Problemas de Test de Hipótesis

Cristopher Morales Ubal
e-mail: c.m.ubal@gmail.com

Problemas

1. Le empresa BBM afirma que una nueva gama de neumáticos duran en promedio más de 28000 km. Las pruebas con 64 neumáticos dan como resultado una duración media de 27800 km, con una desviación típica muestral de 1000 km.

   (a) Si se usa un nivel de significancia del 5%, comprobar si hay evidencia suficiente para rechazar la afirmación de la empresa. Establecer claramente la hipótesis nula y alternativa.

   (b) Explique brevemente que es el p-valor ¿Cuál es el p-valor?

2. Se utilizan dos métodos para determinar la energía ocupada en cierto proceso químico. Los investigadores esperan determinar en cuanto difieren los métodos. La siguiente tabla muestra el cambio total de energía medidos en calorías por gramos de masa:

Método A	Método B
79.98	80.02
80.04	79.94
80.02	79.98
80.04	79.97
80.03	79.97
80.03	80.03
80.04	79.95
79.97	79.97
80.05	
80.03	
80.02	
80.00	
80.02	

   (a) Determine un intervalo de confianza del 95% para la media de cada método.

   (b) Determine si las varianzas de los métodos son iguales son un 5% de significancia.

   (c) Determine si es posible aseverar con un 5% de significancia que el método A utiliza más energía que el método B.

   (d) Calcule el p-valor de la prueba anterior ¿Cómo interpreta esta cantidad?

3. (a) Se toman dos muestras independientes para comparar las medias de dos poblaciones. ¿Se puede concluir que, al nivel del 0.02, la media de la población A ha de ser mayor que la de la población B?

Muestra	n	$\overline{x}$	s
A	50	57.5	6.2
B	60	54.4	10.6

   (b) Verifique con qué valor de $(1-\alpha)\,\%$ tales valores de n son aceptables.

4. La ley de tolerancia cero fue implementada para disminuir el número de muertes en accidentes automovilísticos por causa del consumo del alcohol del conductor. En las tablas siguientes se presentan los resultados del período enero-septiembre de 2011-2012.

		2011				2012	
		Lesionados	Fallecidos			Lesionados	Fallecidos
Causa	Alcohol	3900	160	Causa	Alcohol	2745	116
	Otra	36435	1075		Otra	38435	1010

(a) Quines crítican esta Ley dicen que no se ha logrado disminuir de manera significativa el número de muertes en accidentes a causa del alcohol respecto del año 2011.¿ Es posible demostrar que los críticos están equivocados?

(b) Los críticos insiten en que la medida no es efectiva y argumentan que el porcentaje de accidentes causados por el consumo de alcohol no ha disminuido respecto del año 2011.¿Para que nivel de significancia es posible mostrarles que están equivocados?

5. Un diseñador de aviones tiene evidencia (teoría) de que la pintura del avión reduce la velocidad del mismo a una potencia especificada y colocación del alerón. Se prueban seis aviones consecutivos de la linea de ensamble, a los que se les mide su velocidad antes y después de pintarlos. Los resultados se muestran a continuación:

Avión	1	2	3	4	5	6
No Pintado	289	286	283	288	283	289
Pintado	286	285	279	283	281	286

(a) Defina las variables aleatorias apropiadas y encuentre intervalos de confianza del 95% para la media y varianza de cada una de las variables. Sobre la base de estos intervalos ¿Qué puede concluir respecto a la teoría del diseñador?

(b) ¿Proporcionan los datos evidencia que avale la teoría del diseñador, con un 1% de significancia?

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que la pintura del avión reduzca la velocidad del mismo a una potencia especificada cuando la verdadera velocidad de la diferencia media es de 1.187[Km/hrs]?

(d) El diseñador estima que la proporción de veces que el avión sobrepase los 285[Km/hrs] debe ser de al menos el 30%.¿Existe evidencia muestral suficiente para avalar la creencia del ingeniero con un 5% de significancia?

