Problemas Integrales de linea

Cristopher Morales Ubal
e-mail: c.m.ubal@gmail.com

Problemas

1. Calcule la integral de linea $\int_\gamma (x\sqrt{x^2-y^2})ds$, siendo γ la curva de ecuación $\left(x^2+y^2\right)^2 = 4\left(x^2-y^2\right)$, $x \geq 0$.

2. Un alambre ocupa la parte de la espiral $r = e^\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. En el punto (r, θ) la temperatura es r. Encontrar la temperatura promedio del alambre.

3. Considerar la curva γ , expresada en coordenadas cilindricas por las ecuaciones $r = \theta$ y $z = r$; con $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Calcular
$$\int_\gamma z ds$$

4. Considerar la curva γ expresada e coordenadas cilindricas como $r = e^\theta$ y $z = r$ desde el punto $(1, 0, 1)$ hasta el punto $(-e^\pi, 0, e^\pi)$. Si la densidad de masa es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al origen, calcule la masa.

5. Calcule
$$\int_\gamma x dx + dy + y dz$$
donde γ es la intersección entre el plano $z = 3 + 2y$ y el paraboloide $2z = x^2 + y^2 + 6$, y la curva está orientada de manera tal que su proyección sobre el plano xy se recorre en sentido contrario a las agujas del reloj.

6. Calcule
$$\int_\gamma \sqrt{2y^2 + z^2} ds$$
siendo γ la intersección entre las superficies S_1 y S_2 dadas por:
$$S_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2, a > 0\right\} \ , \ S_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y, a > 0\right\}$$

7. Sea γ la curva intersección entre el plano $x + z = 1$ y el elipsoide $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$, orientada de manera que su proyección sobre el plano xy se recorre en sentido antihorario. calcule
$$\oint_\gamma \frac{1}{2} y^2 dx + z dy + x dz$$

8. calcular
$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$$
donde $\vec{F}(x, y, z) = (z, x, y)$ y γ la curva de intersección del paraboloide $z = x^2 + y^2$ con el plano $z = 2x$, orientada en el sentido de las manecillas del reloj mirada desde el origen.

9. Calcular
$$\int_{(4,3)}^{(-3,4)} \frac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} dx - \frac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} dy$$

10. Sea
$$\vec{F}(x, y, z) = \left(y^2 \cos x + z^3, 2y \sin x - 4, 3xz^2 + 2z\right)$$
    (a) Muestre que $\vec{F}$ es conservativo.

(b) Encuentre un potencial escalar para $\vec{F}$

(c) Calcule

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\alpha$$

donde γ es la curva que consta del arco $y = x^2$, $z = 0$ del origen al punto $(1, 1, 0)$ junto con el segmento de recta $(1, 1, 0)$ al punto $(0, 0, 1)$.

11. Calcule

$$\int_{C} \left(3x^2y - x\right) dx + \left(x^3 - 2y\right) dy$$

Donde $C : x = \sin^3 t,\ y = t - \cos^2 t\ ,\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

12. Sea $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, donde γ_1 corresponde a la parte superior $(y \geq 0)$ de la Astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$: γ_2 es el segmento de recta que une los puntos $(-1, 0)$ y $(0, -1)$. γ se recorre en sentido positivo. Calcular:

$$\int_{\gamma} \frac{2xydx + \left(y^2 - x^2\right) dy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

13. Sean $u, v : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1.Dada una curva $\gamma \subseteq U$ suave a tramos se define:

$$\int_{\gamma} udv = \int_{\gamma} uv_x dx + vu_y dy$$

Sean $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones de clase C^1 y $\gamma \subseteq U \subseteq$ suave a tramos, cerrada y que no contiene ceros de f. demuestre que

$$\oint_{\gamma} \frac{dg}{f} = \oint_{\gamma} \frac{g}{f^2} df$$

14. Sea ζ la curva $r = 2sen\left(\theta\right)$, recorrida en sentido positivo. Calcular:

$$\int_{\zeta} \left(x^2 + arctg\left(y\right)\right) dy - \left(y - x^3\right) dx$$

15. Calcule la integral de linea

$$\int_{\gamma} \left(2xe^{x^2+2y^2} - y\right) dx + \left(4ye^{x^2+2y^2} + x^2\right) dy$$

donde γ es el arco de la curva $y = 2 - x^2$ que va desde el punto $(1, 1)$ hasta el punto $(-1, 1)$

16. Calcular la integral de linea

$$\int_{\gamma} \left(cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) + x^2\right) dx + \left(4x^3\left(y - 1\right)^4 + \frac{\pi}{2}\left(\pi - x\right) sen\left(\frac{\pi y}{2}\right)\right) dy$$

Donde γ es el arco de circunferencia $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ que va desde el origen de coordenadas al punto $(0, 2)$ por el primer cuadrante (orientado positivamente).

17. Sea γ la curva formada por al union de la parte superior de la semicircunferencia de radio 1, centrada en el origen y con extremos en los puntos $O\left(1, 0\right)$ y $P\left(-1, 0\right)$, y los segmentos de recta $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$ y $\overline{RS}$ con $Q\left(-1, -1\right)$, $R\left(0, 2\right)$ y $S\left(1, -1\right)$. Sea $\vec{\alpha}$ una parametrización de la curva γ recorrida positivamente.Calcule

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\alpha$$

Con $\vec{F} = \left(2\left(y^3 - 1\right) + y^2, 6xy^2 + 3x^2y^2\right)$

Soluciones

Problemas

1. $\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$
2. $\dfrac{e^{4\pi}-1}{2\left(e^{2\pi}-1\right)}$
3. $\dfrac{1}{3}\left(\left(2+4\pi^2\right)^{3/2}-2^{3/2}\right)$
4. $\dfrac{k\sqrt{3}}{2}\left(1-e^{-\pi}\right)$
5. 0
6. $2\pi a^2$
7. $-\dfrac{\pi}{4}$
8. $-\pi$
9. $-\dfrac{7}{5}$
10. (a) prueba
    (b) $g\left(x,y,z\right)=y^2\sin x+xz^3+z^2-4y$
    (c) 1
11. $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi^2}{2}+\dfrac{1}{2}$
12. 1
13. demostración
14. π
15. $\dfrac{10}{3}$
16. $\dfrac{35\pi}{32}$
17. $\dfrac{1}{3}$