

Trabalho de Processos Estocásticos

Filtro de Kalman

Eng. Cristyan Lisbôa
Prof. Dr. Alexandre Sanfelici Bazanella

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Porto Alegre - RS - Brasil

12 de Dezembro de 2022

1. Introdução
2. Projeto do filtro
3. Resultados
4. Conclusão

1. Introdução

2. Projeto do filtro

3. Resultados

4. Conclusão

Surgimento

- R. E. Kalman (1960) - *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*
- Indústria aeroespacial (Projeto Apollo) - Estimação de trajetórias
- Solução recursiva para o problema de filtragem

Aplicações

- Sistema de posicionamento global (GPS)
- Radares, fusão de sensores
- Robótica, sistemas de visão
- Estimação de parâmetros de máquinas elétricas

Filtro de Kalman

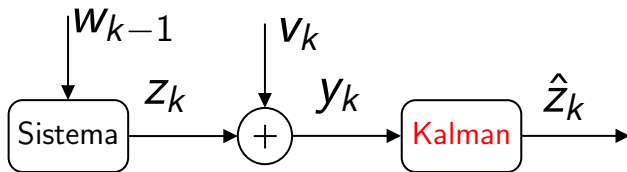
- Estimador linear **recursivo** que $\min J = E[e_k e_k^T]$
- Incorpora incertezas no do modelo **SLVT**
- Opera em estrutura **propagação-assimilação**
- Resolve a **dimensionalidade** e **estacionariedade**

Sistema

$$\begin{cases} x_k = Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + w_{k-1} \\ y_k = z_k + v_k \\ z_k = Cx_k \end{cases}$$

Hipóteses

- $E[w_k w_l] = 0 \quad \forall k \neq l$
- $E[w_k w_k] = Q_k \quad \forall k = l$
- $E[v_k v_l] = 0 \quad \forall k \neq l$
- $E[v_k v_k] = R_k \quad \forall k = l$
- $E[w_k v_l] = 0 \quad \forall k, l \in \mathbb{Z}$



Definir \hat{x}_0, P_0, Q_0, R_0

Para $k = 1, 2, 3, \dots$ **faça**

Etapa de propagação

$$\hat{x}_{k|k-1} = \mathbf{A}x_{k-1} + \mathbf{B}u_{k-1}$$

$$P_{k|k-1} = \mathbf{A}P_{k-1}\mathbf{A}^\top + Q_{k-1}$$

Etapa de assimilação

$$K_k = P_{k|k-1}\mathbf{C}^\top(\mathbf{C}P_{k|k-1}\mathbf{C}^\top + R_k)^{-1}$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + K_k(y_k - \mathbf{C}\hat{x}_{k|k-1})$$

$$P_k = (\mathbf{I} - K_k\mathbf{C})P_{k|k-1}$$

$$\hat{z}_k = \mathbf{C}\hat{x}_k$$

Fim

Descrição

- Algoritmo de duas etapas
- Estimador linear ótimo de estados
- Gera \hat{x}_k de minimiza o MSE
- Requer um modelo do sistema

$\downarrow Q_k \uparrow R_k$

$\uparrow Q_k \downarrow R_k$

+Predição

+Correção

1. Introdução

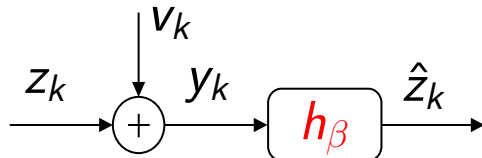
2. Projeto do filtro

3. Resultados

4. Conclusão

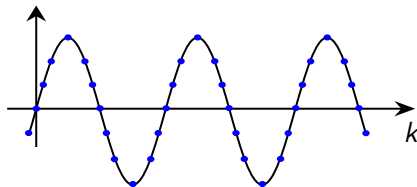
Projeto via funções de autocorrelação

- Estimar a amplitude r
- Calcular a autocorrelação $R_z(k)$ e $R_y(k)$
- Definir a ordem do filtro a
- Determinar h_β - Sistema de equações



Projeto do filtro de Kalman

- Inserir o modelo interno (A , B , C)
- Definir $u_k = 0 \quad \forall k$
- Sintonia das matrizes Q_k , R_k



