Problemas función generadora de Momento

Cristopher Morales Ubal
e-mail:c.m.ubal@gmail.com

Problemas

1. Sea la función:

$$p_X(x) = -ke^{|x|},\ -\infty \leq x \leq \infty$$

   a) Determinar la constante k tal que p_X sea función densidad.
   b) Si X tiene función densidad p_X, determinar su f.g.m.
   c) Si X tiene función densidad p_X e $Y = 25X^2$, encontrar $\mathbb{E}(Y)$ y $\mathbb{V}(Y)$.

2. Suponga que X tiene función generadora de momentos dada por

$$M_X(t) = (0,4e^t + 0,6)^8$$

   (a) Determine la función generadora de momento de $Y = 3X + 2$.
   (b) Determine $\mathbb{E}(X)$ y $\mathbb{V}(X)$

3. Sea $M_X(t)$, la función generadora de momentos de X, y defina $S(t) = log(M_X(t))$.
   Muestre que:

   (a) $\left.\dfrac{\partial S(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \mathbb{E}(X)$
   (b) $\left.\dfrac{\partial^2 S(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = \mathbb{V}(X)$

4. La función densidad de la v.a. X viene dada por:

$$f(x) = k \cdot \left(\frac{x^2}{2} I_{[0,2]}(x) + e^{-x} I_{[2,\infty[}(x)\right)$$

   (a) Determinar la función generadora de momentos de X.
   (b) Encontrar la $\mathbb{V}(X)$

5. Sea X una v.a.c. con función de densidad uniforme $U[0,1]$. Se define la v.a.c

$$Y = -2\ln(X)$$

   Determinar su f.g.m.

6. Suponga que el radio de un cojinete de esferas está distribuido normalmente con media 1 y varianza $0,04$

   (a) Encontrar la función de densidad de la variable aleatoria volumen
   (b) Encontrar la esperanza y la varianza del volumen

7. la f.g.m de X, el numero de transacciones que se realizan en un supermercado en un día, es

$$M_X(t) = e^{\mu\left(e^t - 1\right)}$$

   (a) Identifique la función de distribución de X
   (b) Encuentre una expresiíon para $\mathbb{P}\left(\mu - 2\sigma < \overline{X} < \mu - 2\sigma\right)$
   (c) Sea $Y = 3X - 2$ Determine $\mathbb{E}(Y)$ y $\mathbb{V}(Y)$

Soluciones

Problemas

1. *a)* $k = \dfrac{1}{2}$

   b) $M_X(x) = \dfrac{1}{1-t^2}$, con $-1 < t < 1$

   c) $\mathbb{E}(Y) = 50,\ \mathbb{V}(Y) = 12500$

2. (a) $M_X(t) = e^{2t}\left(0,4e^{3t} + 0,6\right)^8$

   (b) $\mathbb{E}(x) = 3,2\ ,\ \mathbb{V}(X) = 1,92$

3. Demostración

4. (a) $\varphi_X(t) = \dfrac{ke^{2t}}{t}\left(2 - \dfrac{2}{t} + \dfrac{1}{t^2} - \dfrac{1}{t^2e^{2t}} + \dfrac{t}{(1-t)\,e^2}\right)$

   (b) $\mathbb{V}(X) = k\left[4\left(\dfrac{4}{5} - k\right) + 2e^{-2}(5-6k) - 9ke^{-4}\right]$, con $k = \dfrac{3e^2}{4e^2+3}$

5. $M_Y(t) = \dfrac{1}{1-2t}$ para $t < \dfrac{1}{2}$

6. (a) $f_V(v) = \dfrac{\sqrt{2}\sqrt[3]{16}}{8\cdot 0,2}exp\left\{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{3v}{4\pi}} - 1}{0,2}\right)^2\right\}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{9v^2}}I_{\mathbb{R}-\{0\}}(v)$

   (b) $\mathbb{E}(V) = \dfrac{112\pi}{75}$, $\mathbb{V}(V) = 0,744\pi^2$

7. (a) $X \sim Poisson(\mu)$

   (b) $2\mathbb{P}\left(Z < \sqrt{2n}\right) - 1$

   (c) $\mathbb{E}(Y) = 3\mu - 2$, $\mathbb{V}(Y) = 9\mu^2$