Problemas Regla de la Cadena , Derivada Direccional, Derivada Implicita y Maximización.

Cristopher Morales Ubal
e-mail: c.m.ubal@gmail.com

Problemas

1. Sea $w = f(u, v)$ una función diferenciable donde
$$u = e^{x+y} \ \ , \ \ v = e^{x-y}$$
demuestre que
$$4\frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u} = e^{-2x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]$$

2. Sea la superficie $z = f(x, y)$ definida implicitamente por
$$z^3 + z\log\left(x^2 + y^2\right) + y^2 = 8$$
Determine la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie en el punto $(1, 0, 2)$.

3. Sea $w = f(x, y)$ diferenciable, donde $x = \rho\cos(\theta)$, $y = \rho\sin(\theta)$
   (a) Demostrar que
   $$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2$$
   (b) Calcule
   $$\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)$$

4. Hallar la derivada direccional de la función $f(x, y) = \log\left(x^2 + y^2\right)$ en el punto $(1, 2)$ y en la dirección de la tangente a la curva $y^2 = 4x$ en dicho punto.

5. Un insecto se halla en un ambiente tóxico. El nivel de toxicidad está dado por $T(x, y) = 2x^2 - 4y^2$. El insecto está en $(-1, 2)$.
   (a) ¿En que dirección deberá moverse el insecto para que se aleje lo más rápido posible de la toxicidad?
   (b) En la curva de nivel apropiada, ubique y dibuje el vector gradiente $\nabla T(-1, 2)$.
   (c) ¿Cual es la razón de cambio de la toxicidad del ambiente en el punto $(-1, 2)$ en la dirección $(-1, 2)$.

6. Si $z = xy + f(u, v)$, $u = x^2$, $v = y^2$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial v} = 1$
   (a) Demuestre que
   $$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = y^2 - x^2$$
   (b) Calcule
   $$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

7. Encuentre la derivada direccional en el punto $(1, 0)$ de la superficie
$$f(x, y) = x\left(e^{-y} + x\right) + y^2$$
en la dirección de la recta AB donde $A(2, 1)$ y $B(1, 2)$.

8. Sea $F(x,y)$ una función tal que
$$\frac{\partial F}{\partial x}=xe^{-y} \quad \wedge \quad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{1}{y}-\frac{1}{2}x^2e^{-y}$$
Se define $W(u,v)=F(uv,\log v)$, $v>0$. Demostrar que:
   (a)
$$\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}$$
   (b)
$$\frac{\partial^2 W}{\partial u\partial v}-\frac{1}{v}\frac{\partial W}{\partial u}=0$$
9. Dado que $x^2+y^2+z^2=f(ax+by+cz)$. Demuestre que
$$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay$$
10. Determine todos los máximos , mínimos y puntos silla de la función
$$f(x,y)=y^3-3yx^2-3y^2-3x^2+1$$
11. Hallar tres números Positivos x,y,z tales que su suma sea 30 y la suma de sus cuadrados sea mínima.
12. Determine los extremos absolutos de la función
$$f(x,y)=2x^2+3y^2-4x$$
en el conjunto $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\leq 5\right\}$.
13. Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ de clase C^2 y sea $z=f\left(\frac{y}{x}\right)$ con $x\neq 0$. Si $f(-1)=f'(-1)=f''(-1)=2$.
Calcule $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,-1)$
14. Encontrar la ecuación del plano que pasa por el punto $(2,3,4)$ y que minimiza el volumen del tetraedro obtenido por el plano y los planos coordenados.
15. Hallar $\dfrac{dz}{dx}$, si se cumple que: $x^3+y^3+z^3=0$ y $x^2+y^2+z^2=1$.
16. El volumen de un elipsoide de semiejes (a,b,c) es $\dfrac{4\pi}{3}abc$. Hallar el elipsoide, con centro en $(0,0,0)$, de volumen mínimo que pasa por el punto $(2,3,5)$.
17. Considere las expresiones:
$$uv-3x+2y=0\ \ ,\ \ u^4-v^4=x^2-y^2$$
Verifique que estas ecuaciones definen funciones $u=u(x,y)$, $v=v(u,y)$ en torno al punto $(u,v,x,y,)=(1,1,1,1)$. Además, determine la ecuación del plano tangente a la superficie $u=u(x,y)$ en el punto dado.
18. Dada la superficie $S:\ x^2+2y^2+3z^2=21$, Hallar la(s) ecuación(es) del(de los) plano(s) tangente(s) a S que es (son) paralelo(s) al plano $x+4y+6z=0$.
19. Encuentre los máximos y/o mínimos para la función
$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+xy+yz+xz+x-2y$$
20. Si $u=xyz$ y $z=f(x,y)$, $f\in C^1$. Demuestre:
$$z\left(x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}\right)=u\left(x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

21. Sea $f(x, y, z) = z(x-y)^5 + xyz^3$
   (a) Hallar la derivada direccional de f en el punto $(2, 1, -1)$ en la dirección normal hacia afuera a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.
   (b) ¿En que dirección de f en $(2, 1, -1)$ es máxima?

22. Una empresa fabrica tres productos distintos. La fabricación de x, y, z miles de unidades, respectivamente, le reporta unos beneficios de $P(x, y, z) = 3x + 6y + 6z$ miles de euros. Ciertas limitaciones del proceso de producción imponen la restricción $2x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 8800$. Determine el máximo beneficio posible para esta empresa.

