Problemas Transformaciones Lineales

Cristopher Morales Ubal
e-mail: c.m.ubal@gmail.com

Problemas

1. Considere la función $T : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow M_{1\text{x}3}(\mathbb{R})$ definida por

$$T\left(ax^2+bx+c\right)=\begin{pmatrix} a+b & a+c & b-c \end{pmatrix}$$

   (a) Demuestre que T es una transformación Lineal.
   (b) Estudiar la inyectividad de T.
   (c) Determinar una base para la imagen de T.

2. Sea $T : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por:

$$T\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}=(x+y+z+w\ ,\ x-y+w\ ,\ z+w)$$

   (a) Calcule el núcleo e imagen de T. Indique, además, la nulidad y rango de T.
   (b) ¿$(1,-2,-1)\in \operatorname{Im}(T)$?. Justifique.

3. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por:

$$T(x,y,z)=(x+z\ ,\ y+3z\ ,\ x+y+\alpha z)$$

   con $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) Determine el valor de la constante α para que $\dim \operatorname{Ker}(T)=1$. Calcule el $\dim \operatorname{Ker}(T)$ en este caso.
   (b) Para el valor anterior de α, calcule $\operatorname{Im}(T)$.

4. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(x,y,z)=(2x-y\ ,\ x+y\ ,\ y-2z)$$

   (a) Muestre que T es una transformación lineal.
   (b) Si $\pi=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x+y+z=0\right\}$. Muestre que $T(\pi)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$. Si es un plano o una recta, encuentre su ecuación.
   (c) Si $R : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una transformación lineal y π es un plano, ¿Puede ocurrir $R(\pi)=\mathbb{R}^3$?. Fundamente.

5. Considerar los planos

$$H_1=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 2x-y+2z=0\right\}\quad,\quad H_2=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x-2y+z=0\right\}$$

   Encuentre una transformación Lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(H_1)=H_2$.

6. Considere $T : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ la transformación lineal definida por:

$$T(p(x))=p''(x)+p'(x)$$

   Si las bases de $\mathbb{R}_3[x]$ y $\mathbb{R}_2[x]$ son, respectivamente,

$$\mathcal{B}=\left\{1\ ,\ 1+2x\ ,\ 3x+x^2\ ,\ x^3\right\}$$
$$\mathcal{D}=\left\{1\ ,\ x\ ,\ x+x^2\ ,\ x^3\right\}$$

   Calcule la matriz asociada $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}$ a la transformación T.

7. Considere los planos:
$$W_1 : \ x+y-z=0 \ \ \wedge \ \ W_2 : \ y-2z=0$$
y sea $W \subseteq \mathbb{R}^3$ el subespacio definido como $W = W_1 \cap W_2$.
   (a) Hallar una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que verifique las siguientes condiciones:
      i. $T(x,y,z) = (x,y,z) \ , \ \forall (x,y,z) \in W$.
      ii. $T(W_1) = W_2$.
      iii. $T(1,0,0) = (0,0,0)$
   (b) Para la transformación T del item a), calcule $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$, donde $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

   Indicación: Obtenga bases adecuadas para W_1 , W_2 y W.

8. En esta pregunta buscaremos transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que cumplan las siguientes propiedades:
   (a) Encuentre una transformación lineal de $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que
$$\mathrm{Ker}(T) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x+y=0\right\} \ \text{ e } \ \mathrm{Im}(T) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x-y=0\right\}$$
   ¿Es única esta transformación T?
   (b) Encuentre una base de $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ y una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que cumpla las propiedades del punto anterior y que además tenga matriz asociada
$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

9. Defina una transformación lineal $T : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuyo kernel está dado por las ecuaciones
$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \ \ , \ \ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0$$
y su imagen es el subespacio de $\mathbb{R}^3$ definido por
$$y_1 = \mu + \lambda \ \ , \ \ y_2 = \mu - \lambda \ \ , \ \ y_3 = 2\mu - 3\lambda \ \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$
Hallar una expresión matricial de T.

10. Si $T : V \longrightarrow V$ es una transformación lineal tal que $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Img}(T)$.
¿Qué se puede decir de T^2?. $\left(T^2 = T \circ T\right)$.

11. Sean V y W los espacios generados por:
$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{R})$$
y
$$\mathcal{D} = \left\{1 + x - x^3, x^2 + x^3, 1 - x^2\right\} \subseteq \mathbb{R}_3[x]$$
respectivamente. Considere $T : V \longrightarrow W$ la transformación lineal tal que
$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
Calcule el núcleo, la imagen de T y sus bases respectivas. ¿Es T un isomorfismo? Justifique.

