Problemas Teorema de la Divergencia

Cristopher Morales Ubal
e-mail: c.m.ubal@gmail.com

Problemas

1. Considerar el sólido acotado por las superficies
$$z = 48 - x^2 - y^2 \ \ , \ \ z = 2x^2 + 2y^2$$
Sea S su frontera.Calcular
$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$
donde $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ y $\vec{n}$ apunta hacia afuera.

2. Calcular la integral
$$\iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$$
siendo S la superficie cerrada formada por la porción de superficie cilindrica de ecuación $x^2 + y^2 = 9$ y por las secciones circulares contenidas en los planos de ecuación $z = -1$ y $z = 4$.

3. Sea $\vec{F}(x, y, z) = (x^3 + ye^z, x^4\sqrt{z^3 + 1} + 2y^3, x + y)$ y S es el manto del paraboloide eliptico $z = x^2 + 2y^2$, $0 \leq z \leq 1$ orientado positivamente mediante la normal hacia afuera. Hallar el flujo de $\vec{F}$ atraves de S.

4. Considere la superficie
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - 1)^2 + y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 9 - x^2\} \cup \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1, \}$$
y el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, z, xy)$.
Calcule $\displaystyle\iint_S \mathbf{F} \cdot ndS$

5. Sea $F(x, y, z) = (xy, yz, z^2)$, y S el manto del cilindro $x^2 + y^2 = 9$ que esta entre los planos $z = x + 3$ y $z = 6$. Calcule
$$\iint_S F(x, y, z) \cdot ndS$$
donde n es la normal unitaria exterior a S.

6. Sea S una superficie cualquiera, con borde la curva cerrada
$$\gamma = \begin{cases} x = & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(t) \\ y = & \sin(t) \\ z = & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(t) \end{cases}$$
Calcular
$$\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$
   (a) Usando el Teorema de Stokes.

(b) Usando el Teorema de la Divergencia.

Donde $\vec{n}$ tiene primera coordenada positiva y $\vec{F}(x, y, z) = (y, -x, z)$.

7. Considere el campo vectorial $\overrightarrow{F}$ definido por:

$$\overrightarrow{F} = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

Para todo (x, y, z) con $x^2+y^2+z^2 \neq 0$. Calcule el flujo de este campo que cruza el elipsoide $4x^2+9y^2+6z^2 = 36$ hacia afuera.

8. Determine el flujo del campo vectorial $\overrightarrow{F}(x, y, z) = \left(4x + e^{y^4}, e^{z^{2}} - x^2 \sin x^6, x + y + 4x^2\right)$ a través de la superficie S descrita por : $4x^2 + 9y^2 + 9(z-1)^2 = 36$, con $z \geq 1$.

9. Sea $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (y - z, yz, -xz)$. Considerar S la superficie que consta de 4 caras del cubo determinado por las ecuaciones : $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y < 2$, $0 \leq z < 2$. Calcular usando el teorema de la Divergencia:

$$\iint\limits_{S} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n} \, dS$$

donde la superficie esta orientada por la normal exterior.

10. Calcular el flujo del campo $\overrightarrow{F}(x, y, z) = \left(xy^2, yz, zx^2\right)$, a través de la superficie determinada por las ecuaciones $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ y $1 < z < 4$.

11. Sea $a > 0$. Considere la superficie S definida por $x^2 + y^2 + \left(z - \frac{a}{2}\right)^2 = a^2$, con $z \geq 0$ y el campo vectorial

$$F(x, y, z) = \left(x + \cos(x + y), y + \cos(x + y), \sqrt{x^2 + y^2} + 2z \sin(x + y)\right)$$

Calcule el flujo exterior de F a tráves de S.

12. Sea S la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ orientada exteriormente y S_P la parte de S exterior al cilindro $x^2 + y^2 = 5$ manteniendo la orientación de S. Calcular

$$\iint\limits_{S_P} \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, z \right) \cdot dS$$

13. Considere el Campo vectorial $\overrightarrow{F} = (P, Q, R)$ con $P_x + Q_y = 3$ y $R(x, y, z) = x^2 + y^2$. Calcular

$$\iint\limits_{S} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n} \, dS$$

donde S es la porción del elipsoide $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$, $z \geq 0$ y $\overrightarrow{n}$ es el vector normal unitario que apunta hacia afuera.

14. Sea $F : \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, donde

$$F(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

Determinar el flujo saliente de F a través de la superficie cerrada Γ definida por:

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 4 - \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Soluciones

Problemas

1. 1152π
2. $\dfrac{2385}{2}\pi$
3. $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$
4. 0
5. $\dfrac{891\pi}{8}$
6. $-\pi$
7. 4π
8. 86π
9. 0
10. $\dfrac{135\pi}{4}$
11.
12.
13. 3π
14. 4π