23. Si $w = f\left(\dfrac{y-x}{xy}, \dfrac{z-y}{yz}\right)$. Probar que

$$x^2 \frac{\partial w}{\partial x} + y^2 \frac{\partial w}{\partial y} + z^2 \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

24. Hallar los puntos de la superficie

$$xy + yz + zx - x - z^2 = 0$$

   donde el plano tangente es paralelo al plano XY.

25. La temperatura en cualquier punto del espacio esta dada por la función

$$T(x, y, z) = \frac{60}{x^2 + y^2 + z^2 + 3}$$

   (a) Encuentre la rapidez de cambio de la temperatura en el punto $(3, -2, 2)$ en la dirección del vector $-2\widehat{i} + 3\widehat{i} - 6\widehat{k}$.
   (b) Encuentre la dirección y la magnitud de máxima rapidez de cambio de la temperatura en $(3, -2, 2)$.

26. Se desea diseñar un embalaje de base rectangular con volumen de $60[\mathrm{m}^3]$. Sus lados cuestan \$1 el m^2 , su tapa cuesta \$2 el m^2 y su fondo \$3 el m^2. Plantee y resuelva el sistema de ecuaciones que permite determinar las dimensiones de la caja de modo que el costo sea mínimo.

27. Sea $w = f\left(x, y, f(x, y, z)\right)$ en donde $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable. Calcule

$$\frac{\partial w}{\partial x}(1, 2, 3) + \frac{\partial w}{\partial y}(1, 2, 3)$$

   sabiendo que $f(1, 2, 3) = f_x(1, 2, 3) = f_y(1, 2, 3) = f_z(1, 2, 3) = 3$.

28. Calcule el valor máximo y mínimo (si es que existen) de la función

$$f(x, y, z) = x + y + z$$

   sujeta a las restricciones $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x - y = 1$.

29. Hallar el máximo y el mínimo de la función

$$f(x, y, z) = x^2 + yz$$

   en la bola $B = \left\{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$.

30. Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funcion derivable tal que $g(0) = -1$, $g'(0) = 2$. Se define $z = f(x, y)$, $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$f(x, y) = xyg\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$$

   (a) Determine el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $(1, 1)$.
   (b) Obtenga una función $h(x, y)$ tal que

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = zh(x, y)$$

Soluciones

Problemas

1. Demostración
2. Plano Tangente : $z-2=-\dfrac{1}{3}(x-1)$ Recta Normal : $\dfrac{x-1}{\frac{1}{3}}=\dfrac{z-2}{1}$, $y=0$
3. Demostración
4. $D_{\overrightarrow{u}}f=\dfrac{3}{5}\sqrt{2}$
5. (a) $(-4,-16)$
   (b) Curva de nivel : $2x^2-4y^2=-14$.
   (c) $D_{\widehat{u}}T(-1,2)=-\dfrac{28}{\sqrt{5}}$
6. b) $A=1$
7. $D_{\overrightarrow{u}}f=-\dfrac{4}{\sqrt{2}}$
8. Demostración
9. Demostración
10. $P_1(0,0)$ maximo ; $P_2(0,2)$, $P_3(\sqrt{3},-1)$ y $P_4(-\sqrt{3},-1)$ puntos sillas
11. $x=y=z=10$.
12. $P_0(1,0)$ minimo, $P_1(\sqrt{5},0)$, $P_2(-\sqrt{5},0)$, $P_3(-2,1)$ y $P_4(-2,-1)$
13. $R=0$
14. $6x+4y+3z=36$
15. $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{x^2-xy}{yz-z^2}$
16. $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{27}+\dfrac{z^2}{75}=1$
17. Plano Tangente : $\dfrac{7}{4}(x-1)-\dfrac{5}{4}(y-1)=u-1$.
18. Planos Tangentes : $x+4y+6z=21$ y $x+4y-6z=-21$
19. $\left(-\dfrac{5}{4},\dfrac{7}{4},-\dfrac{1}{4}\right)$ es un mínimo.
20. Demostracioón
21. (a) $f'(x_0,v)=-3\sqrt{6}$.
    (b) $u=(-6,1,7)$.
22. $x=20$, $y=80$, $z=20$
23. Demostración
24. $(0,1,0)$ y $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

25. (a) $\dfrac{36}{35}$

    (b) Dirección : $\left(-\dfrac{9}{10}, \dfrac{3}{5}, -\dfrac{3}{5}\right)$ y magnitud : $\dfrac{\sqrt{153}}{10}\left(-\dfrac{9}{10}, \dfrac{3}{5}, -\dfrac{3}{5}\right)$

26. $x = y = 2\sqrt[3]{3}\ ,\ z = 5\sqrt[3]{3}$.

27. 24

28. $\left(\dfrac{3+\sqrt{6}}{6}, \dfrac{\sqrt{6}-3}{6}, \dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$ máximo y $\left(\dfrac{3-\sqrt{6}}{6}, \dfrac{-\sqrt{6}-3}{6}, -\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$ Mínimo.

29. $(0,0,0)\ ,\ \left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\ ,\ \left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\ ,\ \left(0, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\ ,\ \left(0, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\ ,\ (1,0,0)\ ,\ (-1,0,0)$

30. (a) Plano Tangente : $-3x + y - z = -1$

    (b) $h(x,y) = x + y$.