Problemas Ecuaciones en Derivadas Parciales

Cristopher Morales Ubal
e-mail: c.m.ubal@gmail.com

Problemas

1. Resolver el problema de Sturm-Liouville

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0 \\ X'(0) = X(\pi) &= 0 \end{aligned}$$

2. Resolver el problema de Sturm-Liouville

$$X'' + \lambda X = 0$$

sujeto a las condiciones

$$\begin{aligned} X(0) + X(1) &= 0 \\ X'(0) &= 0 \end{aligned}$$

3. Encontrar los autovalores y autofunciones del problema

$$y'' + 2y' + (\lambda + 2)\, y = 0 \ , \ y(0) = 0 \ , \ y(1) = 0$$

4. Resolver la ecuación

$$u_t - u_{xx} + \frac{u}{1+t} = 0 \ \ , \ x \in \mathbb{R} \ ; \ t > 0$$

con

$$u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 \ , \ \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \\ 0 \ , \ \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

5. Resuelva el siguiente problema por el método de separación de variables:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 4u_{xx} - 2u_t \ , \ 0 \leq x \leq 6 \ , \ t \geq 0 \\ u(0,t) &= u(6,t) = 0 \ , \ t \geq 0 \\ u(x,0) &= x \ , \ u_t(x,0) = 0 \ , \ 0 \leq x \leq 6 \end{aligned}$$

6. Use el método de separación de variables para resolver la ecuación :

$$\begin{aligned} &u_{tt}(x,t) = 4u_{xx}(x,t) \ , \ 0 < x < 3 \ , \ t > 0 \\ &u(0,t) = u(3,t) = 0 \\ &u(x,0) = 0 \ , \ u_t(x,0) = 6\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) + 12\sin\left(\frac{7\pi}{3}x\right) \end{aligned}$$

7. Use el método de separación de variables para resolver la ecuación del telegrafo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\frac{\partial u}{\partial t} + u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ , \ t > 0 \ , \ x \in (0,\pi) \\ u(x,0) = \sin x \ , \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= 0 \ , \ x \in (0,\pi) \\ u(0,t) = u(\pi,t) &= 0 \ , \ t > 0 \end{aligned}$$

8. Resuelva

$$u_{xx} + u = u_{tt}\ ,\ 0 < x < 1\ ,\ t > 0$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0\ ,\ t > 0$$
$$u(x,0) = 1\ ,\ u_t(x,1) = 1\ ,\ 0 < x < 1$$

9. Resolver la ecuación:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

con las condiciones:

$$u(0,t) = u(10,t) = 0\ ,\ \forall t$$
$$u(x,0) = 50\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + 20\sin(2\pi x)$$

10. Resuelva la E.D.P.

$$u_{tt} = x^2 u_{xx} + 3x u_x + u\ ,\ 1 < x < e^e\ ,\ t > 0$$
$$u(1,t) = u(e^e,0) = 0$$
$$u(x,0) = \frac{1}{x^2}\ ,\ u_t(x,0) = 0$$

11. Resuelva la EDP

$$u_{tt} = u_{xx} + 1\ ,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}\ ,\ t > 0$$
$$u(0,t) = 1\ ,\ u_x\left(\frac{\pi}{2},t\right) = -\frac{\pi}{2}$$
$$u(x,0) = -x^2 + \frac{1}{2}\pi x\ ,\ u_t(x,0) = 0$$

Use el cambio de variable: $u(x,t) = w(x,t) + P(x)$

12. Use el cambio de variable: $u(x,t) = w(x,t) + P(x)$ para resolver la EDP:

$$u_t = 3u_{xx} + 3\ ,\ 0 < x < \pi\ ,\ t > 0$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 1$$
$$u(x,0) = 1$$

13. Resolver la ecuación

$$u_t - u_{xx} = x\ ,\ 0 < x < \pi\ ,\ t > 0$$
$$u_x(0,t) = u(\pi,t) = 0\ ,\ t > 0$$
$$u(x,0) = x + \frac{\pi^3 - x^3}{6}\ ,\ 0 < x < \pi$$

14. Resuelva

$$u_{tt} = 4u_{xx} + \sin(x)\ ,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}\ ,\ t > 0$$
$$u(0,t) = 1\ ,\ u\left(\frac{\pi}{2},t\right) = 2$$
$$u(x,0) = 1 + \frac{3}{2\pi}x + \frac{5}{4}\sin(x)\ ,\ u_t(x,0) = x^2$$