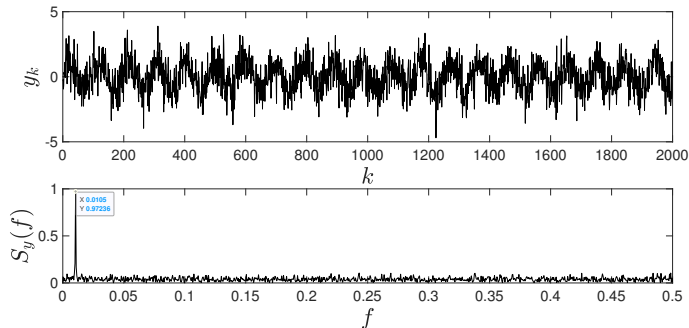
1. Introdução

2. Projeto do filtro

3. Resultados

4. Conclusão

Dados do experimento e TF

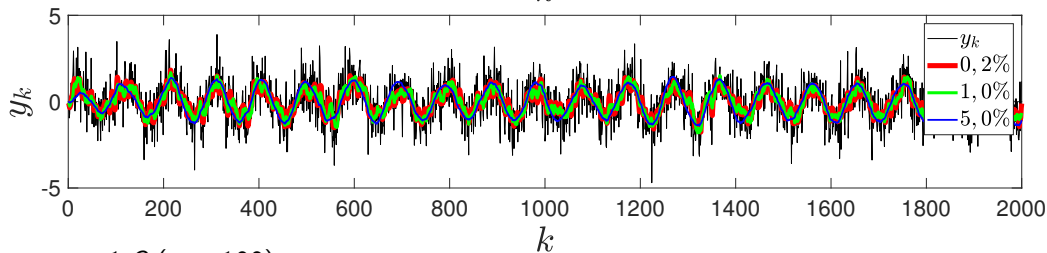
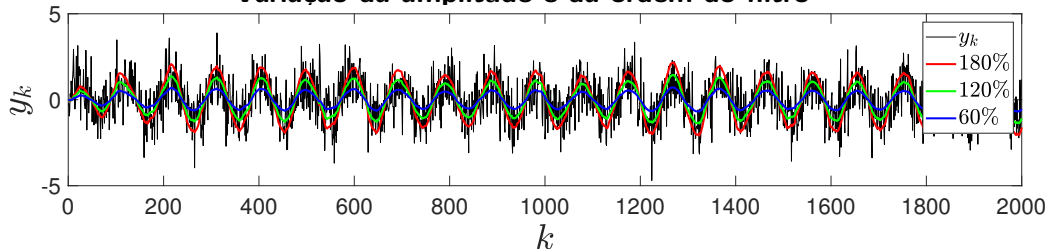


Dados estatísticos

| Medidas | Valor |
|-----------|--------|
| Média | 0.001 |
| Mediana | -0.009 |
| Variância | 1.5 |
| Máximo | 3.9 |
| Mínimo | -4.7 |
| Range | 8.6 |

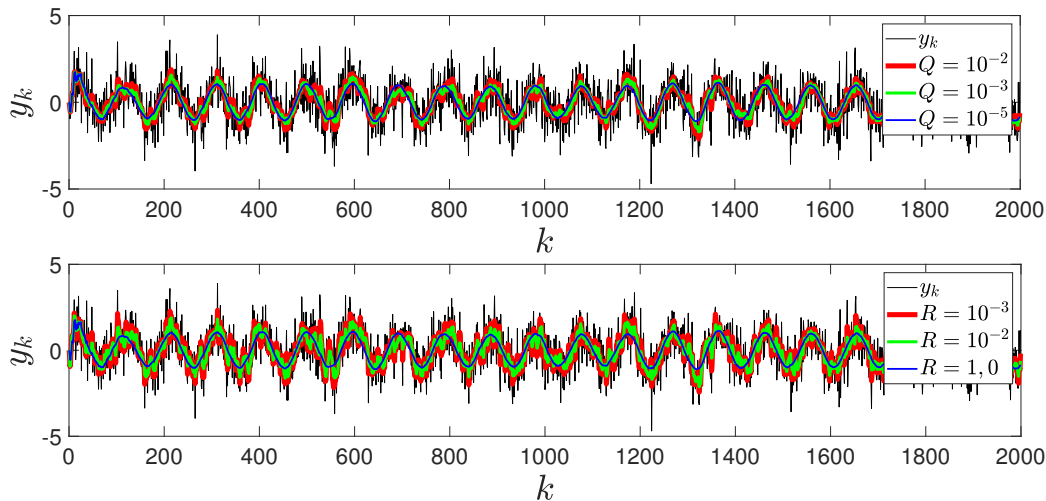
- $r = \max\{S_y(f)\} = 0.97$
- $T = 95.23$

