Teoría de Distribuciones

Cristian Camilo Triana García

4 de febrero de 2022

Resumen

La Teoría de distribución nace muchos años después de estar siendo usada por físicos y matemáticos, se intuía que la noción de diferenciación podía ser expandida, sin embargo, no se contaba con las herramientas técnicas que permitieran formalizar los objetos con los cuales se venían trabajando. Con los avances en la teoría de la medida y el análisis funcional, se puede extender la clase de los objetos derivables, esta extensión son las distribuciones, de las cuales veremos sus propiedades básicas en este trabajo.

1. Introducción

La teoría de distribuciones se puede ver como una extensión de la diferenciación, de la misma manera que podemos ver la teoría de la medida como una extensión de la integración.

El objetivo de ésta teoría es extender la clase de funciones derivables, más específicamente nuestra definición de diferenciación. Para conseguir esto, necesitamos construir una clase de objetos(que llamaremos **distribuciones**) que cumplan los siguientes requisitos:

1. Toda función continua debe ser una distribución.

2. La nueva noción de derivada debe coincidir con la anterior.

3. Las derivadas parciales de toda distribución, deben ser también distribuciones.

4. Las propiedades usuales del cálculo deben conservarse.

5. Es necesario tener varios teoremas de convergencia para las distribuciones, que nos permitan trabajar con límites.

Esta nueva noción de distribuciones es de utilidad para formalizar varias ideas matemáticas que se usaban en el cálculo de manera intuitiva y nada formal, especialmente en la física a la hora de trabajar con ecuaciones diferenciales parciales.

Consideremos, por ejemplo, la función *escalón de Heaviside* H definida por:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Se dice que la "derivada"de esta función es la función delta de Dirac $\delta(x)$, la cual se anula en todo su dominio salvo en el origen, en donde su valor es tan grande que tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1. \tag{2}$$

Esta "función" y sus "derivadas" es usada con bastante frecuencia en la matemática. Para definir la función delta de Dirac formalmente, es necesario utilizar la noción de medida. Para una introducción más profunda a las motivaciones de la definición de distribución puede consultar [3].

Las distribuciones pueden ser definidas en $\mathbb{R}^n$, sin embargo, antes de proceder con las definiciones, vamos a ver el caso de $n = 1$ para entender un poco la lógica detrás.

Cuando tenemos una función real f, la relación que nos interesa es la que se da punto a punto, es decir, $f(x)$ para $x \in \mathbb{R}$, en distintas aplicaciones lo que interesa no es la el valor puntual de la función $f(x)$, sino que nos interesa es su comportamiento al ser integrada, ya sea sola o en producto con otra función. Esto es algo muy común en la física, cuando por ejemplo un fenómeno es modelado por dos funciones cuyo producto nos proporciona información valiosa, o cuando se desean obtener promedios. Así, obtenemos integrales del siguiente estilo:

$$\int f(x)\phi(x)dx. \tag{3}$$

Teniendo en cuenta esto, podemos pensar en asignar a f, el valor numérico obtenido al resolver la integral, en lugar de $f(x)$.

La función ϕ es llamada función *test*, más adelante veremos cómo se hace su elección.

Sea $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de todas las funciones $\phi \in \mathbf{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ (infinitamente diferenciables), cuyo soporte $\{x \in \mathbb{R} | \phi(x) \neq 0\}$ es compacto.

Ahora, si además f es diferenciable, tenemos que

$$\int f'\phi = -\int f\phi'. \tag{4}$$

Y si f es infinitamente diferenciable, entonces

$$\int f^{(k)}\phi = (-1)^k \int f\phi^{(k)}. \tag{5}$$

Estos resultados nos muestran el punto clave y la motivación para nuestras definiciones, si nos fijamos, en el lado derecho de las ecuaciones 4 y 5, podemos ver que la derivada de f no es tenida en cuenta. Así, lo que queremos es construir un funcional $F : \mathscr{D} \in \mathbb{R}$ ´tal que

$$F'(\phi) = -F(\phi'). \tag{6}$$

2. Distribuciones y sus propiedades básicas.

Cómo lo que queremos es definir un funcional continuo, primero necesitamos construir una topología, en la cual se validará la continuidad.

