Problemas Cuantificadores e Inducción

Cristopher Morales Ubal
e-mail: c.m.ubal@gmail.com

Problemas

1. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Escribir en símbolos matemáticos, escribir su negación y averiguar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
   (a) Hay un elemento en A que es mayor que los restantes.
   (b) Existe un único elemento en A cuyo cuadrado es 4.
   (c) Para cada elemento en A existe otro en A que es menor o igual que él.
   (d) Existe un elemento en A cuyo cuadrado es igual a sí mismo.

2. Considere las siguientes proposiciones:

$$p : (\exists x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R})\,(x \leq y)$$
$$q : (\forall x \in \mathbb{R})\,(\exists y \in \mathbb{R})\,(x \leq y)$$

   Indique el valor de verdad de cada una de estas justificando su respuesta e indique sus negaciones.

3. Sea F el conjunto de personas en una fila, para $x, y \in F$ definimos la función Proposicional:

$$\phi\,(x, y) : x \text{ está delante de } y \text{ en la fila.}$$

   (a) Sea $p \in F$ una persona en la fila. Indique, justificando sus respuestas, la posición o las posiciones de dicha persona en la fila para cada una de las siguientes proposiciones cuantificada:
      i. $(\forall x \in F)\,(\phi\,(x, p) \vee x = p)$
      ii. $(\exists!\, x \in F)\,(\phi\,(x, p) \vee \phi\,(p, x))$
   (b) Niegue ambas proposiciones.

4. Sean $p(x)$, $q(x)$ dos funciones proposicionales. Muestre que si

$$(\exists!\, x, p(x)) \wedge (\exists!\, x, q(x))$$

   entonces la siguiente implicación es verdadera

$$(\exists x)\,(p(x) \wedge q(x)) \Longrightarrow (\exists!\, x)\,(p(x) \wedge q(x))$$

5. Sean p una proposición lógica y $q(x)$ una función proposicional.
   (a) Si llamamos r a la proposición $(\forall x)\,(p \Longrightarrow q(x))$, decida si se puede determinar el valor de verdad de p, sabiendo que r es falsa. Justifique.
   (b) Llamamos ahora s a la proposición $(\exists x)\,(p \Longrightarrow q(x))$, decida si se puede determinar el valor de verdad de p, sabiendo que s es verdadera. Justifique.

6. Sea E un conjunto de referencia. Muestre que las proposiciones:
   - $(\forall x \in E)\,(\exists y \in E)\,[p(x) \Longrightarrow p(y)]$
   - $(\exists y \in E)\,(\forall x \in E)\,[p(x) \Longrightarrow p(y)]$

   Son ambas verdaderas para cada función proposicional p.

7. Demuestre las siguientes propiedades usando inducción:

(a) $\forall n \geq 1\ ,\ 3^n + 4^n - 1$ es divisible por 3.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ 4^{2n+1} + 3^{n+2}$ es divisible por 13.

8. Demuestre por inducción las siguientes desigualdades:

   (a) $\forall n \geq 2\ ,\ n^n \geq 2n!$

   (b) $\forall n \geq 1\ ,\ (2n)! < 2^{2n}\,(n!)^2$

9. Se define la siguiente colección de números reales definida por:

$$4 = \frac{3}{u_1} = u_1 + \frac{3}{u_2} = u_2 + \frac{3}{u_3} = \ldots\ldots = u_n + \frac{3}{u_{n+1}}$$

   Demuestre que

$$\forall n \geq 1 : u_n = \frac{3\,(3^n - 1)}{3^{n+1} - 1}$$

10. Demostrar que

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ ,\ 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots\ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

11. Considere la sucesión definida por la recurrencia:

$$a_{n+1} = a_n^2 - 2\ ,\ a_1 = 6$$

   Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}$ el número $\sqrt{2\,(a_n^2 - 4)}$ es multiplo de 4.

12. Se define por recurrencia la colección de reales $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (llamada <u>Sucesión</u>) de la siguiente forma:

$$a_1 = 2\ ,\ a_{n+1} = \frac{12}{1 + a_n}\ ,\ \forall n > 1$$

   Demuestre por inducción que:

   (a) $\forall n \geq 1\ ,\ a_{2n-1} < a_{2n+1}$

   (b) $\forall n \geq 1\ ,\ a_{2n} > 3$

13. Demuestre que $(1 + x)^n \geq 1 + nx\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$ para $x > -1$ fijo.

14. Demuestre por inducción que:

   (a) $\forall n \in \mathbb{N}\ :\ x - y$ divide a $x^n - y^n$

   (b) $\forall n \in \mathbb{N}^*\ :\ x^{2n-1} + y^{2n-1}$ es divisible por $x + y$.

15. Recordemos que la secuencia de *Fibonacci* se define a través de la siguiente recursión:

$$\begin{aligned} &f_1 = 1\ ,\ \ f_2 = 1 \\ &f_n = f_{n-1} + f_{n-2}\ ,\ \ \forall n \geq 3 \end{aligned}$$

   Demuestre las siguientes propiedades de la sucesión de *Fibonacci*:

   (a) $\forall n \geq 1\ ,\ f_n < 2^n$

   (b) $\forall n \geq 6\ :\ \ f_n > \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

16. El *teorema fundamental de la aritmética* nos dice que todo número natural mayor o igual a 2 se puede escribir como el producto de factores primos. Usando inducción fuerte demuestre este teorema.