Problemas Curvas

Cristopher Morales Ubal
e-mail: c.m.ubal@gmail.com

Problemas

1. Sea C una curva determinada por la intersección de los cilindros $x^2 = 1 - y$, $z^2 = y$.
   (a) Parametrizar la curva C.
   (b) Obtener $\vec{T}$,$\vec{N}$,$\vec{B}$, k y τ en $P = (0, 1, 1)$.

2. Una curva C esta determinada por la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y el cilindro recto $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$. Se pide:
   (a) Parametrizar la curva C
   (b) Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $(0, 0, a)$.
   (c) Determinar la ecuación del plano osculador en el punto $(0, 0, a)$.

3. Sea $\vec{r} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:
   $$\vec{r}\,(t) = (a\cos t, a\sin t, \beta\,(t))$$
   trayectoria regular que describe una particula que se mueve a lo largo de una curva C ¿cual debe ser la función $\beta\,(t)$ para que la trayectoria este contenida en un plano para todo t?

4. Considerar la curva Γ parametrizada por:
   $$\vec{r}\,(t) = \left(\int_0^t e^{-u}\cos\left(u^2\right), \int_0^t e^{-u}\sin\left(u^2\right), 1 - e^{-t}\right)\ ,\ t \in [0, \infty[$$
   Determinar $\vec{T}$,$\vec{N}$ y $\vec{B}$.

5. En la esfera unitaria considerar la curva $\xi : \phi = \theta$. Calcular la curvatura en el punto $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

6. Considerar la curva C definida por la parametrización $\vec{C}\,(t) = \left(a\sin t\cos t, a\sin^2 t, a\cos t\right)$ con $a > 0$ y $0 \leq t \leq \pi$.
   (a) Pruebe que el cambio $t = \frac{v}{2}$ permite la parametrización
   $$\vec{\alpha}\,(t) = \left(\frac{a}{2}\sin\left(v\right), \frac{a}{2}\left(1 - \cos\left(v\right)\right), a\cos\left(\frac{v}{2}\right)\right)$$
   .
   (b) Pruebe que la proyección de la curva C en el plano XY es una circunferencia.
   (c) Determine la curvatura de C en cualquier punto usando la reparametrización dada en a).

7. Probar que la curva
   $$x = \ln t\ ,\ y = t\ln t\ ,\ z = t$$
   es tangente a la superficie
   $$xz^2 - yz + \cos xy = 1$$
   en el punto $(0, 0, 1)$.

8. Considerar la curva parametrizada por

$$\vec{r}\,(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$$

donde a y b son constantes positivas.

(a) Pruebe que la torsión es constante.

(b) Dado un valor a, encuentre b de modo que la torsión sea máxima.

(c) Demuestre que el cuociente entre la curvatura y la torsión es constante.

(d) si $\theta\,(t)$ designa el angulo formado por la recta tangente a la curva con el eje z, para cada t. Pruebe que

$$\cos\theta\,(t) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

9. Considere los cilindros

$$x^2+y^2=a^2 \quad \wedge \quad y^2+z^2=a^2$$

Pruebe que el radio de curvatura de la intersección esta dado por

$$\rho = \frac{a}{\sqrt{2}}\left(1+sen^2 t\right)^{3/2}$$

10. Pruebe que la curva de ecuaciones $x = a\sin^2(\theta)$, $y = a\sin(\theta)\cos(\theta)$, $z = a\cos(\theta)$, con $a > 0$ se encuentra sobre una esfera y que todos los planos normales pasan por el origen de coordenadas.

Soluciones

Problemas

1. (a) $\vec{r}\,(t) = \left(\cos t, \dfrac{1}{2}\,(1 - \cos 2t)\,, \sin t\right)\ ,\ 0 \le t \le 2\pi$

   (b) $\vec{T} = (-1,0,0)\ ,\ \vec{B} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\,(0,-1,2)\ ,\ \vec{N} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\,(0,-2,-1)\ ,\ k = \sqrt{5}\ ,\ \tau = 0$

2. (a) $\vec{r}\,(\theta) = \left(a\cos^2\theta, a\sin\theta\cos\theta, a\sin\theta\right)\ ,\ -\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$

   (b) $(x,y,z) = (0,0,a) + t\,(0,-1,0)\ ,\ t \in \mathbb{R}$

   (c) $x + 2z = 2a$

3. $\beta\,(t) = c_1 + c_2\cos t + c_3\sin t\ ,\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\ ,\ \forall t$

4. $\vec{T} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(cos\ t^2, sen\ t^2, 1\right)\ ,\ \vec{N} = \left(-sen\ t^2, cos\ t^2, 0\right)\ ,\ \vec{B} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-cos\ t^2, -sen\ t^2, 1\right)$

5. $\kappa\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{13}{3}}$

6. (a) Es directa al reemplazar el cambio de variable dado en la parametrización de la curva

   (b) haciendo $z = 0$, se elevan las coordenadas x e y al cuadrado , luego sumando estas se forma un circulo trasladado en el eje Y.

   (c) $\kappa = \dfrac{\left(5 + 3\ sen^2\left(\dfrac{v}{2}\right)\right)^{1/2}}{a\left(1 + sen^2\left(\dfrac{v}{2}\right)\right)^{3/2}}$

7. Observe que un vector normal a una superficie $f\,(x,y,z) = C$ es el gradiente de $\overrightarrow{\nabla} f\,(x,y,z)$, luego una curva es tangente a una superficie en un punto (x_0, y_0, z_0) si el vector normal a la superficie es perpendicular al vector tangente a la curva en tal punto, asi basta probar que $\overrightarrow{\nabla} f\,(x_0,y_0,z_0) \cdot \overrightarrow{T}\,(t_0) = 0$ donde $(x_0,y_0,z_0) = (x\,(t_0)\,, y\,(t_0)\,, z\,(t_0))$

8. (a) $\tau\,(t) = \dfrac{b}{a^2 + b^2}$

   (b) el valor de b para que la torsión sea maxima es $b = a$

   (c) $\dfrac{\kappa\,(t)}{\tau\,(t)} = \dfrac{a}{b}$

   (d) basta hacer el producto punto entre el vector tangente a la curva y el vector director de eje z, el cual es $(0,0,1)$, y ocupar la identidad $\cos\,(\theta) = \dfrac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|}$

9. La parametrización de la curva es $\overrightarrow{r}\,(t) = (a\cos t, a\sin t, a\cos t)\ ,\ 0 \le t \le 2\pi$

10. Elevendo al cuadrado cada componente y sumando estas se forma una esfera centrada en el origen.
    para la segunda parte se debe mostrar que el plano normal pasa por el origen de coordenadas, es decir el origen de coordenadas satisface la ecuacion del plano normal, luego se debe mostrar que se cumple que $\left(\overrightarrow{0} - \overrightarrow{r}\,(t_0)\right) \cdot \dfrac{\overrightarrow{r'}\,(t_0)}{\left\|\overrightarrow{r'}\,(t_0)\right\|} = 0$ lo cual es equivalente a mostrar que $\overrightarrow{r}\,(t_0) \cdot \overrightarrow{r'}\,(t_0) = 0$