

# Teoría de Distribución

Cristian Camilo Triana García

4 de febrero de 2022

## Resumen

Estudiar teoría de distribución

## 1. Introducción

La teoría de distribuciones se puede ver como una extensión de la diferenciación, de la misma manera que podemos ver la teoría de la medida como una extensión de la integración.

El objetivo de ésta teoría es extender la clase de funciones derivables, más específicamente nuestra definición de diferenciación. Para conseguir esto, necesitamos construir una clase de objetos (que llamaremos **distribuciones**) que cumplan los siguientes requisitos:

1. Toda función continua debe ser una distribución.
2. La nueva noción de derivada debe coincidir con la anterior.
3. Las derivadas parciales de toda distribución, deben ser también distribuciones.
4. Las propiedades usuales del cálculo deben conservarse.
5. Es necesario tener varios teoremas de convergencia para las distribuciones, que nos permitan trabajar con límites.

Esta nueva noción de distribuciones es de utilidad para formalizar varias ideas matemáticas que se usaban en el cálculo de manera intuitiva y

nada formal, especialmente en la física a la hora de trabajar con ecuaciones diferenciales parciales.

Consideremos, por ejemplo, la función *escalón de Heaviside*  $H$  definida por:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Se dice que la "derivada" de esta función es la función delta de Dirac  $\delta(x)$ , la cual se anula en todo su dominio salvo en el origen, en donde su valor es tan grande que tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (2)$$

Esta "función" y sus "derivadas" es usada con bastante frecuencia en la matemática. Para definir la función delta de Dirac formalmente, es necesario utilizar la noción de medida.

Las distribuciones pueden ser definidas en  $\mathbb{R}^n$ , sin embargo, antes de proceder con las definiciones, vamos a ver el caso de  $n = 1$  para entender un poco la lógica detrás.

Cuando tenemos una función real  $f$ , la relación que nos interesa es la que se da punto a punto, es decir,  $f(x)$  para  $x \in \mathbb{R}$ , en distintas aplicaciones lo que interesa no es el valor puntual de la función  $f(x)$ , sino que nos interesa es su comportamiento al ser integrada, ya sea sola o en producto con otra función. Esto es algo muy común en la física, cuando por ejemplo un fenómeno es modelado por dos funciones cuyo producto nos proporciona información valiosa, o cuando se desean obtener promedios. Así, obtenemos integrales del siguiente estilo:

$$\int f(x) \Phi(x) dx. \quad (3)$$

Teniendo en cuenta esto, podemos pensar en asignar a  $f$ , el valor numérico obtenido al resolver la integral, en lugar de  $f(x)$ .

La función  $\Phi$  es llamada función *test*, más adelante veremos cómo se hace su elección.