Variables Aleatorias Continuas

Cristopher Morales Ubal
e-mail: c.m.ubal@gmail.com

Definición: Una distribución de probabilidad continua es una función $f(x)$, definida en $\mathbb{R}$ que satisface:

1. $f(x) \geq 0$, para todo x real.
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

La función $f(x)$ se conoce con el nombre de *densidad de probabilidad* o simplemente *densidad*.
También una variable aleatoria X se dice que tiene *Distribución Continua* (mas precisamente *absolutamente continua*) si existe una función $f_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, llamada densidad de X tal que:

$$\mathbb{P}(X \in \mathcal{B}) = \int_{\mathcal{B}} f_X(x)\,dx \quad , \forall \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}$$

Note que $f_X(x) = f(x)$, el subindice X se usa para indicar la V.A.(variable aleatoria).
Ademas note que $\mathcal{B}$ es un intervalo.
OBS: Si $\mathcal{B} = \{c\}$, luego

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \in \mathcal{B}) &= \mathbb{P}(X = c)\\ &= \int_{\{c\}} f_X(x)\,dx\\ &= 0\end{aligned}$$

Es decir, la probabilidad de que la v.a. X tome un valor puntual es cero.
Luego tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(a < X < b) &= \mathbb{P}(a \leq X < b)\\ &= \mathbb{P}(a < X \leq b)\\ &= \mathbb{P}(a \leq X \leq b)\\ &= \int_a^b f_X(x)\,dx\end{aligned}$$

También, si se considera $\mathcal{B}_t =]-\infty, t]$, entonces:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq t) &= \mathbb{P}(X \in \mathcal{B}_t)\\ &= \int_{\mathcal{B}_t} f_X(x)\,dx\\ &= \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx\end{aligned}$$

lo cual motiva la siguiente definición.

Definición: Si X es una variable aleatoria continua, se define la *La función de distribución acumulada* (o simplemente *función de distribución*) de la variable aleatoria X, se anota F_X, por:

$$\begin{aligned}F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leq t)\\ &= \int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx \quad , \quad \forall t \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Obs: del teorema fundamental del calculo, se f_X es continua en x, luego se tiene que:

$$f_X(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F_X(x)\right)$$

la cual es la relación entre la función de densidad y la función de distribución acumulada de una v.a. X.

Ejercicio: Sea X una variable aleatoria continua que mide el avance entre dos automoviles consecutivos elegidos al azar en segundos, su función de distribución de tiempo de avance presenta la forma:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{x^4} & , \text{ si } x \geq 1 \\ 0 & , \quad \text{e.o.c} \end{cases}$$

a) Determinar el valor de k para que $f_X(x)$ sea una función de densidad legitima.

b) Obtener la función de distribución acumulada.

c) Calcular $\mathbb{P}(X > 2)$ y $\mathbb{P}(2 < X < 3)$.

solución

a) tenemos que $f_X(x)$ es función de densidad si y solo si cumple que:

$$\text{i) } f_X(x) \geq 0 \;\; \forall x$$
$$\text{ii) } \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$$

para hallar k usaremos la propiedad ii), notemos que:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1 \\
\iff & \int_{-\infty}^{1} f_X(x)dx + \int_{1}^{\infty} f_X(x)dx = 1 \\
\iff & \underbrace{\int_{-\infty}^{1} 0 \cdot dx}_{=0} + \int_{1}^{\infty} \frac{k}{x^4}dx = 1 \\
\iff & k \cdot \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^4} = 1 \\
\iff & k \cdot \lim_{t \to \infty} \int_{1}^{t} \frac{dx}{x^4} = 1 \\
\iff & k \cdot \lim_{t \to \infty} \left(\frac{t^{-3}}{-3} - \frac{1^{-3}}{3} \right) = 1 \\
\iff & k \cdot \lim_{t \to \infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{t^3} \right) = 1 \\
\iff & k \cdot \left(\frac{1}{3} - \underbrace{\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t^3}}_{=0} \right) = 1 \\
\iff & \frac{k}{3} = 1 \\
\iff & k = 3
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

b) Tenemos que la función de distribución acumulada viene dada por:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

Asi tenemos los siguientes casos:

1) si $-\infty < x < 1$ entonces:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

2) si $x \geq 1$ entonces:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{1} f_X(t)dt + \int_{1}^{x} f_X(t)dt \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{1} 0 \cdot dt}_{=0} + \int_{1}^{x} \frac{3}{t^4}dt \\ &= -\left.\frac{1}{t^3}\right|_{1}^{x} \\ &= 1 - \frac{1}{x^3} \end{aligned}$$

$\therefore$ la función de distribución acumulada es:

$$F_X\left(x\right) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^3} & , \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

$\blacksquare$

c) Tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(X > 2\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(X \leq 2\right) \\ &= 1 - F_X(2) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{2^3}\right) \\ &= \frac{1}{2^3} \\ &= 0,125 \end{aligned}$$

de manera analoga

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(2 < X < 3\right) &= \mathbb{P}\left(X < 3\right) - \mathbb{P}\left(X < 2\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X \leq 3\right) - \mathbb{P}\left(X \leq 2\right) \\ &= F_X(3) - F_X(2) \\ &= \left(1 - \frac{1}{3^3}\right) - \left(1 - \frac{1}{2^3}\right) \\ &= \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3} \\ &= 0,08796 \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Esperanza de una variable aleatoria continua

Definición: Sea X una variable aleatoria continua con densidad f_X. El valor esperado de X, se anota $\mathbb{E}\left(X\right)$, se define como el número real:

$$\mathbb{E}\left(X\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

Siempre que la integral anterior converja. Si esta ultima integral diverge, la esperanza de X no está definida.(obs: valor esperado = esperanza).

