Variables Aleatorias Discretas

Cristopher Morales Ubal
e-mail: c.m.ubal@gmail.com

Distribución Binomial

Sea X una v.a. discreta, supongamos que se repite n veces un experimento que puede dar lugar a dos resultados: Exito o Fracaso. Supongamos tambien que todos los experimentos son independientes y tienen la misma probabilidad de éxito p. Luego definimos X como *el número de éxitos en n intentos*, la distribución de esta variable se denomina *Binomial* con n repeticiones y probabilidad p de exito la cual se denota como

$$X \sim Bin\,(n, p)$$

cuya función de densidad(o probabilidad puntual) viene dada por:

$$\begin{aligned} P_X\,(x) &= \mathbb{P}\,(X = x) \\ &= \binom{n}{x} p^x\,(1-p)^{n-x}\ ,\ x \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{aligned}$$

y F_X su función de distribución dada por:

$$F_X\,(x) = \begin{cases} 0 & ,\ \text{si } x < 0 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p^k\,(1-p)^{n-k} & ,\ \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

la esperanza y varianza de esta distribución están dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,(X) &= n \cdot p \\ \mathbb{V}\,(X) &= n \cdot p \cdot (1-p) \end{aligned}$$

Distribución Binomial Negativa (o Distribución de Pascal)

Consideremos, como en el caso de la distribución binomial un experimento aleatorio cuyo resultado es éxito o fracaso con probabilidades p y $1-p$ respectivamente. Supongamos que se hacen repeticiones independientes del experimento hasta que ocurren k éxitos. Los parámetros de la distribución son: p: probabilidad de exito y k: número de éxitos buscados. Luego llamaremos X a la variable aleatoria definida como *el número de experimentos que hay que realizar para obtener k-éxitos*. La distribución de esta variable se denomina *Binomial Negativa* o *de Pascal* y se denota por:

$$X \sim BN(p, k)$$

luego la función de densidad (o de probailidad puntual) es

$$P_X\,(x) = \binom{x-1}{k-1} p^k\,(1-p)^{x-k}\ ,\ con\ x \in \{k, k+1, k+2, \ldots\}$$

y F_X su función de distribución dada por:

$$F_X\,(x) = \begin{cases} 0 & ,\ \text{si } x < k \\ \displaystyle\sum_{i=k}^{x} \binom{i-1}{k-1} p^k\,(1-p)^{i-k} & ,\ \text{si } x \geq k \end{cases}$$

la esperanza y varianza de esta distribución están dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,(X) &= \frac{k}{p} \\ \mathbb{V}\,(X) &= \frac{k\,(1-p)}{p^2} \end{aligned}$$

Distribución Geometrica

Se llama *distribución Geometrica* a la $BN(p,k)$ con $k=1$. Luego es la distribucón de la variable aleatoria X definida como *el número de experimentos necesarios para obtener el primer éxito*. A esta distribución la denotaremos como $G(p)$ o equivalentemente:

$$X \sim G(p)$$

notemos que el rango de la v.a. X viene dada por:

$$R(X) = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$$

haciendo $k=1$ en $BN(p,k)$, se tiene que la función de densidad de probabilidad viene dada por:

$$P_X\left(x\right) = \binom{x-1}{1-1} p^1 \left(1-p\right)^{x-1} = p\left(1-p\right)^{x-1} \ , \ x = 1, 2, \ldots, n, \ldots$$

y su función de distribución o $F_X\left(x\right)$ viene dada por:

$$\begin{aligned} F_X\left(x\right) &= P\left(X \leq x\right) \\ &= \sum_{x \in R(X)} P_X\left(x\right) \\ &= \sum_{k=1}^{x} p\left(1-p\right)^{k-1} \\ &= p\sum_{k=1}^{x} \left(1-p\right)^{k-1} \\ &= p\sum_{k=0}^{x-1} \left(1-p\right)^{k} \\ &= p \cdot \frac{\left[1-(1-p)^x\right]}{p} \\ &= 1-(1-p)^x \ , \ x \geq 1 \end{aligned}$$

la esperanza y varianza de esta distribución están dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(X\right) &= \frac{1}{p} \\ \mathbb{V}\left(X\right) &= \frac{1-p}{p^2} \end{aligned}$$

Distribución Hipergeometrica

Consideremos una urna que contiene N bolitas de las cuales son N negras y $N-D$ son blancas. Se extraen secuencialmente (una a una) n bolitas y se define la variable aleatoria X como *el número total de bolitas negras extraidas.*
Si cada bolita extraída de la urna es repuesta en la urna antes de obtener la siguiente, el resultado de cada extracción es independiente y la variable aleatoria X tiene distribución $Bi\left(n,p\right)$ con $p=\dfrac{D}{N}$, pues este número es la probabilidad de obtener una bola negra de la urna.
Ahora si cada bolita extraída de la urna no es repuesta, entonces los experimentos no son independientes y la distribución X se denomina *Hipergeometrica*, que se denota por:

$$X \sim H\left(N, d, n\right)$$

donde:

- N:Número Total de bolitas.
- D:Número Total de bolitas blancas.
- n: Número extracciones o experimentos.

Luego la v.a. X tiene función de probabilidad(o probabildiad puntual) dada por:

$$P_X(x) = \frac{\binom{D}{x}\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}} \text{ , con } x \leq min\{n, D\}$$

y función de distribución dada por

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{\binom{D}{k}\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}} \text{ , con } 0 \leq x \leq min\{n, D\}$$

la esperanza y varianza de esta distribución están dadas por:

$$\mathbb{E}(X) = n \cdot \frac{D}{N}$$
$$\mathbb{V}(X) = \frac{n \cdot D \cdot (N-D) \cdot (N-n)}{N^2(N-1)}$$

Dsitribución de Poissón

La distribución de *Poissón* se presenta cuando se considera la variable aleatoria X definida como *el número de veces que ocurre cierto evento en un intervalo determinado de tiempo.*
Ejemplos:

1. El número de clientes que entran en un determinado banco durante un día.
2. El número de accidentes automovilisticos que ocurren en una ciudad en un mes.
3. El número total de llamadas telefonicas que llegan a una central telefonica entre las 15[hrs] y 16[hrs] de los días habiles.

Así para cada $\lambda > 0$, se define la distribución de *Poissón* con parámetro λ, la cual denotaremos por

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

Con función de densidad de probabilidad (o función de probabilidad puntual):

$$P_X(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \text{ , } para\ x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Con función de distribución, $F_X(x)$ dada por:

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \text{ , } x \geq 0$$

la esperanza y varianza de esta distribución están dadas por:

$$\mathbb{E}(X) = \lambda$$
$$\mathbb{V}(X) = \lambda$$