Vectores Aleatorios

Cristopher Morales Ubal
e-mail: c.m.ubal@gmail.com

Definición: $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es un vector aleatorio ssi $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias definidas en el mismo modelo $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Distribución Conjunta

Definición: La función definida por:

$$F_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n), \; x_i \in \mathbb{R}$$

se llama función distribución conjunta de $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Definición: Sea $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un v.a. en $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Diremos que:

a) $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es discreto ssi:

$$Rec(X) = Rec(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

es un subconjunto contable(finito o no) de $\mathbb{R}^n$.
En tal caso, la distribución de probabilidad puede representarse mediante

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = \mathbb{P}\left(\cap_{i=1}^{n} \{X_i = x_i\}\right)$$

Así,

i) $\mathbb{P}(\mathbf{X} = \mathbf{x}) \geq 0$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

ii) $\sum \mathbb{P}(\mathbf{X} = \mathbf{x}_j) = 1$

b) $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es continua ssi existe una función

$$f_{X_1,X_2,\ldots,X_n} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

no negativa tal que

$$F_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n)\, dt_n dt_{n-1} \ldots dt_1, \; , \; \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}$$

En tal caso

$$f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}\left(F_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right)$$

Definición: La distribución de probabilidad de $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ se define como

$$\mathbb{P}_{\mathbf{X}}(B) = \mathbb{P}(\mathbf{X} \in B) \; , \; \forall B \subset \beta^n$$

Así, $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}(B), B \subset \beta^n$, es una medida de probabilidad. Luego $(\mathbb{P}_{\mathbf{X}}, \beta^n, \mathbb{R}^n)$ es una medida de probabilidad.

Proposición: $\forall B \subset \beta^n$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mathbf{X}}(B) &= \mathbb{P}(\mathbf{X} \in B) \\ &= \begin{cases} \displaystyle\sum_{\mathbf{x} \in B} \mathbb{P}(\mathbf{X} = \mathbf{x}) & , \text{ si } \mathbf{X} \text{ es discreta} \\ \displaystyle\int_{\mathbf{x} \in B} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} & , \text{ si } \mathbf{X} \text{ es continua} \end{cases} \end{aligned}$$

Teorema: Sea $\mathbf{X}$ una v.a. continua n-dimensional con densidad $f_X(x)$. Sea $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ una función. Considere la variable aleatoria $\mathbf{Y} = \mathbf{g}(\mathbf{X})$ esto significa que se considera la transformación

$$\begin{aligned} y_1 &= g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2 &= g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ y_n &= g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

finalmente supongase que $\mathbf{g}$ y $\mathbf{g}^{-1}$ son continuas y diferenciables. Entonces la función de densidad de $\mathbf{Y}$ es

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = f_{\mathbf{X}}\left(g_1^{-1}(\mathbf{y}), g_2^{-1}(\mathbf{y}), \ldots, g_1^{-1}(\mathbf{y})\right) \cdot |J| \ , \ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

donde:

$$J = \frac{\partial(g_1, g_2, \ldots, g_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \ , \ |J| \neq 0$$

es la matriz jacobiana de $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$.

Función de Densidad conjunta

Definición: Sin perdida de generalidad consideremos $f_{XY} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Se dice que f_{XY} es una función de densidad de (X, Y) ssi:

i) $f_{XY}(x, y) \geq 0 \ , \ \forall \ (x, y) \in \mathbb{R}^2$

ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)\,\mathrm{dxdy} = 1$

obs: Dada la definición anterior, se tienen las siguientes propiedades y definiciones (las cuales se pueden generalizar a cualquier vector aleatorio $\overrightarrow{X} \in \mathbb{R}^n$):

1. $F_{XY}(x, y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{XY}(t_1, t_2)\,\mathrm{dt_2dt_1}$ es su función de distribución conjunta.

2. $\mathbb{P}_{XY}(a_1 \leq X \leq b_1 \ , \ a_2 \leq Y \leq b_2) = \displaystyle\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f_{XY}(x, y)\,\mathrm{dydx}$

Densidad Marginal y Condicional

Definición: Se definen las densidades marginales de X e Y como:

$$p_X(x) = \sum_y f_{XY}(x, y) \ \text{ y } p_Y(y) = \sum_x f_{XY}(x, y)$$

para el caso discreto y

$$f_X(x) = \int_y f_{XY}(x, y)\,dy \text{ y } f_Y(y) = \int_x f_{XY}(x, y)\,dx$$

para el caso continuo.