(Hacer el cambio de función $u(x,t) = w(x,t) + f(x)$)

15. Resuelva

$$
\begin{aligned}
u_t &= u_{xx} + \cos(x)\ ,\ 0 < x < \pi\ ,\ t > 0\\
u_x\,(0,t) &= u_x\,(\pi,t) = 0\ \ t > 0\\
u\,(x,0) &= \cos^2(x) + 2\cos^4(x)\ ,\ 0 < x < \pi
\end{aligned}
$$

16. Calcule $u\left(\frac{1}{2},4\right)$, donde $u(x,t)$ satisface

$$
\begin{aligned}
u_t &= u_{xx} - 2\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\ ,\ 0 < x < 1\ ,\ t > 0\\
u\,(0,t) &= 0\ ,\ u_x\,(1,t) = 0\ ,\ t > 0\\
u(x,0) &= 4\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right)\ ,\ 0 < x < 1
\end{aligned}
$$

17. Resuelva el siguiente problema:
Hallar: $u = u(x,t)$ tal que:

$$
\begin{aligned}
u_t &= u_{xx} - 6x\ ,\ 0 < x < 1\ ,\ t > 0\\
u(0,t) &= 0 \qquad\qquad ,\ t > 0\\
u(1,t) &= 3 \qquad\qquad ,\ t > 0\\
u_t(x,0) &= 8\pi^2\sin(2\pi x)\ ,\ 0 < x < 1
\end{aligned}
$$

18. Use el cambio de variables $u(x,t) = e^{-at}w(x,t)$ para resolver:

$$
\begin{aligned}
u_t(x,t) &= 4u_{xx}(x,t) - u(x,t)\ ,\ 0 < x < 9\ ,\ t > 0\\
u(0,t) &= u(9,t) = 0\\
u(x,0) &= 3x
\end{aligned}
$$

19. Resuelva

$$
\begin{aligned}
u_t &= u_{xx} - 2u_x(x,t)\ ,\ 0 < x < 1\ ,\ t > 0\\
u(0,t) &= u(1,t) = 0\\
u(x,0) &= 3e^x(x-1)
\end{aligned}
$$

(Use un cambio de variable de la forma $u(x,t) = e^{ax+bt}w(x,t)$ para obtener una ecuación del tipo $w_t = w_{xx}$).

20. Considere la EDP

$$
\begin{aligned}
u_t\,(x,t) &= u_{xx}\,(x,t)\\
u_x(0,t) &= 0\ ,\ u_x(1,t) = 2\\
u(x,0) &= x^2 + 1
\end{aligned}
$$

Pruebe que el cambio de variables $u(x,t) = ax^2 + bt + w(x,t)$ transforma esta ecuación en

$$
\begin{aligned}
w_t\,(x,t) &= w_{xx}\,(x,t)\\
w_x(0,t) &= w_x(1,t) = 0\\
w(x,0) &= 1
\end{aligned}
$$

usando separación de variables, Encuentre las soluciones $w(x,t)$ y $u(x,t)$.

21. Resolver la ecuación:

$$
\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= t^2 \cos x \quad , \; 0 < x < \pi \; , \; t > 0 \\
u_x(0,t) &= u_x(\pi,t) = 0 \; , \; \forall t > 0 \\
u(x,0) &= 0 \quad , \; \forall \; 0 < x < \pi
\end{aligned}
$$

Sugerencia: Hacer el Cambio $u(x,t) = w(x,t) + h(t)\cos x$

22. Resuelva el siguiente problema:

    (a) Determine las soluciones no triviales $X = X(x)$ y λ tal que satisfagan:

$$
\begin{aligned}
X''(x) + \lambda X(x) &= 0 \; , \; 0 < x < 1 \\
X(0) + X'(1) &= 0 \\
X'(0) &= 0
\end{aligned}
$$

    (b) Resuelve la sgte. EDP: hallar $u = u(x,t)$ tal que

$$
\begin{aligned}
u_t &= 4t u_{xx} \; , \; 0 < x < 1 \; , \; t > 0 \\
u(0,t) &= -u(1,t) \; , \; t > 0 \\
u_x(0,t) &= 0 \; , \; t > 0 \\
u(x,0) &= 4\cos(5\pi x) \; , \; 0 < x < 1
\end{aligned}
$$

23. (a) Resuelva el problema de Sturm-Liouville::

$$
\begin{aligned}
M''(x) + 4M(x) + (2+\lambda)M(x) &= 0 \\
M(0) = M(1) &= 0
\end{aligned}
$$