Soluciones

Problemas

1. (a) Las Hipotsis a contrastar son:

$$H_0 : \mu \geq 28000 \ \text{ vs } \ H_1 : \mu < 28000$$

luego la región de rechazo del test es $R = \{\overline{x}_n : \overline{x}_n \leq 27791.25\}$ como $\overline{x}_n = 27800 \notin R \Longrightarrow$ No se rechaza H_0. $\therefore$ No hay suficiente evidencia para rechazar la hipotesis nula, es decir, para rechazar la afirmación de la empresa.

■

(b) El p-valor es el menor nivel de significancia para el cual rechazamos la hipotesis nula en favor de la hipotesis alternativa.
Para el test realizado el p-valor viene dado por:

$$p - \text{valor} = \mathbb{P}\left(T \leq T_{obs}\right) \ (*)$$

donde:

$$T_{obs} = \frac{\overline{x}_{obs} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \ \text{(bajo } H_0\text{)}$$

para el problema se tiene que $T_{obs} = -1,6$ luego en $(*)$ se tiene que

$$p - \text{valor} = \mathbb{P}\left(T \leq -1,6\right) \ , \ T \sim t_{63}$$

luego de la distribución t-student se sigue que

$$p - \text{valor} = 0,0548$$

$\therefore$ el menor nivel de significancia para el cual se rechaza H_0 es de $5,48\%$

■

2. (a) Método A: $\mu_A \in (80.0055, 80.0345)$
Método B: $\mu_B \in (79.9537, 80.0063)$

■

(b) Las hipotesis a constrastar son:

$$H_0 : \ \sigma_A^2 = \sigma_B^2 \ \text{ vs } \ H_1 : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$$

con lo cual la región de rechazo es:

$$R = \left\{ \frac{s_A^2}{s_B^2} : \frac{s_A^2}{s_B^2} > 4.666 \ \vee \ \frac{s_A^2}{s_B^2} < 0.277 \right\}$$

como $\dfrac{s_A^2}{s_B^2} = 0,548 \notin R \Longrightarrow$ No se rechaza H_0, $\therefore$ No hay suficiente evidencia para rechazar H_0, con lo cual aceptamos que las varianzas de ambos métodos son iguales con un 5% de significancia.

■

(c) las hipotesis a constrastar son:

$$H_0 : \mu_A = \mu_B \ \text{ vs } \ H_1 : \mu_A > \mu_B$$

con lo cual la región de rechazo obtenida es:

$$R = \{\overline{x}_A - \overline{x}_B : \overline{x}_A - \overline{x}_B \geq 0.02098\}$$

De la muestra se tiene que $\overline{x}_A - \overline{x}_B = 0.04 \in R \Longrightarrow$ Se rechaza H_0, $\therefore$ hay suficiente evidencia para rechazar H_0 con lo cual aceptamos que el método A utiliza más energia que el método B, con un nivel se significancia del 5%

■

(d) El p- valor de la prueba es:

$$p - \text{valor} = \mathbb{P}\left(T \geq T_{obs}\right)$$

donde:

$$T_{obs} = \frac{\overline{x}_{A_{obs}} - \overline{x}_{B_{obs}} - (\mu_A - \mu_B)}{s_P\sqrt{\dfrac{1}{n_A} + \dfrac{1}{n_B}}}$$

el cual de la muestra se tiene que $T_{obs} = 3.297$ luego

$$p - \text{valor} = \mathbb{P}\left(T \geq 3.297\right)\ ,\ T \sim t_{19}$$

luego de la distribución t-student se tiene que

$$p - \text{valor} = 0.0017$$

$\therefore$ el menor nivel se significancia para el cual se rechaza H_0 de esta prueba es de 0.17%.