12. Sean U y V los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^5$ y $\mathbb{R}^4$ generados, respectivamente, por:

$$\mathcal{B} = \{(1,2,0,1,-1),(0,1,-1,1,1),(0,0,0,1,1)\}$$

y

$$\mathcal{D} = \{(1,-1,0,1),(0,0,-1,1)\}$$

considere $T : U \longrightarrow V$ la transformación lineal definida a través de su matriz asociada:

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtenga bases para Ker$T$ e ImT.

13. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$, respectivamente (orden usual), $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $S : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ y $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ transformaciones lineales tales que

$$[T]_{\mathcal{C}_1}^{\mathcal{C}_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad [S]_{\mathcal{C}_2}^{\mathcal{C}_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad [L]_{\mathcal{C}_2}^{\mathcal{C}_1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Determine explícitamente $L \circ S \circ T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

(b) ¿Es S una Transformación biyectiva?.

(c) Determine $\operatorname{Ker}(T)$ y $\operatorname{Im}(T)$.

14. Considerar la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\begin{aligned} T(1,1,0) &= (2,4,-2) \\ T(1,0,1) &= (0,2,-2) \\ T(0,1,1) &= (2,2,2) \end{aligned}$$

(a) ¿Es T invertible? Justifique.

(b) Pruebe que existe una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ es una matriz diagonal.

15. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal y sea $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ una base ordenada de $\mathbb{R}^3$, tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Pruebe que T es diagonalizable.

(b) Encuentre una base $\mathcal{C}$ tal que $[T]_{\mathcal{C}}$ es diagonalizable.

(c) Encuentre el Ker T.

Soluciones

Problemas

1. (a) Demostración
   (b) $\text{Ker}\,(T) = \left\langle \left\{ -x^2 + x + 1 \right\} \right\rangle$, luego No es inyectiva.
   (c) $\text{Im}(T) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

2.

3. (a) $\alpha = 4$
   (b) $(x, y, z) \in \text{Im}\,(T) \iff z - y - x = 0.$

4. (a) Demostración.
   (b) Demostración.
   (c) No, pues $\text{Dim Im}\,(R\,(\pi)) < 3 = \text{Dim}\,\mathbb{R}^3$.

5. $T\,(x, y, z) = \left(x\ ,\ \dfrac{y}{2}\ ,\ \dfrac{y + 2z}{2} \right)$

6.

7. (a) $T\,(x, y, z) = \dfrac{1}{2}\,(-y, 4z, 2z)$
   (b) $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

8. (a) $T\,(x, y) = (x + y, x + y)$, No es única.
   (b) $\mathcal{B} = \left\{ \left(\dfrac{2}{3}, 0 \right)\ ,\ \left(-\dfrac{1}{3}, -1 \right) \right\}$ y $T(x, y) = \dfrac{3}{2}\,(x + y, x + y)$

9. $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ donde $\mathcal{B}$: base canónica de $\mathbb{R}^5$ y $\mathcal{B}'$: base canónica de $\mathbb{R}^3$

10. $T^2 = 0$,es decir, es la transformación nula.

11.

12. $\text{Ker}\,T = \langle \{ (1, 1, 1, 1, -1) \} \rangle$ y $\text{Im}\,T = \langle \{ (1, -1, 0, 1), (-1, 1, -1, 0) \} \rangle$

13. (a) $(L \circ S \circ T)\,(x, y, z) = (2x - z\ ,\ 4y - 2z\ ,\ 4y - 2x)$
    (b) Si es biyectiva
    (c) $\text{Ker}\,T = \{ (0, 0, 0) \}$, $\text{Img}\,T = \{ (1, -1, 2, 0), (-1, 1, 2, 2), (0, 0, -1, -1) \}$

14. (a)
    (b)

15. (a) $\lambda = 0$, $\lambda = 3$, $\lambda = -3$ como todos sus valores propios son distintos luego T es diagonalizable.
    (b) $V_{\lambda=0} = \langle (3, 2, 1) \rangle$, $V_{\lambda=3} = \langle (0, 1, 1) \rangle$, $V_{\lambda=-3} = \langle (0, -1, 1) \rangle \therefore \mathcal{C} = \{ (3, 2, 1), (0, 1, 1), (0, -1, 1) \}$
    (c) $\text{Ker}\,T = V_{\lambda=0} = \langle (3, 2, 1) \rangle$