PROBLEMA TRANSFORMADA DE LAPLACE

CRISTOPHER MORALES UBAL

c.m.ubal@gmail.com

Ejercicio 1. Calcular ,usando propiedades, las siguientes transformadas de laplace

a) $(4t-1)\,e^{2t}$

b) $5e^{-3t}sin\,(2t)$

c) $7e^{-4t}\sin t\cos^2 t$

d) $f(t)=\begin{cases} t & \text{si } t<2 \\ 0 & \text{si} \, t>2 \end{cases}$

e) $f(t)=\begin{cases} \cos t & si\ t<0 \\ \sin t & si\ 2\pi<t\leq 4\pi \\ e^t & si\quad 4\pi<t \end{cases}$

f) $f(t)=\begin{cases} t & si\ 0\leq t\leq 2 \\ 4-t & si\ 2<t\leq 4 \\ 0 & si\ \ 4\ <t \end{cases}$

g) $\int_0^t (t-u)^3\sin u du$

h) $\int_0^t e^{u-t}\cos(3u)du$

i) $t^2\cos(t)$

j) $\int_0^t\left(\int_0^u f(v)\,dv\right)du$

Ejercicio 2. Si

$$f(x)=\begin{cases} \left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2 & \text{si } \ 0<t<2 \\ -\dfrac{1}{2}(t-1) & \text{si } \ t\geq\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

encuentre $\mathcal{L}[f(t)]$.

Ejercicio 3. Resolver las siguientes ecuaciones

a) $x(t)=e^{-t}-2\int_0^t\cos(t-u)\,x(u)\,du$

b) $y''-2y'+y-2\int_0^t y(u)\,du=5\ ;\ t\geq 0 \quad con\ y(0)=0\ ;\ y(0)=0$

c) $x(t)=t+\dfrac{1}{6}\int_0^t(t-u)^3\,x(u)\,du$

Ejercicio 4. Resolver la ecuación integro-diferencial

$$y'(t)+2y(t)+\int\limits_0^t y(x)\,dx=\begin{cases} 0 & \text{si } \ 0<t<1 \\ 1 & \text{si } \ t\geq 1 \end{cases}\ ,\quad y(0)=1$$

Ejercicio 5. Resolver la ecuación

$$y''+4y=f(t)\,,\quad y(0)=1\,,\quad y'(0)=0$$

donde $f(t)=\begin{cases} 1 & \text{si } \ 0\leq t\leq 1 \\ t & \text{si } \quad t>1 \end{cases}$

Ejercicio 6. Resolver usando la transformada de laplace:

$$ty''-ty'+y=2\left(e^t-1\right)\ ,\quad y(0)=0\,,\ y'(0)=-1$$

Ejercicio 7. Resolver la ecuación:

$$xy'' + (2x+3)\,y' + (x+3)\,y = 3e^{-x}$$

con $y\,(0) = 0.$

Ejercicio 8. Resolver la ecuación

$$y'' + 9y = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < \pi \\ \cos t & \text{si } \quad t \geq \pi \end{cases}$$

sujeta a las condiciones: $y\,(0) = -3\,,\ y'\,(0) = 0.$

Ejercicio 9. Calcular las transformadas inversas siguientes:

a) $\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-2s}\dfrac{s^3+4s+4}{s\,(s^2+4)}\right)$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{e^{-2s}+s^2}{(s+2)\,(s+1)}\right)$

c) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{se^{-8s}+4e^{-8s}}{(s^2+8s+17)^2}\right)$

d) $\mathcal{L}^{-1}\left[\arctan\left(\dfrac{1}{s}\right)\right]$

e) $\mathcal{L}^{-1}\left[\ln\left(\dfrac{s^2+1}{s\,(s-3)}\right)\right]$

Ejercicio 10. Usando la transformada de laplace , demuestre las siguientes igualdades

a) $e^{3t} * \left(te^{-2t}\right) = \dfrac{e^{3t}}{25} - \dfrac{e^{-2t}}{25} - \dfrac{te^{-2t}}{5}$

b) $t * e^{2t} * e^{-t} = \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{4}e^{2t} - e^{-t} - \dfrac{3}{2}t + \dfrac{3}{4}\right]$

c) $sen\,(t) * sen\,(t) = \dfrac{1}{2}\left(sen\,(t) - t\cos(t)\right)$

d) $sen\,(t) * \cos(t) = \dfrac{1}{2}t sen\,(t)$

Ejercicio 11. Usando la transformada de laplace encuentre todas las soluciones del problema

$$ty'' + (t-1)\,y' + y = e^{-t}\,(1-t) * te^{-t}\,, \quad y\,(0) = 0$$

encuentre ademas la solución que verifica la condición $y\,(1) = 0.$

Soluciones:

1. *a)* $\dfrac{4}{(s-2)^2}-\dfrac{1}{s-2}$ *b)* $\dfrac{10}{(s+3)^2+4}$

   c) $\dfrac{7}{4}\left[\dfrac{3}{(s+4)^2+9}+\dfrac{1}{(s+4)^2+1}\right]$ *d)* $\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{e^{-2s}}{s^2}-\dfrac{2e^{-2s}}{s}$

   e) $\dfrac{s}{s^2+1}+\dfrac{e^{-2\pi s}(1-s)}{s^2+1}+e^{-4\pi s}\left[\dfrac{e^{4\pi}}{s-1}-\dfrac{1}{s^2+1}\right]$ *f)* $\dfrac{1}{s^2}\left[1-2e^{-2s}+e^{-4s}\right]$

   g) $\dfrac{6}{s^4(s^2+1)}$ *h)* $\dfrac{s}{(s+1)(s^2+9)}$

   i) $\dfrac{2s(s^2-3)}{(s^2+1)^3}$ *j)* $\dfrac{1}{s^2}\mathcal{L}(f(t))(s)$

2. $\mathcal{L}[f(t)](s)=\dfrac{2}{s^3}-\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{1}{4s}-\dfrac{2e^{-s/2}}{s^3}-\dfrac{e^{-s/2}}{2s^2}+\dfrac{e^{-s/2}}{4s}$
3. *a)* $x(t)=(t-1)e^{-t}$

   b) $y(t)=e^{2t}-\cos(t)-2\sin(t)$

   c) $x(t)=\dfrac{1}{4}\left[e^t-e^{-t}+2\sin t\right]$
4. $y(t)=(1-t)e^{-t}+e^{-(t-1)}(t-1)u(t-1)$
5. $y(t)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}\cos(2t)+\dfrac{1}{8}\left[2(t-1)-\sin(2(t-1))\right]u(t-1)$
6. $y(t)=2e^t-3t-2$
7. $y(x)=xe^{-x}$
8. $y(t)$
9. *a)* $y(t)=\delta(t-2)+u(t-2)-\cos(2(t-2))u(t-2)$

   b) $y(t)=\delta(t)+e^{-t}-4e^{-2t}+\left[e^{-(t-2)}-e^{-2(t-2)}\right]u(t-2)$

   c) $y(t)=\dfrac{1}{2}\left[(t-8)e^{-4(t-8)}\sin(t-8)\right]u(t-8)$

   d) $y(t)=\dfrac{\sin t}{t}$

   e) $y(t)=-\dfrac{2\cos t}{t}+\dfrac{1}{t}+\dfrac{e^{3t}}{t}$
10. Demostraciones
11. $y(t)=\dfrac{1}{6}t^2e^{-t}\left[t+K\right],\ K\,\epsilon\,\mathbb{R}\ ;\ para\,el\,problema\,de\,valor\,inicial\ K=-1$