Formulas para Curvas en $\mathbb{R}^3$

Cristopher Morales Ubal
e-mail: c.m.ubal@gmail.com

Formulas

1. Vector Tangente: $\overrightarrow{T}(t) = \dfrac{\overrightarrow{r}'(t)}{\|\overrightarrow{r}'(t)\|}$

2. Vector Normal: $\vec{N}(t) = \overrightarrow{B}(t) \times \overrightarrow{T}(t) = \dfrac{(\overrightarrow{r}'(t) \times \overrightarrow{r}''(t)) \times \overrightarrow{r}'(t)}{\|(\overrightarrow{r}'(t) \times \overrightarrow{r}''(t)) \times \overrightarrow{r}'(t)\|}$

3. Vector Binormal: $\overrightarrow{B}(t) = \dfrac{\overrightarrow{r}'(t) \times \overrightarrow{r}''(t)}{\|\overrightarrow{r}'(t) \times \overrightarrow{r}''(t)\|}$

4. Torsión: $\tau = \dfrac{(\overrightarrow{r}'(t) \times \overrightarrow{r}''(t)) \cdot \overrightarrow{r}'''(t)}{\|\overrightarrow{r}'(t) \times \overrightarrow{r}''(t)\|^2}$

5. Curvatura: $\kappa = \dfrac{\|\overrightarrow{r}'(t) \times \overrightarrow{r}''(t)\|}{\|\overrightarrow{r}'(t)\|^3}$

   Para curvas en $\mathbb{R}^2$ $y = f(x)$ se tiene la siguiente expresión : $\kappa(x) = \dfrac{|f''(x)|}{\left(1 + (f'(x))^2\right)^{3/2}}$

6. Radio de Curvatura: $\rho = \dfrac{1}{\kappa}$

7. Plano normal: $(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{r}(t_0)) \cdot \overrightarrow{T}(t_0) = 0$ donde $\overrightarrow{x} = (x, y, z)$

8. Plano Rectificante: $(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{r}(t_0)) \cdot \overrightarrow{N}(t_0) = 0$

9. Plano Osculador: $(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{r}(t_0)) \cdot \overrightarrow{B}(t_0) = 0$

10. Recta tangente: $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{r}(t_0) + t \cdot \overrightarrow{T}(t_0)$ con $t \in \mathbb{R}$

11. Recta Normal: $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{r}(t_0) + t \cdot \overrightarrow{N}(t_0)$ con $t \in \mathbb{R}$

12. Recta Binormal: $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{r}(t_0) + t \cdot \overrightarrow{B}(t_0)$ con $t \in \mathbb{R}$

13. Aceleración en componentes normal y tangencial:

$$\overrightarrow{a} = a_T \overrightarrow{T} + a_N \overrightarrow{N}$$

   donde $a_T = v' = \dfrac{d}{dt}(\|\overrightarrow{r}'(t)\|)$ y $a_N = \kappa v^2 = \kappa \|\overrightarrow{r}'(t)\|^2$

14. Circulo Osculador:

$$\|(x, y) - \overrightarrow{C_0}\|^2 = \rho^2 = \frac{1}{\kappa^2}$$

   donde el centro del circulo osculador viene dado por:

$$\overrightarrow{C_0} = \overrightarrow{P_0} + \frac{1}{\kappa} \cdot \overrightarrow{N}$$

   donde ρ , κ y $\overrightarrow{N}$ estan evaluados en t_0 tal que $\overrightarrow{P_0} = \overrightarrow{r}(t_0)$

Longitud de arco:

$$s\left(t\right)=\int_{a}^{t}\left\|\frac{d\overrightarrow{r}}{du}\right\|du$$

Si $\overrightarrow{r}$ esta parametrizada en longitud de arco, $\overrightarrow{r}\left(s\right)$, luego $\left\|\dfrac{d\overrightarrow{r}}{ds}\left(s\right)\right\|=1$ y tenemos las sgtes. expresiones utiles:

1. Vector Tangente: $\overrightarrow{T}\left(s\right)=\dfrac{d\overrightarrow{r}}{ds}$
2. Vector Normal: $\overrightarrow{N}\left(s\right)=\dfrac{\dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds}}{\left\|\dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds}\right\|}$
3. Vector Binormal: $\overrightarrow{B}\left(s\right)=\overrightarrow{T}\left(s\right)\times\overrightarrow{N}\left(s\right)$
4. Torsión: $\tau=-\overrightarrow{N}\left(s\right)\cdot\dfrac{d\overrightarrow{B}}{ds}\left(s\right)$ obs: si $\overrightarrow{B}=cte\Longrightarrow\tau=0$
5. Curvatura: $\kappa\left(s\right)=\left\|\dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds}\right\|$
6. Radio de curvatura: $\rho(s)=\dfrac{1}{\kappa\left(s\right)}$

Propiedades importante:

1. Una curva con curvatura nula es una recta.
2. Una curva sin torsión es una curva plana.