    (b) Use el método de separación de variables y la parte a) para resolver la ecuación:

$$
\begin{aligned}
u_t(x,t) - 4u_x(x,t) - u_{xx}(x,t) - 2u(x,t) = 0 \; , \; 0 < x < 1 \; , \; t > 0 \\
u(0,t) = u(1,t) = 0 \; , \; t > 0 \\
u(x,0) = e^{-2x} \sin\left(\frac{3\pi}{2} x\right) \; , \; 0 < x < 1
\end{aligned}
$$

24. (a) Determinar los autovalores y autofunciones del problema:

$$
\begin{aligned}
M''(x) + \lambda M(x) &= 0 \\
M(-1) = M'(1) &= 0
\end{aligned}
$$

    (Use el cambio de variables $z = x + 1$)

    (b) Usando el método de separación de variables , resuelva

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - u_{xx} = 0 \; , \; -1 < x < 1 \; , \; t > 0 \\
u_x(-1,t) = u_x(1,t) = 0 \\
u(x,0) = \cos(2\pi x) \; , \; u_t(x,0) = 1
\end{aligned}
$$

25. Una barra homogénea de 3 metros de longitud y difusibilidad $0,3$ se saca de un horno con una rapidez de $4x + 5$, rapidamente de aisla y sus extremos se mantienen a $0°C$. Calcular la distribución de la temperatura $u(x,t)$ de la barra en cualquier instante $t > 0$ de cualquier punto x de ella.

26. Resolver la ecuación de calor de estado estacionario

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$$

en el anillo $1 < r < 2$, si se sabe que

$$u(1,\theta) = 0\ ,\ u(2,\theta) = 1 + \sin\theta$$

27. Encontrar en la región $r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{3}$, una solución acotada de la ecuación de laplace que verifique las condiciones

$$u(r,0) = u\left(r, \frac{\pi}{3}\right) = 0\ ,\ u(1,\theta) = \theta(\pi - 3\theta)$$

28. Resuelva la ecuación de laplace

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0\ ,\ 1 \leq r \leq e^3\ ,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$u(1,\theta) = u(e^3,\theta) = 0\ ,\ u(r,0) = 0\ ,\ u\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = \ln r$$

29. Resolver

$$\triangle u = 0\ ,\ 1 < r < 3\ ,\ 0 < \theta < 2\pi$$

$$u(1,\theta) = 0\ ,\ u(3,\theta) = \cos(3\theta) + \sin(5\theta)$$

donde $\triangle u = 0$ se refiere al laplaciano de u.

30. Considere la ecuación

$$r^2u_{rr} + ru_r + u_{\theta\theta} = 0\ ,\ r > 1\ ,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$u(1,\theta) = \theta\ ,\ \lim_{r\to\infty} u(r,\theta) < \infty$$

la solución de esta ecuación es de la forma

$$u(r,\theta) = A_0 + B_0\ln r + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_nr^n + B_nr^{-n}\right)\cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_nr^n + D_nr^{-n}\right)\sin(n\theta)$$

(a) Encuentra la solución de la ecuación.

(b) Encuentre los tres primeros terminos de $u\left(2, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

31. Resuelva la ecuación de laplace $\triangle u = 0$ en un anillo semicircular, considerando las siguientes condiciones:

$$u(r,\theta) = u(r,\pi) = 0\ ,\ \text{para } 1 < r < 2$$

$$u(1,\theta) = \sin(2\theta) \text{ y } u(2,\theta) = 0\ \text{ para } 0 < \theta < 2\pi$$

¿En que puntos de la región se obtiene la máxima temperatura?

32. Encontrar la solución del problema

$$r^2u_{rr} + ru_r + u_{\theta\theta} = 0\ ,\ 1 < r < 2\ ,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$u_\theta(r,0) = u_\theta\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = 0\ ,\ 1 < r < 2$$

$$u(1,\theta) = 0\ ,\ u_r(2,\theta) = \theta\ ,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

33. Considere la EDP

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} = 0 \ , \ 0 < x < 1 \ , \ 0 < y < 1 \\ u(x,0) = u(x,1) = 0 \\ u(0,y) = 0 \ , \ u(1,y) = 4\sin(\pi y) \end{aligned}$$

Determine el valor máximo de $u(x,y)$ y el (o los) punto(s) donde lo alcanza.

