Problemas ecuaciones diferenciales y transformada de Laplace

Cristopher Morales Ubal
e-mail: c.m.ubal@gmail

Problemas Recuperativo

1. Hallar los máximos y mínimos de la función

$$f(x, y, z) = yz + xy$$

sujeto a las condiciones $xy = 1$ y $y^2 + z^2 = 1$.

2. Dada la ecuación

$$(x-a)\, y'' - xy' + a^2 y = a\,(x-1)^2\, e^x$$

Hallar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que $y = e^x$ sea solución de la ecuación homogénea asociada. Resolver la ecuación en esos casos.

3. *a*) Determine un valor de $k \in \mathbb{R}$ para el cual la siguiente ecuación sea exacta y para ese valor de k, resuelva la ecuación.

$$\left(6xy^3 + \cos y\right) dx + \left(2kx^2y^2 - x \sin y\right) dy = 0$$

   b) Resuelva la E.D.O. $y' + 6y = xy^3$

4. Usando la Transformada de Laplace, resuelva el siguiente problema de valor inicial

$$ty'' - ty' + y = 1, \qquad y(0) = y'(0) = 1$$

Problemas Varios

1. Encuentre la solucion de las siguientes ecuaciones diferenciales:

   a) $\left(1 + x^2\right) y' + xy = x^3y^3, \quad \mathit{con}\ y(0) = 1$

   b) $x^2y'' + 10xy' + 20y = 4\ln(x) - x$

2. Resuelva la ecuación

$$x(1-x^2)^2y'' - (1-x^2)^2y' + x^3y = 0$$

(**Ayuda**:haga el cambio de variable $t = -\frac{1}{2}\ln\left(1 - x^2\right)$)

3. Para $x > 0$, considere la ecuación diferencial

$$xy'' + \left(x^2 - 1\right) y' + x^3 y = e^{-x^2/4}$$

   a) Use el cambio de variable $t = \dfrac{x^2}{2}$ para encontrar la solución general de la ecuación homogénea.

   b) Resuelva la ecuación no homogenea usando el metodode variación de parametros.

4. Para $x > 0$ y haciendo el cambio $x = \dfrac{1}{t}$ encuentre la solución general de la ecuación

$$4x^2y'' + 8x^3y' + y = \tan\left(\frac{1}{2x}\right)$$

5. Dada la **EDO**

$$g(y)\sin t - \left(y^2 + 1\right) f(t)y'(t) = 0 \tag{1}$$

Determinar $g(y)$, $f(t)$ tales que (1) sea una ecuación diferencial exacta. Resolver (1) para las funciones obtenidas.

6. Considere la ecuación diferencial

$$y'' + 4xy' + \left(6 + 4x^2\right) y = x^2 e^{-x^2}$$

a) Pruebe que si $y(x) = u(x)e^{-x^2}$ es solución, entonces u satisface una ecuación diferencial lineal no homog'enea con coeficientes constantes.

b) Use el resultado de la parte anterior para determinar la solución $y(x)$ con $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

Soluciones

Problemas Recuperativo

1. $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ valores máximos y $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ valores mínimos
2. Si $a = 0$ la solución es $y(x) = c_1 + c_2 e^x$
   Si $a = 1$ la solución es $y(x) = c_1 x + c_2 e^x + x^2 \left(\frac{e^x}{2} - 1\right)$
3. *a)* $k = \dfrac{9}{2}$, $3x^2y^3 + x\cos y = C$
   b) $y^2 = \dfrac{1}{\frac{x}{6} + \frac{1}{72} + Ce^{12x}}$, con $C \in \mathbb{R}$
4. $y(t) = 1 + Ct$ con $C \in \mathbb{R}$

Problemas Varios

1. *a)* $\dfrac{1}{y^2} = -\left(1 + x^2\right)\ln\left(1 + x^2\right) + 2x^2 + 1$
   b) $y(x) = \dfrac{c_1}{x^5} + \dfrac{c_2}{x^4} + \dfrac{1}{5}\ln(x) - \dfrac{1}{30}x - \dfrac{1}{900}$
2. $y(x) = c_1\sqrt{1 - x^2} + c_2\sqrt{1 - x^2}\ln\left(1 - x^2\right)$
3.
4. $y(x) = c_1 \sin\left(\dfrac{1}{2x}\right) + c_2 \cos\left(\dfrac{1}{2x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{2x}\right) \cdot \ln\left|\sec\left(\dfrac{1}{2x}\right) + \tan\left(\dfrac{1}{2x}\right)\right|$
5. $g(y) = y + y^3/3 + c_1$, $f(t) = \cos t + c_2$ y la solución es $-y\left(y^2/3 + 1\right)\cos t = k, \quad k \in \mathbb{R}$
6. $y(x) = \left(\dfrac{9}{8}\cos(2x) + \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{8}\right)e^{-x^2}$