El trabajo que vamos a desarrollar ahora es para $\mathbb{R}^n$. En las definiciones siguientes Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Por ∂_k vamos a denotar la derivada parcial $\partial/\partial x_k$. El operador de orden mayor $\partial_1^{p_1}\partial_2^{p_2}\cdots\partial_n^{p_n}$ lo denotamos por ∂^p y $|p| = p_1 + \cdots + p_n$ es el orden de ∂^p

2.1. Construyendo una Topología.

Denotamos por $\mathscr{D}(\Omega)$ el conjunto formado por las funciones $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ cuyo soporte es compacto, y que todas sus derivadas parciales existen. Es decir, $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ si, y sólo si $\phi \in \mathbf{C}^{\infty}(\Omega)$ y su soporte $\{x | \phi(x) \neq 0\}$ es compacto en Ω. Dado un subconjunto S de Ω, $\mathscr{D}(\Omega, S)$ denota el subespacio de $\mathscr{D}(\Omega)$ compuesto por las funciones $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ cuyo soporte está contenido en S.

Ahora, vamos a definir las siguientes normas

$$\|\phi\|_m^S := \sup\{|\partial^p \phi(x)| : x \in S, \quad |p| < m\} \tag{7}$$

Las normas que acabamos de ver nos sirven para definir una topología completa, metrizable y localmente convexa en $\mathscr{D}(\Omega, S)$, lo que hace $\mathscr{D}(\Omega, S)$ un espacio de Frechet. En [1] y [4] se encuentran pruebas detalladas de las propiedades de esta topología.

2.2. Definición de Distribución.

Con lo que hemos construido hasta ahora, podemos realizar nuestra definición.

Definición 1. Un funcional lineal F en $\mathscr{D}](\Omega)$ es llamado **distribución** en Ω si para cada $S \subseteq \Omega$ relativamente compacto, la restricción $F \restriction \mathscr{D}(\Omega, S)$ es continua en el espacio de Frechet $\mathscr{D}(\Omega, S)$.

Como cada distribución es un funcional lineal, tenemos las siguientes equivalencias.

Teorema 2. Dado F un funcional lineal en $\mathscr{D}(\Omega)$, las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) F es una distribución.

(b) Para cada sucesión (ϕ_n), si $\phi_n \to 0$ entonces $F(\phi_n) \to 0$.

(c) Para cada compacto $S \subset \Omega$ existe un entero $N > 0$ y una constante $C \in \mathbb{R}$, tal que la desigualdad

$$|F(\phi)| \leq C\|\phi\|_N^S, \tag{8}$$

se cumple para cada $\phi \in \mathscr{D}(\Omega, S)$.

2.3. Medidas y Funciones como Distribuciones.

Tomemos una función compleja $f \in \Omega$ localmente integrable. Así, tenemos que f es Lebesgue-medible y $\int_S |f(x)|dx < \infty$ para todo compacto $S \subset \Omega$. Ahora, para cada $\phi \in \Omega$ definamos

$$F_f(\phi) = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx. \tag{9}$$

Si tomamos cualquier compacto $S \subset \Omega$, obtenemos la desigualdad

$$|F_f(K)| \leq \left(\int_S |f|\right) \|\phi\|_0. \tag{10}$$

Y aplicando una de las equivalencias del teorema 2, tenemos que F_f es una distribución. Acabamos de ver que cada función localmente integrable, define una distribución, por esta razón se le suele llamar función a una distribución.

3. Diferenciación de Distribuciones

En la introducción, (ecuaciones (4), (5), (6)) vimos la motivación para realizar la siguiente definición de diferenciación

Definición 3. *Dada F una distribución y $p = (p_1, \ldots, p_n)$. Para cada $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ definimos*

$$(\partial^p F)(\phi) := (-1)^{|p|} F(\partial^p \phi). \tag{11}$$

Teorema 4. Dada una distribución F, $(\partial^p F)(\phi)$ también es una distribución.

Demostración. La demostración es sencilla,

$$|(\partial^p F)(\phi)| = |F(\partial^p \phi)| \leq C\|\partial^p(\phi)\|_N \leq C\|\phi\|_{N+|p|}.$$

Y por el teorema 2, tenemos que $(\partial^p F)(\phi)$ es una distribución. □

Vamos ahora a demostrar una propiedad importante de las derivadas

Teorema 5. Dada una distribución F se tiene que

$$(\partial^p \partial^k F)(\phi) = (\partial^{p+k} F)(\phi)$$

.

