Tarea 3 – Procesos Estocásticos

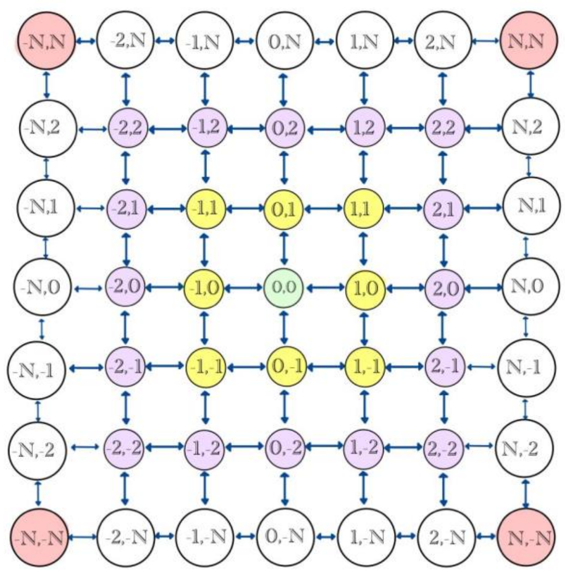
Villanueva Mendoza Cristian Arturo

Septiembre 2023

Ejercicio 2.6. *Considere la caminata aleatoria pero ahora con la posibilidad de movimiento en dos dimensiones, es decir, podemos movernos hacia arriba y abajo, así como a la derecha e izquierda. Considere que la probabilidad de moverse a cualquiera de estas direcciones es* $\frac{1}{4}$. *Clasifique los estados de la cadena.*

Solución

Como vimos en clase, para poder visualizar mejor la caminata aleatoria realizaremos la grafica de los estados, estos son de la siguiente manera:



De la gráfica anterior, podemos definir los eventos posibles de la camina aleatoria en dos dimensiones los cuales son:

$$S_1 = \{(0,0), (0, \pm 1), \dots, (0, \pm N)\}$$

$$S_2 = \{(\pm 1,0), (\pm 1, \pm 1), \dots, (\pm 1, \pm N)\}$$

$$\vdots$$

$$S_N = \{(\pm N, 0), (\pm N, \pm 1), \dots, (\pm N, \pm N)\}$$

Entonces, el conjunto de estados en dos dimensiones es:

$$S = \{S_1, S_2, \dots, S_N\}$$

Es fácil ver que estamos trabajando con pares ordenados, ya que la caminata aleatoria en este caso es en dos dimensiones, así que la probabilidad de transición es:

$$P_{(i,j),(i,j\pm1)} = \frac{1}{4}, \qquad \forall i \in S_i \subset S$$

$$P_{(i,j),(i\pm1,j)} = \frac{1}{4}, \qquad \forall j \in S$$

De acuerdo con nuestra gráfica (esquema), todos los estados de la caminata se comunican por lo que es fácil ver que solo tenemos una clase. De acuerdo con lo anterior, basta con probar con que un estado de la clase sea transitivo o recurrente para que la cadena lo sea.

Analicemos en particular la probabilidad de $P^{(m)}_{(0,0)(0,0)}$, observemos que esta misma se encuentra dada por la probabilidad de iniciar en el punto $(0,0)$ y regresar al $(0,0)$ en m pasos, ahora bien si $m = 2n + 2l + 1$, la probabilidad es 0, debido a que no podemos regresar en esta cantidad de pasos, al menos debemos dar n paso a cualquier dirección (arriba, abajo, derecha e izquierda), y n pasos a la dirección contraria a la anterior (si fue derecha, entonces n paso a izquierda; si fue arriba, entonces n pasos abajo, etc.), además de dar l pasos en cualquier dirección y l en dirección contraria.

Con el objetivo de ejemplificar, consideremos que estamos en $(0,0)$, ir al $(1,2)$ y regresar al $(0,0)$. ¿Cuántos pasos requiero?

Sea $n = 1$ (derecha) y $l = 2(abajo)$, requiero $n = 1$ $(izquierda)$ y $l = 2(arriba)$, para regresar a mi posición inicial.

