

---

# Problemas calculo integral

Cristopher Morales Ubal  
e-mail: c.m.ubal@gmail.com

## Problemas

1. Exprese como integra los siguientes limites:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\ln(n+i) - \ln(n)]$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{\sqrt[n]{2^i} \pi \sqrt[n]{2^{i-1}}} (\sqrt[n]{2} - 1)$

2. a) Sean  $u, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivables y  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Definamos

$$G(x) = \int_{v(x)}^{u(x)} f(t) dt$$

Muestre que

$$G'(x) = f(u(x))u'(x) - f(v(x))v'(x)$$

- b) Suponga que  $f$  es integrable en  $[a, b]$ . Demuestre que existe un numero  $\xi$  en  $[a, b]$  tal que

$$\int_a^\xi f(x) dx = \int_\xi^b f(x) dx$$

3. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua y definamos  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  y  $G(x) = \int_0^x f(t^2) dt$ . Demuestre que:

$$\int_0^u G(x) dx = uG(u) - \frac{1}{2}F(u^2)$$

4. Definamos  $n \in \mathbb{N}$ :

$$I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} dx$$

Demuestre que:

$$(1+2n)I_n = 2x^n \sqrt{1+x} - 2nI_{n-1}$$

5. a) Demuestre que:

$$\left| \int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x} \sin x}{1+x^2} dx \right| \leq \frac{\pi}{12e}$$

- b) Demuestre que  $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{1/x} \frac{1}{1+t^2} dt$  es constante, y calcule su valor  $\forall x > 0$ .

---

## Soluciones

### Problemas

1.    *a)*  
      *b)*
2.    *a)* Demostración  
      *b)* Demostración
3. Demostración
4. Demostración
5.    *a)* Demostración  
      *b)* Demostración