Problemas distribuciones discretas y continuas

Cristopher Morales Ubal
e-mail: c.m.ubal@gmail.com

Problemas

1. Sea $T \sim \exp(\alpha)$, $X|T = t \sim P(t)$, es decir:

$$\mathbb{P}(X = k|T = t) = \frac{e^{-t}t^k}{k!} \quad , \quad k = 0, 1, \ldots$$

Muestre que

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{\alpha}{(\alpha+1)^{n+1}} \quad , \; n = 0, 1, \ldots$$

2. Sea $X \sim N(0,1)$; $Y = H(X) = X^2$. Determine la densidad de Y, es decir $f_Y(y)$, y concluya que $Y \sim G(1/2, 1/2) = \chi_1^2$.

3. Sean X, Y errores de medición de las coordenadas de x, y al medir la posición de un objeto en el plano. Si X, Y distribuyen $N\left(0, \sigma^2\right)$ y son independientes. Determine, usando el Teorema del Cambio de Variable (TCV), la densidad de $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

4. Sean $X_1, \ldots, X_n$ sucesión de v.a. independientes tal que $X_i \sim B(1, p)$, $\forall i$. Sea $N \sim P(\lambda)$ independientes de X_i, $\forall i$. Calcular $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i = k\right)$.

Hint: Dado $N = n$, que distribución tiene $\sum_{i=1}^{N} X_i$?

5. Recuerde que la función $\Gamma : \mathbb{R}_+ - \{0\} \to \mathbb{R}_+ - \{0\}$ está dada por:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx \; .$$

Sea X una v.a. que tiene distribución Gamma(1,α), es decir, su función de densidad viene dada por:

$$f_X(x) = \frac{e^{-x}x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \mathbf{1}_{\{x>0\}}$$

   a) Encuentre $\mathbb{E}(X)$ para $n \geq 1$ (puede dejarla expresada en términos de la función Γ) y deduzca $\mathrm{Var}(X)$.
   b) Calcule la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left(e^{-sX}\right)$ para $s \geq 0$.
   c) Pruebe, usando función generadora de momentos, que si las v.a.'s X e Y son independientes, $X \sim \mathrm{Gamma}(1, \alpha)$ e $Y \sim \mathrm{Gamma}(1, \beta)$ entonces $X + Y \sim \mathrm{Gamma}(1, \gamma)$ y encuentre γ.

6. a) Sea X una variable aleatoria que sigue una ley de Poisson de parámetro $\lambda > 0$. Es decir,

$$\mathbb{P}(X = i) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} \quad , \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

   Demuestre que $\mathbb{E}(X) = \lambda$.

   b) Sea X una variable aleatoria discreta definida en $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Demuestre que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(X \geq i)$$

7. *a*) Sean X e Y v.a. continuas independientes. Muestre que:

$$\mathbb{P}\left(X < Y\right) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(y) f_Y(y) dy$$

   b) Considere X, Y v.a. independientes tales que $X \sim \exp(\lambda)$, $Y \sim \exp\left(\alpha\right)$. Calcule $\mathbb{P}\left(Y > k \cdot X\right)$, $\forall k$.

   c) Considere X, Y v.a. independientes tales que $X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(0,1)$. Usando T.C.V. determine la función de densidad de la v.a. $Z = \dfrac{X}{Y}$.

8. *a*) Se dispone de un cordel de largo 1, el cual se corta en un punto escogido al azar (es decir, uniformemente).

   1) Sea X el largo del trozo mayor. Muestre que X es una variable uniforme en el intervalo $[1/2, 1]$
   2) Encuentre la función de densidad de $X/(1-X)$. Calcule la probabilidad de que el largo del trozo mayor sea a lo más 4 veces el largo del trozo menor.

   b) Sea X una variable aleatoria. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ se define $s(\alpha) = \mathbb{E}\left[(X-\alpha)^2\right]$. Pruebe que $s(\alpha) \geq \mathrm{Var}(X)$ para todo α y que se alcanza la igualdad sólo cuando $\alpha = \mathbb{E}(X)$.

Soluciones

Problemas

1. Demonstración.
2. Demonstración.
3. $f_R(r) = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{|\sigma|} r e^{-\frac{1}{2}r^2} \cdot \mathbf{1}_{\{r \geq 0\}}$
4. $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i = k\right) = \dfrac{(p\lambda)^k e^{-p\lambda}}{k!}$
5. *a*) $\mathbb{E}\left(X^n\right) = \dfrac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$ y $\mathrm{Var}(X) = \alpha$

   b) $\mathbb{E}\left(e^{-sX}\right) = \dfrac{1}{(s+1)^{\alpha}} \ , \ \ s > -1$

   c) $\gamma = \alpha + \beta$
6. *a*) Demonstración.

   b) Demonstración.
7. *a*) Prueba

   b) $\mathbb{P}\left(Y > kX\right) = \dfrac{\lambda}{\lambda + \alpha k} \ , \ k \geq 0$ y $\mathbb{P}\left(Y > kX\right) = 1 \ , \ k < 0$.

   c) $f_Z(z) = \dfrac{1}{\pi\left(1+z^2\right)} \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{R}}$
8. *a*) 1) Prueba

      2) $\dfrac{3}{5}$.

   b) Prueba