Definición: Sea X e Y dos v.a.discretas o continuas. Las distribución condicional de la v.a. Y , dado que $X = x$, esta dada por:

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)} \ , \ f_X(x) > 0$$

de manera analoga la distribución condicional de la v.a. X dado $Y = y$, esta dada por:

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} \ , \ f_Y(y) > 0$$

Definición: Sean X e Y dos v.a. discretas o continuas, con distribución de probabilidad conjunta f_{XY} y distribuciones marginales f_X y f_Y , respectivamente. Las variables aleatorias X e Y se dice que son Independientes estadisticamente ssi

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \ , \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Teorema: Sea $\overrightarrow{X} = (X, Y)$ y sea $F_{\overrightarrow{X}}$ su función de distribución. Consideremos

$$D = \left\{ \overrightarrow{x} : \overrightarrow{x} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge \exists \ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} \right\}$$

Sea $h : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} \ , \ \forall \overrightarrow{x} = (x,y) \in D$$

entonces $\overrightarrow{X}$ es un vector aleatorio continuo ssi h es función de densidad.
obs: El teorema anterior es tambien valido para dimensiones mayores ($n \geq 3$).

Distribución marginal y condicional

Definición: Se definen las Funciones de distribución marginal de X e Y como

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{dt} \ , \ F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\,\mathrm{dt}$$

De manera analoga, las distribuciones condicionales se definen como:

$$F_{X|Y=y}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y=y}(t)\,\mathrm{dt} \ , \ F_{Y|X=x}(y) = \int_{-\infty}^{y} f_{Y|X=x}(t)\,\mathrm{dt}$$

Para el caso discreto, basta intercambiar las integrales por sumatorias.

Esperanza de Vectores Aleatorios y sus Propiedades

Definición Sea $\overrightarrow{X} = (X, Y)$ vector aleatorio continuo con función de densidad $f_{\overrightarrow{X}}(\overrightarrow{x}) = f_{XY}(x,y)$ y sea $g : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $\overrightarrow{X}(\Omega) \subset D$. Entonces si

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g(x,y)| \, f_{XY}(x,y)\, dxdy \ \text{ Converge}$$

se define la Esperanza de $g(X, Y)$ como:

$$\mathbb{E}(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, f_{XY}(x,y)\, dxdy$$

Notemos que las definición anterior es tambien valida para un vector aleatorio discreto donde las integrales se reemplazan por sumas. Ademas, tambien es valida para $n \geq 3$.

Definición Sea X,Y v.a. cualquiera tal que $\exists \ \mathbb{E}(X) \wedge \mathbb{E}(Y)$. Se llama covarianza de X e Y y se denota por

$$\mathbb{COV}(X,Y) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\right]$$

Proposición: $\mathbb{COV}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$

Esperanzas Condicionales

Definición: Sea $\overrightarrow{X} = (X, Y)$ vector aleatorio continuo con función de densidad conjunta f_{XY}. Sea $f_{X|Y=y}$ la función de densidad condicional de X dado $Y = y$. Entonces se define la Esperanza Condicional de X dado $Y = y$ como:

$$\mathbb{E}(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y=y}(x)\, dx$$

de manera analoga la esperanza condicional de Y dado $X = x$ viene dada por:

$$\mathbb{E}(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X=x}(y)\, dy$$

Obs: al igual que las definiciones anteriores, estas son validas para vectores aleatorios discretas cambiando las integrales por sumatorias. Asimismo, su generalización a $n \geq 3$ son inmediatas.

Definición: Sea $\overrightarrow{X} = (X, Y)$ vec.a. continuo se define Varianza Condicional de X dado $Y = y$ como:

$$\mathbb{V}(X|Y = y) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X|Y = y))^2 |Y = y\right]$$

de manera analoga se define Varianza Condicional de Y dado $X = x$ como:

$$\mathbb{V}(Y|X = x) = \mathbb{E}\left[(Y - \mathbb{E}(Y|X = x))^2 |X = x\right]$$

Proposición:

i) $\mathbb{V}(X|Y = y) = \mathbb{E}\left(X^2|Y = y\right) - (\mathbb{E}(X|Y = y))^2$

ii) $\mathbb{V}(Y|X = x) = \mathbb{E}\left(Y^2|X = x\right) - (\mathbb{E}(Y|X = x))^2$

Coeficiente de Correlación

Sea $\overrightarrow{X} = (X, Y)$ vec.a. continuo se define como Coeficiente de Correlación denotado por ρ_{XY} al numero:

$$\rho_{XY} = \frac{\mathbb{COV}(X, Y)}{(\mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y))^{1/2}}$$