Variables Aleatorias Continuas

Cristopher Morales Ubal
e-mail: c.m.ubal@gmail.com

Distribución Uniforme

Consideremos dos numeros reales $a < b$. Luego la variable aleatoria X se distribuye uniforme si su función de densidad viene dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & , \text{ si } a \leq x \leq b \\ 0 & , \text{ si } x \notin [a,b] \end{cases}$$

la cual es denotada por

$$X \sim \mathcal{U}(a,b)$$

Y su función de distribución viene dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & , \text{ si } a \leq x < b \\ 1 & , \text{ si } x \geq b \end{cases}$$

La esperanza y la varianza de esta distribución estan dadas por:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \ , \ \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Distribución Exponencial

Suponga que los enventos suceden aleatoriamente a lo largo del tiempo, con un tiempo esperado entre eventos $\beta > 0$. Sea X la variable aleatoria que cuenta el tiempo para el siguiente evento, luego una variable aleatoria definida de esta forma sigue una *distribución Exponencial* y su función densidad viene dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta} e^{-x/\beta} & , \text{ si } x > 0 \\ 0 & , \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

la cual se denota por:

$$X \sim exp(\beta)$$

y su función de distribución $F_X(x)$ viene dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } x < 0 \\ 1 - e^{-x/\beta} & , \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

La esperanza y varianza de esta distribución estan dados por:

$$\mathbb{E}(X) = \beta \ , \ \mathbb{V}(X) = \beta^2$$

esta distribución aparece generalmente cuando se trata de estudiar la durabilidad de mecanismos bajo el supuesto de que el sistema no se desgasta a lo largo del tiempo.
Para precisar el concepto de desgaste, decimos que la distribución de la v.a. X no tiene desgaste cuando $a > 0$ y $b > 0$ se tiene:

$$\mathbb{P}(X \geq a + b \mid X \geq a) = \mathbb{P}(X \geq b)$$

Es decir, el proceso *No tiene memoria del tiempo que esta funcionando*, pues que funcione hasta el tiempo $a + b$ dado que ha durado hasta el tiempo a es igual a que dure el tiempo b, es decir el mecanismos mientras funciona lo hace como si fuese nuevo.
También la propiedad de desgaste se conoce como *Propiedad de falta de memoria*.

Distribución Normal

Sea X una v.a.continua, se dice que X se distribuye *Normal* de parámetros $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma \in \mathbb{R}^+$ si su función de densidad es:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right\} \ , \ \forall x \in \mathbb{R}$$

La cual se denota por:

$$X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$$

y su función de distribución $F_X(x)$ viene dada por:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{t-\mu}{\sigma} \right)^2 \right\} dt \ , \ \forall x \in \mathbb{R}$$

La esperanza y varianza de esta distribución estan dadas por:

$$\mathbb{E}(X) = \mu \ \ , \ \ \mathbb{V}(X) = \sigma^2$$

Obs: si Z es una variable aleatoria normal de parámetros $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$ diremos que Z se distribuye en forma **Normal Estándar**, es decir:

$$Z \sim N(0, 1)$$

Distribución Gamma

Se dice que una v.a.continua X se distribuye según una *distribución Gamma* de parámetros $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ si su función de densidad es:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & , \text{ si } x \geq 0 \\ 0 & , \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

donde:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

es la *función Gamma*.
Integrando por partes se puede demostrar que $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ y como $\Gamma(1) = 1$, luego para todo natural n se cumple $\Gamma(n) = (n-1)!$. Con lo cual se tiene que la función Gamma es una generalización del factorial de un numero natural.
Su función de distribución viene dada por:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } x < 0 \\ \displaystyle\int_0^x \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t} dt & , \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

se denota por:

$$X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$$

La esperanza y varianza de esta distribución estan dadas por:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\beta} \ , \ \mathbb{V}(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

Distribución Beta

Se dice que una v.a.continua X se distribuye según una *distribución Beta* de parámetros $r > 0$ y $s > 0$ si su función de densidad es:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{r-1}(1-x)^{s-1}}{\beta(r,s)} & , \text{ si } 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{e.o.c.} \end{cases}$$

donde:

$$\beta(r,s) = \int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{s-1}\,dx$$

es la *función Beta*.
Se puede demostrar que

$$\beta(r,s) = \frac{\Gamma(r)\,\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)}$$

Su función de distribución viene dada por:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } x < 0 \\ \displaystyle\int_0^x \frac{t^{r-1}(1-t)^{s-1}}{\beta(r,s)}dt & , \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & , \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

se denota por:

$$X \sim \beta(r,s)$$

La esperanza y varianza de esta distribución estan dadas por:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{r}{r+s} \ , \ \mathbb{V}(X) = \frac{rs}{(r+s)^2(r+s+1)}$$

Distribución Rayleigh

Se dice que una v.a.continua X tiene una *distribución Rayleigh* de parámetros $\alpha > 0$ si su función de densidad es:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\alpha^2}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2\alpha^2}\right) & , \text{ si } x > 0 \\ 0 & , \quad \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Su función de distribución viene dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } x < 0 \\ 1 - \exp\left(-\dfrac{x^2}{2\alpha^2}\right) & , \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

se denota por:

$$X \sim \mathit{Rayleigh}(\alpha)$$

La esperanza y varianza de esta distribución estan dadas por:

$$\mathbb{E}(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\alpha \ , \ \mathbb{V}(X) = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\alpha^2$$