Problemas Curvas en el espacio

Cristopher Morales Ubal
e-mail: c.m.ubal@gmail.com

Problemas

1. Considerar la curva $r = 3 + 2\cos\theta$. Determinar la curvatura en el punto $(0,3)$.

2. Encuentre la ecuación de los planos Normal, Rectificante y Osculador de la curva dada por la intersección de las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ y $x^2 - y^2 + z^2 = 4$ en el punto $(1,1,2)$.

3. Considerar la curva γ, intersección de las superficies $x + y + z = 4$ y $x^2 + y^2 - x + y + z = 4$

   (a) Encuentre una parametrización para γ.

   (b) Encuentre el vector Binormal en el punto $(1,-1,4)$.

   (c) Encuentre la torsión en el punto $(1,-1,4)$.

4. Una partícula se mueve a lo largo de la curva $y = 2x - x^2$, con una componente horizontal de la velocidad de $4[mts/seg]$, es decir $v_x = 4[mts/seg]$. Hallar las componentes tangencial y normal de la aceleración en el punto $(1,1)$.

5. Una partícula se mueve sobre el manto del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, de forma tal que $z = z(\theta)$ es solución de la ecuación diferencial
$$\frac{d^2z}{d\theta^2} = z \ , \ z(0) = 1 \ , \ \frac{dz}{d\theta}(0) = 0$$

   (a) Encuentre una parametrización de la curva γ descrita por la partícula.

   (b) Calcule, en un punto genérico de la curva, el vector Tangente unitario, el vector Normal y el vector Binormal asociado a γ, asi como la torsión y la curvatura.

6. Considerar la curva ξ parametrizada como:
$$\xi : \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 - 3t^2 \end{cases}$$
   Hallar la ecuación del círculo osculador en el punto $(1,-2)$.

7. Considerar la curva $y = \ln(x)$. Encuentre la ecuación del círculo osculador en el punto de la curva con curvatura máxima.

8. Considerar la curva dada en forma polar por la ecuación
$$r = \theta \ , \ \theta > 0 \text{ (espiral de arquimedes)}$$
   Encuentre la ecuación del circulo osculador en el punto $(2\pi, 0)$.

9. *Espirales de MaClaurin*: Estas corresponden a una familia de curvas en el plano que al ser descritas en coordenadas polares las variables r y θ satisfacen la relación:
$$r(\theta) = a\left(\sin(n\theta)\right)^{1/n}$$
   Donde $a > 0$ y $n \in \mathbb{R} - \{0\}$ correspnde al orden de la espiral. Pruebe que la curvatura de una espiral de MaClaurin de orden n es:
$$\frac{(n+1)}{a}\left(\sin(n\theta)\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

10. Sea γ una curva suave, parametrizada por la longitud de arco $\overrightarrow{\alpha}(s)$, con $s \in [0, L]$. Sea $\overrightarrow{w}$ un vector fijo, unitario, tal que

$$\overrightarrow{\alpha}(s) \cdot \overrightarrow{w} = 0 \; ; \; \forall s \in [0, L]$$

Pruebe que para todo s se cumple que $\kappa(s) = 0$ o bien $\tau(s) = 0$.

11. Sea σ una curva suave en $\mathbb{R}^3$ parametrizada por longitud de arco $\overrightarrow{r}(s)$, y sea $\tau(s)$ la torsión. Se define la curva:

$$\gamma : \; \overrightarrow{\alpha}(s) = \int_0^s \overrightarrow{B}_\sigma(u)\, du$$

(a) Pruebe que $\overrightarrow{\alpha}(s)$ es una parametrización por longitud de arco de γ.

(b) Pruebe que $\kappa_\gamma(s) = \tau_\sigma(s)$.

(c) Pruebe que $\tau_\gamma(s) = \kappa_\sigma(s)$.

Soluciones

Problemas

1. $\dfrac{17}{13\sqrt{13}}$

2. - ecuación plano Normal: $2x - z = 0$
   - ecuación plano Osculador: $y = 1$
   - ecuación plano Rectificante: $x + 2z = 5$

3. (a) $\overrightarrow{r}(t) = (1 + \cos t, \sin t, 3 - \cos t - \sin t)$.

   (b) $\overrightarrow{B} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$.

   (c) $\tau = 0$

4. $\overrightarrow{a}_{\overrightarrow{T}} = 0$, $\overrightarrow{a}_{\overrightarrow{N}} = 32$.

5. (a) $\overrightarrow{r}(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta), \cosh(\theta))$

   (b) $\overrightarrow{T}(\theta) = \dfrac{1}{\cosh\theta}(-\sin(\theta), \cos(\theta), \sinh(\theta))$

   $\overrightarrow{B}(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}\cosh\theta}(\cos(\theta)\cosh(\theta) + \sin(\theta)\sinh(\theta), -\cos(\theta)\sinh(\theta) + \sin(\theta)\cosh(\theta), 1)$

   $\overrightarrow{N}(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}\cosh^2\theta}\left(\cos(\theta)\cosh^2(\theta) - \sin(\theta)\cosh(\theta)\sinh(\theta), \cos(\theta)\sinh(\theta)\cosh(\theta) + \sin(\theta)\cosh^2(\theta), -\cosh(\theta)\right)$

   $\kappa(\theta) = \dfrac{\sqrt{2}}{\cosh^2(\theta)} = \sqrt{2}sech^2(\theta)$

   $\tau(\theta) = \dfrac{\sinh(\theta)}{\cosh^2(\theta)}$

6. $(x-1)^2 + \left(y + \dfrac{4}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$

7. $\left(x - 2\sqrt{2}\right)^2 + \left(y + \dfrac{1}{2}(\ln(2) + 3)\right)^2 = \dfrac{27}{4}$

8. $\left(x - \dfrac{2\pi}{2+4\pi^2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{1+4\pi^2}{2+4\pi^2}\right)^2 = \dfrac{\left(1+4\pi^2\right)^3}{\left(2+4\pi^2\right)^2}$

9. Prueba

10. Prueba

11. Pruebas