Teorema: Sea X una variable aleatoria continua con densidad f_X y h una función real.
la esperanza de la variable aleatoria $h\left(X\right)$ puede ser calculada por la formula:

$$\mathbb{E}\left(h\left(X\right)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} h\left(x\right) f_X(x) dx$$

Proposición: $\mathbb{E}\left(aX+b\right) = a\mathbb{E}\left(X\right)+b$

Definición: Sea X una variable aleatoria continua. Asumiendo que las esperanzas involucradas existen, se define la *Varianza* de X, se anota $\mathbb{V}(X)$, como el numero real no negativo

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right)$$

en este caso, la desviación estandar de X es

$$s_X = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

Proposición: $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \left(\mathbb{E}\left(X\right)\right)^2$

Obs: esta expresión es la usada para calcular varianzas, donde

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx$$

Propiedades:

i) $\mathbb{V}(aX) = a^2\mathbb{V}(X)$, $\forall a \in \mathbb{R}$

ii) $\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$

Ejercicio: Para $0 < c < 2$, sea X una variable aleatoria con densidad definida por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{c}x & , \text{ si } 0 \le x \le c \\ \dfrac{(x-2)}{(c-2)}a & , \text{ si } c \le x \le 2 \\ 0 & , \quad \text{e.o.c} \end{cases}$$

a) Calcular $\mathbb{E}(X)$.

b) Calcular $\mathbb{V}(X)$.

solución

a) en primer lugar se determina el valor de a, luego como f_X es función de densidad se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx &= 1 \\ \iff \int_{-\infty}^{0} f_X(x)dx + \int_{0}^{c} f_X(x)dx + \int_{c}^{2} f_X(x)dx + \int_{2}^{\infty} f_X(x)dx &= 1 \\ \iff \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx}_{=0} + \int_{0}^{c} \frac{a}{c}xdx + \int_{c}^{2} \frac{a(x-2)}{(c-2)}dx + \underbrace{\int_{2}^{\infty} 0 \cdot dx}_{=0} &= 1 \\ \iff \int_{0}^{c} \frac{a}{c}xdx + \int_{c}^{2} \frac{a(x-2)}{(c-2)}dx &= 1 \\ \iff \frac{a}{c} \cdot \frac{x^2}{2}\bigg|_0^c + \frac{(x-2)^2}{2(c-2)}\bigg|_c^2 &= 1 \\ \iff \frac{ac}{2} - \frac{(c-2)}{2} &= 1 \\ \iff ac - c + 2 &= 2 \\ \iff a &= 1 \end{aligned}$$

luego usando la definición de esperanza tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} x f_X(x)dx + \int_{0}^{c} x f_X(x)dx + \int_{c}^{2} x f_X(x)dx + \int_{2}^{\infty} x f_X(x)dx \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} x \cdot 0 \cdot dx}_{=0} + \int_{0}^{c} x \cdot \frac{1}{c}xdx + \int_{c}^{2} x \cdot \frac{(x-2)}{(c-2)}dx + \underbrace{\int_{2}^{\infty} x \cdot 0 \cdot dx}_{=0} \\ &= \frac{1}{c}\int_{0}^{c} x^2dx + \frac{1}{c-2}\int_{c}^{2} x(x-2)dx \\ &= \frac{1}{c}\,\frac{x^3}{3}\bigg|_0^c + \frac{1}{c-2}\left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\bigg|_0^2 \\ &= \frac{c^2}{3} + \frac{1}{c-2}\left(\frac{2^3}{3} - 2^2 - \left(\frac{c^3}{3} - c^2\right)\right) \\ &= \frac{c^2}{3} + \frac{1}{c-2}\left(-\frac{4}{3} - \frac{c^3}{3} + c^2\right) \\ &= \frac{c+2}{3} \end{aligned}$$

$\blacksquare$

b) Tenemos por definición de varianza que:

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2 \tag{1}$$

Luego calculando $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X^2\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} x^2 f_X(x) dx + \int_{0}^{c} x^2 f_X(x) dx + \int_{c}^{2} x^2 f_X(x) dx + \int_{2}^{\infty} x^2 f_X(x) dx \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} x^2 \cdot 0 \cdot dx}_{=0} + \int_{0}^{c} x^2 \cdot \frac{1}{c} x dx + \int_{c}^{2} x^2 \cdot \frac{(x-2)}{(c-2)} dx + \underbrace{\int_{2}^{\infty} x^2 \cdot 0 \cdot dx}_{=0} \\
&= \frac{1}{c} \int_{0}^{c} x^3 dx + \frac{1}{c-2} \int_{c}^{2} x^2 (x-2)\, dx \\
&= \frac{1}{c} \left. \frac{x^4}{3} \right|_{0}^{c} + \frac{1}{c-2} \left. \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} \right) \right|_{0}^{2} \\
&= \frac{c^3}{4} + \frac{1}{c-2} \left(\frac{2^4}{4} - \frac{2^4}{3} - \left(\frac{c^4}{4} - \frac{2c^3}{3} \right) \right) \\
&= \frac{c^3}{4} + \frac{1}{c-2} \left(-\frac{4}{3} - \frac{c^4}{4} + \frac{2c^3}{3} \right) \\
&= \frac{1}{6} \left(c^2 + 2c + 4 \right)
\end{aligned}$$

Reemplazando lo anterior y el valor de la esperanza obtendio en la parte a) en la ecuación 1), se tiene que la varianza viene dada por:

$$\mathbb{V}(X) = \frac{1}{6}\left(c^2 + 2c + 4\right) - \left(\frac{c+2}{3}\right)^2 = \frac{c^2 - 2c + 4}{18}$$

$\blacksquare$