

---

# Problemas Axiomas De Orden

Cristopher Morales Ubal  
e-mail: c.m.ubal@gmail.com

## Problemas

1. Considere  $x, y, z$  como valores reales estrictamente positivos. Demuestre las siguientes propiedades:

(a)  $x^2 + y^2 \geq 2xy$

(b)  $2 \leq x + x^{-1}$

(c)  $2 \leq \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

2. (a) Demuestre que

$$\forall x \in \mathbb{R}, x > 0, x^2 + \frac{2}{x} \geq 3$$

Hint: Analice el producto  $(x-1)^2(x+2)$

- (b) Demuestre que, para  $a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0$ , se tiene que:

$$a^3 + 2b^3 \geq 3ab^2$$

Hint: Utilice la parte anterior.

3. Si  $a > b > 0$  demuestre que

$$a > \frac{1}{2}(a+b) > \sqrt{ab} > \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} > b$$

4. Demuestre que  $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$  se tiene que

$$a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$$

5. Para todo  $a, b, c$  reales positivos, demuestre:

(a)  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

(b)  $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$

(c)  $\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \geq a+b+c$

6. Demuestre que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0 : (x+y)(x^{-1} + y^{-1}) \geq 4$$

Indique qué axiomas o propiedades de orden está utilizando.

7. Usando solo propiedades de orden en los reales, pruebe que si  $0 < a < 1$  y  $b > 1$ , entonces

$$ab + 1 < a + b$$

8. Si  $a, b, c$  reales demuestre que

$$b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 \geq abc(a+b+c)$$

9. Sean  $a$  y  $b$  reales positivos tales que  $a+b=1$ , demuestre que

(a)  $ab \leq \frac{1}{4}$

---

(b)  $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$

(c)  $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$

10. Resuelva las siguientes inecuaciones:

(a)  $\frac{2x-25}{x^2+2x-3} + \frac{2x+11}{x^2-1} > \frac{2}{x+3}$

(b)  $\frac{x}{x^2-3x+2} - \frac{x+2}{x^2+3x+2} \leq 0$

(c)  $\left| \frac{x^2+4x+4}{x^2+x-2} \right| \leq 2$

11. Resuelva la siguiente inecuación:

$$\frac{|x-2| + |2x+11|}{(x-2)|x+|x-2||} < \frac{1}{2}$$

12. Encuentre el conjunto solución de la inecuación

$$|x^2+3x| + x|x+3| + x^2 \geq 7 + |1+x^2|$$

13. Resuelva las siguientes inecuaciones

(a)  $|2x - |x+8|| \leq \frac{8}{x-2}$

(b)  $|x(x^2-1)| < \left|x + \frac{1}{x}\right|$

(c)  $\frac{x^2 - |x+1|}{|x+1|-2} \geq 1$

(d)  $\frac{||x| - |x-2||}{x^2-1} \leq 2$

14. Encuentre el conjunto solución de la inecuación

$$|x^2-2x| + x|x+3| \geq 3$$