Demostración. La demostración es inmediata con aplicando la definición de diferenciación

$$\begin{aligned}(\partial^p \partial^k F)(\phi) &= (-1)^{|p|}(\partial^k F)(\partial^p \phi) \\ &= (-1)^{|p|+|k|}(\partial^k \partial^p \phi) \\ &= (-1)^{|p+k|}(\partial^{p+k} \phi) \\ &= (\partial^{p+k} F)(\phi).\end{aligned}$$

□

Veamos el siguiente ejemplo de una distribución que no es una función.

Ejemplo 6. Tomemos la medida de Dirac ε_a, localizada en un punto $a \in \Omega$. En el caso de una dimensión tendríamos que

$$\partial \varepsilon_a(\phi) = -\varepsilon_a \phi = -\phi'(a)$$

para toda $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Podemos escoger distintas sucesiones (ϕ_n) que convergen a 0, para las cuales $\phi'(a) \neq 0$. De esta manera vemos que $\partial \varepsilon_a$ no es una distribución, y por lo tanto no puede ser una función. En términos de física, las distribuciones del tipo $\partial^p \varepsilon_a$ corresponden exactamente a los multipolos puestos en a.

3.1. Sucesiones de Distribuciones

Vamos a estudiar la noción de convergencia, que como veremos, dadas las definiciones anteriores, es bastante natural. Tomando el dual topológico $\mathscr{D}'(\Omega)$ de $\mathscr{D}(\Omega)$, surgen una topología natural; la topología débil $\sigma(\mathscr{D}', \mathscr{D})$. De esta manera, cuando decimos que $F_i \xrightarrow{w} F$, significa que

$$\lim_{n \to \infty} F_i(\phi) = F(\phi)$$

. El siguiente teorema nos da una propiedad, que aunque sencilla, es fuerte y usa un teorema grande del análisis funcional.

Teorema 7. Dadas F_i distribuciones, donde $i \in \mathbb{N}$, tales que

$$F(\phi) = \lim_{n \to \infty} F_i(\phi) \tag{12}$$

existe para cada $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Entonces F es una distribución y

$$\partial^p(\phi) \xrightarrow{w} \partial^p F. \tag{13}$$

Demostración. Sea S un compacto cualquiera subconjunto de Ω. Consideremos la restricción al espacio $\mathscr{D}(\Omega, S)$, al restringir el dominio la condición $F(\phi) = \lim_{n\to\infty} F_i(\phi)$ se sigue cumpliendo para cada $\phi \in \mathscr{D}(\Omega, S)$. Como $\mathscr{D}(\Omega, S)$ es un espacio de Banach, podemos aplicar el principio de acotación uniforme, y de esta manera obtenemos que $F \restriction \mathscr{D}(\Omega, S)$ es continuo para todo compacto $S \subseteq \Omega$. Y utilizando el teorema 2, tenemos que F es continuo en $\mathscr{D}(\Omega)$, es decir, F es una distribución. Así, diferenciando obtenemos que

$$\begin{aligned}(\partial^p F)(\phi) &= (-1)^{|p|} F(\partial^p \phi) \\ &= (-1)^{|p|} \lim_{n\to\infty} F_i(\partial^p \phi) \\ &= \lim_{n\to\infty} (\partial^p F_i)(\phi).\end{aligned} \tag{14}$$

□

4. Multiplicación de una Distribución por una Función.

Si $g \in \mathbf{C}^\infty(\Omega)$, entonces $\phi \to g\phi$ es un endomorfismo continuo de $\mathscr{D}(\Omega)$, y así podemos definir el producto de g con una distribución F en Ω como el resultado de aplicar el adjunto de este endomorfismo a X. En otras palabras, para $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$

$$gF(\phi) = F(g\phi). \tag{15}$$

Hay que tener cuidado con la notación, ya que si $g \in \mathscr{D}(\Omega)$ entonces $F(g)$ es un *número*, mientras que gF es una *distribución*. La norma ordinaria de la diferenciación aplica, es decir que

$$\partial_k(gF) = (\partial_k g)F + g \cdot \partial_k F.$$

Para ver dos demostraciones completas y diferentes de que efectivamente gF es una distribución se puede consultar [2] o [4].

Referencias

[1] Edwards R. E. *Functional Analysis, Theory and Applications*. Dover Publications, INC. New York, 1994.

[2] Halperin I. *Introduction to the Theory of Distributions*. University of Toronto Press, 1952.

[3] Strichartz R. *A Guide to Distribution Theory and Fourier Transforms*. CRC Press, Inc., 1994.

[4] Rudin W. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, Inc, 1991.