Variação da amplitude e da ordem do filtro

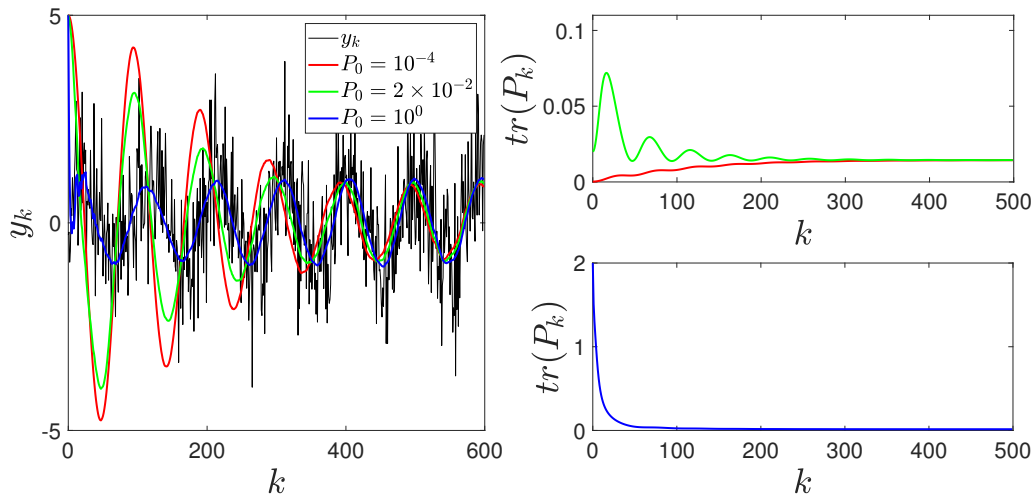


- $r = 1 @ (a = 100)$

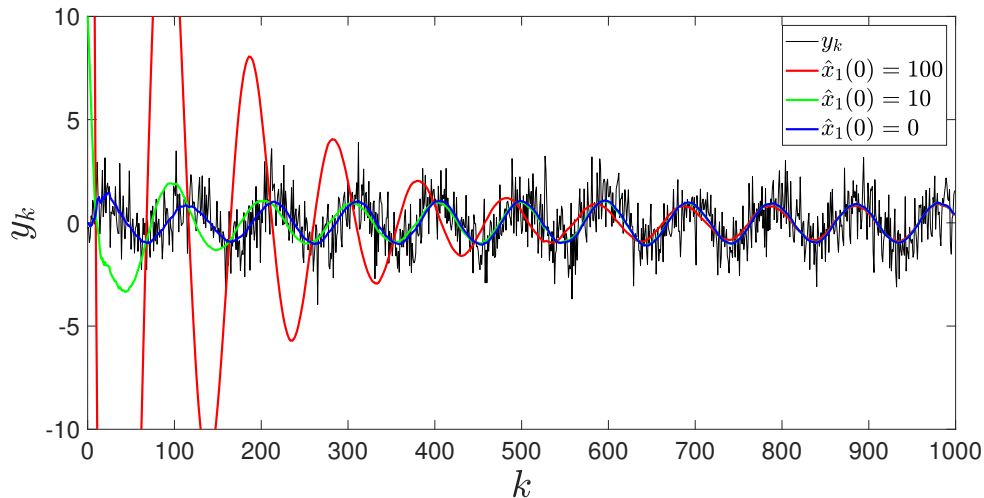
Variação das matrizes de covariância



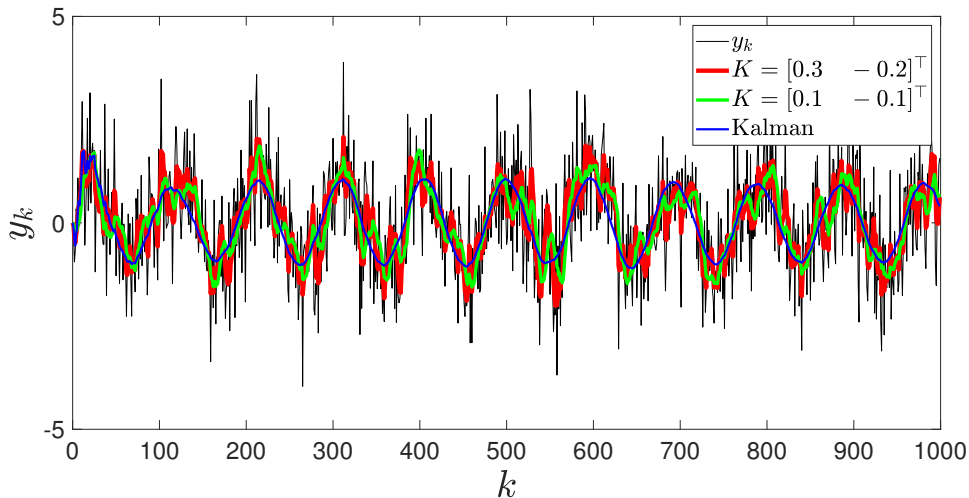
Variação da matriz de covariância do erro



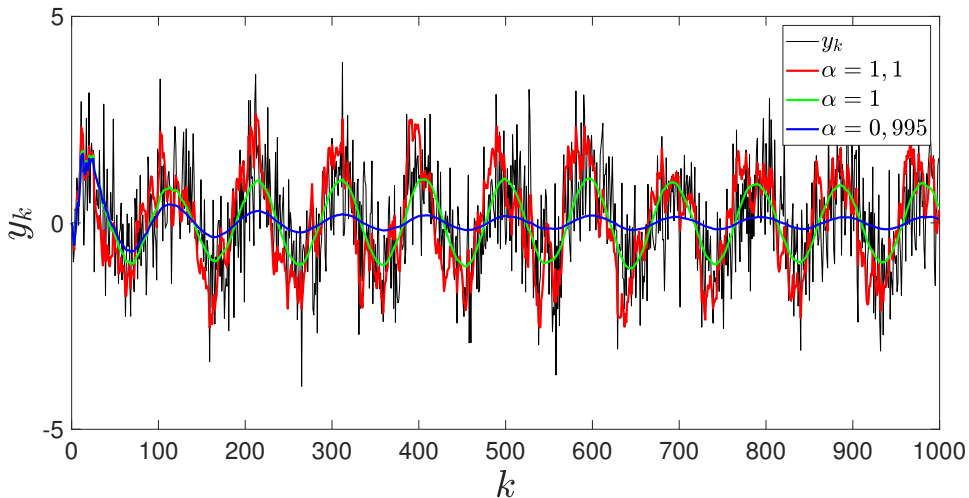
Variação da condição inicial



Ganho arbitrário



Modelo interno



1. Introdução
2. Projeto do filtro
3. Resultados
4. Conclusão

- Dois estimadores lineares: **Wiener-Hopf** e **Filtro de Kalman**
- Deterioração dos resultados para um **ganho arbitrário**
- Influência dos **parâmetros**
- Versões alternativas: Filtro de Kalman **Extendido** (Extended) e **Unscented**
- Filtragem, predição e **estimação de parâmetros**



Sugestões

- **Introdução à Identificação de Sistemas.** Aguirre, L. A (2015). Capítulo 9.
- **Kalman Filtering - Theory and Practice Using MATLAB.** Grewal, M. S. (2015).
- **A Kalman filtering tutorial for undergraduate students.** Rhudy, M. B. (2017).

¹Email: cristyan.lisboa@ufrgs.br