Problemas de Ecuaciones en Derivadas Parciales: Método de Separación de Variables

Cristopher Morales Ubal
e-mail: c.m.ubal@gmail.com

Problemas

1. Resolver el problema de Sturm-Liouville

$$X'' + \lambda X = 0$$
$$X'(0) = X(\pi) = 0$$

2. Encontrar los autovalores y autofunciones del problema

$$y'' + 2y' + (\lambda + 2)\, y = 0\ ,\ y(0) = 0\ ,\ y(1) = 0$$

3. Utilice el metódo de separación de variables para obtener una solución de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\frac{\partial u}{\partial t} + u = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ , 0 < x < 2\ , t > 0$$
$$u(0,t) = u(2,t) = 0\ ,\ t > 0$$
$$u(x,0) = x(2-x)\ ,\ u_t(x,0) = 0\ ,\ 0 < x < 2$$

4. Resuelva el siguiente problema por el método de separación de variables:

$$u_{tt} = 4u_{xx} - 2u_t\ ,\ 0 \leq x \leq 6\ ,\ t \geq 0$$
$$u(0,t) = u(6,t) = 0\ ,\ t \geq 0$$
$$u(x,0) = x\ ,\ u_t(x,0) = 0\ ,\ 0 \leq x \leq 6$$

5. Resuelva

$$u_{xx} + u = u_{tt}\ ,\ 0 < x < 1\ ,\ t > 0$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0\ ,\ t > 0$$
$$u(x,0) = 1\ ,\ u_t(x,1) = 1\ ,\ 0 < x < 1$$

6. Resuelva la EDP

$$u_{tt} = u_{xx} + 1\ ,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}\ ,\ t > 0$$
$$u(0,t) = 1\ ,\ u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = -\frac{\pi}{2}$$
$$u(x,0) = -x^2 + \frac{1}{2}\pi x\ ,\ u_t(x,0) = 0$$

Use el cambio de variable: $u(x,t) = w(x,t) + P(x)$

7. Resolver la ecuación

$$u_t - u_{xx} = x\ ,\ 0 < x < \pi\ ,\ t > 0$$
$$u_x(0,t) = u(\pi,t) = 0\ ,\ t > 0$$
$$u(x,0) = x + \frac{\pi^3 - x^3}{6}\ ,\ 0 < x < \pi$$

8. Resuelva el problema
$$\frac{\partial u}{\partial t} = 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 18x \ , \ 0 \leq x \leq 1 \ , \ t \geq 0$$
con las condiciones
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = u(1,t) = -1 \ , \ u(x,0) = x^3 - 2x$$

9. Use el cambio de variables $u(x,t) = e^{-at}w(x,t)$ para resolver:
$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= 4u_{xx}(x,t) - u(x,t) \ , \ 0 < x < 9 \ , \ t > 0 \\ u(0,t) &= u(9,t) = 0 \\ u(x,0) &= 3x \end{aligned}$$

10. Considere la EDP
$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= u_{xx}(x,t) \\ u_x(0,t) &= 0 \ , \ u_x(1,t) = 2 \\ u(x,0) &= x^2 + 1 \end{aligned}$$
Pruebe que el cambio de variables $u(x,t) = ax^2 + bt + w(x,t)$ transforma esta ecuación en
$$\begin{aligned} w_t(x,t) &= w_{xx}(x,t) \\ w_x(0,t) &= w_x(1,t) = 0 \\ w(x,0) &= 1 \end{aligned}$$
usando separación de variables, Encuentre las soluciones $w(x,t)$ y $u(x,t)$.

11. Resuelva el siguiente problema:
   (a) Determine las soluciones no triviales $X = X(x)$ y λ tal que satisfagan:
$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0 \ , \ 0 < x < 1 \\ X(0) + X'(1) &= 0 \\ X'(0) &= 0 \end{aligned}$$
   (b) Resuelve la sgte. EDP: hallar $u = u(x,t)$ tal que
$$\begin{aligned} u_t &= 4tu_{xx} \ , \ 0 < x < 1 \ , \ t > 0 \\ u(0,t) &= -u(1,t) \ , \ t > 0 \\ u_x(0,t) &= 0 \ , \ t > 0 \\ u(x,0) &= 4\cos(5\pi x) \ , \ 0 < x < 1 \end{aligned}$$

Soluciones

Problemas

1.
2. $\lambda_n = n^2\pi^2 - 1$, $y_n(x) = e^{-x}\sin(n\pi x)$
3. $u(x,t) = \dfrac{16e^{-t}}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(1-(-1)^n)}{n^3}\left(\cos\left(\dfrac{3n\pi}{2}t\right) + \dfrac{2}{3n\pi}\sin\left(\dfrac{3n\pi}{2}t\right)\right)\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}x\right)$
4.
5.
6. $u(x,t) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{1}{(2n+1)^3} - \dfrac{1}{2n+1}\right)\cos((2n+1)t)\sin((2n+1)x)$
7. $u(x,0) = \dfrac{\pi^3 - x^3}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{2\pi}{2n-1}(-1)^{n+1} - \dfrac{4}{(2n-1)^2}\right)e^{-\left(\frac{2n-1}{n}\right)^2 t}\cos\left(\dfrac{(2n-1)}{2}x\right)$
8. $u(x,t) = x^3 - x - 1 + \dfrac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}\exp\left(-\dfrac{3(2n+1)^2}{4}\pi^2 t\right)\cos\left(\dfrac{(2n+1)}{2}\pi x\right)$
9.
10. $w(x,t) = 1$ y $u(x,t) = x^2 + 2t + 1$
11. (a) $\lambda_n = \pi^2(1+2n)^2$, $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ y $X_n(x) = \cos(\sqrt{\lambda_n}x)$
    (b) $u(x,t) = 4e^{-50\pi^2 t^2}\cos(5\pi x)$