Problemas Axiomas De Cuerpo

Cristopher Morales Ubal
e-mail: c.m.ubal@gmail.com

Problemas

1. Usando exclusivamente los axiomas de los reales, y mencionándolos claramente cada vez que los use, demuestre las siguientes propiedades. Cualquier propiedad extra que utilice deberá ser demostrada.

   (a) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}\ ,\ x, y \neq 0\ \ (xy)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$

   (b) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}\ ,\ x, y \neq 0\ \ (x + y)\left(x^{-1}y^{-1}\right) = x^{-1} + y^{-1}$

   (c) Usando $a)$, demostrar que $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ , b, d \neq 0$

   $$ab^{-1} + cd^{-1} = (ad + cb)\,(bd)^{-1}$$

2. Demuestre que si $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ son tales que $a + b = 1$, entonces se cumple que el inverso multiplicativo de $(a \cdot b)$ es $\left(a^{-1} + b^{-1}\right)$.

3. Demuestre usando solamente los axiomas de los números reales y los teoremas de existencia y unicidad de los neutros e inversos:

   (a) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ , b, c \neq 0$

   $$\left(ab^{-1} + c^{-1}\right)\left[(bc)\,(ac + b)^{-1}\right] = 1$$

   (b) Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ son tales que se verifica la relación $(ad) + (-\,(cb)) = 0$ entonces

   $$[(a + b)\,d] + [-\,((c + d)\,b)] = 0$$

   (c) $\forall a \in \mathbb{R},\ a \neq 0\ :\ -\left(a^{-1}\right) = (-a)^{-1}$

4. Usando sólo axiomas de cuerpo de los reales y unicidad de neutros e inversos, demuestre que:

   (a) Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces $(a + b = 0) \wedge (a + c = 0) \implies (b = c)$

   (b) $\forall b \in \mathbb{R}\ ,\ a \cdot b = a \implies a = 0$

   (c) $\forall a \in \mathbb{R}\ ,\ a^2 = 0 \implies a = 0$

5. Usando sólo axiomas de cuerpo de los reales y los teoremas de unicidad de neutros e inversos, demuestre que:

   (a) Si existiera $a \neq 0$, tal que $a + a = 0$ entonces se concluiria que:

   $$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ x + x = 0$$

   (b) Si $[(a + b \neq 0) \wedge (ax + by = 0) \wedge (bx + ay = 0)]$ entonces $x + y = 0$

6. Sea C un conjunto de números reales que satisfacen las siguientes propiedades (Axiomas)

   (A1) $2 \in C$

   (A2) Si $x \in C$, entonces $3x + 1 \in C$

   (A3) Si $x, y \in C$, entonces $x + y \in C$

   (A4) $3 \notin C$

   Demuestre las siguientes propiedades indicando qué axiomas, ya sea de los números reales o de los recien mencionados:

   (a) $9 \in C$

   (b) $1 \notin C$

   (c) Si $5 \in C$ entonces $22 \in C$

   (d) Si $x, y \in C$, entonces $3x + 1 + 3y \in C$

   (e) Si $x \in C$, entonces $-x \notin C$