Problemas Teorema de Stokes

Cristopher Morales Ubal
e-mail: c.m.ubal@gmail.com

Problemas

1. Calcule, usando el teorema de Stokes, la integral curvilinea

$$\int_{\gamma} (2x + y - z)\, dx + (2x + z)\, dy + (2x - y - z) dz$$

Siendo γ la curva intersección de las superficies

$$4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4\ ,\ 2x - z = 0$$

2. Sea S la parte del cilindro parabólico $z = 3 - 2x^2$ que queda en el interior del paraboloide $z = x^2 + 3y^2$, y sea γ la curva intersección de estás dos superficies.Considere el campo $F(x, y, z) = (-yz, xz, xy)$. Calcule la integral de línea del campo F a lo largo de γ, si esta curva está orientada de manera tal que al mirarla desde un punto sobre el eje z , con $z > 3$, se recorre en sentido antihorario.

   (a) Calculando directamente la integral de linea.

   (b) Usando el teorema de Stokes.

3. Calcular

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

siendo

$$\vec{F}\,(x, y, z) = \Big(2y + \arcsin x, e^{y^2}, y^2 + \ln\left(z^2 + 4\right)\Big)$$

y C es el contorno del triangulo de vertices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 2)$, recorrido en el orden que se indican los vertices.

4. Sea $S = S_1 \cup S_2$, siendo

$$S_1 = \{x^2 + y^2 = 1,\ \frac{1}{2} \leq z \leq 1\}, \quad S_2 = \{x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1,\ z \geq 1\}$$

y sea el campo vectorial

$$\vec{F}\,(x, y, z) = \left(zx + z^2 y + x, z^3 yx + y, z^4 x^2\right)$$

Calcular $\displaystyle\int\int_S rot\ \vec{\mathbf{F}} \cdot ndS$, con n apuntando hacia afuera, utilizando el teorema de Stokes.

5. Verificar el teorema de Stokes para la porción de superficie dada por la ecuación $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ comprendida entre los planos $z = 0$ y $z = 3$, siendo $F(x, y, z) = (z - y, x - z, y - x)$.

6. Calcule $\displaystyle\int_C F d\alpha$ donde $F(x, y, z) = \left(\frac{y^2}{2}, z, x\right)$ y C es la curva intersección de las superficies $x + z = 1$ con $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$.

7. Sea S la parte de la superficie $z = 1 - x^2 - y^2$ comprendida en el 1^{er} octante y sea γ la curva cerrada que encierra dicha superficie. Usando el Teorema de Stokes calcular la integral

$$\int_{\gamma} zdx + xdy + y^2 dz$$

Si la curva se recorre en sentido positivo, mirada desde el plano xy.

8. Considere el campo vectorial

$$F(x,y,z)=\left(\frac{x-y-2}{(x-1)^2+(y+1)^2},\frac{x+y}{(x-1)^2+(y+1)^2},\frac{z^6}{\sqrt{1+z^4}}\right)$$

Calcular $\displaystyle\int_{S_1\cap S_2} F\mathrm{d}\alpha$, donde S_1 es la superficie $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{36}=1$ y S_2 es la superficie $z=1$.

9. Sea S es hemisferio superior de la esfera $x^2+y^2+z^2=2z$ y sea el campo vectorial definido por

$$\overrightarrow{F}(x,y,z)=\left(z\sin x-y^3,z\cos y+x^3,\cos(xy)\right)$$

Calcule :

$$\iint_S \nabla\times\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\,dS$$

$\overrightarrow{n}$ tiene 3^{era} coordenada positiva.

10. Considere el campo vectorial

$$\overrightarrow{F}(x,y,z)=\left(x\sin x-2y^2,y\cos y-2z,\tan z-2x\right)$$

y sea C la curva, orientada de manera antihoraria vista desde arriba, que se obtiene al intersectar $4x^2+5y^2+z^2=36$ con $z=2y$. Determine el trabajo que realiza el campo vectorial $\overrightarrow{F}$ a lo largo de la curva C.

11. Sea C la curva intersección de las superficies $x^2+y^2+z^2=4$ y $x+y+z=0$ orientada de tal forma que su proyección al plano XY tiene orientación positiva. Calcular

$$\int_C ydx+zdy+xdz$$

Note que: $ax^2+bxy+cy^2=\left(\sqrt{a}x+\dfrac{b}{2\sqrt{a}}y\right)^2+\left(c-\dfrac{b}{2\sqrt{a}}\right)y^2$

12. Calcular $\displaystyle\oint_C F\cdot d\mathbf{r}$ si $F(x,y,z)=\left(x,\dfrac{-z}{y^2+z^2},\dfrac{y}{y^2+z^2}\right)$ y C es :

   (a) La intersección entre el cilindro $(y-2)^2+z^2=1$ y el plano $x+y=1$.

   (b) La intersección entre el cilindro $y^2+z^2=1$ y el plano $x+y=1$.

<u>Soluciones</u>

Problemas

1. $\dfrac{5\pi}{\sqrt{2}}$
2. 5π
3. $-\dfrac{1}{3}$
4. $-\dfrac{\pi}{4}$
5. 18π
6. $-\dfrac{\pi}{4}$
7. $\dfrac{7}{6} + \dfrac{\pi}{4}$
8. 2π
9. $\dfrac{3\pi}{2}$
10. -24π
11.
12. (a) 0
    (b) 2π