Del razonamiento anterior, podemos decir que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P^{(2n+2l+1)}_{(0,0)(0,0)} = 0$$

Ahora nos resta estudiar el caso para cuando $m = 2n + 2l$, observemos que este es un caso posible debido a la explicación anterior, lo único que nos resta identificar es el orden de la posible trayectoria. Debido a que tenemos mas de dos posibles eventos, haremos uso de la distribución multinomial, así tenemos:

$$\forall n \in \mathbb{N}, P^{(2n+2l)}_{(0,0)(0,0)} = \frac{(2n+2l)!}{x_1!\,x_2!\,x_3!\,x_4!}\left(P_d^{x_1}\right)\left(P_i^{x_2}\right)\left(P_a^{x_3}\right)\left(P_b^{x_4}\right)$$

Consideremos que $P_d = P_i = P_a = P_b = \frac{1}{4}$.

En donde: $d = derecha,\ i = izquierda,\ a = arriba,\ b = abajo.$

Cada uno de los eventos tiene el mismo número de veces de ocurrencia, sin embargo, si se da n paso a cualquier dirección más l pasos en una dirección distinta (considerando que estas direcciones no son contraria; si n es arriba, l no es abajo), para regresar a su lugar original, necesita dar n pasos en dirección contraria a la primer trayectoria más l pasos en dirección contraria a la segunda trayectoria.

$$P^{(2n+2l)}_{(0,0)(0,0)} = \frac{(2n+2l)!}{n!\,n!\,l!\,l!}\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{1}{4}\right)^l\left(\frac{1}{4}\right)^l$$

Así, tenemos que:

$$P_{(0,0)(0,0)}^{(2n+2l)} = \frac{(2n+2l)!}{(n!)^2(l!)^2}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}\left(\frac{1}{4}\right)^{2l}$$

$$P_{(0,0)(0,0)}^{(2n+2l)} = \frac{(2n+2l)!}{(n!)^2(l!)^2}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n+2l}$$

Aplicando la equivalencia de Stirling, la cual es la siguiente:

$$n! \sim n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\sqrt{2\pi}$$

Por lo visto en clase, tenemos que:

$$\frac{(2n+2l)!}{(n!)^2(l!)^2} = \frac{(2n+2l)^{2n+2l+\frac{1}{2}}e^{-(2n+2l)}\sqrt{2\pi}}{n^{2n+1}e^{-2n}\left(\sqrt{2\pi}\right)^2 l^{2l+1}e^{-2l}\left(\sqrt{2\pi}\right)^2}$$

$$= \frac{(2n+2l)^{2n+2l+\frac{1}{2}}e^{-2n}e^{-2l}\sqrt{2\pi}}{n^{2n+1}e^{-2n}\left(\sqrt{2\pi}\right)^2 l^{2l+1}e^{-2l}\left(\sqrt{2\pi}\right)^2}$$

$$= \frac{(2n+2l)^{2n+2l+\frac{1}{2}}}{n^{2n+1} * l^{2l+1}\left(\sqrt{2\pi}\right)^3}$$

Por lo que, al sustituir dicha expresión, se obtiene:

$$P_{(0,0)(0,0)}^{(2n+2l)} = \frac{(2n+2l)^{2n+2l+\frac{1}{2}}}{n^{2n+1} * l^{2l+1}\left(\sqrt{2\pi}\right)^3}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n+2l}.$$

Caso I: $l = n$

$$P_{(0,0)(0,0)}^{(4n)} = \frac{(4n)^{4n+\frac{1}{2}}}{n^{4n+2}\left(\sqrt{2\pi}\right)^3}\left(\frac{1}{4}\right)^{4n}$$

$$P_{(0,0)(0,0)}^{(4n)} = \frac{4^{4n+\frac{1}{2}}\, n^{4n+\frac{1}{2}}}{n^{4n+2}\left(\sqrt{2\pi}\right)^3}\left(\frac{1}{4}\right)^{4n}$$

$$P_{(0,0)(0,0)}^{(4n)} = \frac{4^{4n} * 2}{n^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{2\pi}\right)^3}\left(\frac{1}{4}\right)^{4n}$$

$$P_{(0,0)(0,0)}^{(4n)} = \frac{4^{4n} * 2}{\left(\sqrt{2n\pi}\right)^3}\left(\frac{1}{4}\right)^{4n}$$

