{cases} -x + 3y - z = 1 \\ -x + 4y - 3z = 2 \\ -x + 5y - 4z = 3 \end{cases}$$

4. Rezolvaţi sistemul de mai jos folosind metoda lui Gauss.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -x - 2y + z = 2 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$$

5. Rezolvaţi sistemul de mai jos folosind metoda lui Gauss.

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + y = 5 \\ -x + 2y = 5 \end{cases}$$

6. Rezolvaţi sistemul de mai jos folosind metoda lui Gauss.

$$\begin{cases} x + \ \ y = 4 \\ 2x + \ \ y = 5 \\ 4x + \ \ y = 6 \end{cases}$$

7. Rezolvaţi sistemul de mai jos folosind metoda lui Gauss.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

8. Calculaţi rangul matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 9 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

9. Calculaţi rangul matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 8 \\ 3 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

10. O matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ are rangul 2. Câte 0-uri poate avea o formă scară a ei?