■

3. (a) Primero realizamos un tes de hipotesis para determinar si las varianzas poblacionales son iguales a un nivel de 0.02.
Asi las hipotesis a constrastar son:

$$H_0:\ \sigma_A^2 = \sigma_B^2\ \text{ vs }\ H_1:\sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$$

con lo cual la región de rechazo es:

$$R = \left\{\frac{s_A^2}{s_B^2} : \frac{s_A^2}{s_B^2} > 1.877\ \vee\ \frac{s_A^2}{s_B^2} < 0.524\right\}$$

como $\dfrac{s_A^2}{s_B^2} = 0,324 \in R \Longrightarrow$ Se rechaza H_0, $\therefore$ hay suficiente evidencia para rechazar H_0, con lo cual aceptamos que las varianzas poblacional son distintas con un 2% de significancia.
Luego las hipotesis a constrastar son:

$$H_0:\mu_A \leq \mu_B\ \text{ vs }\ H_1:\mu_A > \mu_B$$

obteniendose la región de rechazo:

$$R = \{\overline{x}_A - \overline{x}_B : \overline{x}_A - \overline{x}_B \geq 3.4304\}$$

de la muestra se tiene $\overline{x}_A - \overline{x}_B = 3.1 \notin R \Longrightarrow$ No se rechaza H_0.
$\therefore$ No hay suficiente evidencia para rechazar H_0, con lo cual no se puede concluir que la media de la población A ha de ser mayor que la población B, al nivel $\alpha = 0.02$.

■

(b) Tenemos que el p-valor del test es:

$$p - \text{valor} = \mathbb{P}\left(T \geq T_{obs}\right)$$

donde

$$T_{obs} = \frac{\overline{x}_{A_{obs}} - \overline{x}_{B_{obs}} - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\dfrac{s_A^2}{n_A} + \dfrac{s_B^2}{n_B}}}$$

De la muestra se tiene $T_{obs} = 1.9074$ luego:

$$p - \text{valor} = \mathbb{P}\left(T > 1.9074\right)\ ,\ T \sim t_{98}$$
$$\Longrightarrow p - \text{valor} = 0.03091$$

luego se tiene

$$(1-\alpha)\% = (1 - 0.03091)\% = 96.909\%$$

$\blacksquare$

4. (a) Las hipotesis a constrastar son:

$$H_0 : p_{2011} \leq p_{2012} \text{ vs } H_1 : p_{2011} > p_{2012}$$

luego la región de Rechazo asociada al test viene dada por:

$$R = \left\{ \widehat{p}_{2011} - \widehat{p}_{2012} : \frac{\widehat{p}_{2011} - \widehat{p}_{2012}}{\sqrt{\frac{\widehat{p}_{2011} * (1 - \widehat{p}_{2011})}{n_1} + \frac{\widehat{p}_{2012}\,(1 - \widehat{p}_{2012})}{n_2}}} \geq 1.645 \right\}$$

de la muestra se tiene que $\widehat{p}_{2011} = \frac{160}{1235}$, $\widehat{p}_{2012} = \frac{116}{1126}$ luego reemplazando en la región de rechazo se tiene que:

$$\frac{\widehat{p}_{2011} - \widehat{p}_{2012}}{\sqrt{\frac{\widehat{p}_{2011} * (1 - \widehat{p}_{2011})}{n_1} + \frac{\widehat{p}_{2012}\,(1 - \widehat{p}_{2012})}{n_2}}} = 2.01485 \in R$$

$\therefore$ Se rechaza H_0, es decir, hay suficiente evidencia para concluir que se ha logrado disminuir significativamente el $n°$ de muertes a causa del alcohol con la nueva ley, con un nivel de significancia del 5%.

$\blacksquare$

(b) Se realiza el mismo test de hipotesis anterior, pero ahora considerando la totalidad de accidentes. Para calcular el minimo nivel de significancia para el cual se rechaza H_0, calculamos el p-valor, el cual para esta prueba viene dado por:

$$p - \text{valor} = \mathbb{P}\left(Z \geq Z_{obs}\right)$$

donde

$$Z_{obs} = \frac{\widehat{p}2011_{obs} - \widehat{p}2012_{obs} - 0}{\sqrt{\frac{\widehat{p}2011_{obs} * (1 - \widehat{p}2011_{obs})}{n_1} + \frac{\widehat{p}2012_{obs}\,(1 - \widehat{p}2012_{obs})}{n_2}}} \quad \text{(Bajo } H_0\text{)}$$

de la muestra se tiene $Z_{obs}015.8102$ luego

$$\begin{aligned} &p - \text{valor} = \mathbb{P}\left(Z \geq 15.8102\right)\ ,\ Z \sim N\left(0, 1\right) \\ \Longleftrightarrow\ &p - \text{valor} = 0 \end{aligned}$$

$\therefore$ para cualquier nivel de significancia se rechaza H_0, luego es posible mostrarles para todo nivel de significancia que estan equivocados.