Aplicando el criterio de D'Alambert, tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{4^{4n+4}}{\left(\sqrt{2(n+1)\pi}\right)^3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{4n+4}}{\dfrac{4^{4n}}{\left(\sqrt{2n\pi}\right)^3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{4n}}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^4 \lim_{n\to\infty} \frac{4^4\left(\sqrt{2n\pi}\right)^3}{\left(\sqrt{2(n+1)\pi}\right)^3}$$

$$\left(\frac{4}{4}\right)^4 \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{2n\pi}\right)^3}{\left(\sqrt{2(n+1)\pi}\right)^3}$$

$$1 \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)^3$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{\frac{\dfrac{n}{n}}{\dfrac{n+1}{n}}}\right)^3$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{1+\dfrac{1}{n}}}\right)^3$$

$$\left(\sqrt{1}\right)^3 = 1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{4^{4n+4}}{\left(\sqrt{2(n+1)\pi}\right)^3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{4n+4}}{\dfrac{4^{4n}}{\left(\sqrt{2n\pi}\right)^3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{4n}} = 1$$

Con lo anterior concluimos que si $l = n$ la cadena de Márkov en ***recurrente***, en particular, la cadena de Márkov en ***simétrica.***

Caso II: $\boldsymbol{l = 0}$

$$P_{(0,0)(0,0)}^{(2n+2*0)} = \frac{(2n+2*0)!}{(n!)^2(0!)^2}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n+2*0}$$

$$P_{(0,0)(0,0)}^{(2n+2*0)} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$$

Aplicando la equivalencia de Stirling, la cual es la siguiente:

$$n! \sim n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}\sqrt{2\pi}$$

Tenemos:

$$P_{(0,0)(0,0)}^{(2n)} = \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}\sqrt{2\pi}}{n^{2n+1}e^{-2n}\left(\sqrt{2\pi}\right)^2}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$$

$$P_{(0,0)(0,0)}^{(2n)} = \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{n^{2n+1}\left(\sqrt{2\pi}\right)^2}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$$

$$P_{(0,0)(0,0)}^{(2n)} = \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{n^{2n+1}\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$$

$$P_{(0,0)(0,0)}^{(2n)} = \frac{2^{2n+\frac{1}{2}} * n^{2n+\frac{1}{2}}}{n^{2n+1}\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$$

$$P_{(0,0)(0,0)}^{(2n)} = \frac{2^{2n} * \sqrt{2}}{n^{\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$$

$$P_{(0,0)(0,0)}^{(2n)} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$$

Aplicando el criterio de D'Alambert, tenemos:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{2n+2}}{\sqrt{(n+1)\pi}}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n+2}}{\frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2\lim_{n\to\infty}\frac{2^2\sqrt{n\pi}}{\sqrt{(n+1)\pi}}$$

$$\left(\frac{2}{4}\right)^2\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+1)}}$$

Sabemos que: $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+1)}} = 1$, entonces:

$$\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+1)}} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{2n+2}}{\sqrt{(n+1)\pi}}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n+2}}{\frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}} = \frac{1}{4}.$$

Con lo anterior concluimos que si $l = n$ la cadena de Márkov en ***transitoria.***

Caso III $\boldsymbol{l \neq n}$:

$$P_{(0,0)(0,0)}^{(2n+2l)} = \frac{(2n+2l)^{2n+2l+\frac{1}{2}}}{n^{2n+1} * l^{2l+1}\left(\sqrt{2\pi}\right)^{3}}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n+2l}$$

Con ayuda de WolframAlpha obtuvimos que esta serie converge a un número distinto de 1 cuando $n, l \to \infty$, por lo que podemos concluir que es una cadena de **Markov *transitoria.***