34. Encuentre una solución acotada para la EDP

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} = 0 \ , \ 0 < x < \infty \ , \ 0 < y < 1 \\ u(x,0) = 1 \\ u(x,1) = 2 \\ u(0,y) = 0 \end{aligned}$$

(Hint: use el cambio de variable $u(x,y) = w(x,y) + f(y)$.

Soluciones

Problemas

1.

2. $\lambda_n = (2n-1)^2\pi^2$, $X_n(x) = \cos\left((2n-1)\pi x\right)$, $n \in \mathbb{N}$

3. $\lambda_n = n^2\pi^2 - 1$, $y_n(x) = e^{-x}\sin(n\pi x)$

4. $u(x,t) = \dfrac{1}{2}(1+t)^{-1} + \dfrac{2}{\pi}(1+t)^{-1}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\exp\left(-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 t\right)\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)$

5.

6.

7. $u(x,t) = e^{-t}(\cos t + \sin t)\sin x$

8.

9. $u(x,t) = 50e^{-\frac{9\pi^2}{4}t}\sin\left(\dfrac{3\pi x}{2}\right) + 20e^{-4\pi^2 t}\sin(2\pi x)$

10. $u(x,t) = \dfrac{2e}{(e^e-1)\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(1-(-1)^n)\cos\left(\frac{n\pi}{e}t\right)x^{-1}\sin\left(\frac{n\pi}{e}\ln x\right)$

11. $u(x,t) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{(2n+1)^3} - \frac{1}{2n+1}\right)\cos((2n+1)t)\sin((2n+1)x)$

12. $u(x,t) = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{\pi}{2}x + 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^3\pi}\left[(-1)^n - 1\right]e^{3n^2t}\sin(nx)$

13. $u(x,0) = \dfrac{\pi^3 - x^3}{6} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left(\frac{2\pi}{2n-1}(-1)^{n+1} - \frac{4}{(2n-1)^2}\right)e^{-\left(\frac{2n-1}{n}\right)^2 t}\cos\left(\frac{(2n-1)}{2}x\right)$

14.

15. $u(x,0) = \cos x + \dfrac{5}{4} - e^{-t}\cos x + \dfrac{3}{2}e^{-4t}\cos 2x + \dfrac{1}{4}e^{-16t}\cos 4x$

16. $u\left(\dfrac{1}{2}, 4\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{8}{\pi^2}e^{-\pi^2} + 4e^{-9\pi^2} - \dfrac{8}{\pi^2}\right)$

17. $u(x,t) = x^3 + 2x - 2e^{-4\pi^2 t}\sin(2\pi x)$

18.

19.

20. $w(x,t) = 1$ y $u(x,t) = x^2 + 2t + 1$

21.

22. (a) $\lambda_n = \pi^2(1+2n)^2$, $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ y $X_n(x) = \cos(\sqrt{\lambda_n}x)$
    (b) $u(x,t) = 4e^{-50\pi^2 t^2}\cos(5\pi x)$

23.

24.

25.

26. $u(r,\theta) = \dfrac{1}{\ln(2)} \ln r + \dfrac{2}{3}\left(r - \dfrac{1}{r}\right) \sin\theta$

27. $u(r,\theta) = \dfrac{4}{3\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3} \left(1 - (-1)^n\right) r^{3n} \sin(3n\theta)$

28.

29.

30. (a) $u(r,\theta) = \pi + \sum_{n=1}^{\infty} -\dfrac{2}{n} r^{-n} \sin(n\theta)$

(b) $u\left(2, \dfrac{\pi}{2}\right) = \pi - 1 + \dfrac{2}{3} \cdot 2^{-3}$

31. $u(r,\theta) = \left(-\dfrac{1}{15} r^2 + \dfrac{16}{15} r^{-2}\right) \sin(n\theta)$, puntos $\left(1, \dfrac{\pi}{4}\right)$ y $\left(1, \dfrac{3\pi}{4}\right)$

32. $u(r,\theta) = \dfrac{\pi}{2} \ln r - \dfrac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^3 \left(2^{4n-2} + 2^{-4n+2}\right)} \left(r^{4n-2} - r^{-4n+2}\right) \cos\left((4n-2)\theta\right)$

33. $u(x,y) = \dfrac{4}{\sinh(\pi)} \sinh(\pi x) \sin(\pi y)$ y el maximo lo alcanza en el punto $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$

34. $u(x,y) = y + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n\pi} e^{-n\pi x} \sin(n\pi y)$