$\blacksquare$

5. (a) Sean:

X : Velocidad del avion a una potencia especificada y colocacion del aleron antes de pintarlo
Y : Velocidad del avion a una potencia especificada y colocacion del aleron despues de pintarlo

asumimos que

$$X \sim N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right) \quad , \quad Y \sim N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right)$$

Con μ_X, σ_X^2, e μ_Y, σ_Y^2 desconocidos.
Luego los intervalos de confianza para cada variable viene dados por:

$$X : \mu_X \in (283.3861, 289.2739)\ ,\ \sigma_X^2 \in (3.06574, 47.33261)$$

$$Y : \mu_Y \in (280.3122, 286.3478)\ ,\ \sigma_Y^2 \in (3.22162, 49.73935)$$

$\blacksquare$

(b) Debemos constrastar las hipotesis

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y \;\text{ vs }\; H_1 : \mu_X > \mu_Y$$

observe que las muestras no son independientes, pues al calcular el coeficiente de correlación entre ambas se tiene que $\rho_{XY} = 0.8763$ luego las muestras son pareadas.
Luego la región de rechazo del test viene dada por:

$$R = \{\overline{x} - \overline{y} : \overline{x} - \overline{y} \geq 1.94278\}$$

De la muestra se tiene que $\overline{x} - \overline{y} = 3 \in R \Longrightarrow$ Se rechaza H_0
$\therefore$ los datos proporcionan suficiente evidencia para avalar la teoria del diseñador con un nivel de significancia del 1%.

$\blacksquare$

(c) se debe calcular

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\overline{x} - \overline{y} \geq 1.94278 | \mu_X - \mu_Y = 1.187\right) &= \mathbb{P}\left(T \geq 1,30905\right)\ ,\ T = \frac{\overline{x} - \overline{y} - (\mu_X - \mu_Y)}{s_d/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \\ &= 0.126086\end{aligned}$$

$\therefore$ la probabilidad pedida es de un 12.6086%

$\blacksquare$

(d) se deben realizar dos test de hipotesis: i)aviones no pintados y ii) aviones pintados.
luego tenemos que:

i. el test de hipotesis es

$$H_0 : p_X \leq 0.3 \;\text{ vs }\; H_1 : p_X > 0.3$$

luego la región de rechazo para el test viene dada por:

$$R = \left\{ \widehat{p}_X : \frac{\widehat{p}_X - 0.3}{\sqrt{\dfrac{\widehat{p}_X\left(1 - \widehat{p}_X\right)}{n_X}}} \geq 1.645 \right\}$$

de la muestra se tiene que: $\dfrac{\widehat{p}_X - 0.3}{\sqrt{\dfrac{\widehat{p}_X\left(1 - \widehat{p}_X\right)}{n_X}}} = 1.90746 \in R$

$\therefore$ para los aviones no pintados, hay suficiente evidencia para rechazar H_0, es decir, se acepta la creencia del diseñador con una significancia del 5%.

$\blacksquare$

ii. el test de hipotesis es

$$H_0 : p_Y \leq 0.3 \;\text{ vs }\; H_1 : p_Y > 0.3$$

luego la región de rechazo para el test viene dada por:

$$R = \left\{ \widehat{p}_Y : \frac{\widehat{p}_Y - 0.3}{\sqrt{\dfrac{\widehat{p}_Y\left(1 - \widehat{p}_Y\right)}{n_Y}}} \geq 1.645 \right\}$$

de la muestra se tiene que: $\dfrac{\widehat{p}_Y - 0.3}{\sqrt{\dfrac{\widehat{p}_Y\left(1 - \widehat{p}_Y\right)}{n_Y}}} = 0.15628 \notin R$

$\therefore$ para los aviones pintados No se rechaza H_0, es decir, No hay suficiente evidencia que avale la creencia del ingeniero con un nivel de significancia del 5%.

$\blacksquare$